UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II

APPUNTI DI MATEMATICA E STATISTICA
(per il Corso di Laurea in Scienze Nutraceutiche)

METODO DELLE COORDINATE

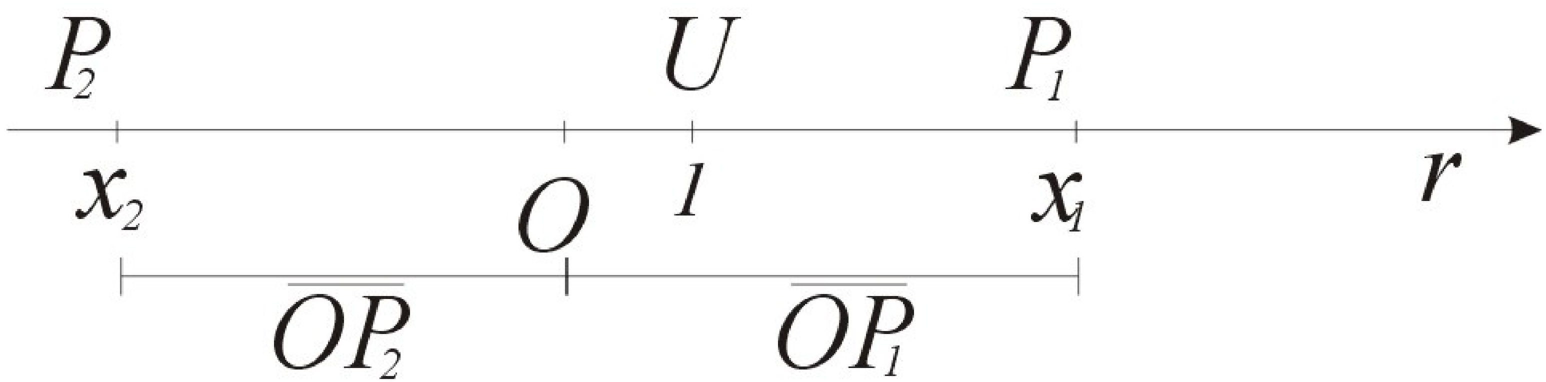
Prof. Aniello Buonocore

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DELLA RETTA

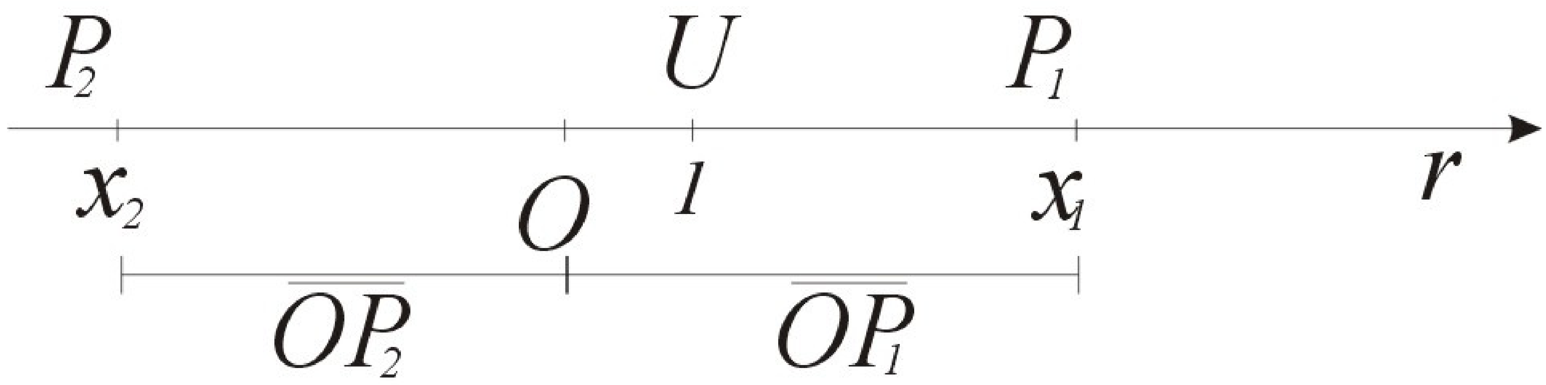
La costruzione, già più volte utilizzata, che assegna ad una fissata retta r un *verso positivo di percorrenza* e una unità di misura il cui inizio dei riporti è su un punto O, detto *origine*, arbitrariamente scelto su r, costituisce un *sistema di riferimento cartesiano* su r.



In esso, per ogni punto P della retta r, si chiama *ascissa* di P il numero reale x uguale alla lunghezza $\overline{OP}$ o al suo opposto a seconda che P appartenga alla semiretta positiva, o alla semiretta negativa.

METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DELLA RETTA

Con riferimento alla figura seguente



si osservi che la distanza tra i punti P_1 e P_2, indipendentemente dallo loro posizione reciproca, vale:

$$\overline{P_1P_2} = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|.$$

In altri termini, la distanza tra P_1 e P_2, è il valore assoluto della differenza delle loro ascisse.

Esempi

- P_1 di ascissa $x_1 = 5$ e P_2 di ascissa $x_2 = 7$:
$$\overline{P_1P_2} = |7 - 5| = |2| = 2.$$
- P_1 di ascissa $x_1 = -7$ e P_2 di ascissa $x_2 = -10$:
$$\overline{P_1P_2} = |-10 - (-7)| = |-10 + 7| = |-3| = 3.$$
- P_1 di ascissa $x_1 = -5$ e P_2 di ascissa $x_2 = 7$:
$$\overline{P_1P_2} = |7 - (-5)| = |7 + 5| = |7 + 5| = 12.$$
- P_1 di ascissa $x_1 = -\frac{5}{2}$ e P_2 di ascissa $x_2 = \frac{7}{3}$:
$$\overline{P_1P_2} = \left|\frac{7}{3} - \left(-\frac{5}{2}\right)\right| = \left|\frac{7}{3} + \frac{5}{2}\right| = \left|\frac{14}{6} + \frac{15}{6}\right| = \frac{29}{6}.$$

METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DEL PIANO

Si consideri ora il *piano euclideo*, ossia quella costruzione matematica che partendo dagli enti primitivi (punti e rette) mediante i cinque assiomi di Euclide riesce a dedurre tutte le proprietà della geometria intuitiva, e lo si indichi con la lettera greca minuscola α.

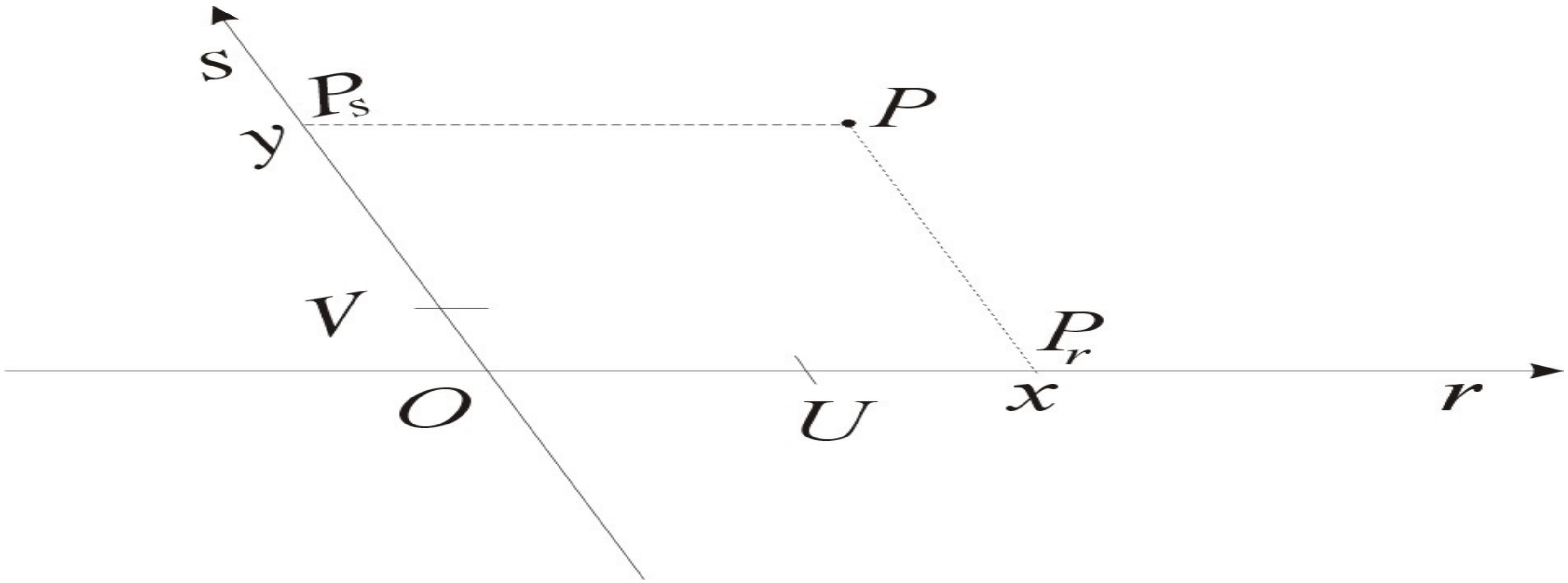
Per rappresentare in maniera cartesiana i punti di α si possono considerare <u>due sue rette non parallele</u>, r ed s.

Infatti, considerato il generico punto P di α si indichi con O il punto in comune di r ed s si munisca ciascuna delle due rette di un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto O.

METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DEL PIANO

A questo punto si tracci da P la parallela alla retta s che interseca la retta r nel punto P_r. Si proceda allo stesso modo rispetto alla retta s.

Le ascisse dei punti P_r e P_s nei rispettivi sistemi cartesiani sono chiamate, rispettivamente, *ascissa* e *ordinata* del punto P.



METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DEL PIANO

Per convenzione l'ascissa del generico punto P di α viene rappresentata simbolicamente con la lettera x e l'ordinata con la lettera y. Inoltre la retta r viene chiamata asse delle ascisse (o più brevemente asse delle x) mentre la retta s viene chiamata asse delle ordinate (o più brevemente asse delle y).

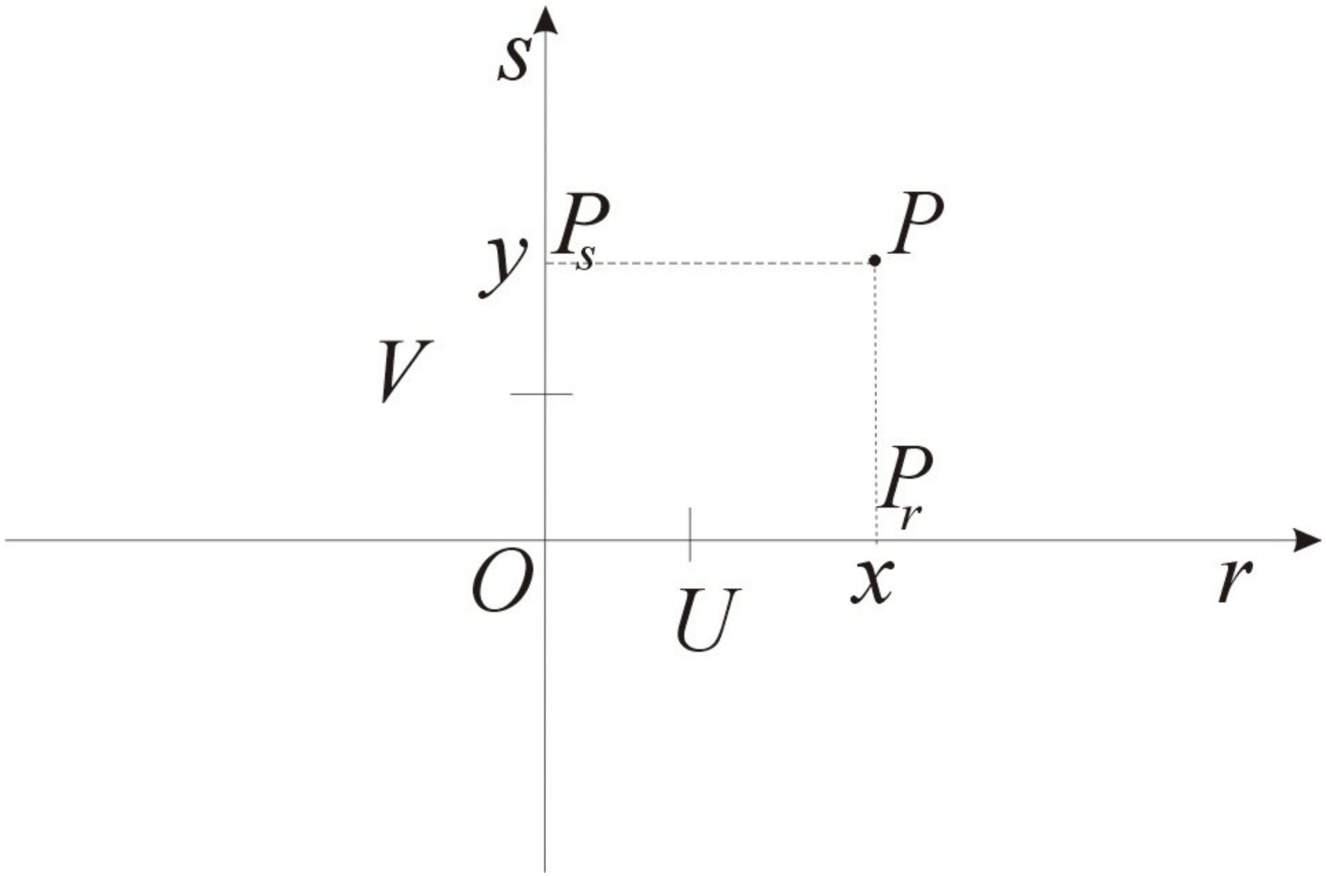
Dopo di ciò, con riferimento alla figura della diapositiva precedente, si osservi che:

a) Le unità di misura dei due assi non devono essere necessariamente uguali.

b) Gli assi non devono essere necessariamente perpendicolari tra loro.

METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DEL PIANO

Nel seguito, comunque, si considererà sempre un sistema cartesiano del piano che sia *monometrico* (assi che hanno la stessa unità di misura) ed *ortogonale* (assi perpendicolari tra loro).



METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DEL PIANO

In definitiva, con l'introduzione del sistema di riferimento cartesiano del piano, si può mettere in corrispondenza biunivoca il generico punto P del piano euclideo con una coppia ordinata (x, y) di numeri reali nella quale il primo elemento rappresenta l'ascissa di P mentre il secondo rappresenta l'ordinata di P.

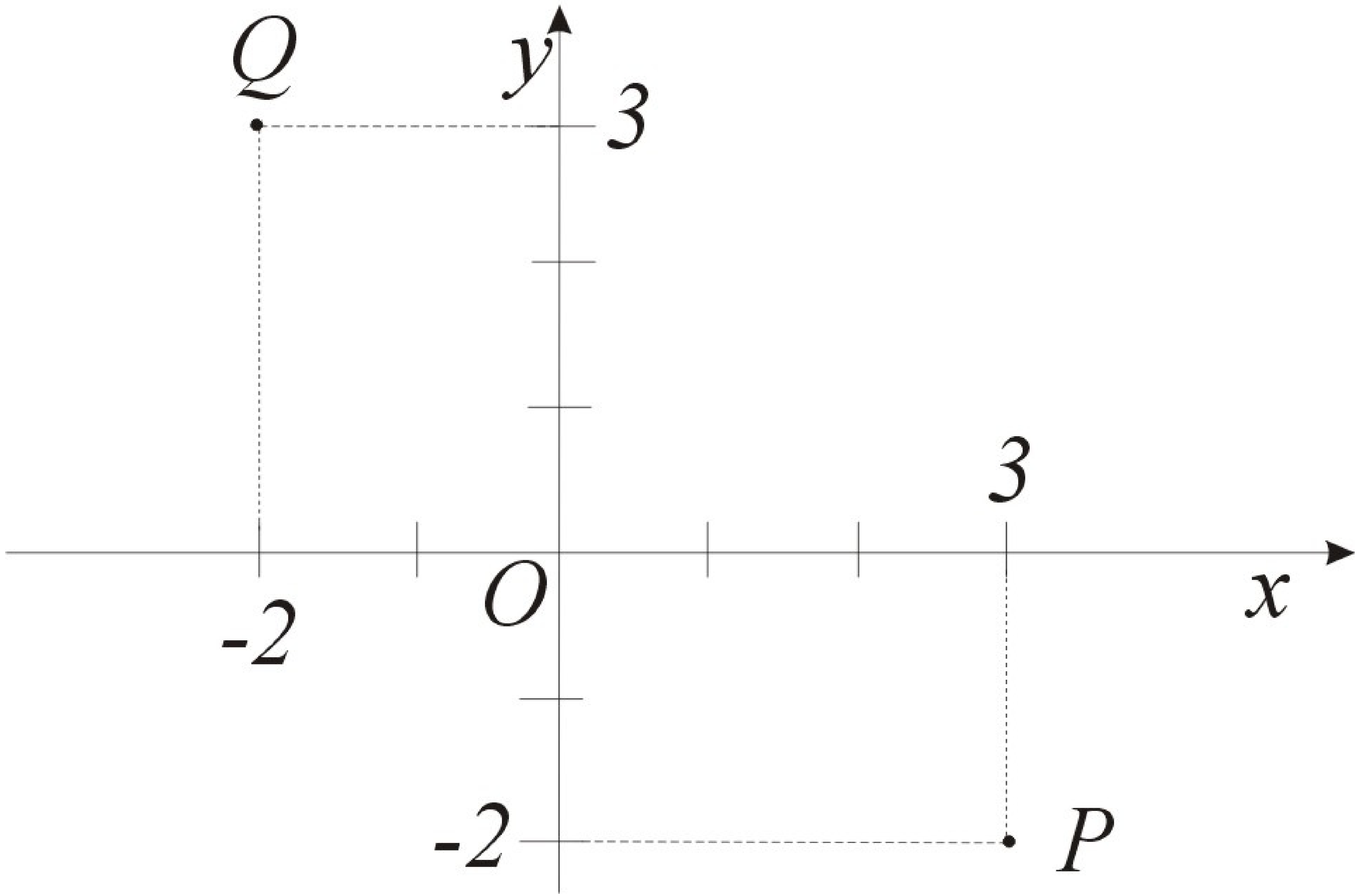
Nella diapositiva successiva sono mostrati i punti

- P di ascissa $+3$ e ordinata -2

e

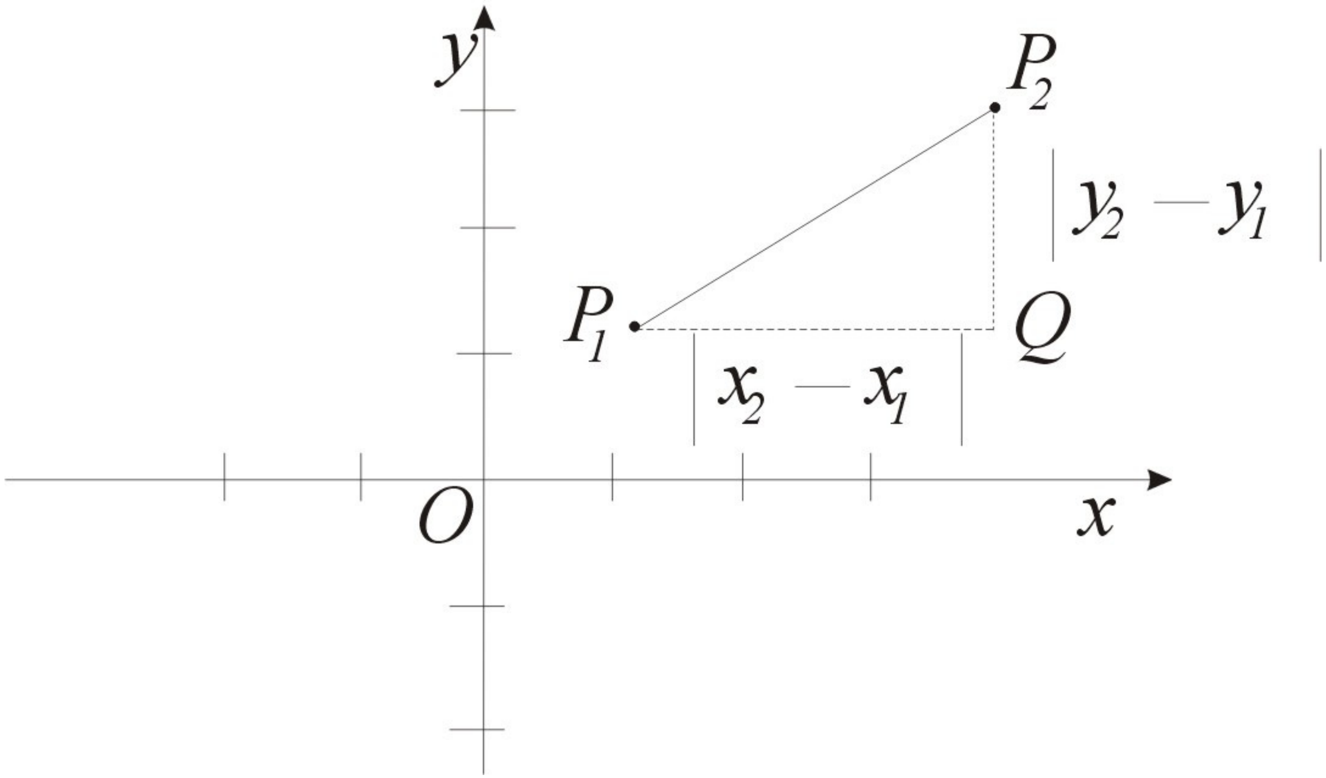
- Q di ascissa -2 e ordinata $+3$.

METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DEL PIANO



METODO DELLE COORDINATE: RIFERIMENTO CARTESIANO DEL PIANO

Si vuole ora determinare la distanza tra due punti P_1 e P_2 del piano α quando siano assegnate le coordinate di ciascuno dei due punti. Sia allora $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ (intendendo con ciò dire che il punto P_1 ha ascissa x_1 e ordinata y_1), $P_2 = P_2(x_2, y_2)$ e si faccia riferimento alla figura seguente:



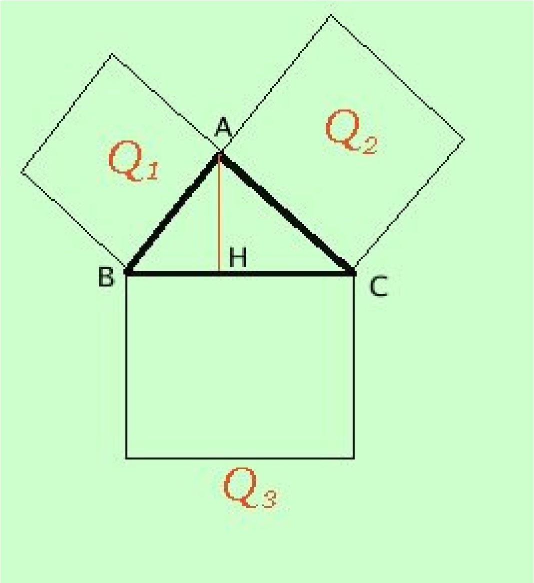
Il teorema di Pitagora

In ogni triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa .

Ipotesi: $B\hat{A}C = 90^\circ$

Tesi: $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2}.$$



Nella figura Q_1, Q_2 e Q_3 rappresentano le aree dei quadrati di lato AB, AC e BC, rispettivamente, e pertanto la tesi può essere anche scritta come $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Il segmento P_1P_2 rappresenta l'ipotenusa del triangolo rettangolo $P_1\hat{Q}P_2$ avente come cateti i segmenti P_1Q e P_2Q.

Quindi, applicando il teorema di Pitagora, e ricordando la formula della distanza tra due punti su rette parallele agli assi coordinati, si ha:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\overline{QP_1}^2 + \overline{QP_2}^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Riassumendo, l'idea di Cartesio è la seguente: assegnare ad ogni punto del piano euclideo una ed una sola coppia ordinata di numeri reali mediante l'introduzione di un sistema di riferimento.

In altri termini Cartesio ha messo in corrispondenza biunivoca il piano euclideo α ed il prodotto cartesiano

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2.$$

Nel seguito, spesso, si utilizzerà indifferentemente la frase *punto del piano* o la frase *coppia ordinata di numero reale*.

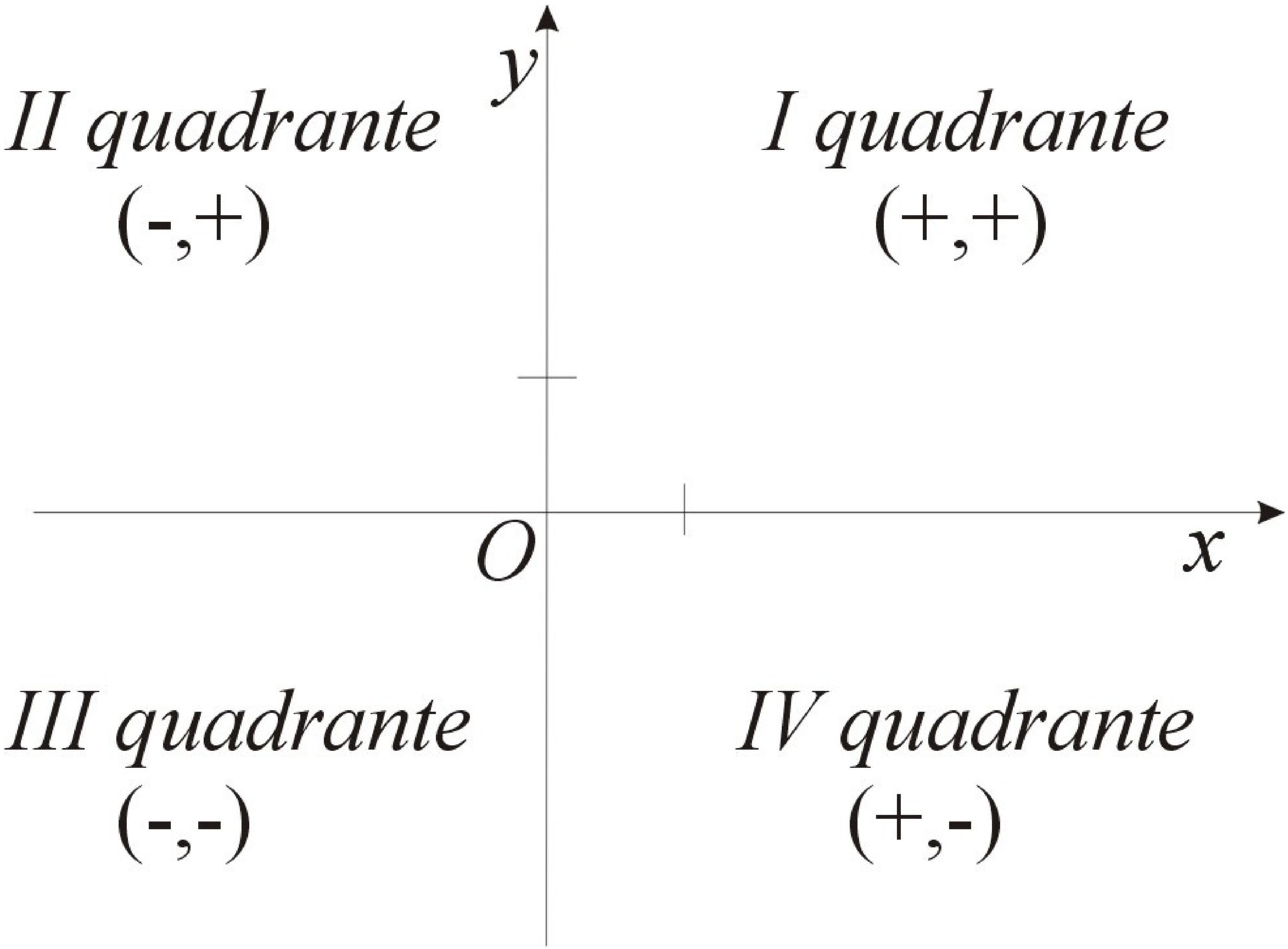
Il piano euclideo munito di un sistema di riferimento (oppure il prodotto cartesiano $\mathbb{R}^2$) prende il nome di *piano cartesiano*.

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PARALLELE AGLI ASSI CARTESIANI

Il piano cartesiano si divide in sei parti.

1. Il primo quadrante: l'insieme dei punti aventi ascissa positiva ed ordinata positiva.
2. Il secondo quadrante: l'insieme dei punti aventi ascissa negativa ed ordinata positiva.
3. Il terzo quadrante: l'insieme dei punti aventi ascissa negativa ed ordinata negativa.
4. Il quarto quadrante: l'insieme dei punti aventi ascissa positiva ed ordinata negativa.
5. L'asse delle ascisse.
6. L'asse delle ordinate.

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PARALLELE AGLI ASSI CARTESIANI



METODO DELLE COORDINATE: RETTE PARALLELE AGLI ASSI CARTESIANI

Si consideri più attentamente l'asse delle ascisse: tutti i punti di tale retta hanno l'ordinata uguale a 0:

$$G_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

ovvero, l'asse delle ascisse è il *luogo dei punti del piano cartesiano aventi ordinata nulla*. In maniera sintetica si può utilizzare la proprietà che caratterizza G_1 e dire che l'asse delle ascisse ha equazione (cartesiana):

$$y = 0.$$

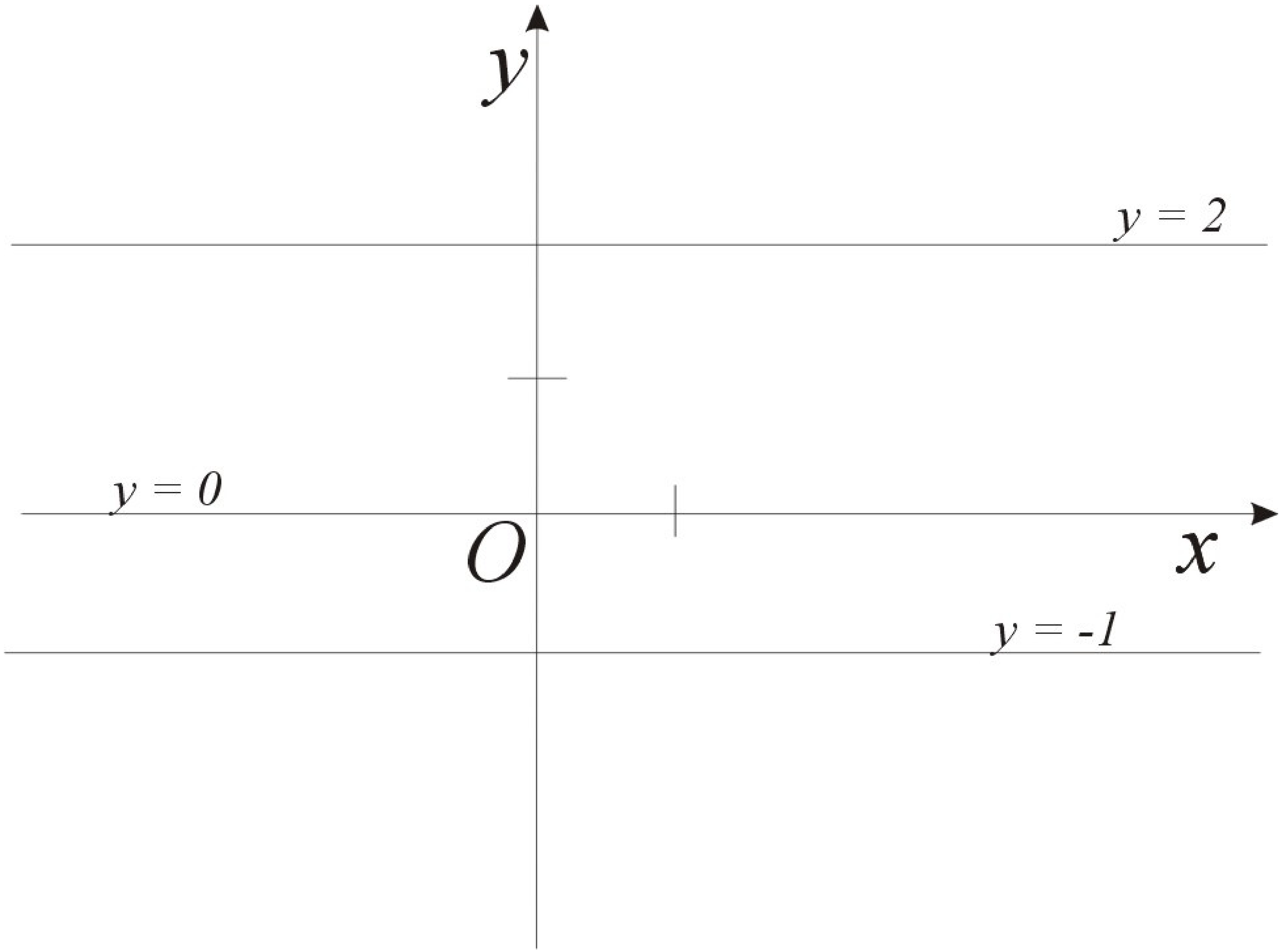
Allo stesso modo la retta parallela all'asse delle ascisse e passante per il punto di coordinate $(0, c)$ ha equazione cartesiana:

$$y = c.$$

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PARALLELE AGLI ASSI CARTESIANI

Esempi

- $c = -1;$
- $c = 0;$
- $c = 2.$



METODO DELLE COORDINATE: RETTE PARALLELE AGLI ASSI CARTESIANI

Si consideri più attentamente <u>l'asse delle ordinate</u>: tutti i punti di tale retta hanno l'ascissa uguale a 0:

$$G_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} \subset \mathbb{R}^2,$$

ovvero, l'asse delle ascisse è il *luogo dei punti del piano cartesiano aventi ascissa nulla*. In maniera sintetica si può utilizzare la proprietà che caratterizza G_2 e dire che l'asse delle ascisse ha equazione (cartesiana):

$$x = 0.$$

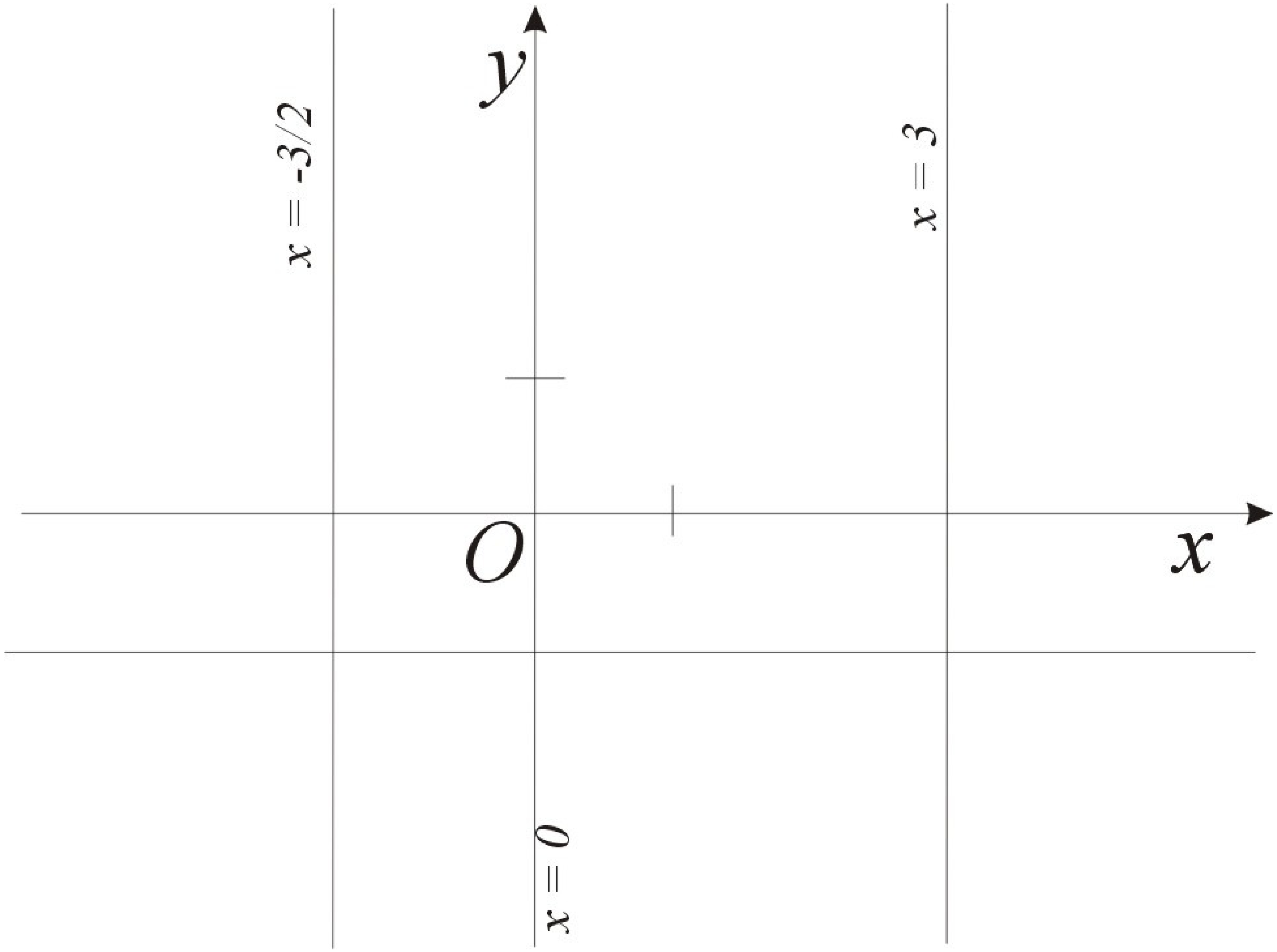
Allo stesso modo la retta parallela all'asse delle ordinate e passante per il punto di coordinate $(d, 0)$ ha equazione cartesiana:

$$x = d.$$

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PARALLELE AGLI ASSI CARTESIANI

Esempi

- $d = -\frac{3}{2}$;
- $d = 0$;
- $d = 3$.



METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Nella sezione precedente sono state presentate le equazioni delle rette parallele agli assi coordinati. Adesso, indicato con m un numero reale, si consideri nel piano cartesiano la seguente condizione:

$$y = mx.$$

Essa rappresenta *il luogo dei punti del piano aventi ordinata proporzionale all'ascissa* secondo il coefficiente m.

In particolare, per qualunque m, risulta:

$$x = 0 \Longrightarrow y = m \cdot 0 = 0.$$

In altri termini, l'origine O del sistema di riferimento appartiene al luogo considerato.

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Si consideri, in aggiunta, la seguente tabella:

x	$y = mx$
2	$m \cdot 2 = 2m$
3	$m \cdot 3 = 3m$
4	$m \cdot 4 = 4m$
6	$m \cdot 6 = 6m$
9	$m \cdot 9 = 9m$

Essa, mostra che raddoppiando l'ascissa si raddoppia l'ordinata (da $x = 2$ a $x = 4$; da $x = 3$ a $x = 6$); triplicando l'ascissa si triplica l'ordinata (da $x = 2$ a $x = 6$; da $x = 3$ a $x = 9$); e così via.

Se ne deduce che la condizione $y = mx$, al variare di x in $\mathbb{R}$, descrive una retta passante per l'origine (diversa dall'asse x nel caso in cui $m \neq 0$).

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Si ragioni ora sul segno del *coefficiente* m.

Sia $m > 0$. Ad ascisse positive (negative) corrispondono ordinate positive (negative). Quindi ascisse ed ordinate hanno segno concorde: la retta giace nel *I* e nel *III* quadrante. È il caso questo della retta $y = 2x$ della figura della diapositiva successiva.

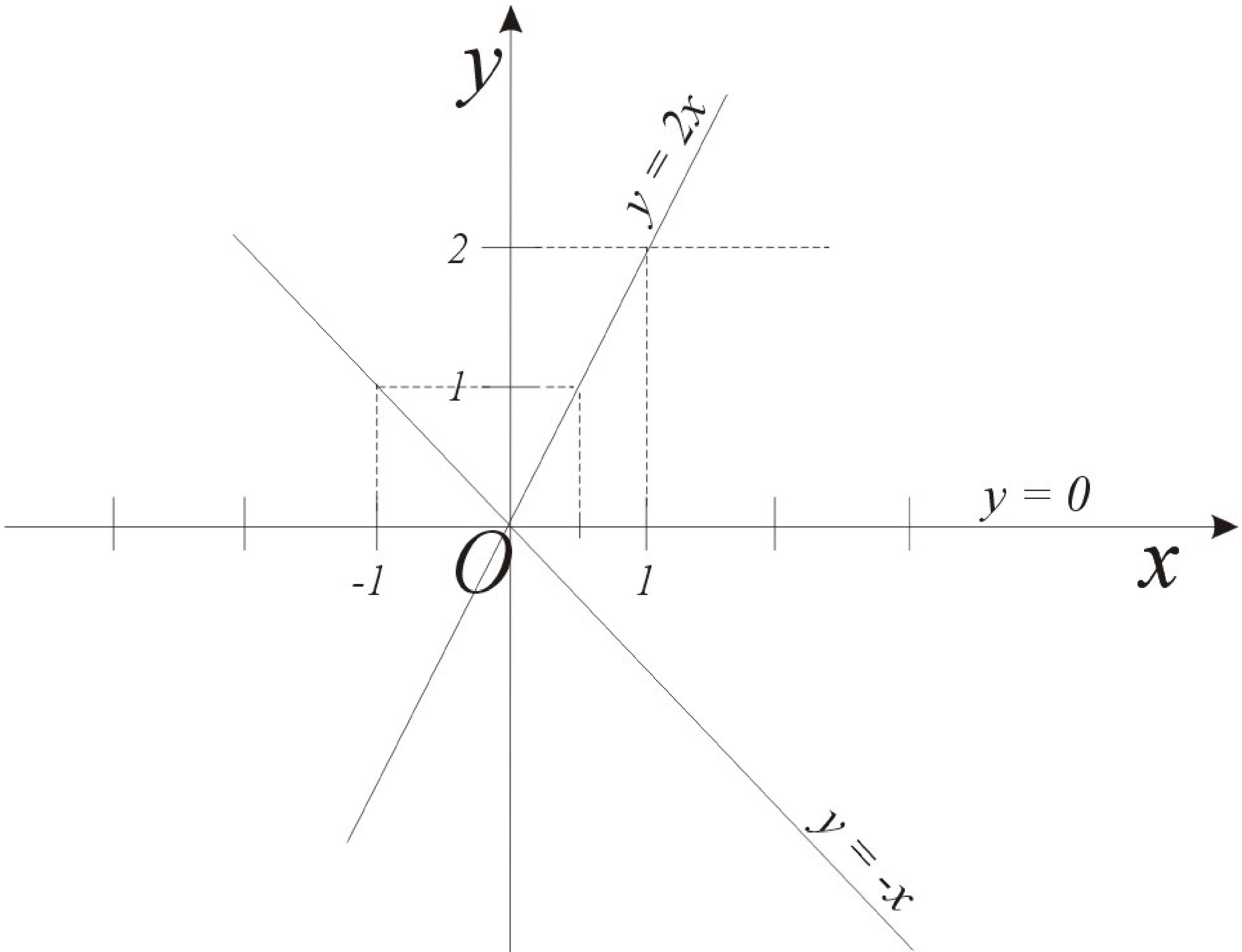
Sia $m < 0$. Ad ascisse positive (negative) corrispondono ordinate negative (positive). Quindi ascisse ed ordinate hanno segno discorde: la retta giace nel *II* e nel *IV* quadrante. È il caso questo della retta $y = -x$ della figura della diapositiva successiva.

Se $m = 0$, la retta coincide con l'asse x.

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Esempi

- $m = -1;$
- $m = 0;$
- $m = 2.$



METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Il numero m nella relazione $y = mx$ si chiama *coefficiente angolare* della retta in quanto esso determina la pendenza della retta rispetto all'asse x.

Sia noto m. Per rappresentare nel piano cartesiano la retta di equazione $y = mx$ basta rappresentare il punto $O = O(0,0)$ ed il punto $P = P(1, m)$ e successivamente tracciare, con il righello, la linea passante per essi.

Viceversa, se nel piano cartesiano è rappresentata una retta passante per O e se sono note le coordinate di un altro suo punto $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ non appartenente all'asse verticale, m si determina al seguente modo:

$$x_1 \neq 0, \qquad y_1 = mx_1 \Longrightarrow m = \frac{y_1}{x_1}.$$

METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Più generalmente, se sono noti due punti <u>distinti</u> della retta in questione, $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ e $P_2 = P_2(x_2, y_2)$, ossia

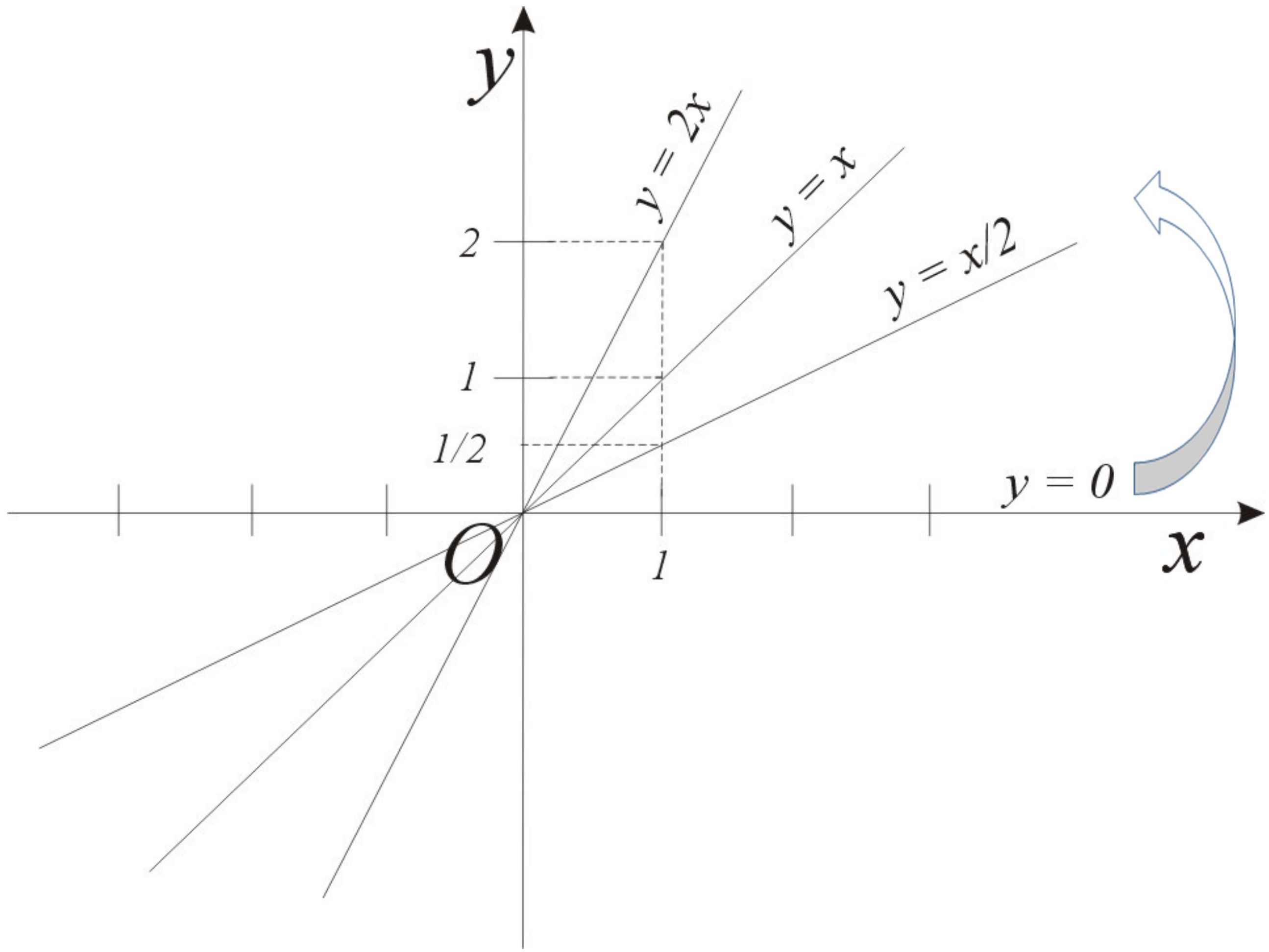
$$y_1 = mx_1 \quad \text{e} \quad y_2 = mx_2,$$

m si determina al seguente modo.

1. Sottraendo membro a membro le due precedenti uguaglianza si ricava
$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$
2. Deve essere $x_2 - x_1 \neq 0$ altrimenti i due punti non sarebbero distinti.
3. Da quest'ultima discende infine:
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

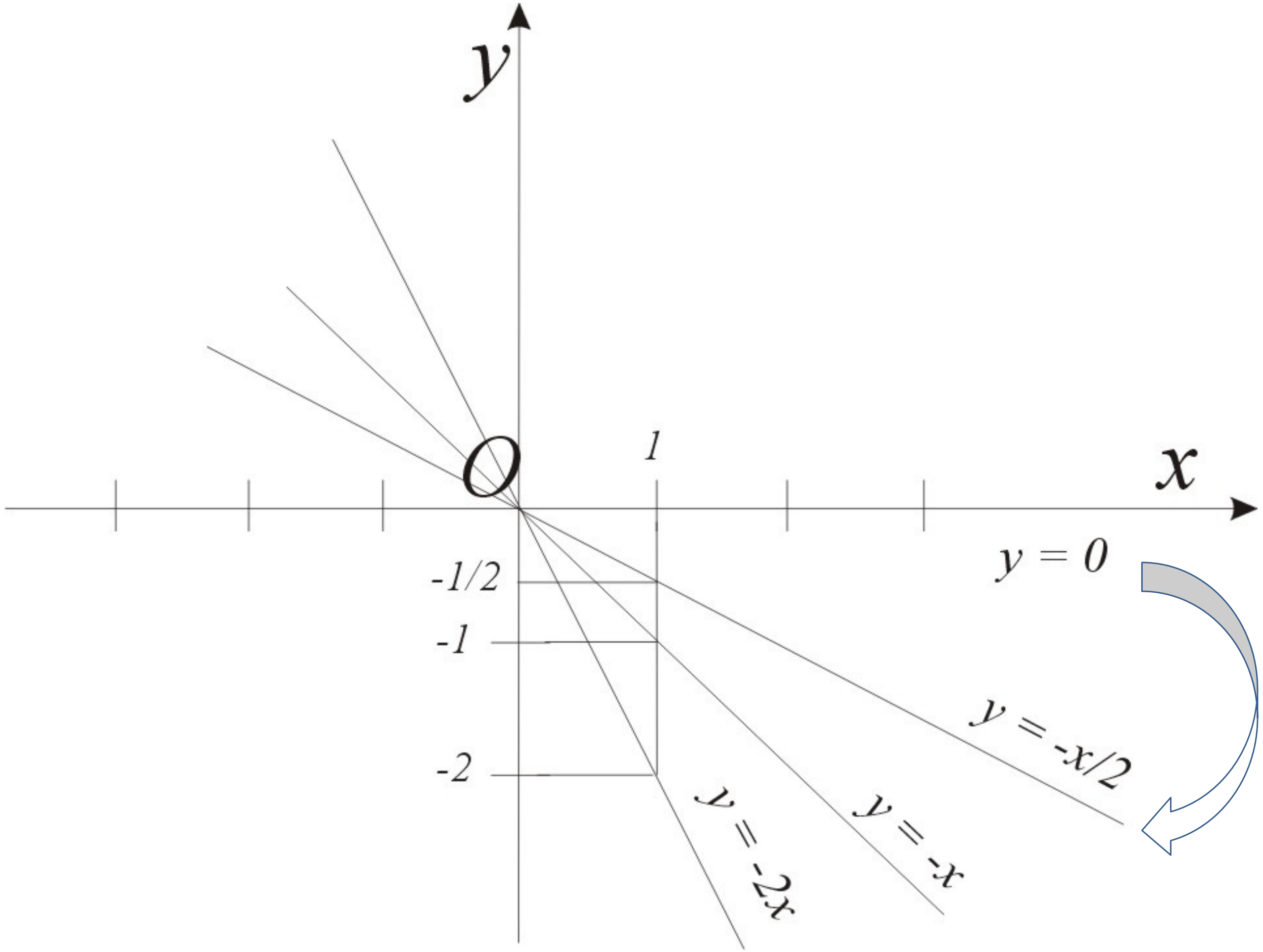
METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Sia $m > 0$. Al crescere di $|m|$ la retta, restando nel *I* e nel *III* quadrante, ruota intorno all'origine O avvicinandosi sempre di più all'asse y che, si ricorda, ha equazione $x = 0$.



METODO DELLE COORDINATE: RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE

Sia $m < 0$. Al crescere di $|m|$ la retta, restando nel *II* e nel *IV* quadrante, ruota intorno all'origine O avvicinandosi sempre di più all'asse y che, si ricorda, ha equazione $x = 0$.



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DI UNA GENERICA RETTA

Le rette fin qui considerate passano per il punto $O = O(0,0)$. Ora vogliamo considerare il caso più generale delle rette che, a parità di coefficiente angolare, passano per il punto $Q = Q(0, n)$ con $n \neq 0$ che prende il nome di *intercetta*.

Si consideri il *luogo dei punti del piano le cui coordinate cartesiano soddisfano la condizione*:

$$y = mx + n \Leftrightarrow y - n = mx.$$

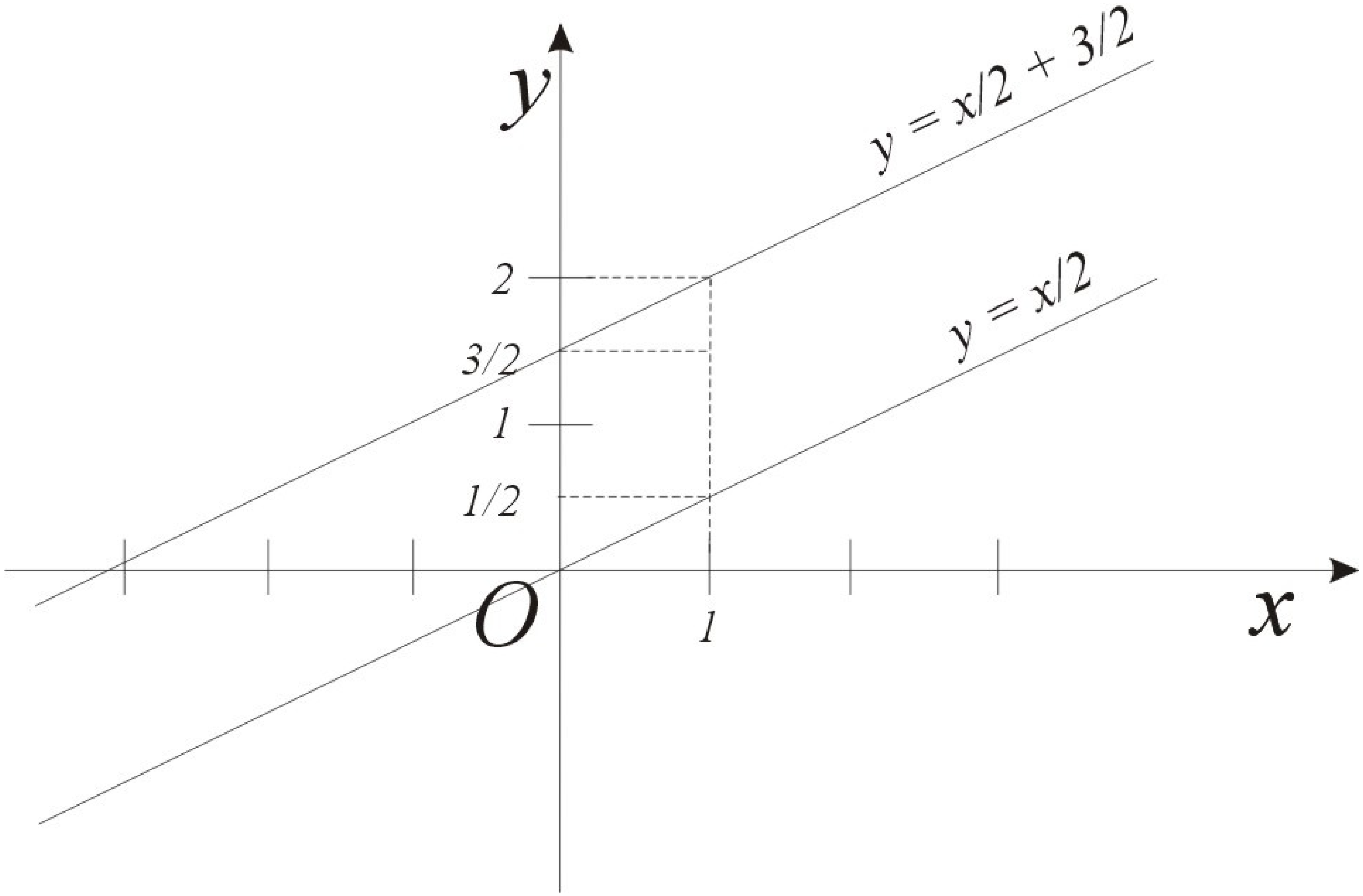
È facile verificare che il punto Q soddisfa a tale condizione: per $x = 0$ si ha $y = m \cdot 0 + n = n$.

Inoltre, per i punti di questo luogo la differenza tra ordinata e l'intercetta n è proporzionale all'ascissa e pertanto tale luogo è una retta.

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DI UNA GENERICA RETTA

Esempio

▻ $m = 1/2$ e $n = 3/2$.



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DI UNA GENERICA RETTA

Si consideri la condizione $y = mx + n$ con $n \neq 0$: essa, al variare di x in $\mathbb{R}$, descrive una retta del piano (che, comunque, per qualsiasi valore di m è diversa dall'asse y).

È diventato quindi usuale riferirsi ad essa come *equazione <u>esplicita</u> di una retta*. In effetti essa letta come $y - mx = n$ è un'equazione di primo grado nell'incognita y con x scelta in maniera arbitraria.

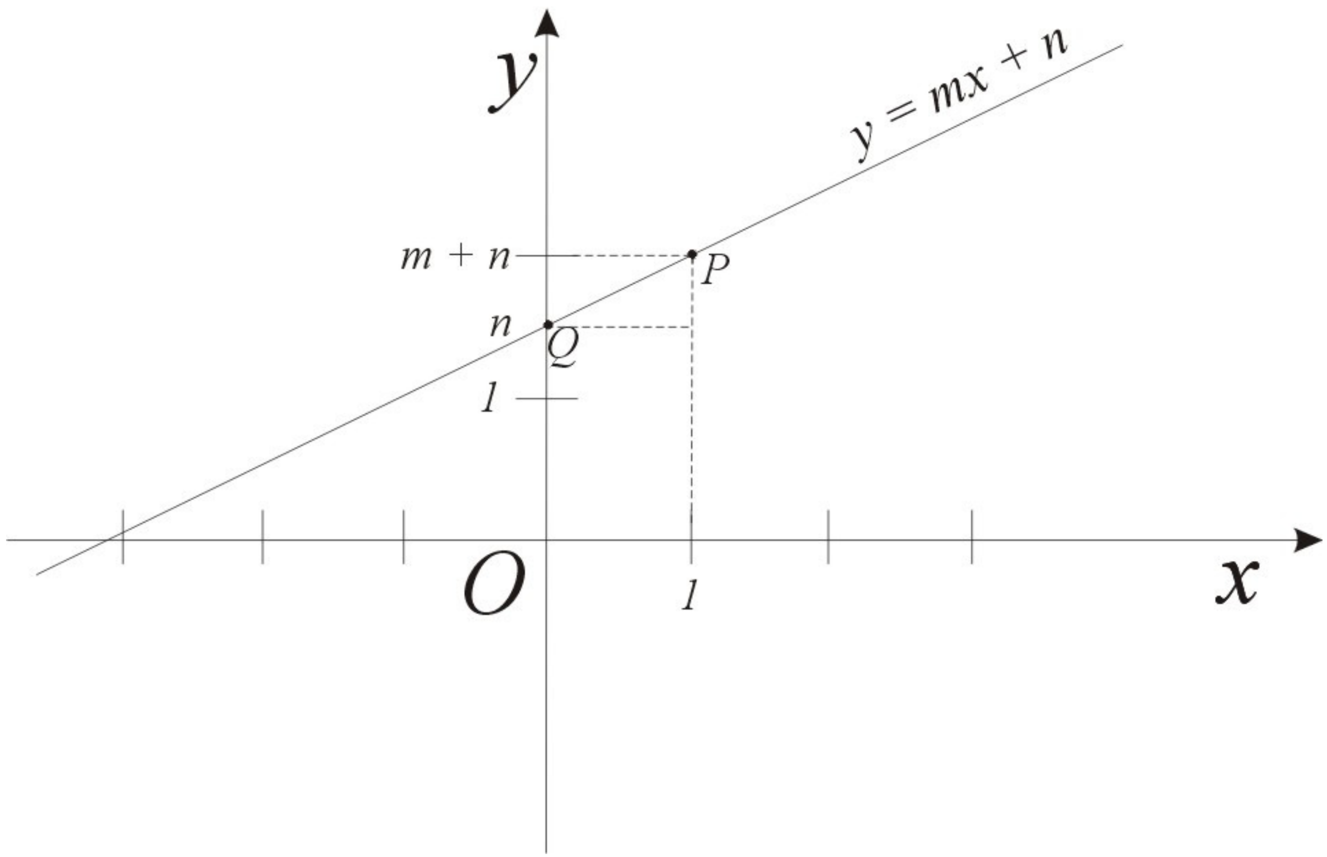
In definitiva la generica retta del piano cartesiano (escludendo l'asse $x = 0$) ha equazione <u>esplicita</u>

$$y = mx + n,$$

nella quale m rappresenta la pendenza (coefficiente angolare) e n rappresenta l'ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y (intercetta).

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONI DI UNA GENERICA RETTA

Siano noti m ed n. Per rappresentare nel piano cartesiano la retta di equazione $y = mx + n$ basta rappresentare il punto $Q = O(0, n)$ ed il punto $P = P(1, m + n)$ e successivamente tracciare, con il righello, la linea passante per essi.



METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DI UNA GENERICA RETTA

Viceversa, se nel piano cartesiano è rappresentata una retta non parallela all'asse delle ordinate, ossia se sono noti due suoi punti distinti, $P_1 = P_1(x_1, y_1)$ e $P_2 = P_2(x_2, y_2)$, ossia

$$y_1 = mx_1 + n \quad \text{e} \quad y_2 = mx_2 + n,$$

m si determina in maniera analoga al caso delle rette passanti per l'origine

$$x_2 - x_1 \neq 0, \qquad y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \Longrightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Successivamente n è dato da:

$$n = y_1 - mx_1 \Leftrightarrow n = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1.$$

METODO DELLE COORDINATE: EQUAZIONE DI UNA GENERICA RETTA

Si consideri di nuovo l'equazione esplicita di una retta del piano non coincidente con l'asse y:

$$y = mx + n \Leftrightarrow -mx + y = n.$$

Si osservi che il moltiplicare per uno stesso fattore il primo ed il secondo membro non altera l'insieme delle sue soluzioni. Pertanto, una sua forma più generale, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, è nota come *equazione implicita di una retta*:

$$ax + by = c.$$

Quest'ultima ha il pregio di rappresentare anche gli assi cartesiani: infatti, scegliendo

- $a = 1$, $b = 0$ e $c = 0$ si ottiene $x = 0$;
- $a = 0$, $b = 1$ e $c = 0$ si ottiene $y = 0$.