Teoria degli Errori

Abbiamo detto prima che quando si effettua la misura di una grandezza fisica bisogna ricordare che questa non sarà mai esatta. La precisione di una misura è determinata dall'entità degli errori. Ci sono due principali tipi di errori:

1) Errori sistematici;
2) Errori accidentali (casuali).

Gli errori Sistematici sono legati alla precisione della taratura dello strumento di misura usato o al metodo di misura stesso ed in generale comportano una valutazione della grandezza misurata che è sempre più piccola o sempre più grande del valore aspettato (*valore vero)*.

Gli errori Casuali sono errori dovuti a cause accidentali (circostanze ambientali) che influenzano la misura: dipendono dal caso e quindi posso essere sia una sottostima che una sovrastima rispetto al valore vero.

Teoria degli errori

Come possiamo determinare una stima della nostra grandezza fisica che stiamo misurando?

1) Dobbiamo effettuare la misure ripetute e ottenere i valori x_1, x_2, x_3, …, x_n.
2) Calcolare la media aritmetica delle n misure fatte (*oppure semisomma per ottenere la stima*):

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} \qquad \left(x = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} \right)$$

3) La migliore stima delle nostre misure sarà il valore medio: M = $\overline{x}$, (*M* = *x*)
4) Determinare l’incertezza, l’errore della nostra misura. Il modo più semplice per farlo è di trovare l'errore assoluto usando l’espressione per semidispersione:

$$\Delta x = \varepsilon_a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

5) Infine possiamo dare il nostro risultato della misura detto **misura attendibile** in seguente modo:

$$\overline{x} \pm \varepsilon_a$$

Teoria degli errori

Altri modi per determinare l'incertezza.
Ricordiamo che a questo scopo servono ***l'indici di dispersione*** ovvero le quantità che caratterizzano quanto i nostri dati si discostano ***dall'indice di posizione***. L'indice di posizione invece ci permette di stimare il valore di una grandezza sulla base di *n* misure effettuate.

L'indice di posizione: semisomma, media aritmetica, mediana, moda.

L'indice di dispersione: semidispersione, scarto quadratico medio (scarto e scarto medio) noto anche come deviazione standard.

$$s_i = x_i - \bar{x},$$

$$\Delta x = \sigma_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + ..(x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Scarto quadratico medio o deviazione standard è un indicatore statistico che tiene conto di tutte le misure e non solo del valore massimo o minimo della serie di misure, cioè misura la dispersione intorno al valore medio.
Deviazione standard della media: $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

In questo caso la misura attendibile si da: $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$

Teoria degli errori

Errore relativo:
è il rapporto, espresso in percentuale, tra l'errore assoluto e la misura attendibile:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{\bar{x}}$$

Usando l'errore relativo la misura attendibile prende la seguente forma:

$$\bar{x} \pm \varepsilon_r$$

Supponiamo di aver misurato la lunghezza di un oggetto e il valore avvenuto è *l* = 50cm con l'incertezza di Δl= 2cm. In questo caso il nostro errore relativo sarà:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta l}{l} = \frac{2}{50} = 0.04 = 4\,\%$$

In seguito usando l'errore relativo la nostra **misura attendibile** diventa:

$$l = 50 \pm 4\,\% \qquad\qquad l = (50 \pm 2)\ cm$$

Teoria degli errori

Quando abbiamo a disposizione un numero elevato di dati sperimentali, possiamo dare una valutazione dell'incertezza più accurata di quella che si ottiene con la semidispersione massima.

x_i	$x_i - x_m$	$\lvert x_i - x_m \rvert^2$
73.2	-1.80	3.24
73.6	-1.40	1.96
73.8	-1.20	1.44
73.9	-1.10	1.21
74.1	-0.90	0.81
74.2	-0.80	0.64
74.3	-0.70	0.49
74.4	-0.60	0.36
74.6	-0.40	0.16
74.7	-0.30	0.09
74.8	-0.20	0.04
74.8	-0.20	0.04
74.9	-0.10	0.01
75.0	0.00	0.00
75.1	0.10	0.01

x_i	$x_i - x_m$	$\lvert x_i - x_m \rvert^2$
75.1	0.10	0.01
75.2	0.20	0.04
75.2	0.20	0.04
75.3	0.30	0.09
75.3	0.30	0.09
75.4	0.40	0.16
75.6	0.60	0.36
75.7	0.70	0.49
75.7	0.70	0.49
75.8	0.80	0.64
75.9	0.90	0.81
76.0	1.00	1.00
76.2	1.20	1.44
76.2	1.20	1.44
76.6	1.60	2.56

<u>Esempio</u>:
Supponiamo di aver fatto 30 misure di una grandezza (prima colonna nella tabella).

Possiamo subito calcolare il valore medio su 30 misure fatte:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = 75.03$$

Per ottenere una stima dell'incertezza usando l'espressione per semidispersione:

$$\Delta x = \frac{76.6 - 73.2}{2} = 1.7$$

Quindi la nostra misura sarà compresa nell'intervallo fra 76.73 e 73.33. quindi possiamo scrivere il nostro risultato (misura attendibile) in seguente modo:

$$x_0 = 75.03 \pm 1.7$$

Teoria degli errori

x_i	$x_i - x_m$	$\lvert x_i - x_m \rvert^2$
73.2	-1.80	3.24
73.6	-1.40	1.96
73.8	-1.20	1.44
73.9	-1.10	1.21
74.1	-0.90	0.81
74.2	-0.80	0.64
74.3	-0.70	0.49
74.4	-0.60	0.36
74.6	-0.40	0.16
74.7	-0.30	0.09
74.8	-0.20	0.04
74.8	-0.20	0.04
74.9	-0.10	0.01
75.0	0.00	0.00
75.1	0.10	0.01
75.1	0.10	0.01
75.2	0.20	0.04
75.2	0.20	0.04
75.3	0.30	0.09
75.3	0.30	0.09
75.4	0.40	0.16
75.6	0.60	0.36
75.7	0.70	0.49
75.7	0.70	0.49
75.8	0.80	0.64
75.9	0.90	0.81
76.0	1.00	1.00
76.2	1.20	1.44
76.2	1.20	1.44
76.6	1.60	2.56

Nella seconda colonna della tabella sono riportati gli scarti per ciascuna misura fatta: $x_i - \overline{x}$.
Va notato che la somma di tutti gli scarti ci restituisce lo zero (*verificatelo*):

$$\sum_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x}) = 0$$

Per ottenere il valore dello scarto medio σ_m dobbiamo prendere i valori assoluti (quindi tutti, ma presi con il segno positivo) di tutti gli scarti e dividere per il numero di misure:

$$\sigma_m = \frac{20.38}{30} = 0.68$$

E quindi la nostra misura vera sarà espressa da:

$$x_0 = 75.03 \pm 0.68$$

Teoria degli errori

x_i	$x_i - x_m$	$\lvert x_i - x_m \rvert^2$
73.2	-1.80	3.24
73.6	-1.40	1.96
73.8	-1.20	1.44
73.9	-1.10	1.21
74.1	-0.90	0.81
74.2	-0.80	0.64
74.3	-0.70	0.49
74.4	-0.60	0.36
74.6	-0.40	0.16
74.7	-0.30	0.09
74.8	-0.20	0.04
74.8	-0.20	0.04
74.9	-0.10	0.01
75.0	0.00	0.00
75.1	0.10	0.01

x_i	$x_i - x_m$	$\lvert x_i - x_m \rvert^2$
75.1	0.10	0.01
75.2	0.20	0.04
75.2	0.20	0.04
75.3	0.30	0.09
75.3	0.30	0.09
75.4	0.40	0.16
75.6	0.60	0.36
75.7	0.70	0.49
75.7	0.70	0.49
75.8	0.80	0.64
75.9	0.90	0.81
76.0	1.00	1.00
76.2	1.20	1.44
76.2	1.20	1.44
76.6	1.60	2.56

Nella terza colonna della tabella sono stati riportati gli scarti quadratici per ciascuna misura fatta. Calcoliamo quindi lo scarto quadratico medio, o deviazione standard (*verificate*):

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_m)^2}{N}} = \sqrt{\frac{21.683}{30}} = 0.85$$

Allora la nostra vera misura (misura attendibile) diventa: $x_0 = 75.03 \pm 0.85$

In fine abbiamo ottenuto tre indicazioni relative al valore vero della nostra misura:

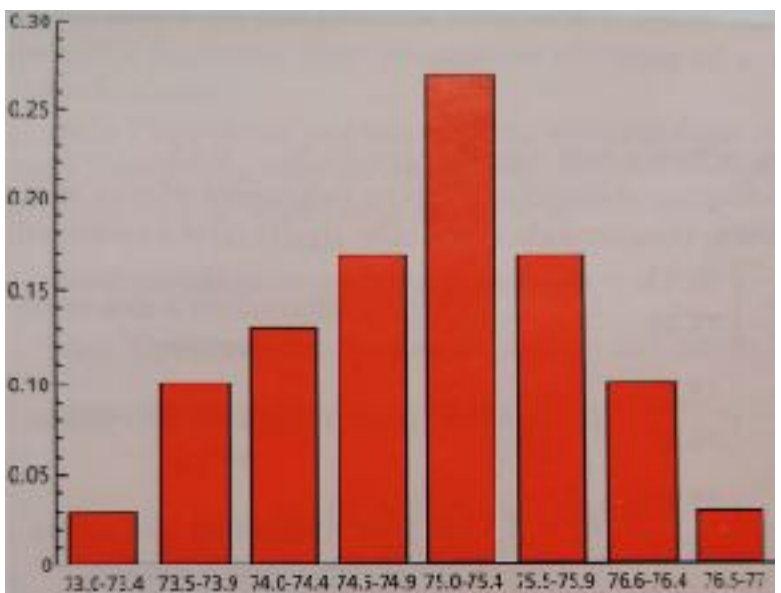
$$x_0 = 75.03 \pm 1.7,\ \ \varepsilon_r = 2.26\,\%\,(con\ \ il\ \ riferimento\ \ a\ \ una\ \ semidispersione)$$

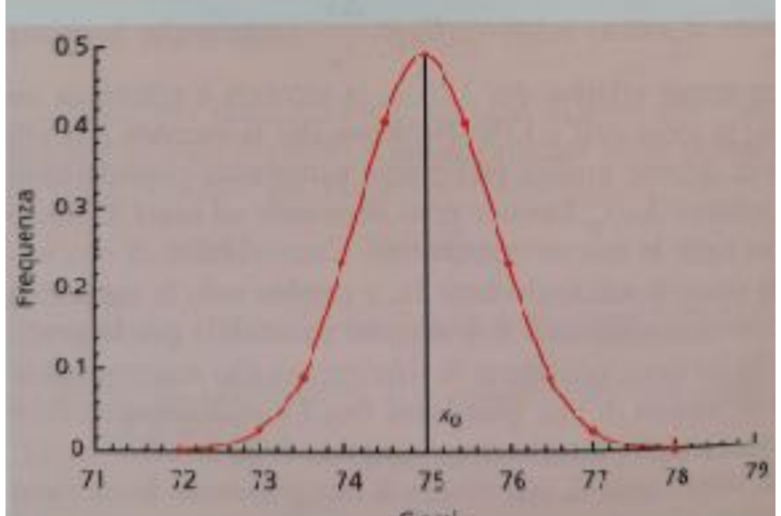
$$x_0 = 75.03 \pm 0.68,\ \ \varepsilon_r = 0.91\,\%\,(con\ \ il\ \ riferimento\ \ allo\ \ scarto\ \ medio)$$

$$x_0 = 75.03 \pm 0.85,\ \ \varepsilon_r = 1.13\,\%\,(con\ \ il\ \ riferimento\ \ allo\ \ scarto\ \ quadratico\ \ medio)$$

Teoria degli errori

x_i	$x_i - x_m$	$\|x_i - x_m\|^2$
73.2	-1.80	3.24
73.6	-1.40	1.96
73.8	-1.20	1.44
73.9	-1.10	1.21
74.1	-0.90	0.81
74.2	-0.80	0.64
74.3	-0.70	0.49
74.4	-0.60	0.36
74.6	-0.40	0.16
74.7	-0.30	0.09
74.8	-0.20	0.04
74.8	-0.20	0.04
74.9	-0.10	0.01
75.0	0.00	0.00
75.1	0.10	0.01
75.1	0.10	0.01
75.2	0.20	0.04
75.2	0.20	0.04
75.3	0.30	0.09
75.3	0.30	0.09
75.4	0.40	0.16
75.6	0.60	0.36
75.7	0.70	0.49
75.7	0.70	0.49
75.8	0.80	0.64
75.9	0.90	0.81
76.0	1.00	1.00
76.2	1.20	1.44
76.2	1.20	1.44
76.6	1.60	2.56





Considerando sempre la nostra tabella con i risultati della misura prendiamo come valore minimo 73.2 e come valore massimo 76.6 e dividiamo l'intero intervallo (73.2, 76.6) in un certo numero di parti uguali dette classi (*o anche bin*), ad esempio scegliendo come ampiezza di una classe 0.5.

Se ora riportiamo su ciascun intervallo un valore dell'ordinata corrispondente alla frequenza di quella classe (numero di misure nella classe diviso numero totale di misure) otteniamo l'istogramma con le barre rosse come in figura.

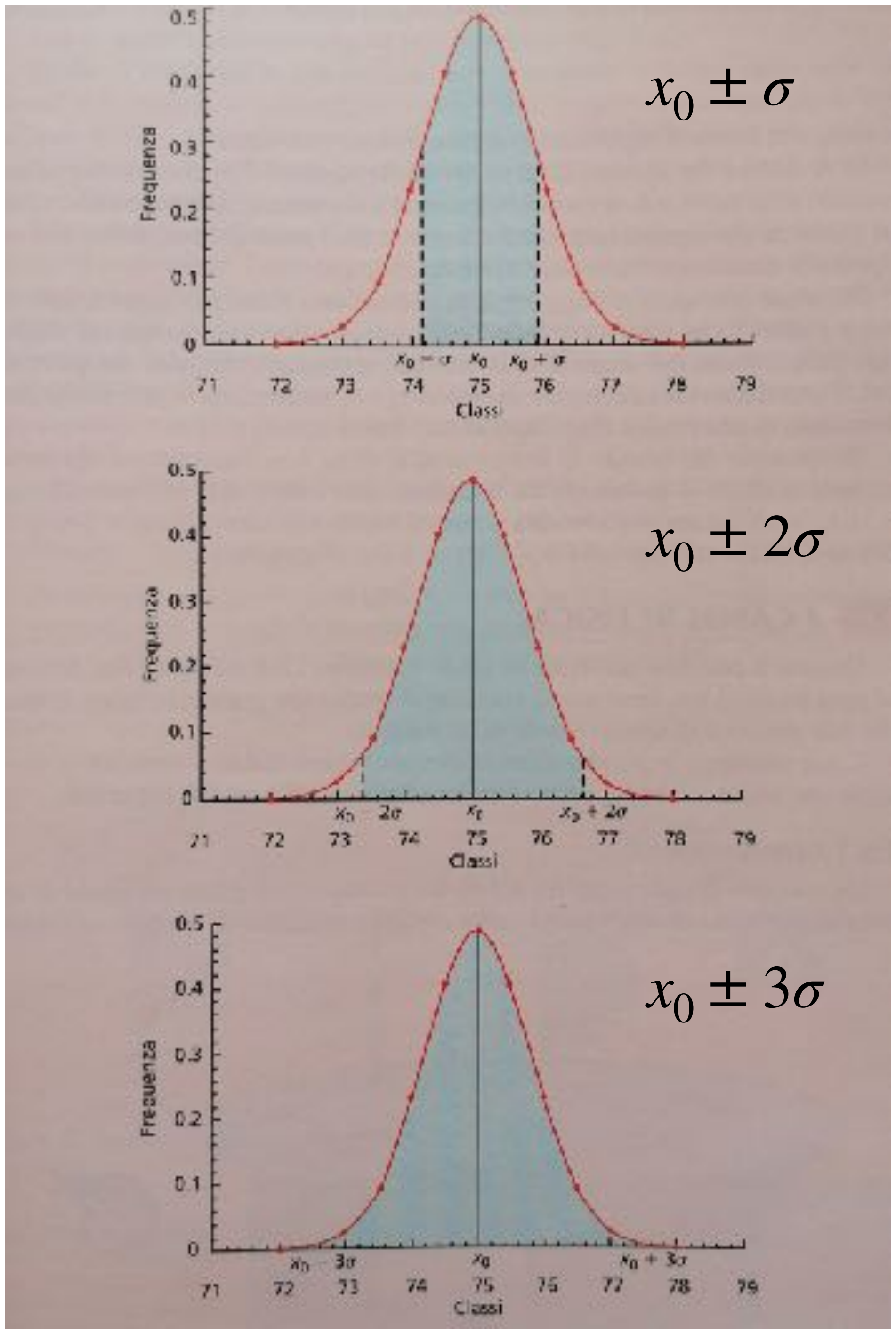
Il grafico mostra che la maggior parte dei risultati si addensa intorno al valore medio, mentre i risultati che differiscono abbastanza dal valor medio sono molto meno numerosi. Se noi aumentiamo il numero di misure ($n \to \infty$) si potrà dimostrare che gli errori sono effettivamente distribuiti casualmente.

Facendo il limite per $\Delta x \to 0$ e quindi aumentando il numero di misure e riducendo l'ampiezza delle classi (bin), l'istogramma si riduce ad una curva di **Gauss** esprimibile mediante la seguente equazione:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

dove x_0 è la nostra misura attendibile e σ è la deviazione standard.

Teoria degli errori



La curva di Gauss ha le seguenti proprietà:
È simmetrica.

E' centrata nel valore medio delle misure ($\overline{x}$).

Lo scarto quadratico medio σ (la deviazione standard) è la stima dell'incertezza.

Dal punto di vista statistico, presi due punti x_1 e x_2, l'aria della curva delimita dai valori di x_1 e x_2 x_2 rappresenta la probabilità che il risultato di una misura sia compreso fra i valori x_1 e x_2.

Ad esempio l'intervallo $x_0 \pm \sigma$ corrisponde all'aria pari a 68.3% rispetto al totale e quindi la probabilità che il risultato della misura cada in quel intervallo è pari a 68.3%.

L'intervallo $x_0 \pm 2\sigma$ corrisponde invece a 95.4% e $x_0 \pm 3\sigma$ a 99.7%.

Propagazione degli errori

Quando una grandezza fisica non è valutata direttamente, ma il suo valore viene ottenuto tramite un calcolo che si basa sulle misure di altre grandezze, il suo errore dipenderà su queste ultime.

Ci sono 5 semplici espressione per calcolare l'errore nel caso di Somma, Differenza, prodotto per una costante, prodotto e quoziente fra due grandezze misurate.

Consideriamo la somma o la differenza di due misure sperimentali $a = \overline{a} \pm \Delta a$ e $b = \overline{b} \pm \Delta b$. L'incertezza sulla somma o differenza di dati sperimentali è uguale alla somma o differenza delle corrispondenti incertezze. Quindi scriviamo:

$$c = a + b$$

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b$$

$$c = a - b$$

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b$$

Propagazione sul prodotto per una costante:

$$c = k \cdot a$$

$$\Delta c = k \cdot \Delta a$$

Propagazione degli errori

Propagazione degli errori sul **prodotto**:

$$c = a \cdot b$$

$$\Delta c = b \cdot \Delta a + a \cdot \Delta b$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Propagazione degli errori sul **rapporto**:

$$c = \frac{a}{b}$$

$$\Delta c = \frac{\Delta a}{b} + a\frac{\Delta b}{b^2}$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Propagazione degli errori

Trovare la massa totale del liquido:

M_A = massa recipiente A e contenuto = (540 ± 10) g
m_A = massa recipiente A vuoto = (72 ± 1) g
M_B = massa recipiente B e contenuto = (940 ± 20) g
m_B = massa recipiente A vuoto = (97 ± 1) g

La massa totale del liquido sarà data da:

$$M = M_A - m_A + M_B - m_B = (540 - 72 + 940 - 97)\ g = 1311g$$

e l'errore di questo valore sarà:

$$\Delta M = \Delta M_A + \Delta m_A + \Delta M_B + \Delta m_B = (10 + 1 + 20 + 1)\ g = 32g$$

Quindi il nostro risultato finale diventa:

$$m_{tot} = M \pm \Delta M = (1311 \pm 32)\ g$$

Teoria degli errori

Es:
Misure effettuate: $x1 = 32.2$, $x2=32.4$, $x3=32.4$, $x4=32.6$, $x5=32.1$
Trovare: Valore medio, Errore assoluto, Scarto quadratico medio, Deviazione standard, Errore relativo.

Es:
Calcolare densità di nu corpo e l'errore della misura.
$M = (9 \pm 1)$ kg, $V = (3.0 \pm 0.1)$ m3.

Es:
Date due lunghezze $L1 = (3.0 \pm 0.3)$ m ed $L2 = (2.1 \pm 0.2)$m. Calcolare l'errore assoluto e l'errore relativo sull'area $A = L1 \times L2$.

Es:
Date tre lunghezze $L1 = (4.1 \pm 0.3)$ m, $L2 = (3.5 \pm 0.2)$ m, $L1 = (1.1 \pm 0.1)$ m, calcolare l'errore assoluto e l'errore relativo sul volume del parallelepipedo $V = L1 \times L2 \times L3$.

Es: Date le due risultati di misura $A = (12.5 \pm 0.3)$ g e $B = (5.2 \pm 0.2)$ g, calcolare l'errore sulla somma A+B e sulla differenza A-B.