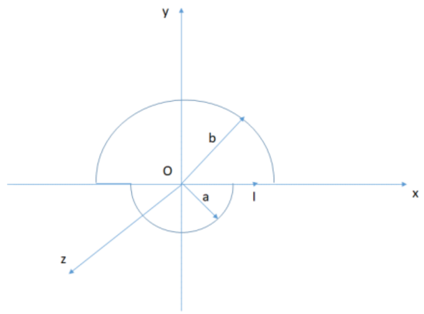
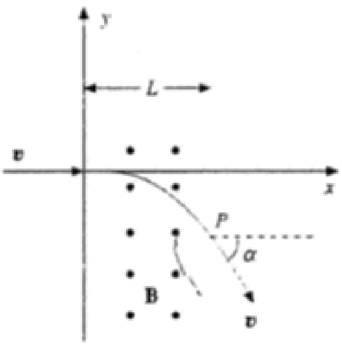
Prova scritta di Fisica Generale II del 7 marzo 2023

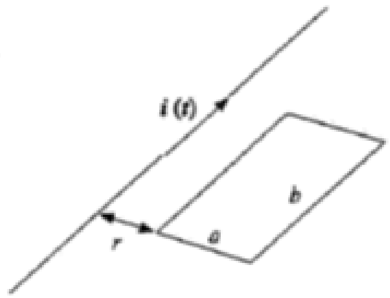
Esercizio 1. Nel circuito mostrato n figura i raggi delle semicirconferenze valgono a=1cm e b=2cm, rispettivamente. Se la corrente che fluisce nel circuito vale I=2.5A determinare (i) il campo **B** nel centro O del sistema, (ii) il momento magnetico **m** del circuito, e (iii) il momento meccanico τ in corrispondenza dell'applicazione di un campo **B** = **i** + **j** + **k** in Tesla.



Esercizio 2. Un protone ($q=+1.67\text{x}10^{-19}$ C, $m_p=1.67\text{x}10^{-27}$Kg) di energia cinetica E_k=50MeV (1eV=$1.67\text{x}10^{-19}$ Joule) si muove lungo l'asse x ed entra in una zona dello spazio in cui c'è un campo B=0.5T ortogonale ed uscente dal piano xy (v. figura), che si estende da x=0 a x=L=1cm. Determinare (i) le coordinate del punto di uscita del protone; (ii) l'angolo che la velocità in P forma con il semiasse positivo x del riferimento mostrato.



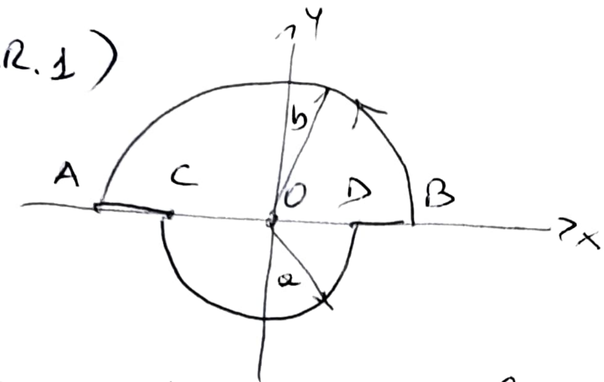
Esercizio 3. Un filo rettilineo è percorso dalla corrente $i(t)=I_0[1-\exp(-t/\tau)]$ con I_0 = 1 A e τ=50ms, e si trova in un piano in cui è presente una spira rettangolare di lati a=5cm e b=10cm con il lato più vicino parallelo al filo posto ad una distanza r=3cm. Determinare (i) la corrente indotta nella spira dopo un tempo t* in cui la corrente raggiunge il 75% del suo valore finale (si assuma $R_{spira}=33\Omega$); (ii) la carica Q(t*) che percorre la spira nell'intervallo di tempo (0, t*); (iii) la forza che agisce sul lato lungo della spira rettangolare posto più lontano dal filo all'istante t*.



Esercizio 4. Determinare l'energia elettrostatica totale di un sistema formato da una sfera di raggio R=1mm carica con densità non uniforme ρ=5r nC/mm^3, con r distanza misurata dal centro O della sfera, posta a contatto con un guscio dielettrico (ε_r=2.3) di raggio interno R e raggio esterno 2R, immerso nel vuoto.

GUIDA ALLA SOLUZIONE

ESR. 1)



Dalla formula di Laplace

$$d\underline{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{d\underline{l} \wedge \underline{\Delta r}}{|\underline{\Delta r}|^3}$$

nella semicirconferenza di raggio b si ha:

$$d\underline{B}_b(O) = +\frac{\mu_0 I}{4\pi}\,\frac{(b\,d\theta)}{b^2}\,\hat{k}$$

da cui

$$\underline{B}_b(O) = +\frac{\mu_0 I}{4\pi b}\int_0^{\pi} d\theta\,\hat{k} = +\frac{\mu_0 I}{4b}\,\hat{k}$$

Analogamente

$$\underline{B}_a(O) = +\frac{\mu_0 I}{4a}\,\hat{k}$$

E quindi

$$\underline{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\hat{k} = \dots \text{ Tesla}$$

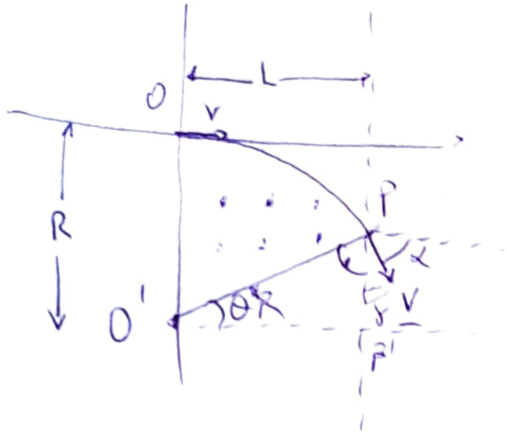
ii) Il momento magnetico della spira vale

$$\vec{m} = I\left[\frac{\pi b^2}{2}+\frac{\pi a^2}{2}\right]\hat{k} \quad e \quad \underline{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} = \hat{\imath}+\hat{\jmath}+\hat{k}$$

da cui

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m\hat{\imath} + m\hat{\jmath} \ \text{N m} = \dots$$

ESR. 2)



Il protone entra nella zona in cui è presente il campo magnetico $\underline{B}$ con velocità

$$v_0 : \frac{1}{2} m v_0^2 = E_k \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$$

Il moto è circolare uniforme, i.e.

$$|\underline{v}| = |\underline{v}_0|$$

Dall'equazione del moto otteniamo

$$\frac{m v_0^2}{R} = q v_0 B \Rightarrow R = \frac{m v_0}{qB}$$

Se trasliamo il sistema di riferimento con origine nel centro della circonferenza che percorre il protone, si ha

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \qquad \theta = \omega t = \frac{v_0}{R} t$$

D'altro canto

$$\begin{cases} L = R\cos\theta^* \rightarrow \theta^* = \arccos\left(\frac{L}{R}\right) = \arccos\left(\frac{L}{R}\right) \\ y_P = R\sqrt{1-\cos^2\theta^*} = R\sqrt{1-\left(\frac{L}{R}\right)^2} \end{cases}$$

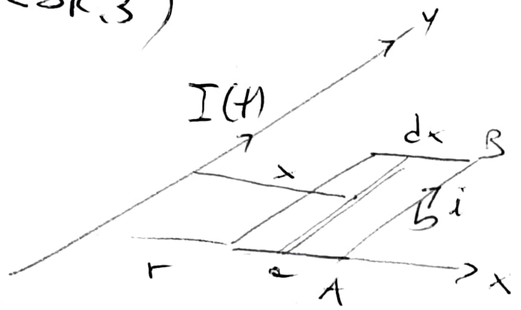
ii) l'angolo $\widehat{O'PP'} = \frac{\pi}{2} - \theta^*$, e quindi $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$

con $\gamma = \cancel{\frac{\pi}{2}} - \cancel{\frac{\pi}{2}} + \theta^*$

da cui

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta^* = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{L}{R}\right)$$

ESR.3)



L'istante t^* si determina imponendo

$$i(t^*) = \frac{3}{4} I_0 = \frac{3 I_0}{4} = I_0 \left(1 - e^{-t^*/\tau}\right)$$

$$t^* = -\tau \ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

Il flusso elementare è

$$d\phi = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}(b\,dx) \Rightarrow \phi = \frac{b \mu_0 I(t)}{2\pi} \int_r^{r+a} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \quad \text{entrante nel piano } (xy)$$

Da cui

$$f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \frac{d}{dt}\left[1 - e^{-t/\tau}\right] =$$

$$= -\frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right)\left(\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}\right)$$

da cui

$$i(t^*) = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi\tau} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) e^{-t^*/\tau} \quad \text{verso anti-orario}$$

ii) La carica che percorre la spira sarà data da

$$Q(t^*) = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi\tau} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right) \int_0^{t^*} e^{-t/\tau} dt =$$

$$= \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi\tau} \ln\left(\frac{r+a}{r}\right)(\tau)\left[1 - e^{-t^*/\tau}\right] \quad \text{Coulomb}$$

iii) Sul ramo AB della spira: $d\underline{F} = i\, d\underline{l} \wedge B = -i(t^*) B b \hat{\imath} \Rightarrow$

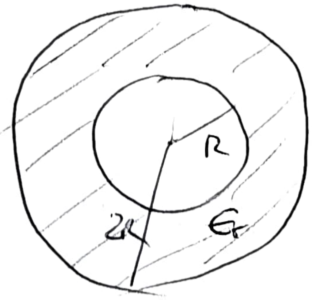
De ai

$$\underline{F}_{AB} = -\,i(t^*)\,\frac{\mu_0 I(t^*)}{2\pi(r+e)}\,b\,\hat{\imath} =$$

$$= \left(\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{c} \ln\left(\frac{r+e}{r}\right) \frac{1}{(r+e)} \left(1 - e^{-t^*/\tau}\right) e^{-t^*/\tau}\ \hat{\imath}$$

$= \ldots\ldots$ Newton

ESR. 4)



$\rho(r) = 5r \quad r \le R$

Valutiamo il campo elettrico in tutto lo spazio:

$r \le R$ Applicando il teorema di Gauss

$$4\pi r^2 E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r 4\pi x^2 dx \cdot \rho(x) = \frac{1}{\varepsilon_0} 20\pi \frac{r^4}{4}$$

da cui

$$\underline{E}_1 = \frac{5r^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}$$

La carica totale nella sfera vale:

$$Q_T = \int_0^R (4\pi r^2 dr)\cdot 5r = 20\pi \cdot \frac{R^4}{4} = 5\pi R^4 \text{ Coulomb}$$

Nel dielettrico $R \le r \le 2R$ si ha

$$4\pi r^2 D = Q_T \qquad \underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E}$$

e quindi

$$\underline{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q_T}{r^2}\hat{r}$$

Nel vuoto $r > 2R$

$$\underline{E}_3 = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

L'energia elettrostatica del sistema si ottiene:

$$U_E = \int_{SPAZIO}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)d\tau = \int_0^R\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_1^2(x)\right)4\pi x^2 dx + \int_R^{2R}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_2^2(x)\right)4\pi x^2 dx + \int_{2R}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_3^2(x)\,4\pi x^2 dx =$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_0^R\left(\frac{5x^2}{4\varepsilon_0}\right)^2 x^2 dx + \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_R^{2R}\left(\frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r x^2}\right)^2 x^2 dx + \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\int_{2R}^{\infty}\left(\frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\right)^2 x^2 dx = \ldots$$