TEORIA DEI SISTEMI

Richiami di Algebra

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI DI UNA MATRICE QUADRATA

- Sia A una matrice quadrata reale di dimensioni n
  - Un numero complesso λ si dice autovalore di A se e solo se

$$\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{C} \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{C}^n \neq 0 : Au = \lambda u$$

Autovettore (destro)

Spettro di A

  - Si noti che se $u \neq 0$, allora

$$Au = \lambda u \Leftrightarrow (\lambda I - A)u = 0 \Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$$

  - Quindi

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} \ldots + a_n = 0$$

Polinomio caratteristico

ALCUNE PROPRIETÀ

- $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \alpha\lambda \in \sigma(\alpha \mathrm{A})$ (α è uno generico scalare)
- $A = A^T \Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (se A è una matrice simmetrica i suoi autovalori sono reali)
- $A = A^* \Rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{R}$ (se A è una matrice hermitiana i suoi autovalori sono reali)

A^* =trasposta coniugata di A

- u è un autovettore di $A \Rightarrow \alpha u$ è un autovettore di A (α è uno generico scalare non nullo)
- Data una matrice quadrata ed invertibile T, si ha $\sigma(A) = \sigma(T^{-1}AT)$.

CALCOLO DI AUTOVALORI ED AUTOVETTORI

1. Trovare le radici del polinomio caratteristico (forniscono gli autovalori)
2. Per ciascun autovalore λ trovare le soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione lineare $(\lambda I - A)x = 0$ (forniscono gli autovettori)
3. In Matlab

```
>>[U,D]=eig(A);
```

Nota $AU = UD$ (D è una matrice diagonale a blocchi)

Le colonne di U forniscono gli autovettori.

SPAZI NORMATI

- Dato uno spazio vettoriale S questo si dirà normato se esiste una funzione da S ad $\mathbb{R}$, detta norma ed indicata con $||\cdot||$, che $\forall (x, y) \in S^2$ gode delle seguenti proprietà:

1. $||x|| \geq 0,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$ per ogni scalare λ
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

- **Esempio:** in $\mathbb{C}^n$ è possibile introdurre le seguenti norme

$$||x||_p = \begin{cases} (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p} & p \geq 1 \\ \max\limits_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_i| & p = \infty \end{cases}$$

SPAZI NORMATI

- **Esempio 2:** in $\mathbb{C}^{n\times m}$ è possibile introdurre le seguenti norme ($p \geq 1$)

$$||A||_p = \sup_{x\neq 0}\frac{||Ax||_p}{||x||_p} = \sup_{||x||_p=1}||Ax||_p \rightarrow \begin{cases} ||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^*A)} \\ ||A||_1 = \max_{j=1,2,..,m}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \\ ||A||_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}| \end{cases}$$

Norme indotte

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^2}$$

Norma di Froebenius

- Per $p = 2$ si ottiene la norma indotta dall'usuale norma euclidea, tale norma prende anche il nome di norma spettrale.

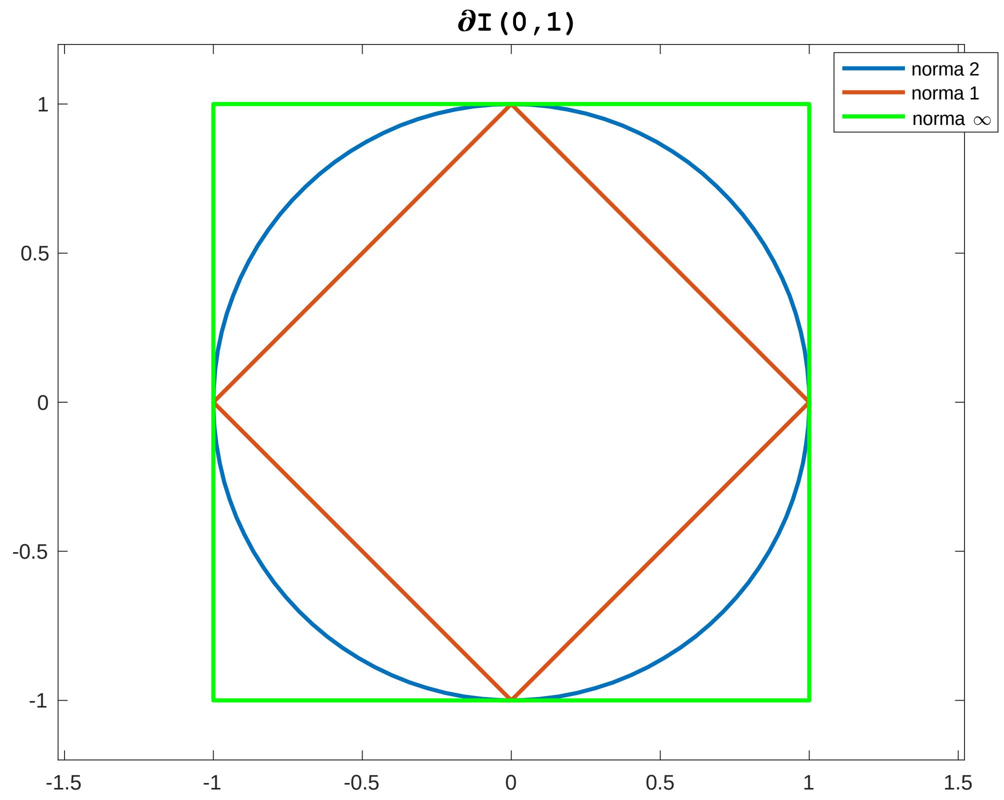
INTORNO DI UN PUNTO

- Data la definizione di norma è possibile definire l'intorno (aperto) di un punto

$$I(x_0, \delta) = \{x \in S : \|x - x_0\| < \delta\}$$

La forma che assume un intorno dipende dalla norma utilizzata.

Esempio: nel caso di $\mathbb{R}^2$ la figura a lato mostra la frontiera di $I(0,1)$ usando diversi tipi di norma.



PROPRIETÀ SUBMOLTIPLICATIVA DELLE NORME INDOTTE

- Si noti che data una matrice A ed un vettore x, per le norme indotte vale la proprietà:

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

- Da cui si ricava la cosiddetta proprietà sub-moltiplicativa

$$||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$$

dove A e B sono due matrici di dimensioni opportune.

- Si può dimostrare che anche la norma di Froebenius è sub-moltiplicativa.
- Se A è una matrice quadrata, e si considera una norma per cui vale la proprietà sub-moltiplicativa, si ha

$$||A^n|| \leq ||A||^n$$

CONVERGENZA DI UNA SUCCESSIONE IN UNO SPAZIO NORMATO

- Sia $\{x_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ una successioni di punti di uno spazio normato S, tale successione converge ad un punto $x_0 \in S$ se e solo se

$$\forall\epsilon > 0 \exists\nu \in \mathbb{N}: n > \nu \Rightarrow \left|\left|x_0 - x_n\right|\right| < \epsilon$$

- In generale in uno spazio normato il criterio di convergenza di Cauchy è solo condizione necessaria per la convergenza:
  - Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in S$ allora

$$\forall\epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \forall p > 0 \Rightarrow \left|\left|x_{n+p} - x_n\right|\right| < \epsilon$$

- In generale il criterio di convergenza di Cauchy non è condizione sufficiente
  - Esempio: la successione di numeri razionali $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ rispetta il criterio di convergenza di Cauchy, ma non è convergente in $\mathbb{Q}$.

SPAZI DI BANACH

- Uno spazio normato in cui il criterio di convergenza di Cauchy è condizione necessaria e sufficiente è detto spazio normato completo, o anche spazio di Banach.
- Gli spazi $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{nxm}, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n \times n}$ sono tutti spazi di Banach rispetto alle norme che sono state definite (la completezza dipende dalla scelta della norma)
- Lo spazio $\mathbb{Q}$ non è uno spazio completo (si completa immergendolo in $\mathbb{R}$)
- **Teorema:** In uno spazio di Banach una successione assolutamente convergente (ovvero se converge la successione delle norme) è convergente.

$$\{||x_n||\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

Successione in $\mathbb{R}$

Successione in S

CONVERGENZA DI UNA SERIE IN UNO SPAZIO NORMATO

- La convergenza di una serie $\sum_{i=0}^{\infty} x_n$ in uno spazio normato si riduce allo studio della convergenza della successione delle somme parziali

FUNZIONI MATRICIALI

- Consideriamo una serie di potenze in $\mathbb{R}$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

- Tale serie convergerà ad una funzione $f(x)$ in un intervallo simmetrico intorno all'origine del tipo $(-r, r)$ dove r è un numero reale positivo.
- Consideriamo ora una matrice quadrata X, e consideriamo la serie matriciale

$$a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

- Se $||X|| < r$ la serie matriciale risulterà essere assolutamente convergente, infatti:

$$a_0||I|| + a_1||X|| + a_2||X^2|| + \cdots + a_n||X^n|| + \cdots \leq a_0 + a_1||X|| + a_2\big||X|\big|^2 + \cdots + a_n\big||X|\big|^n + \cdots$$

Proprietà submoltiplicativa

Da cui possiamo ricavare la convergenza della serie matriciale. Per definizione

$$f(X) = a_0 I + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n + \cdots$$

- Esempio:

$$e^X = I + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} + \cdots$$

- In maniera analoga possono definirsi le funzioni matriciali $\sin(X)$, $\cos(X)$, $etc.$
- Data una matrice quadrata invertibile T si ha

$$f(T^{-1}XT) = a_0 T^{-1}T + a_1 T^{-1}XT + \cdots + (T^{-1}XT)^n + \cdots = T^{-1}f(X)T$$

- Inoltre

$$f(\mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_m)) = \mathrm{diag}(f(A_1), f(A_2), \dots, f(A_m))$$

ESEMPIO: LA MATRICE DI TRANSIZIONE

Dato il sistema lineare $\dot{x} = Ax + Bu$, la sua evoluzione libera è data

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

dove

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} + \cdots$$

Si noti che in generale

$$e^{A+B} \neq e^A \cdot e^B$$

Comunque si può dimostrare che

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

SPAZI DI SEGNALI

- Sia Ω un intervallo di $\mathbb{R}$, possono verificarsi tre casi
  1. $\Omega = (\mathrm{t}_0, +\infty[$, segnali monolateri
  2. $\Omega =]-\infty, +\infty[$, segnali bilateri
  3. $\Omega = (\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1)$, segnali definiti su orizzonte finito
- Sia $x: t \in \Omega \to x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x(t)$ è un segnale vettoriale di variabile reale.
- Diamo la seguente definizione $(p \geq 1)$

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{x: t \in \Omega \to x(t) \in \mathbb{R}^n | \int_\Omega ||x(t)||_p^p \, dt \ \ esiste \ finito\}$$

Valgono i seguenti teoremi

1. $\mathcal{L}^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach con norma definita da

$$||x||_p = \left(\int_\Omega ||x(t)||_p^p \, dt\right)^{1/p}$$

- Valgono i seguenti teoremi

1. $\mathcal{L}^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach con norma definita da

$$||x||_p = \left(\int_\Omega ||x(t)||_p^p \, dt\right)^{1/p}$$

2. $\mathcal{L}^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto interno definito da

$$\langle x, y\rangle = \int_\Omega y^T(t)x(t)\, dt$$

- Casi particolari

$$||x||_2 = \left(\int_\Omega x^T(t)x(t)\, dt\right)^{1/2}$$

$$||x||_1 = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|\, dt$$

$$||x||_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in\Omega} \max_{i\in\{1,2,\dots,n\}} |x_i(t)|$$

SPAZI DOTATI DI PRODOTTO INTERNO

- Sia S uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$ $(resp.\ \mathbb{R})$, S è detto dotato di prodotto interno se esiste una applicazione da S^2 ad $\mathbb{C}$ $(resp. \mathbb{R})$, indicata con $<\cdot,\cdot>$, che per ogni terna $(x, y, z) \in S^3$ soddisfa le proprietà

1. $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
3. $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$

- In uno spazio dotato di prodotto interno due vettori si dicono ortogonali $(x \perp y)$ se e solo se

$$\langle x, y\rangle = 0$$

SOTTOSPAZIO ORTOGONALE

- Sia W un sottoinsieme dello spazio S, il suo sottospazio ortogonale $W^\perp$ è il sottospazio definito come
$$W^\perp = \{x \in S : x \perp y \; \forall y \in W\}$$
- Alcune proprietà
  - $W^\perp$ è un sottospazio di S
  - $S^\perp = \{0\}$
  - Se W è un sottospazio ed S è a dimensione finita, allora
    1. $W^\perp$ è detto complemento ortogonale di W
    2. $(W^\perp)^\perp = W$
    3. $W \oplus W^\perp = S$ (in altri termine S si decompone nella somma diretta di un sottospazio e del suo complemento ortogonale)
    4. $\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(S)$

ESEMPI DI SPAZI DOTATI DI PRODOTTO INTERNO

- Esempio 1: $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = y^T x = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Esempio 2: $\mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = y^* x = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

- Esempio 3: $\mathcal{L}^2(\Omega)$

$$\langle x, y \rangle = \int_{\Omega} y^*(t) x(t) dt$$

SPAZI DI HILBERT

- Uno spazio dotato di prodotto interno diventa uno spazio normato se si definisce la norma (norma indotta dal prodotto interno) come

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

In $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ coincide con la norma 2

- Uno spazio normato, completo rispetto alla norma indotta dal prodotto interno, si dice uno spazio di Hilbert.

TRASFORMAZIONI LINEARI

Dati due spazi vettoriali S_1 ed S_2, una applicazione $\mathcal{A}$ da S_1 a S_2 si dice lineare se e solo se per ogni coppia $(x, y) \in S_1^2$ si ha

$$\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{A}(x) + \beta \mathcal{A}(y)$$

dove α e β sono generici scalari.

ESEMPIO 1

- $S_1 = \mathbb{R}^m, S_2 = \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n\times \mathrm{m}}, \mathcal{A}: x \in \mathbb{R}^m \to y = Ax \in \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare

Questo esempio mostra che una matrice di dimensioni $n \times m$ può essere vista come una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$.

Tra poco verificheremo che qualsiasi trasformazione lineare tra spazi a dimensione finita può essere rappresentata da una matrice.

ESEMPIO 2

- $P_n = \{Spazio\ dei\ polinomi\ di\ grado\ inferiore\ o\ uguale\ ad\ n\}$

$$\mathcal{A}_1 : p(z) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \in P_n \rightarrow$$
$$q(s) = \frac{d}{ds} p(s) = n a_0 s^{n-1} + (n-1) a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \in P_{n-1}$$
$$\mathcal{A}_2 : p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \in P_n \rightarrow$$
$$q(s) = (s-1)^n p\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \in P_n$$

- $\mathcal{A}_1$ ed $\mathcal{A}_2$ sono trasformazioni lineare (tra spazi a dimensione finita)

RAPPRESENTAZIONE DI UNA TRASFORMAZIONE TRA SPAZI A DIMENSIONE FINITA

- Siano X ed Y due spazi vettoriali di dimensioni rispettivamente n ed m, assumiamo inoltre che $e_1, e_2, \dots, e_n$ sia una base in X, e che $f_1, f_2, \dots, f_m$ sia una base in Y.
- Ciascun vettore di X ed Y possono essere rappresentati dalle loro coordinate nelle rispettive basi

$$x \in X \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$$

$$y \in Y \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i$$

- Consideriamo ora una rappresentazione lineare $\mathcal{A}$ da X a Y, ed assumiamo che

$$y = A(x)$$

- E' possibile scrivere

$$y = \sum_{i=1}^{m} y_i f_i = \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}(e_j) x_j$$

- Sia ora

$$v_j = \mathcal{A}(e_j) \in Y$$

- Ciascun v_i rappresenta il trasformato di un vettore della base in X secondo la trasformazione lineare $\mathcal{A}$, ed essendo un vettore di Y esso sarà rappresentabile attraverso le sue coordinate:

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i$$

- Cosi da poter scrivere

$$\sum_{i=1}^{m} y_i f_i = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) f_i$$

- Poiché le coordinate di un vettore in una data base sono univocamente determinate, deve necessariamente verificarsi

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \ per\ i = 1,2,, \dots, m$$

- Posto allora

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- Si può scrivere

$$\bar{y} = A\bar{x}$$

- dove

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times \mathrm{n}}$$

- Se ne deduce quindi che il vettore delle coordinate del punto di arrivo possono essere calcolate moltiplicando una opportuna matrice (che rappresenta la trasformazione nelle basi assegnate) per il vettore delle coordinate del punto di partenza.
- In altri termini assegnate le basi, qualsiasi trasformazione lineare tra spazi vettoriali a dimensione finita può essere rappresentata da una matrice di scalari. Questa matrice si ottiene trasformando i vettori della base nello spazio di partenza, e rappresentando questi vettori trasformati nella base dello spazio di arrivo.
- La colonna i della matrice A si ottiene trovando le coordinate nella base dello spazio di arrivo del trasformato dell' i-esimo vettore della base nello spazio di partenza

ESEMPIO

- Si consideri la trasformazione lineare

$$\mathcal{A}: p(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a3 \in P_3 \to$$
$$q(s) = (s-1)^3 p\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \in P_3$$

- Una base in P_3 è costituita dai vettori $z^3, z^2, z, 1$
- Ora:
  - $z^3 \to (s-1)^3 \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 = (s+1)^3 = s^3 + 3s^2 + 3s + 1$
  - $z^2 \to (s-1)^3 \left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 = (s-1)(s+1)^2 = s^3 + s^2 - s - 1$
  - $z \to (s-1)^3 \left(\frac{s+1}{s-1}\right) = (s-1)^2(s+1) = s^3 - s^2 - s + 1$
  - $1 \to (s-1)^3 = s^3 - 3s^2 + 3s - 1$
- Assumendo la stessa base sia nello spazio di partenza che nello spazio di arrivo, si ricava che la matrice A è quella mostrata a fianco

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Consideriamo il polinomio $z^3 + 2z^2 + 1$, il suo trasformato è il polinomio

$$(s-1)^3\left[\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^3 + 2\left(\frac{s+1}{s-1}\right)^2 + 1\right] = (s+1)^3 + 2(s-1)(s+1)^2 + (s-1)^3 =$$
$$= s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + 2s^3 + 2s^2 - 2s - 2 + s^3 - 3s^2 + 3s - 1 =$$
$$= 4s^3 + 2s^2 + 4s - 2$$

- Operando con la matrice A si ottiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Alle coordinate ottenute corrisponde il vettore $4s^3 + 2s^2 + 4s - 2$

FORME QUADRATICHE

Data una matrice quadrata P di dimensione n, la funzione

$$V: x \in \mathbb{R}^n \rightarrow V(x) = x^T P x = \sum_{i,j} P_{ij} x_i x_j \in \mathbb{R}$$

È detta forma quadratica in $\mathbb{R}^n$. Una forma quadratica è completamente caratterizzata dalla matrice P.

Di norma quando si considera una forma quadratica si assume, senza alcuna perdita di generalità, che la matrice P sia simmetrica. Infatti per una generica matrice P, si può scrivere

$$P = P + \frac{1}{2} P^T - \frac{1}{2} P^T = \frac{1}{2}(P + P^T) + \frac{1}{2}(P - P^T) = P_s + P_{as}$$

Dove P_s è una matrice simmetrica (parte simmetrica di P), e P_{as} è una matrice antisimmetrica (parte anti-simmetrica di P).

Presa una forma quadratica si ha quindi

$$V(x) = x^T P x = x^T P_s x + x^T P_{as} x = \frac{1}{2} x^T (P + P^T) x + \frac{1}{2} x^T (P - P^T) x$$

Ma

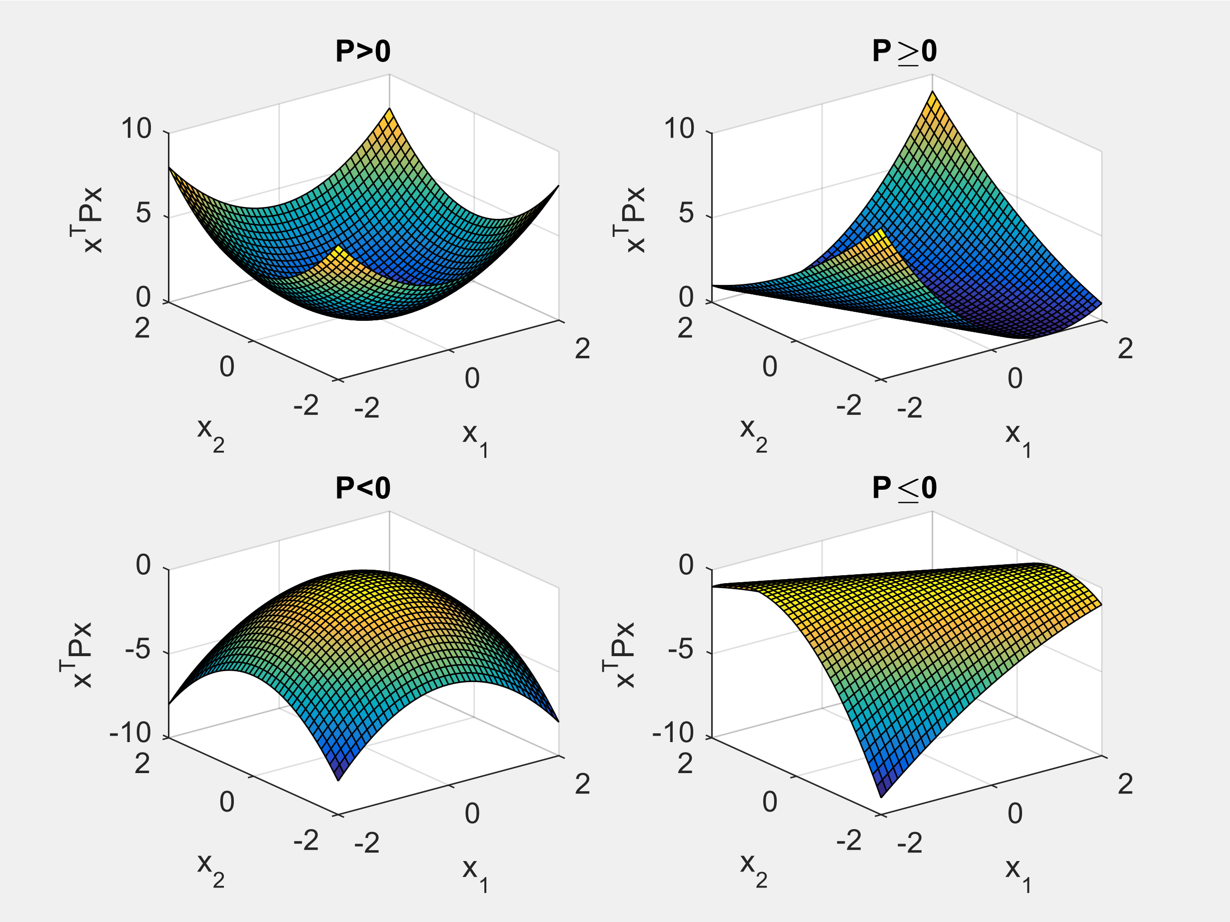
$$x^T P_{as} x = (x^T P_{as} x)^T \Leftrightarrow x^T P x - x^T P^T x = x^T P^T x - x^T P x \Leftrightarrow 2(x^T P x - x^T P^T x) = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^T (P - P^T) x \Leftrightarrow x^T P_{as} x = 0$$

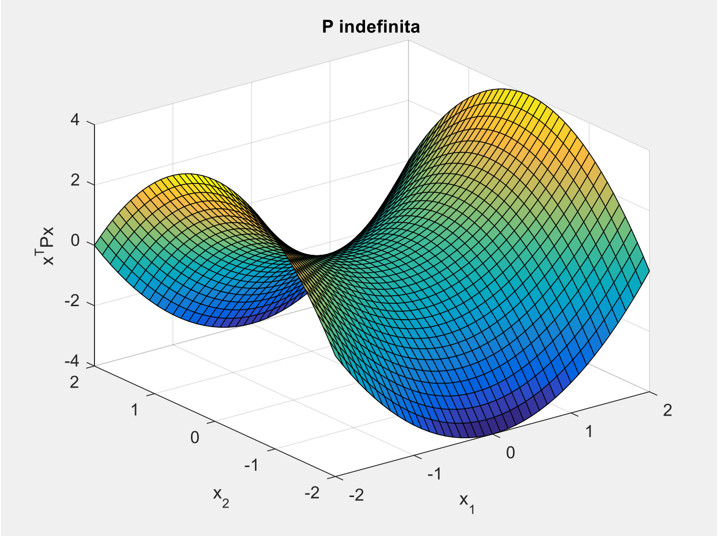
Ne consegue che la parte antisimmetrica di una matrice non gioca alcun ruolo nella corrispondente forma quadratica.

Da questo momento quando considereremo una matrice che appare in una forma quadratica assumeremo che essa sia simmetrica.

Data la matrice quadrata e simmetrica P, si danno le seguenti definizioni:

- P definita positiva $\Leftrightarrow P > 0 \Leftrightarrow x^T P x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- P semi-definita positiva $\Leftrightarrow P \geq 0 \Leftrightarrow x^T P x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$
- P definita negativa $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow x^T P x < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- P semi-definita negativa $\Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow x^T P x \leq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$
- Una matrice che non rispetta nessuna delle proprietà su indicate si dice indefinita in segno.


P>0
P ≥0
P<0
P ≤0
x^TPx
x_1
x_2


P indefinita
x^TPx
x_1
x_2

- Si noti che se una forma quadratica si annulla in x, essa si annullerà in tutti i vettori lungo la direzione di x.
- Gli autovettori di una matrice simmetrica sono reali, si può dimostrare che
  - $P > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0 \ \forall \lambda \in \sigma(P)$
  - $P \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0 \ \forall \lambda \in \sigma(P)$
  - $P < 0 \Leftrightarrow \lambda < 0 \ \forall \lambda \in \sigma(P)$
  - $P \leq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 0 \ \forall \lambda \in \sigma(P)$
  - Una matrice indefinita in segno avrà sia autovalori positivi che autovalori negativi.
- In alternativa, per stabilire il segno di una matrice si può utilizzare il test di Sylvester: indicata con P_{ii} la matrice ottenuta considerando le prime i righe e le prime i colonne di P, si ha
  - $P > 0 \Leftrightarrow |P_{ii}| > 0 \ \forall i = 1,2, \dots, n$
  - $P \geq 0 \Leftrightarrow |P_{ii}| \geq 0 \ \forall i = 1,2, \dots, n$
- Per verificare se una matrice è definita (o semi-definita) negativa, basta applicare il test di Sylvester alla matrice $-P$
- Infine: $P > Q \Leftrightarrow P - Q > 0, P \geq Q \Leftrightarrow P - Q \geq 0, P < Q \Leftrightarrow P - Q < 0, P \leq Q \Leftrightarrow P - Q \leq 0$

- Altre proprietà
- $P > 0 \Rightarrow |P| \neq 0 \Leftrightarrow P$ è invertibile
- $P < 0 \Rightarrow |P| \neq 0 \Leftrightarrow P$ è invertibile
- $A^T A$ è una matrice simmetrica inoltre $A^T A \geq 0$ (stessa cosa per la matrice AA^T)