UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

METODO DELLE COORDINATE
(continuazione)

Prof. Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

La circonferenza è *il luogo dei punti del piano a distanza costante (raggio) da un punto fisso detto centro.*

Sia $r > 0$ il raggio e O il centro di una circonferenza. Se $P = P(x, y)$ è uno dei punti del luogo allora le sue coordinate, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo OQP, devono soddisfare la condizione:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Infatti, risulta

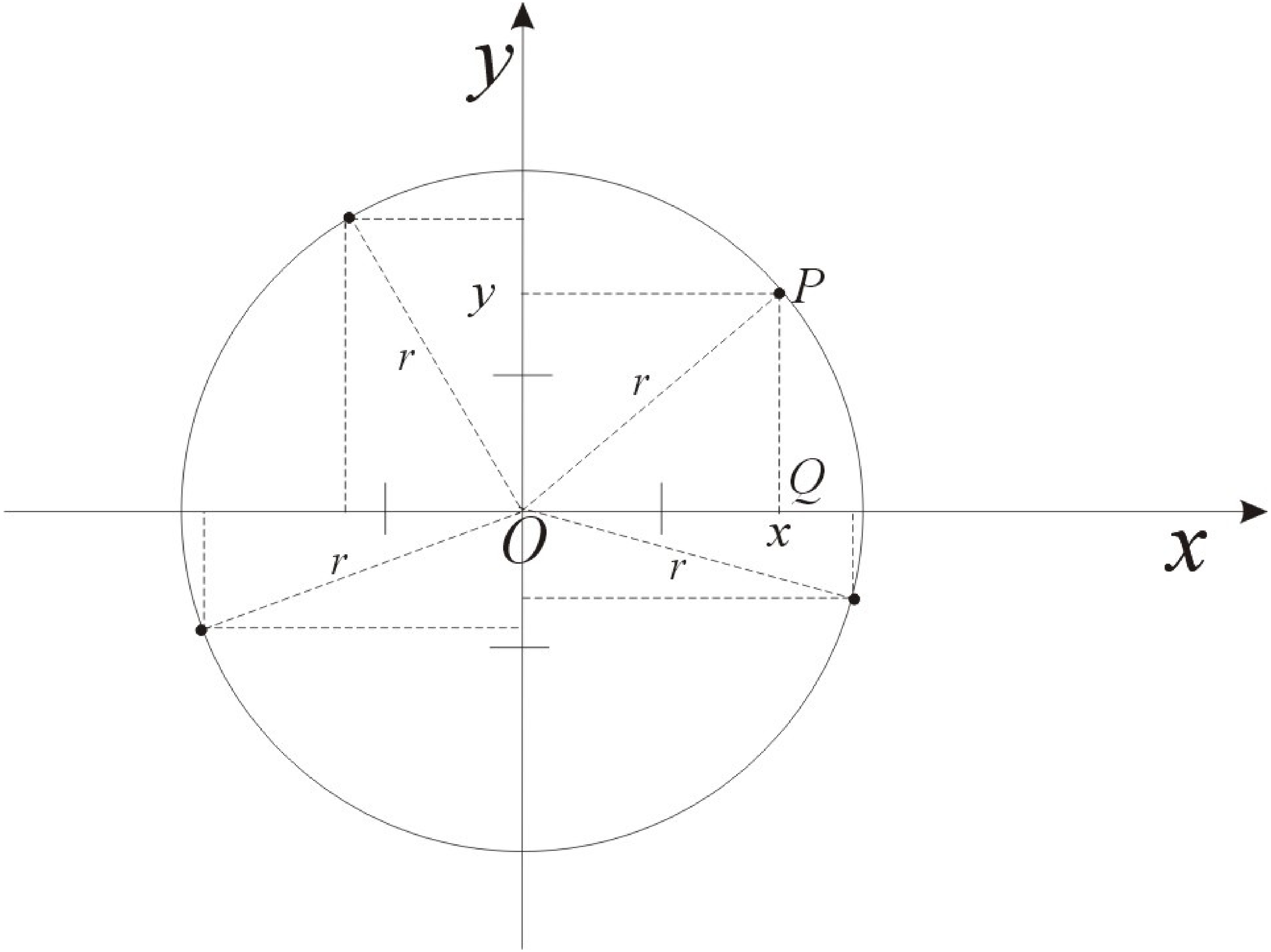
$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2} \Longrightarrow \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{OP}^2$$

e, d'altra parte,

$\overline{OQ} = |x|,\ \overline{QP} = |y|$ e $\overline{OP} = r.$

Si confronti con la figura della diapositiva seguente.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Più in generale, con $r > 0$ si consideri *il luogo dei punti del piano a distanza r dal punto* $C = C(x_C, y_C)$.

Se $P = P(x, y)$ è uno dei punti del luogo allora le sue coordinate, per il teorema di Pitagora applicato al triangolo CQP, devono soddisfare alla condizione:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2.$$

Infatti, risulta

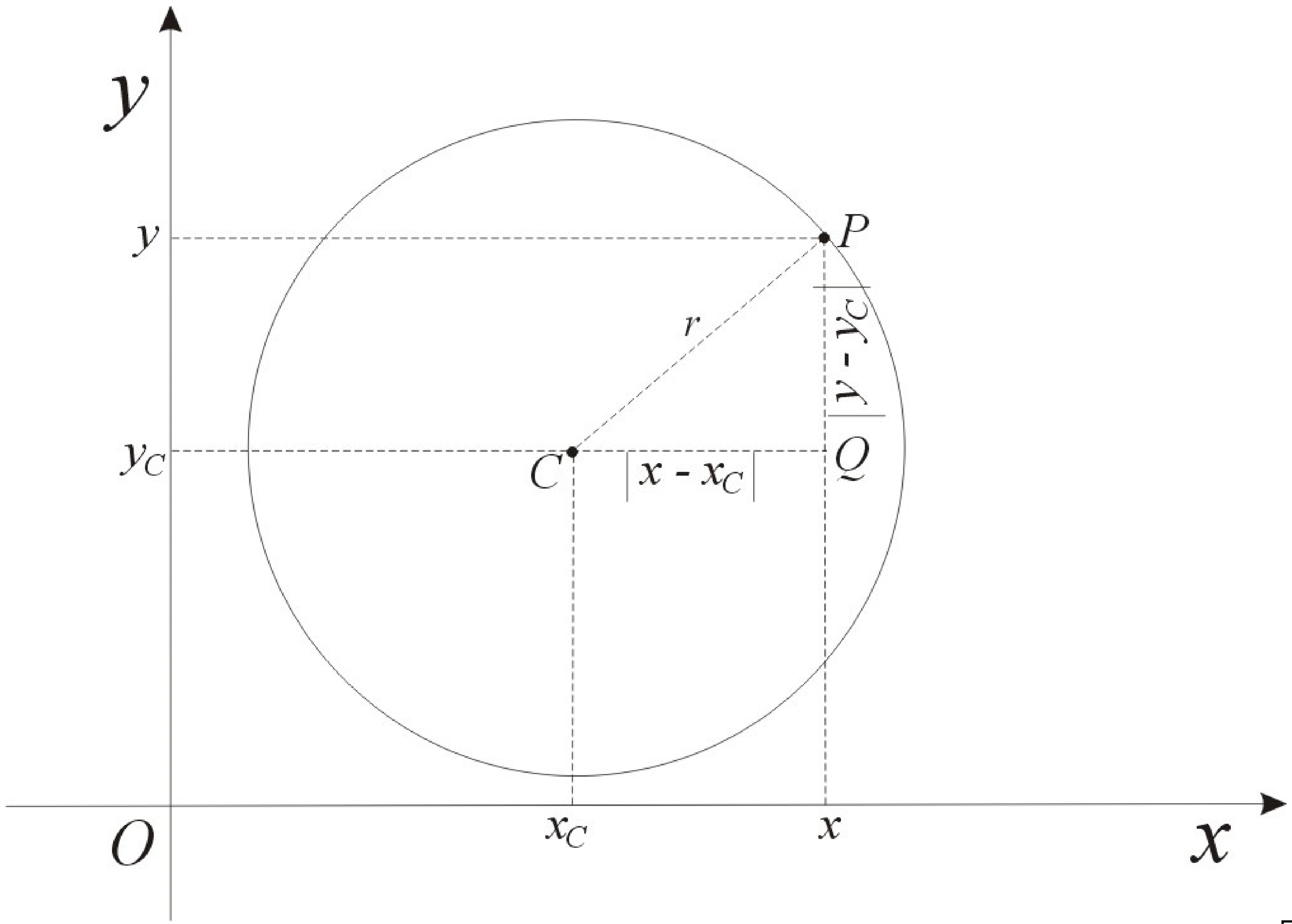
$$\overline{CP} = \sqrt{\overline{CQ}^2 + \overline{QP}^2} \Longrightarrow \overline{CQ}^2 + \overline{QP}^2 = \overline{CP}^2$$

e, d'altra parte,

$\overline{CQ} = |x - x_C|$, $\overline{QP} = |y - y_C|$ e $\overline{CP} = r$.

Si confronti con la figura della diapositiva seguente.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Noto il raggio r e le coordinate x_C e y_C del centro, risulta

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x_C x + x_C{}^2 + y^2 - 2y_C y + y_C{}^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y = r^2 - x_C{}^2 - y_C{}^2.$$

Per cui posto

$$\begin{cases} a & = & -2x_C \\ b & = & -2y_C \\ c & = & r^2 - x_C{}^2 - y_C{}^2 \end{cases}$$

L'equazione più generale della circonferenza assume allora la forma:

$$x^2 + y^2 + ax + by = c.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Viceversa, assegnata l'equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 + ax + by = c,$$

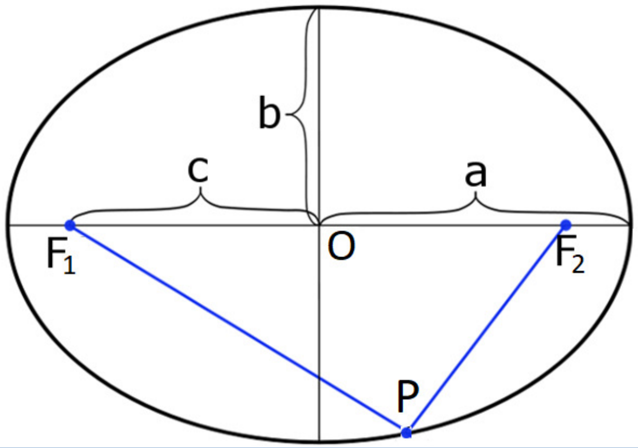
le coordinate del centro e il raggio si ricavano invertendo le formule della diapositiva precedente valide per a, b e c:

$$\begin{cases} x_C = -\dfrac{a}{2} \\ y_C = -\dfrac{b}{2} \\ r = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{b^2}{4} + c} \end{cases}.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

L'ellisse è il *luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi si mantiene costante*.

Si vuole ora determinare l'equazione cartesiana di una particolare ellisse: l'ellisse che ha i fuochi sull'asse x alla medesima distanza da O. A tale scopo sia $c > 0$ e siano $F_1 = F_1(-c, 0)$ e $F_2 = F_2\,(c, 0)$ i due fuochi. Con $a > c$ ad indicarne il *semiasse maggiore*, si osservi in primo luogo, che se $P = P(x, y)$ è uno dei punti dell'ellisse, la proprietà caratterizzante si scrive in simboli a



$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

Per comodità si riportano le posizioni della diapositiva precedente:

$$P = P(x, y), \quad F_1 = F_1(-c, 0) \text{ e } F_2 = F_2\ (c, 0).$$

Dopo di ciò, applicando la formula della distanza tra due punti, si ha:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

e

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

L'equazione cartesiana dell'ellisse è, allora, la seguente:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

Posto $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, si può verificare che i punti

- $P_1 = P_1(a, 0)$,
- $P_2 = P_2(0, b)$,
- $P_3 = P_3(-a, 0)$ e
- $P_4 = P_4(0, -b)$

soddisfano all'equazione cartesiana dell'ellisse e quindi essi appartengono all'ellisse.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a}$$

Ricordato che $a > c$, verifichiamo che $P_1 = P_1(a, 0)$ appartiene all'ellisse. Allo scopo, bisogna sostituire x con a e y con 0 nel primo membro dell'equazione dell'ellisse; si ottiene così:

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+c)^2}+\sqrt{(a-c)^2} &= |a+c|+|a-c| \\ &= a+c+a-c \\ &= 2a.\end{aligned}$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a}$$

Ricordato che $a > c$, verifichiamo che $P_3 = P_3(-a, 0)$ appartiene all'ellisse.

$$\begin{aligned}\sqrt{(-a+c)^2}+\sqrt{(-a-c)^2} &= |-a+c|+|-a-c| \\ &= |-(a-c)|+|-(a+c)| \\ &= |(a-c)|+|(a+c)| \\ &= a-c+a+c \\ &= 2a.\end{aligned}$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a}$$

Ricordato che $b^2 = a^2 - c^2$, verifichiamo che $P_2 = P_2(0, b)$ appartiene all'ellisse.

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{(-c)^2+b^2} &= \sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{c^2+b^2}\\ &= 2\sqrt{c^2+b^2}\\ &= 2\sqrt{c^2+a^2-c^2}\\ &= 2\sqrt{a^2} = 2|a| = 2a.\end{aligned}$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a}$$

Ricordato che $b^2=a^2-c^2$, verifichiamo che $P_4=P_4(0,-b)$ appartiene all'ellisse.

$$\sqrt{c^2+(-b)^2}+\sqrt{(-c)^2+(-b)^2}=\sqrt{c^2+b^2}+\sqrt{c^2+b^2}$$

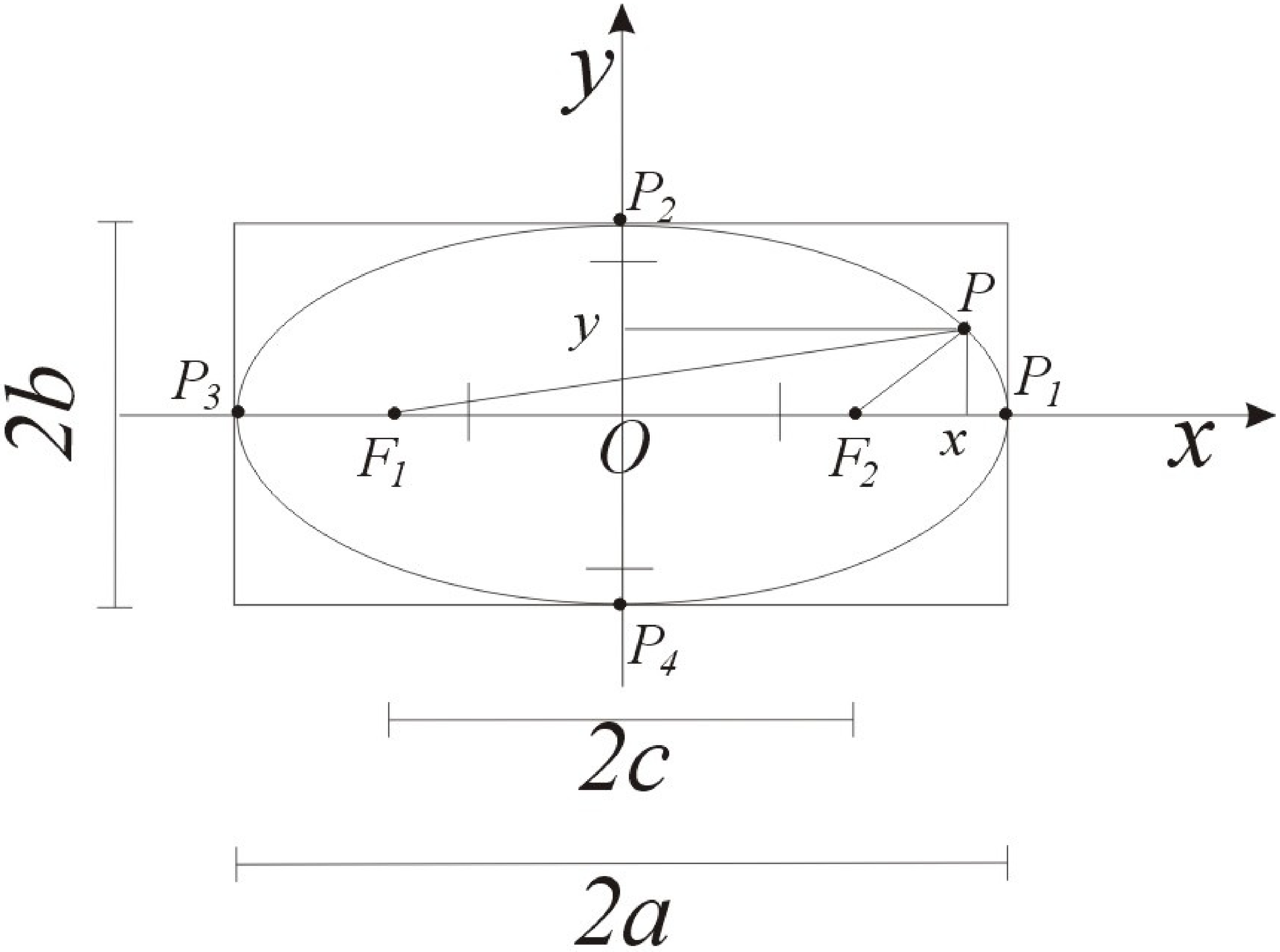
$$=2\sqrt{c^2+b^2}$$

$$=2\sqrt{c^2+a^2-c^2}$$

$$=2\sqrt{a^2}=2|a|=2a.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

La figura seguente schematizza quanto illustrato in precedenza relativamente all'ellisse considerata.



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

Pertanto l'ellisse è iscritta nel rettangolo di vertici

$$P_1(a,0),\ P_2(0,b), P_3(-a,0) \text{ e } P_4(0,-b).$$

La quantità $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ ne rappresenta allora il *semiasse minore*.

La quantità $e = \frac{c}{a}$ è detta *eccentricità*: se $e = 0 \Leftrightarrow c = 0$ (eccentricità nulla) allora $F_1 \equiv F_2 \equiv O$ e si tratta di una circonferenza mentre se $e = 1 \Leftrightarrow c = a$ si tratta di un segmento (solo i punti dell'asse maggiore possono rispettare la condizione del luogo dell'ellisse).

In tutti gli altri casi $0 < e < 1$ e l'ellisse è tanto più eccentrica quanto più e si avvicina ad 1.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'ELLISSE

Con calcoli (analoghi a quelli sviluppati più avanti e relativi all'iperbole) che si lasciano allo studente per esercizio si può verificare che l'equazione cartesiana dell'ellisse considerata ha la seguente semplice formulazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Riepilogo delle principali definizioni relative all'ellisse

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$\mathbf{a > b}$
Fuochi F_1, F_2	$F_1 \equiv (-\sqrt{a^2-b^2}, 0), F_2 \equiv (\sqrt{a^2-b^2}, 0)$
Intersezioni con l'asse x	$P \equiv (-a, 0),\ Q \equiv (a, 0)$
Intersezioni con l'asse y	$R \equiv (0, b),\ S \equiv (0, -b)$
Eccentricità e	$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$
Asse maggiore	$\overline{PQ} = 2a$
Asse minore	$\overline{RS} = 2b$
Distanza tra i fuochi	$\overline{F_1F_2} = 2\sqrt{a^2-b^2}$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

L'iperbole è il *luogo dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi si mantiene costante in valore assoluto.*

Si vuole ora determinare l'equazione cartesiana di una particolare iperbole: l'iperbole che ha i fuochi sull'asse x alla medesima distanza da O. A tale scopo sia $c > 0$ e siano $F_1 = F_1(-c, 0)$ e $F_2 = F_2\ (c, 0)$ i due fuochi.

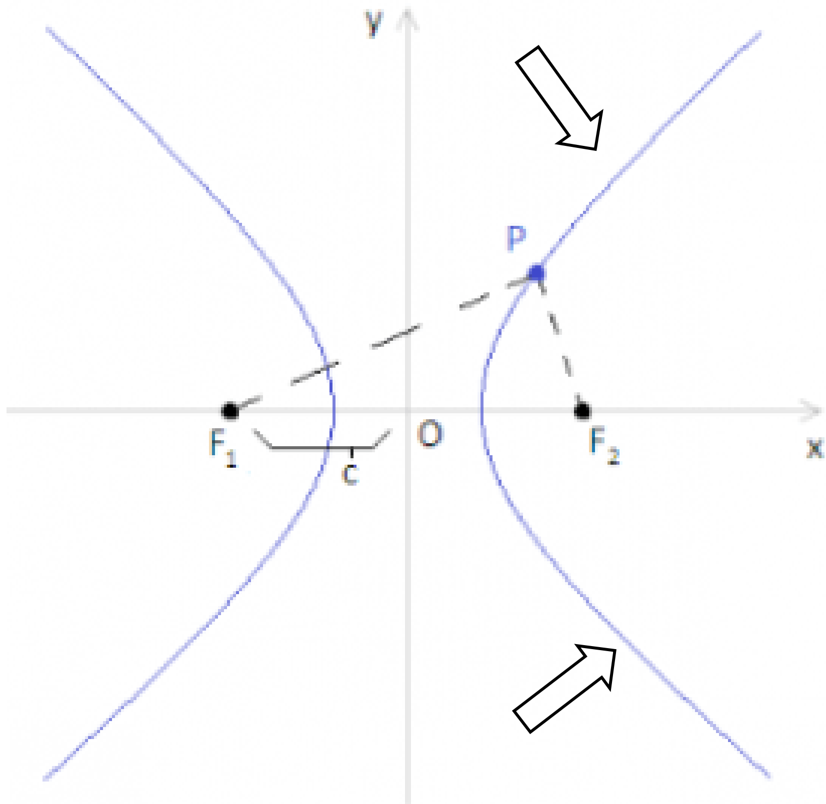
Con $a < c$ si osservi che se $P = P(x, y)$ è uno dei punti dell'ellisse, la proprietà caratterizzante si scrive in simboli al seguente modo:

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

La presenza del valore assoluto determina la presenza di due rami per questa curva. Infatti, se $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} > 0$, il ramo dell'iperbole, nella figura sotto riportata, è quello di destra e l'equazione corrispondente è:

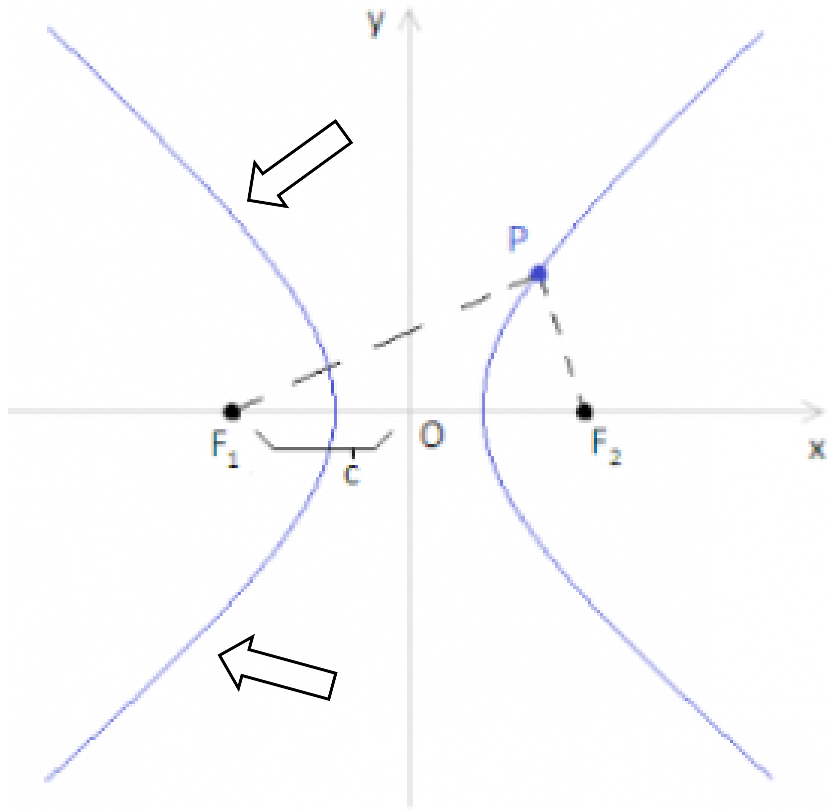
$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a.$$



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

Invece, se $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} < 0$, il ramo dell'iperbole, nella figura sotto riportata, è quello di sinistra e l'equazione corrispondente è:

$$\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a.$$



L'argomento del valore assoluto è negativo e va cambiato il segno.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

Per comodità si riportano le posizioni iniziali:

$$P = P(x, y),\quad F_1 = F_1(-c, 0) \text{ e } F_2 = F_2\ (c, 0).$$

Applicando la formula della distanza tra due punti, si ha:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

e

$$\overline{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

L'equazione cartesiana dell'iperbole è, allora, la seguente:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

$$\boxed{\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.}$$

Posto $b=\sqrt{c^2-a^2}$, elevando al quadrato ambo i membri dell'equazione cartesiana dell'iperbole si ottiene di seguito

$$(x+c)^2+(x-c)^2+2y^2-\ 2\sqrt{(x+c)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2$$

$$\Leftrightarrow (2x^2+2y^2+2c^2)-4a^2=2\sqrt{[(x+c)^2+y^2]\cdot[(x-c)^2+y^2]}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+c^2)-2a^2=\sqrt{[(x^2+y^2+c^2)+2cx]\cdot[(x^2+y^2+c^2)-2cx]}$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+c^2)-2a^2=\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}$$

$$\Leftrightarrow [(x^2+y^2+c^2)-2a^2]^2=(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+c^2)^2+4a^4-4a^2(x^2+y^2+c^2)=(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELL'IPERBOLE

(si ricordi che $b = \sqrt{c^2 - a^2} \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2$)

$$\Leftrightarrow (x^2 + \cancel{y^2} + c^2)^2 + 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) = (x^2 + \cancel{y^2} + c^2)^2 - 4c^2x^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) = -4c^2x^2 \Leftrightarrow a^4 - a^2(x^2 + y^2 + c^2) = -c^2x^2$$

$$\Leftrightarrow a^4 - a^2x^2 - a^2y^2 - a^2c^2 = -c^2x^2 \quad \Leftrightarrow a^4 - a^2c^2 = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 \quad \Leftrightarrow -a^2b^2 = -b^2x^2 + a^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}} = \frac{-\cancel{b^2}x^2}{-a^2\cancel{b^2}} + \frac{\cancel{a^2}y^2}{-\cancel{a^2}b^2}.$$

Quindi, in definitiva l'equazione cartesiana dell'iperbole assume la semplice forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Riepilogo delle principali definizioni relative all'iperbole

Equazione in forma normale (o canonica)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Fuochi	$F_1 \equiv (-c; 0) = (-\sqrt{a^2+b^2}; 0)$ $F_2 \equiv (c; 0) = (\sqrt{a^2+b^2}; 0)$
Distanza focale (distanza tra i fuochi)	$2c$
Parametri a, b e c	$c > a, c^2 = a^2 + b^2$
Assi di simmetria	asse x: contenente i fuochi asse y: asse del segmento che ha i fuochi agli estremi
Centro di simmetria	$(0; 0)$ punto di intersezione degli assi di simmetria
Vertici (punti in cui l'iperbole interseca l'asse contenente i fuochi)	Intersezione con l'asse x $(y = 0)$ $A_1 \equiv (-a; 0)$ e $A_2 \equiv (a; 0)$
Asse trasverso (segmento che ha i vertici agli estremi)	$2a$ (la costante della definizione)
Eccentricità = rapporto tra distanza focale e asse trasverso ($e > 1$)	$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$
Asintoti	$y = \pm\frac{b}{a}x$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

La parabola è il *luogo dei punti del piano che hanno la medesima distanza da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice*.

<u>Nel piano cartesiano si vuole ora determinare l'equazione cartesiana di una particolare parabola</u>: la parabola che ha il fuoco sull'asse y, direttrice parallela all'asse x e l'origine O appartenente alla parabola.

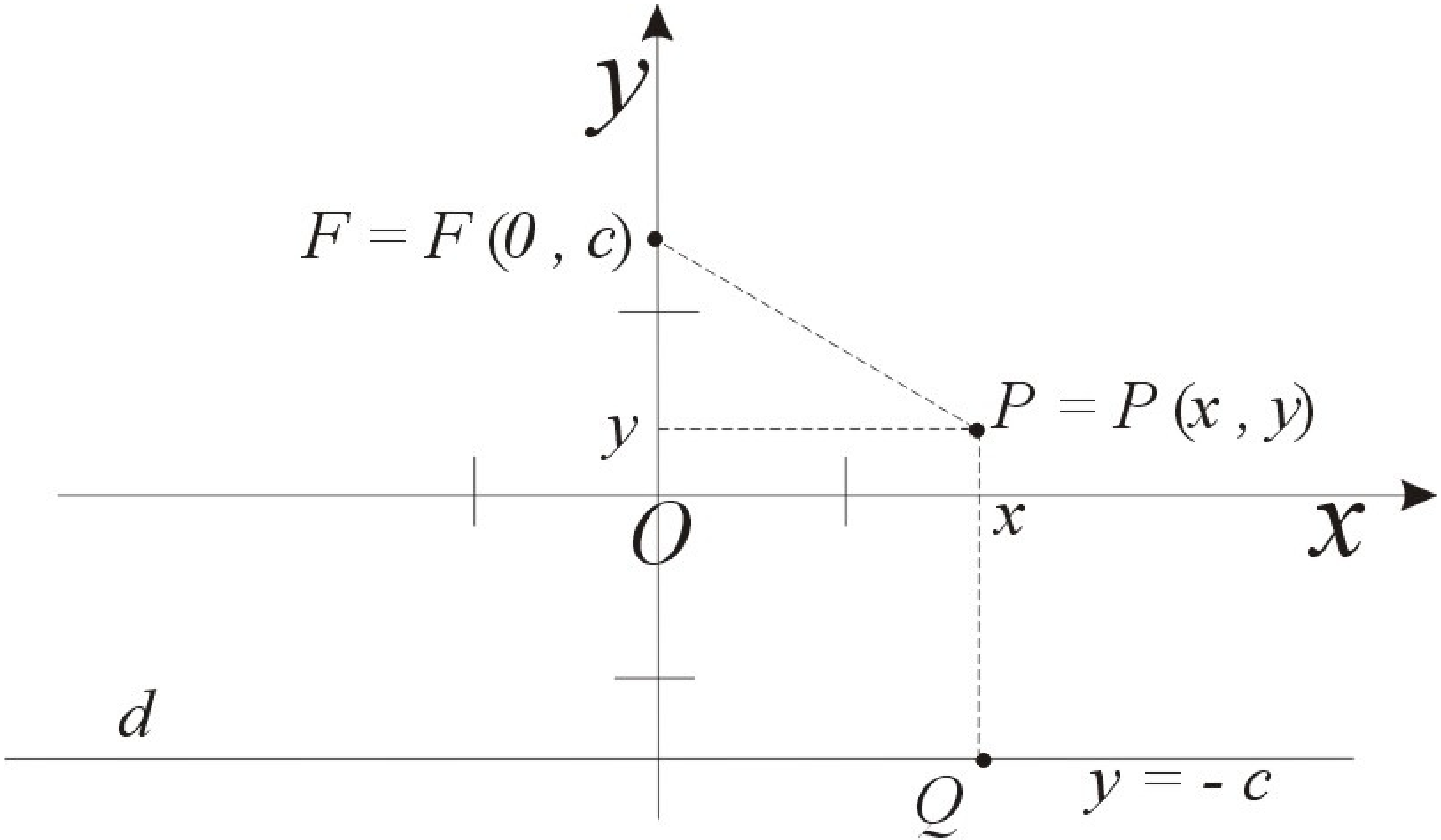
A tale scopo con $c > 0$, sia $F = F(0, c)$ il fuoco e $d: y = -c$ la direttrice.

Con riferimento alla figura della diapositiva seguente, se $P = P(x, y)$ è un punto del luogo, in simboli la proprietà caratterizzante il luogo si scrive al seguente modo:

$$\overline{PF} = \overline{PQ}.$$

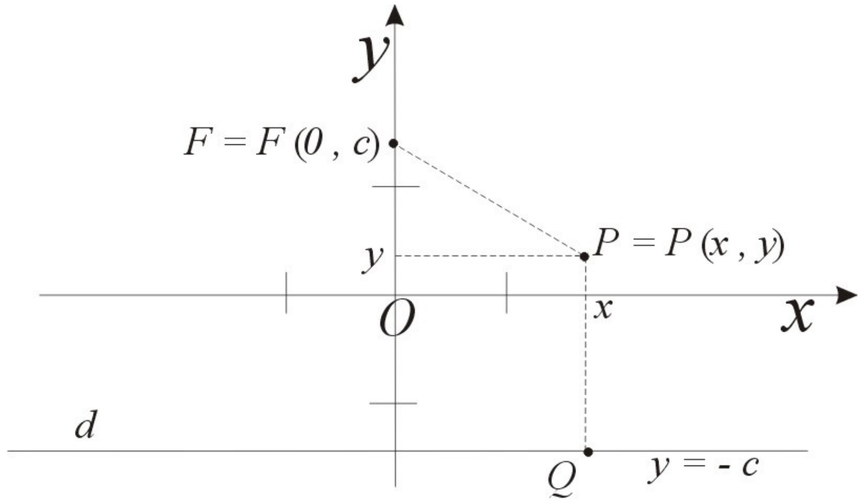
METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

$$\overline{PF} = \overline{PQ}$$



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

Con $P = P(x, y)$ e $F = F(0, c)$ risulta $Q = Q(x, -c)$; quindi



$$\overline{PF} = \overline{PQ} \iff \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+c)^2}$$

$$\iff \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = \sqrt{0^2 + (y+c)^2}$$

$$\iff x^2 + (y-c)^2 = (y+c)^2$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2yc + c^2 = y^2 + 2yc + c^2$$

$$\iff x^2 = \cancel{y}^2 + 2yc + \cancel{c}^2 - \cancel{y}^2 - \cancel{c}^2 + 2yc$$

$$\iff 4yc = x^2 \iff y = \frac{1}{4c}x^2.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

Posto $a = \frac{1}{4c}$, l'equazione della parabola avente il fuoco sull'asse y, direttrice parallela all'asse x e l'origine O appartenente alla parabola diventa:

$$y = ax^2.$$

Più generalmente, facendo permanere solo la condizione che la direttrice sia parallela all'asse x (rimuovendo quindi le condizioni sul fuoco e sull'origine) l'equazione della parabola si modifica in:

$$y = ax^2 + bx + d.$$

In quest'ultima, il termine $bx + d$ rappresenta la traslazione a cui è stato soggetto il fuoco della parabola.

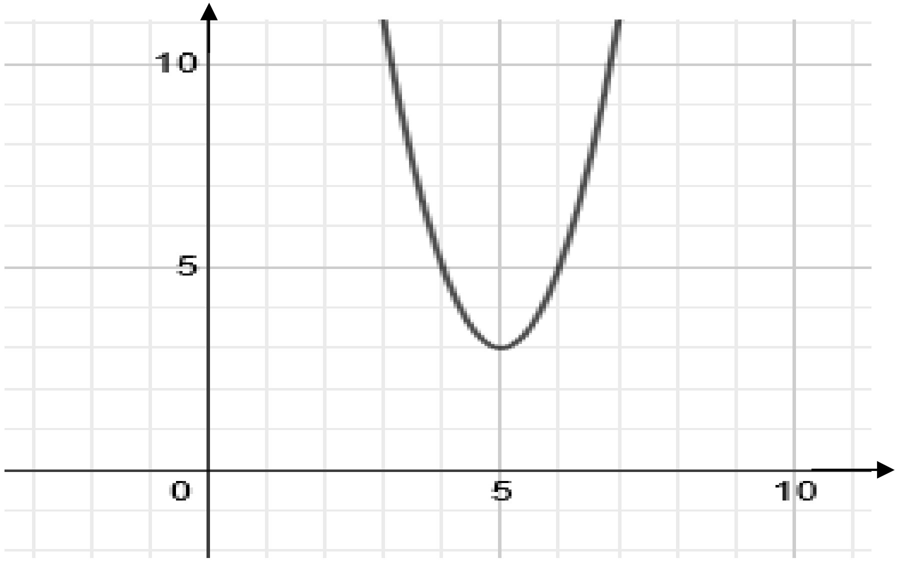
METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

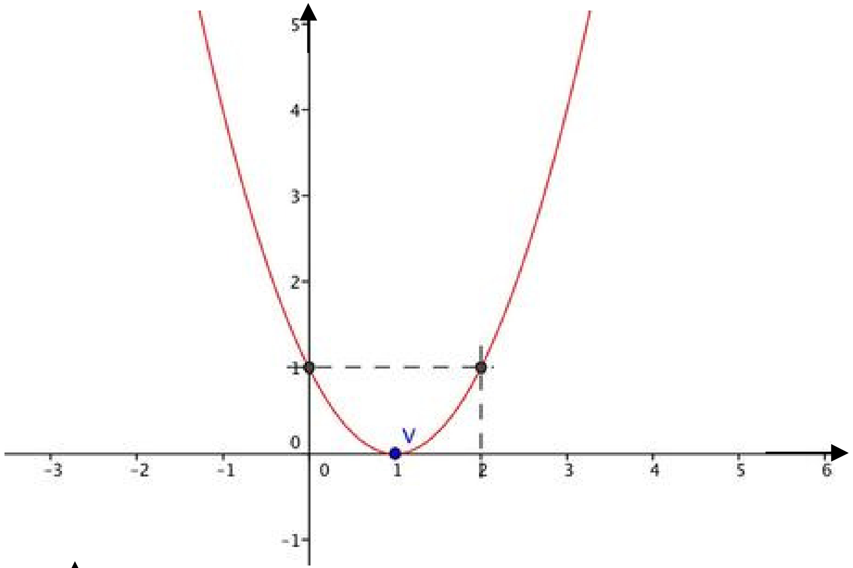
Caso $a > 0$; ci sono tre situazioni differenti.

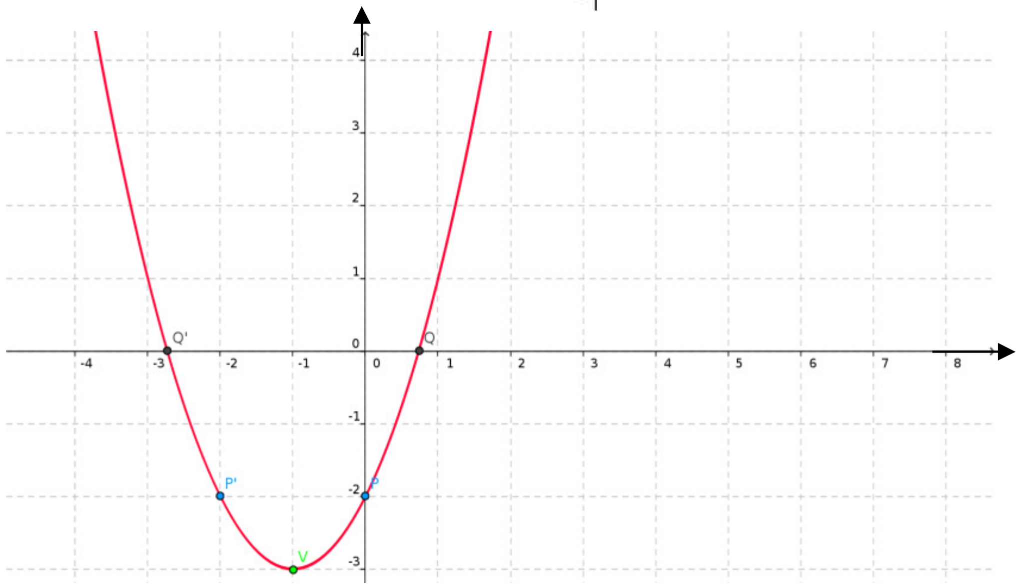
1. La parabola non interseca l'asse x e si mantiene sempre nel semipiano positivo delle y.
2. La parabola tocca l'asse x raggiungendo in un punto (che comunque conta per due) l'ordinata nulla e per il resto si mantiene nel semipiano positivo delle y.
3. La parabola interseca l'asse x in due punti (dove essa si trova ad ordinata zero): nell'intervallo tra questi due punti si trova nel semipiano negativo delle y e per il resto si mantiene nel semipiano positivo delle y.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

Caso $a > 0$







METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

Caso $a < 0$; ci sono tre situazioni differenti.

4. La parabola non interseca l'asse x e si mantiene sempre nel semipiano negativo delle y.
5. La parabola tocca l'asse x raggiungendo in un punto (che comunque conta per due) l'ordinata nulla e per il resto si mantiene nel semipiano negativo delle y.
6. La parabola interseca l'asse x in due punti (dove essa si trova ad ordinata zero): nell'intervallo tra questi due punti si trova nel semipiano positivo delle y e per il resto si mantiene nel semipiano negativo delle y.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DELLA PARABOLA

Caso $a < 0$