UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

SISTEMI LINEARI
(continuazione)

Prof. Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

L'importanza del metodo di Cramer è dovuta alla semplicità con la quale si scrive la soluzione del sistema di equazioni lineari e al fatto che esso, almeno in linea di principio, si estende in maniera diretta ai sistemi di ordine qualsiasi.

Ad esempio, per un sistema lineare con tre equazioni e tre incognite (ognuna delle equazioni rappresenta un piano)

$$\begin{cases} ax + by + cz & = & d \\ ex + fy + gz & = & h \\ ix + ly + mz & = & n \end{cases},$$

la matrice completa del sistema è

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \end{pmatrix},$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

e posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & l & m \end{vmatrix}$$

e

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ n & l & m \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & n & m \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & l & n \end{vmatrix},$$

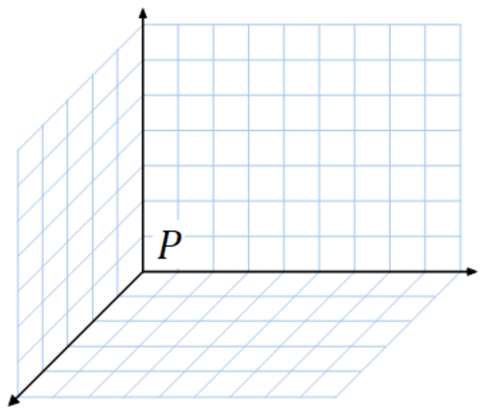
la soluzione del sistema è la terna di numeri reali:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{e} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

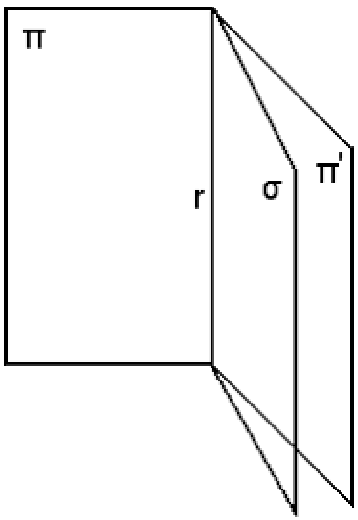
Ovviamente bisogna fare attenzione al denominatore che perde di significato quando $\Delta = 0$.

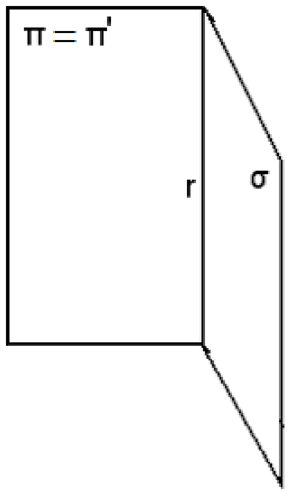
SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

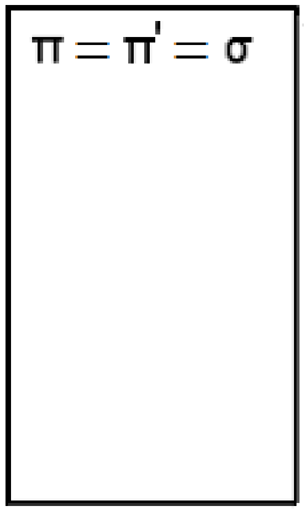
La posizione reciproca di tre piani nello spazio.



$$\Delta \neq 0$$



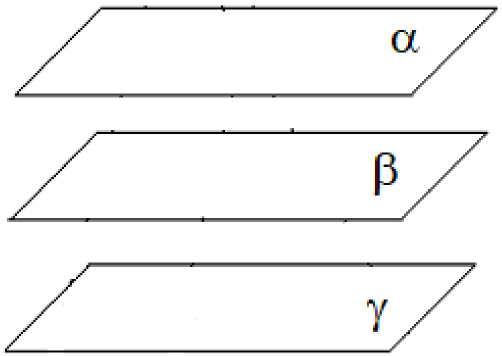




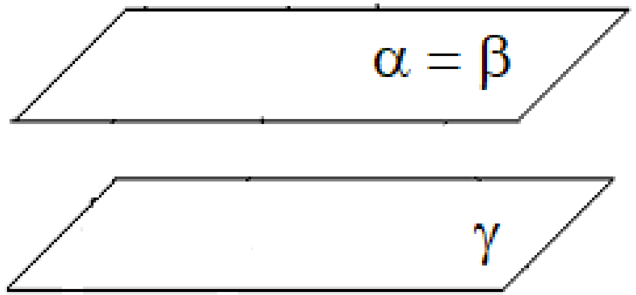
$$\Delta = 0$$

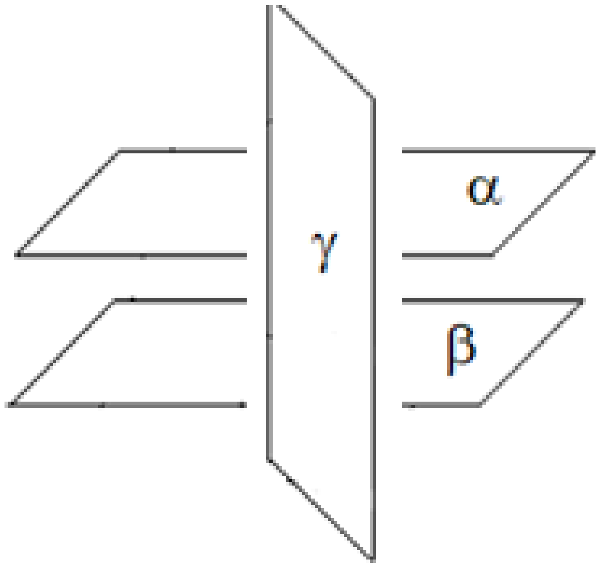
SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

La posizione reciproca di tre piani nello spazio.



$$\Delta = 0$$





SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Facendo intervenire gli altri determinanti di ordine 3, si può applicare lo schema seguente.

1) Sia $\Delta \neq 0$: il sistema è <u>determinato</u>.

2) Sia $\Delta = 0$ e almeno uno tra Δ_x, Δ_y e Δ_z è diverso da 0: il sistema è impossibile.

3) Sia $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$: il sistema o è indeterminato oppure è impossibile. Per stabilirlo si trascura opportunamente un'equazione, si considera costante una delle tre incognite e si discute il sistema lineare 2 x 2 così ottenuto.

Negli esempi delle successive diapositive è mostrato come si procede caso per caso.

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Nell'ottavo capitolo dell'Arte del calcolo in nove capitoli si incontra un problema che noi tradurremmo in un sistema di primo grado in tre equazioni e tre incognite e che i matematici cinesi risolvevano, operando sui soli coefficienti e termini noti con una tecnica che corrisponde al noto metodo di sostituzione (si rimanda alla sezione apposita dove al posto della parola sostituzione si usa la parola riduzione per evitare confusione di termini) di Gauss.

«Vi sono tre tipi di grano; tre mucchi del primo tipo, due del secondo e uno del terzo fanno 39 misure; due del primo, tre del secondo e uno del terzo fanno 34 misure e uno del primo, due del secondo e tre del terzo fanno 26 misure. Quante misure di grano sono contenute in un mucchio di ciascun tipo?»

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Vi sono tre tipi di grano; tre mucchi del primo tipo, due del secondo e uno del terzo fanno 39 misure; due del primo, tre del secondo e uno del terzo fanno 34 misure e uno del primo, due del secondo e tre del terzo fanno 26 misure. Quante misure di grano sono contenute in un mucchio di ciascun tipo?

Indicato con x le *misure* del primo tipo di grano, con y le *misure* del secondo tipo di grano e con z le *misure* del terzo tipo di grado, noi traduciamo il problema con il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z & = & 39 \\ 2x + 3y + z & = & 34 \\ x + 2y + 3z & = & 26. \end{cases}$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Per la risoluzione del sistema applichiamo il metodo di Cramer. La matrice completa del sistema è

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{pmatrix},$$

per cui, in primo luogo, si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right.$$

$$= (3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2) +$$

$$-(1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$= (27 + 2 + 4) - (3 + 6 + 12) = 33 - 21 = 12 \neq 0.$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Per il punto 1) dello schema della diapositiva 6 il sistema è determinato.

Per ottenere l'unica soluzione del sistema (una terna ordinata di numeri reali) bisogna calcolare Δ_x, Δ_y e Δ_z.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 39 & 2 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 26 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 2 & 1 \\ 34 & 3 & 1 \\ 26 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 39 & 2 \\ 34 & 3 \\ 26 & 2 \end{matrix}$$

$$= (39 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 26 + 1 \cdot 34 \cdot 2) - (26 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 39 + 3 \cdot 34 \cdot 2)$$

$$= (351 + 52 + 68) - (78 + 78 + 204)$$

$$= 471 - 360 = 111,$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 39 & 1 \\ 2 & 34 & 1 \\ 1 & 26 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 39 & 1 \\ 2 & 34 & 1 \\ 1 & 26 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 39 \\ 2 & 34 \\ 1 & 26 \end{matrix}$$

$$= (3 \cdot 34 \cdot 3 + 39 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 26) - (1 \cdot 34 \cdot 1 + 26 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 39)$$

$$= (306 + 39 + 52) - (34 + 78 + 234)$$

$$= 397 - 346 = 51,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 39 \\ 2 & 3 & 34 \\ 1 & 2 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 39 \\ 2 & 3 & 34 \\ 1 & 2 & 26 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= (3 \cdot 3 \cdot 26 + 2 \cdot 34 \cdot 1 + 39 \cdot 2 \cdot 2) - (1 \cdot 3 \cdot 39 + 2 \cdot 34 \cdot 3 + 26 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$= (234 + 68 + 156) - (117 + 204 + 104)$$

$$= 458 - 425 = 33.$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

In definitiva

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{111}{12} = \frac{3 \cdot 37}{3 \cdot 4} = \frac{37}{4},$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{51}{12} = \frac{3 \cdot 17}{3 \cdot 4} = \frac{17}{4},$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{33}{12} = \frac{3 \cdot 11}{3 \cdot 4} = \frac{11}{4},$$

e quindi il numero delle misure di grano nei mucchi del primo, del secondo e del terzo tipo è $37/4$, $17/4$ e $11/4$ rispettivamente.

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x - y + z & = & 0 \\ 3x - y + 3z & = & 2 \end{cases},$$

la cui matrice completa è la seguente:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che la prima colonna coincide con la terza, per la Proposizione 1 della precedente presentazione si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Il sistema è indeterminato oppure impossibile.

D'altra parte risultando

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$$

$$= (-3 + 2 + 0) - (-2 - 1 + 0) = -1 + 3 = 2 \neq 0,$$

per il punto 2) dello schema della diapositiva 6 si conclude che il sistema è impossibile.

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x - y + z & = & 0 \\ 3x - y + 3z & = & 1 \end{cases},$$

la cui matrice completa è la seguente:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & {\color{red}1} \\ 1 & -1 & 1 & {\color{red}0} \\ 3 & -1 & 3 & {\color{red}1} \end{pmatrix}.$$

Dal momento che la prima colonna coincide con la terza, per la Proposizione 1 sui determinanti si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

Pertanto, per il punto 3) dello schema della diapositiva 6 il sistema o è indeterminato oppure è impossibile. D'altra parte, è abbastanza agevole rendersi conto che la terza equazione si ottiene sommando la prima con il doppio della seconda: $(3x - y + 3z = 1) = (x + y + z = 1) + 2(x - y + z = 0)$.

Allora si può trascurare dal sistema

$$\begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x - y + z & = & 0 \\ 3x - y + 3z & = & 1 \end{cases}$$

la terza equazione. Indicata con c l'incognita z, si ottiene il sistema lineare 2 x 2

$$\begin{cases} x + y & = & 1 - c \\ x - y & = & -c \end{cases},$$

SISTEMI LINEARI: IL CASO DI TRE EQUAZIONI E TRE INCOGNITE

la cui matrice completa è

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-c \\ 1 & -1 & -c \end{pmatrix}.$$

Per questo sistema si ha

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

e

$$\Delta'_x = \begin{vmatrix} 1-c & 1 \\ -c & -1 \end{vmatrix} = c-1-(-c) = c-1+c = 2c-1,$$

$$\Delta'_y = \begin{vmatrix} 1 & 1-c \\ 1 & -\mathrm{c} \end{vmatrix} = -c-(1-c) = -c-1+c = -1,$$

e quindi

$$x = \frac{\Delta'_x}{\Delta'} = \frac{2c-1}{-2} = \frac{1}{2} - c, \qquad y = \frac{\Delta'_y}{\Delta'} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Nei libri di botanica si legge la seguente frase: la clorofilla presente nelle foglie permette alla luce solare di convertire molecole di anidride carbonica e molecole d'acqua in molecole di glucosio e molecole di ossigeno.

Questa è una descrizione qualitativa di un fenomeno naturale ed è chiaro che non fornisce una informazione completa. Infatti nasce spontanea la domanda: quante molecole? La formula chimica della molecola di anidride carbonica è CO_2, quella della molecola di acqua è H_2O, quella della molecola di glucosio è $C_6H_{12}O_6$ e infine quella della molecola di ossigeno è O_2. Vogliamo determinare il numero delle molecole che entrano a far parte della reazione. Indichiamo con a, b, c, d rispettivamente il numero di molecole di CO_2, H_2O, $C_6H_{12}O_6$, O_2.

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

La reazione chimica determinata dalla clorofilla si può dunque esprimere mediante la formula

$$aCO_2 + bH_2O = cC_6H_{12}O_6 + dO_2,$$

dove le incognite sono a, b, c, d. *Il vincolo è che il numero di atomi di ogni elemento sia lo stesso prima e dopo la reazione.*

Anna Maria Bigatti, Lorenzo Robbiano

Matematica di Base

CASA EDITRICE AMBROSIANA

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

$$aCO_2 + bH_2O = cC_6H_{12}O_6 + dO_2$$

- Il numero di atomi di carbonio (C) vale a al primo membro e $6c$ al secondo membro e quindi deve valere l'uguaglianza
$$a = 6c.$$
- Il numero di atomi di ossigeno (O) è $2a + b$ al primo membro e $6c + 2d$ a secondo membro e quindi deve valere l'uguaglianza
$$2a + b = 6c + 2d.$$
- Il numero di atomi di idrogeno (H) è $2b$ al primo membro e $12c$ a secondo membro e quindi deve valere l'uguaglianza
$$2b = 12c \Leftrightarrow b = 6c.$$

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

I numeri a, b, c e d devono perciò verificare le seguenti 3 equazioni lineari:

$$\begin{cases} a & & -6c & & = & 0 \\ 2a & +b & -6c & -2d & = & 0 \\ & b & -6c & & = & 0 \end{cases}.$$

Si osservi in primo luogo che il numero delle incognite è 4 ed è maggiore del numero delle equazioni per cui il sistema è sotto dimensionato: ci possono essere infinite quaterne di numeri reali che lo verificano. D'altra parte la natura intrinseca delle incognite (il numero di atomi) porta a considerare come soluzioni esclusivamente le quaterne di numeri interi per cui è lecito porre in prima battuta una delle incognite uguali a 1. Ponendo, ad esempio, $c = 1$, il sistema si riscrive al seguente modo:

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

$$\begin{cases} a & & & = & 6 \\ 2a & +b & -2d & = & 6. \\ & b & & = & 6 \end{cases}$$

La matrice completa di questo nuovo sistema è

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

per cui, in primo luogo, si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$= (0 + 0 + 0) - (0 - 2 + 0) = 2 \neq 0.$$

Il sistema con 3 equazioni e 3 incognite è determinato e dunque, ammette una sola soluzione.

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Successivamente

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$= 6[(0+0+0)-(0-2+0)] = 12,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= 6[(0+0+0)-(0-2+0)] = 12,$$

$$\Delta_d = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$= 6[(1+0+2)-(0+1+0)] = 12.$$

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

In definitiva

$$a = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{2} = 6, \qquad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{12}{2} = 6,$$

$$d = \frac{\Delta_d}{\Delta} = \frac{12}{2} = 6,$$

e quindi la quaterna soluzione, nel caso considerato di $c = 1$, è $(6,6,1,6)$.

In definitiva, nella reazione chimica per ogni molecola di glucosio sono coinvolte 6 molecole di anidride carbonica, 6 molecole di acqua e 6 molecole di ossigeno.

In simboli, trattando $c \in \mathbb{N}$ come incognita libera, si trovano le infinite soluzioni ricercate nella forma:

$$\{\forall c \in \mathbb{R}, (6c, 6c, c, 6c)\}.$$

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Si osservi che il sistema

$$\begin{cases} a & & & = & 6 \\ 2a & +b & -2d & = & 6 \\ & b & & = & 6 \end{cases}$$

può essere risolto più direttamente considerando che la prima equazione e la terza equazione forniscono, rispettivamente, il valore di a e di b. Inoltre, sostituendo tali valori nella seconda equazione si ottiene una equazione di primo grado nell'incognita d che fornisce il valore ricercato:

$$12 + 6 - 2d = 6 \Leftrightarrow 12 = 2d \Leftrightarrow d = 6.$$

Il metodo di sostituzione è quindi particolarmente conveniente quando la matrice del sistema presenta parecchi elementi nulli.

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

I matematici greci sapevano, ancora prima di quanto si trova in modo esplicito nell'Aritmetica di Diofanto (del III sec d.C. circa), risolvere equazioni e sistemi di primo grado sia usando metodi geometrici sia aritmetici. La più antica notizia relativa all'algebra greca è il problema noto come Fiore di Timarida, risalente al V-IV sec. a.C. e di cui Giamblico riferisce nella seconda metà del III sec. d.C.

Il problema di Timarida chiede di determinare un valore incognito conoscendo le sue somme con altri valori non noti e nota anche la somma del valore incognito con tutti gli altri valori.

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Ad esempio: un padre lascia in eredità ai suoi quattro figli una somma di 1000 *monete d'oro. Il primo e il secondo figlio ricevono* 500 *monete, il primo e il terzo* 600 *monete e il primo e il quarto* 700 *monete. Quanto riceve ognuno?*

Indicato con p, s, t, q l'eredità spettante, rispettivamente al primo, secondo, terzo e quarto figlio, il problema è tradotto dal sistema:

$$\begin{cases} p+s+t+q & = & 1000 \\ p+s+0+0 & = & 500 \\ p+0+t+0 & = & 600 \\ p+0+0+q & = & 700 \end{cases}.$$

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Per un sistema di questo tipo avente la matrice con numerosi zero conviene procedere *per sostituzione*. Difatti dalla seconda equazione si ricava $s = 500 - p$; dalla terza $t = 600 - p$ e dalla quarta $q = 700 - p$.

Dopo ciò, <u>sostituendo</u> tali determinazioni nella prima equazione si ottiene un'equazione di primo grado:

$$p + s + t + q = 1000$$

$$\Leftrightarrow p + (500 - p) + (600 - p) + (700 - p) = 1000$$

$$\Leftrightarrow p + 500 - p + 600 - p + 700 - p = 1000$$

$$\Leftrightarrow -2p + 1800 = 1000 \Leftrightarrow -2p = -800$$

$$\Leftrightarrow p = 400.$$

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Quindi, procedendo a ritroso, risulta

$$s = 500 - p \Leftrightarrow s = 500 - 400 \Leftrightarrow s = 100,$$

$$t = 600 - p \Leftrightarrow t = 600 - 400 \Leftrightarrow t = 200,$$

e

$$q = 700 - p \Leftrightarrow q = 700 - 400 \Leftrightarrow q = 300.$$

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Un'altra applicazione del metodo di Timarida si trova anche in un problema dell'Antologia greca, opera attribuita a Metrodoro di Bisanzio (vissuto tra il IV e il VI sec. d.C.):

«Fabbricami una corona di 60 mine, mescolando opportunamente oro, rame, stagno e ferro. L'oro e il rame formino i 2/3 della corona, l'oro e lo stagno i 3/4 , l'oro e il ferro i 3/5. Orbene! Dimmi esattamente la quantità di oro, di rame, di stagno e di ferro che devi prendere.»

La mina era un'unità di misura di massa in uso presso gli antichi popoli del Mediterraneo orientale e corrispondeva per Babilonesi e Greci a 1/60 di talento. Il talento a sua volta era un'unità di misura di massa che per i Greci era variabile secondo luogo e tempi. Ad esempio il talento attico corrispondeva a circa 26,2 kg.

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Fabbricami una corona di 60 mine, mescolando opportunamente oro, rame, stagno e ferro. L'oro e il rame formino i 2/3 della corona, l'oro e lo stagno i 3/4 , l'oro e il ferro i 3/5. Orbene! Dimmi esattamente la quantità di oro, di rame, di stagno e di ferro che devi prendere.

Indicando con o, r, s e f, rispettivamente, la quantità di oro, rame, stagno e ferro della corona e, tenendo conto che $60 \cdot \frac{2}{3} = 40$, $60 \cdot \frac{3}{4} = 45$ e $60 \cdot \frac{3}{5} = 36$, ne risulta il sistema:

$$\begin{cases} o + r + s + f & = & 60 \\ o + r + 0 + 0 & = & 40 \\ o + 0 + s + 0 & = & 45 \\ o + 0 + 0 + f & = & 36 \end{cases}.$$

Dalla seconda, terza e quarta equazione, rispettivamente, si ha: $r = 40 - o$, $s = 45 - o$ e $f = 36 - o$.

SISTEMI LINEARI: ALTRI TIPI

Dopo ciò, <u>sostituendo</u> tali determinazioni nella prima equazione si ottiene l'equazione di primo grado:

$$o + r + s + f = 60$$

$$\Leftrightarrow o + (40 - o) + (45 - o) + (36 - o) = 60$$

$$\Leftrightarrow o + 40 - o + 45 - o + 36 - o = 60$$

$$\Leftrightarrow -2o + 121 = 60 \Leftrightarrow -2o = -61$$

$$\Leftrightarrow o = 30{,}5.$$

Inoltre, procedendo a ritroso risulta

$$r = 40 - 30{,}5 \Leftrightarrow r = 9{,}5, \qquad s = 45 - 30{,}5 \Leftrightarrow s = 14{,}5$$

$$\text{e} \qquad f = 36 - 30{,}5 \Leftrightarrow f = 5{,}5.$$