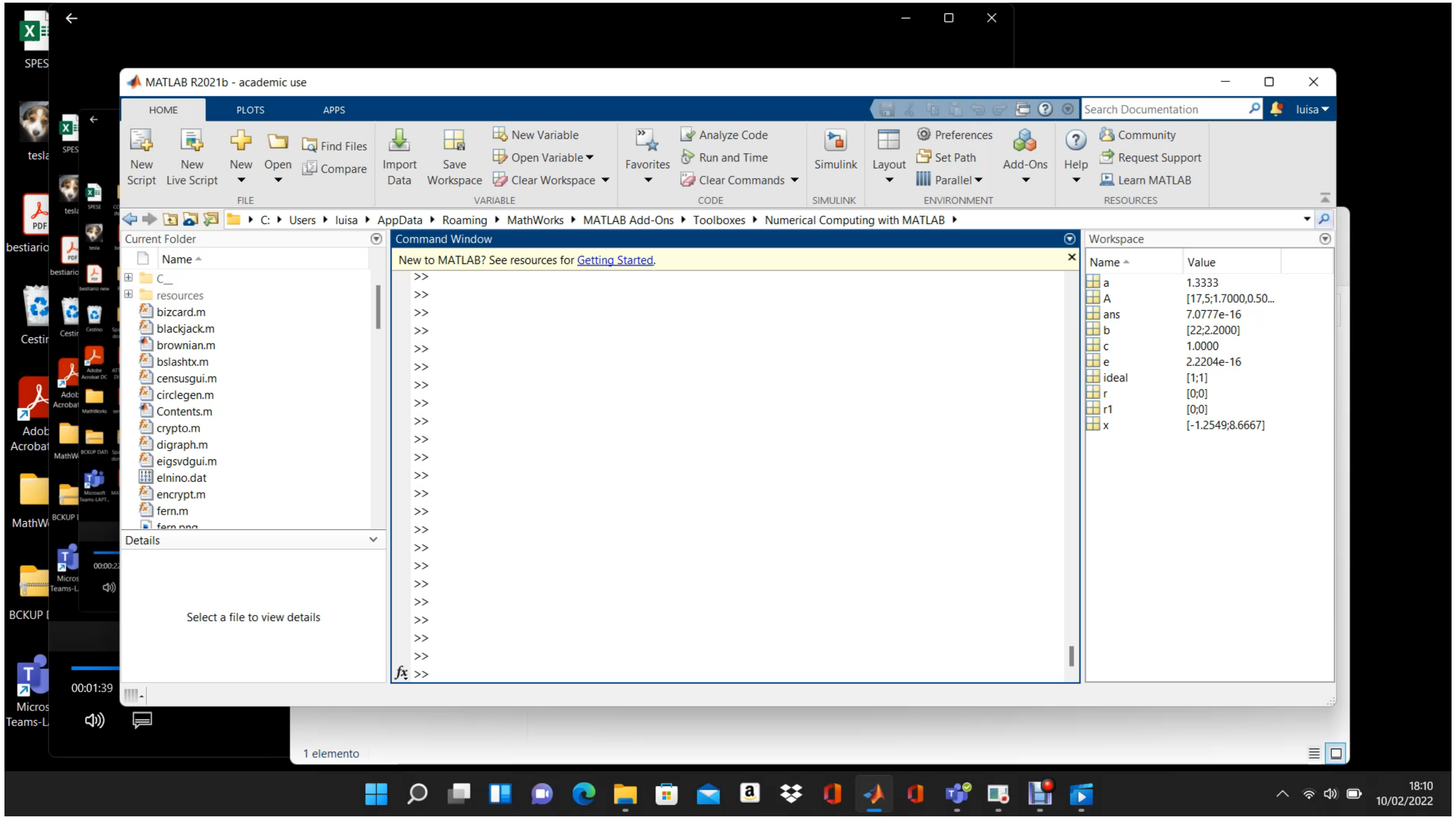
Il condizionamento di un problema

In matlab .....


MATLAB R2021b - academic use
HOME
PLOTS
APPS
Search Documentation
luisa
New Script
New Live Script
New
Open
Find Files
Compare
FILE
Import Data
Save Workspace
New Variable
Open Variable
Clear Workspace
VARIABLE
Favorites
Analyze Code
Run and Time
Clear Commands
CODE
Simulink
SIMULINK
Layout
Preferences
Set Path
Parallel
Add-Ons
ENVIRONMENT
Help
Community
Request Support
Learn MATLAB
RESOURCES
C: ▸ Users ▸ luisa ▸ AppData ▸ Roaming ▸ MathWorks ▸ MATLAB Add-Ons ▸ Toolboxes ▸ Numerical Computing with MATLAB ▸
Current Folder
Name
C_
resources
bizcard.m
blackjack.m
brownian.m
bslashtx.m
censusgui.m
circlegen.m
Contents.m
crypto.m
digraph.m
eigsvdgui.m
elnino.dat
encrypt.m
fern.m
Details
Select a file to view details
Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.
Workspace
Name
Value
a 1.3333
A [17,5;1.7000,0.50...
ans 7.0777e-16
b [22;2.2000]
c 1.0000
e 2.2204e-16
ideal [1;1]
r [0;0]
r1 [0;0]
x [-1.2549;8.6667]
1 elemento
18:10
10/02/2022

Cosa succede?

- In aritmetica classica, data una matrice quadrata non singolare ,
  $Ax = b$ (ovvero $r = A\,x - b = 0$) se e solo se x è l'unica «soluzione» ovvero $x = A^{-1}b$

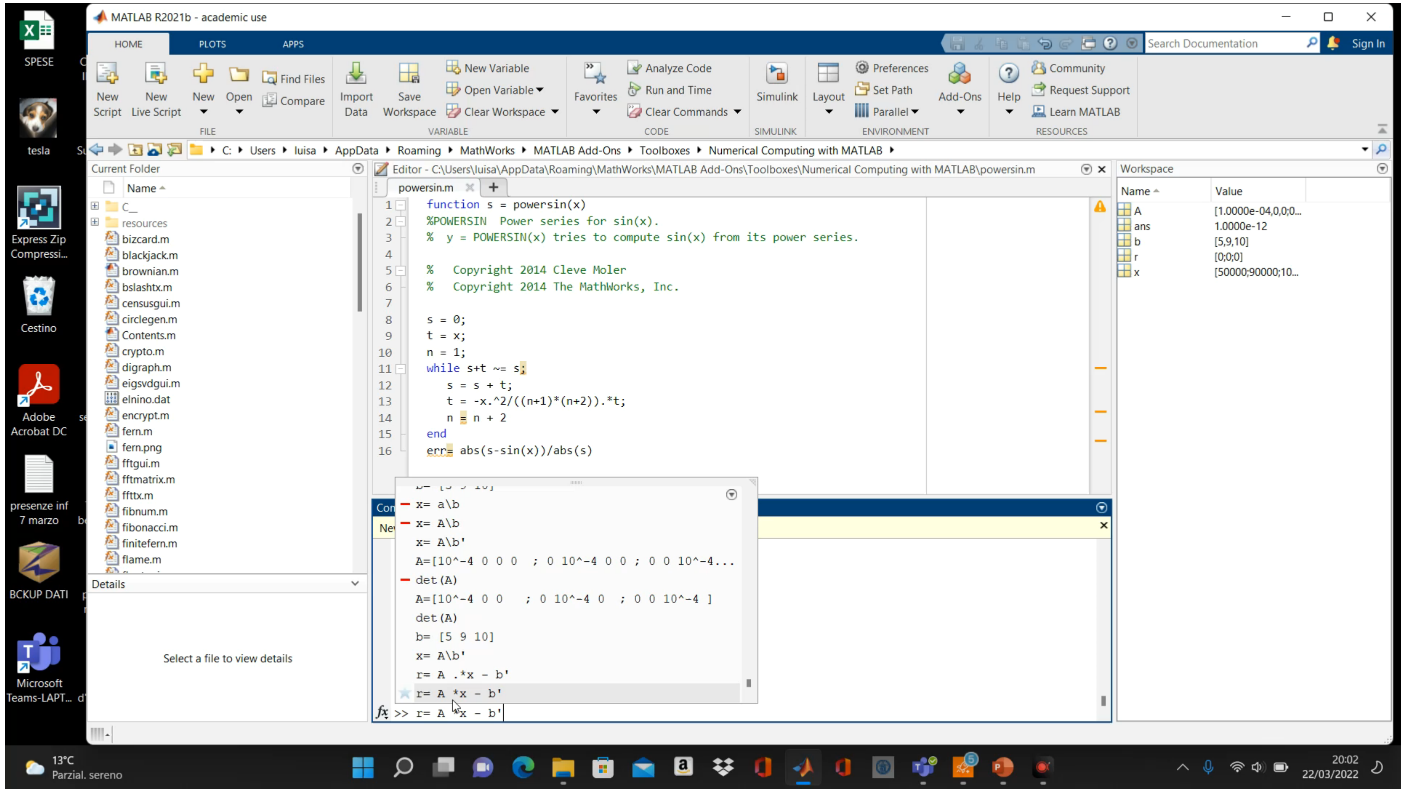
- In aritmetica a precisione finita, esistono casi in cui $Ax = b$ ammette «pseudo-soluzioni» ,
  (che annullano il residuo $r = Ax - b$) diverse dalla «soluzione»

<u>Matlab avvisa l'utente che il sistema è «badly scaled» ……cosa vuol dire?</u>

Matlab avvisa l’utente che A è «quasi singolare» ma ciò non significa che ogni matrice con

determinante piccolo

Si comporti in tal modo….. Quindi ?



Esempio 1:

$$\begin{cases} 4.19x + \quad 7y = 15 \\ 2.1\ \ x + 3.5y = 8 \end{cases}$$

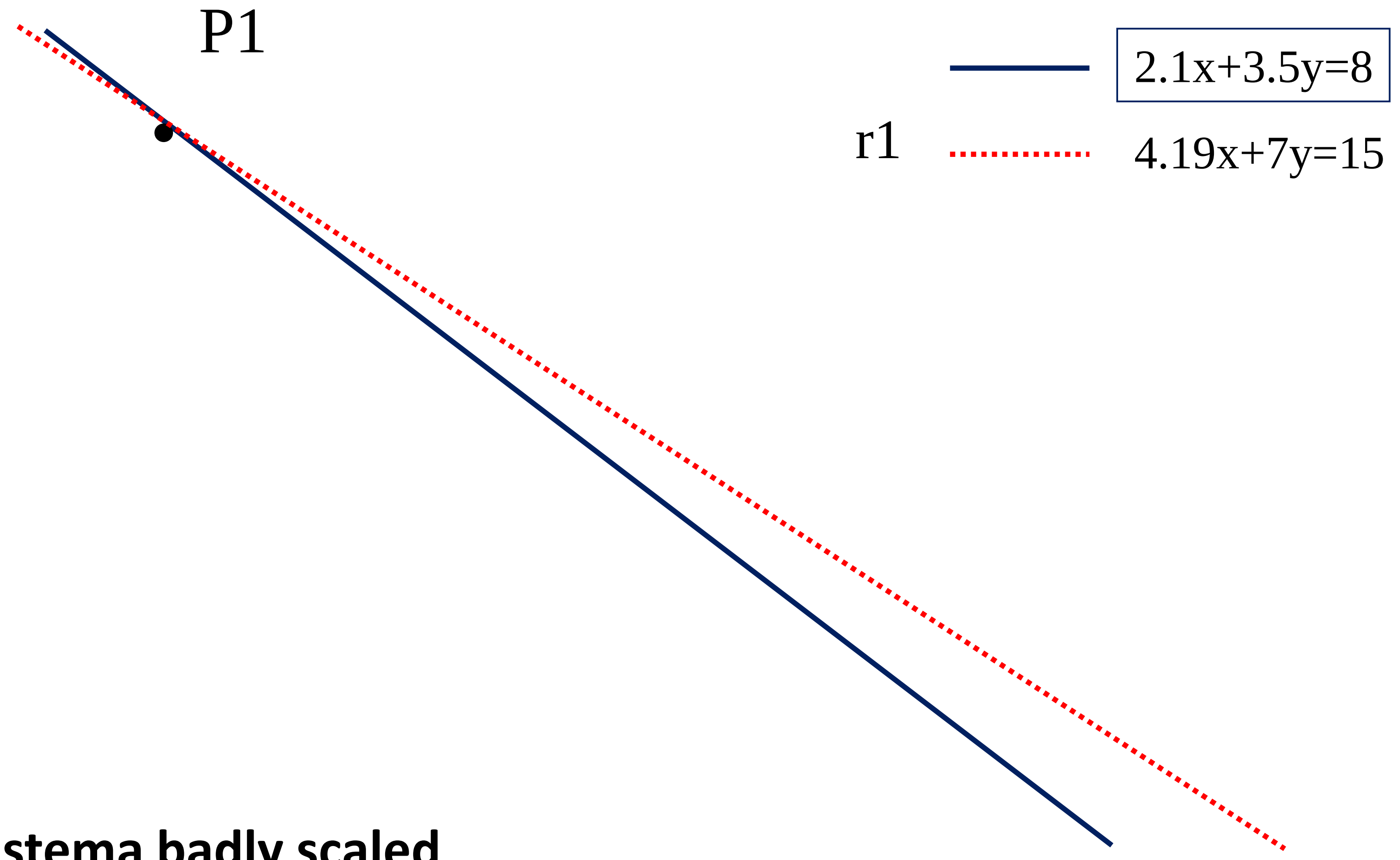
«Soluzione»

in un sistema aritmetico a

precisione infinita

$$\begin{pmatrix} 100 \\ -57.714 \end{pmatrix}$$

Interpretazione geometrica



Questo è un sistema badly scaled

Come si affronta un problema del genere?

PROBLEMA $\tilde{P}$

$$\begin{cases} 4.19\underline{2}x + 7y = 15 \\ 2.1\, x + 3.5y = 8 \end{cases}$$

Soluzione $\tilde{P}$

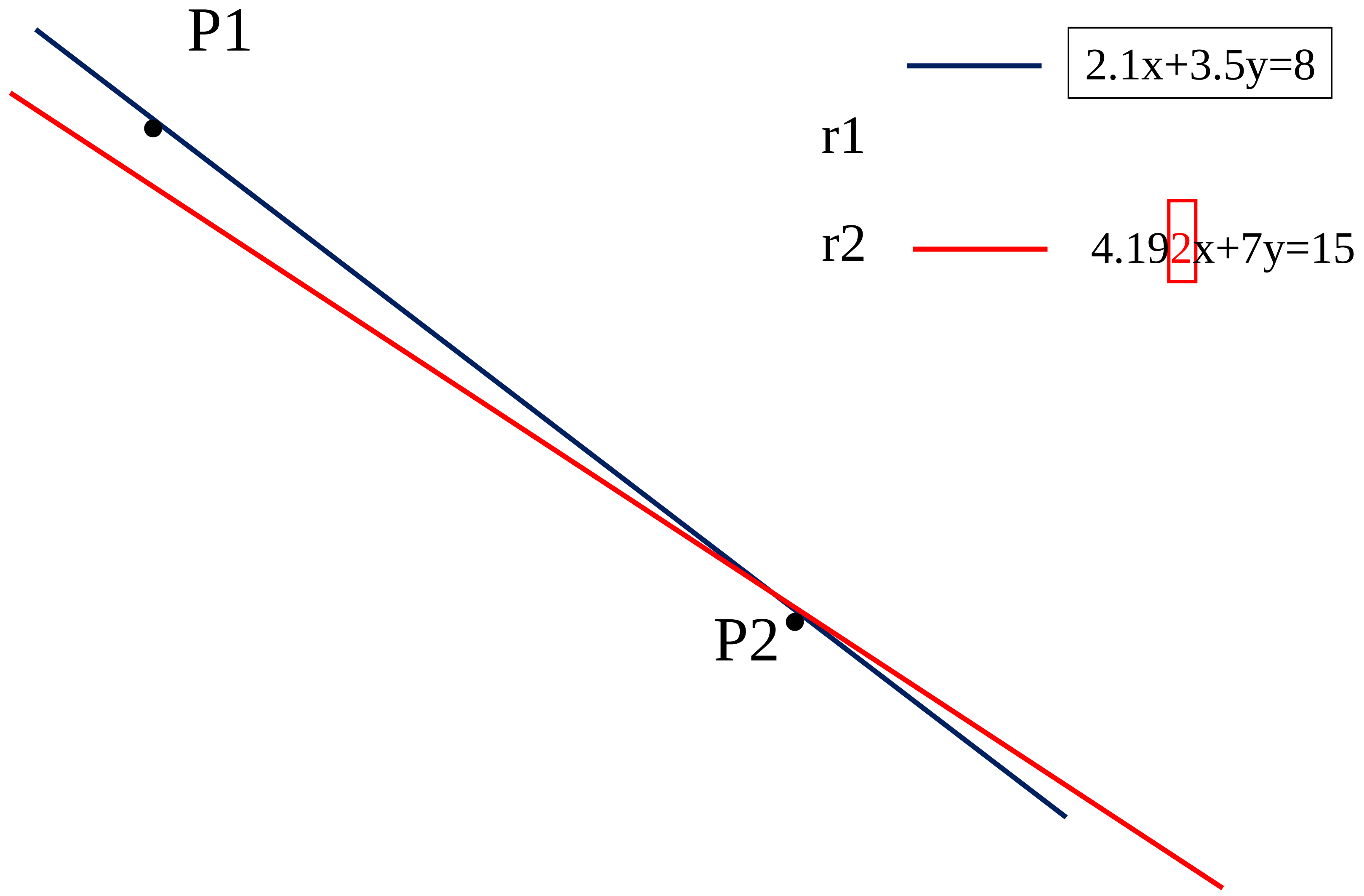
in un sistema aritmetico a

precisione infinita

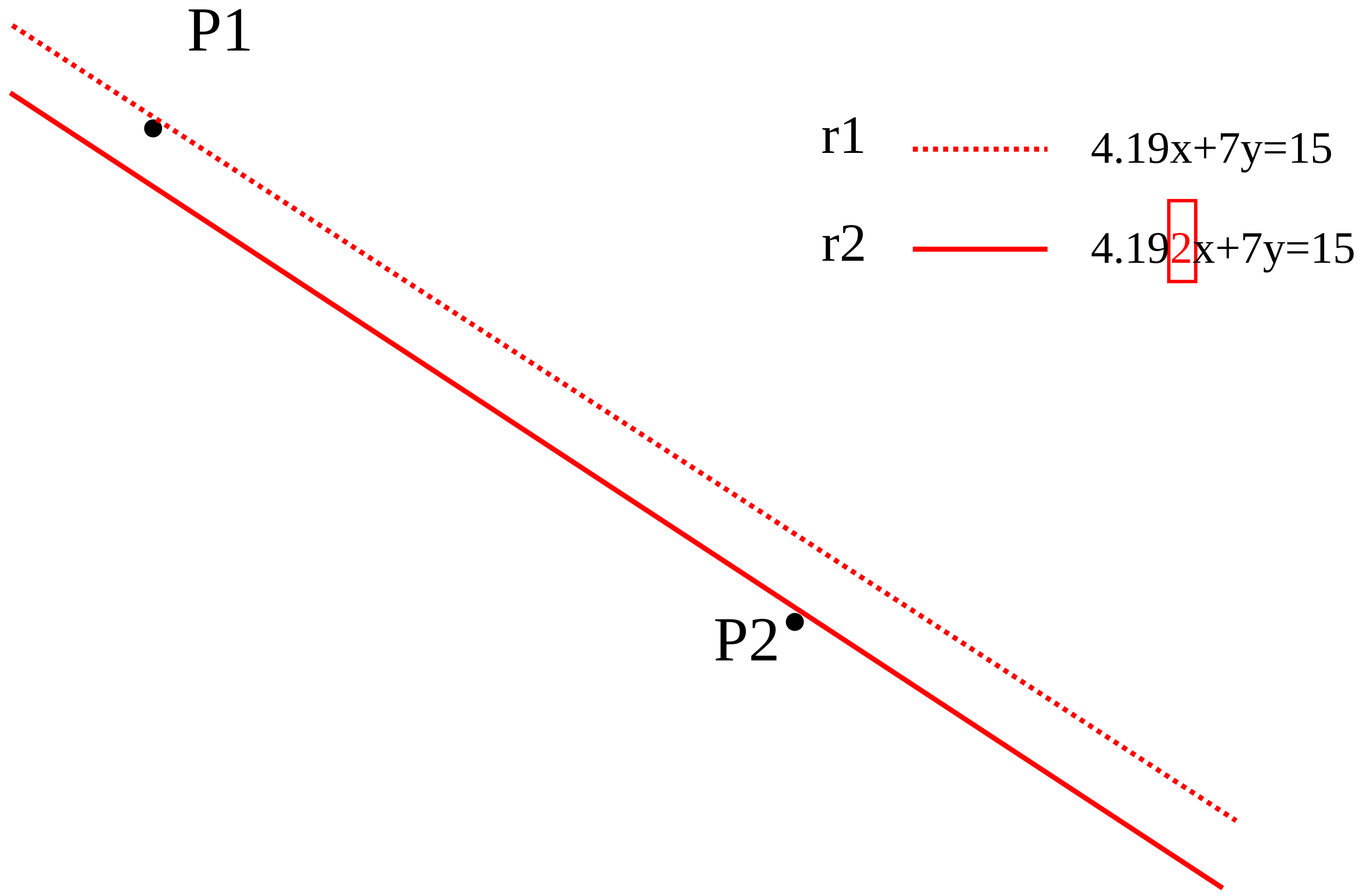
$$\begin{pmatrix} 125 \\ -72.714 \end{pmatrix}$$

Completamente diversa dalla soluzione di P.

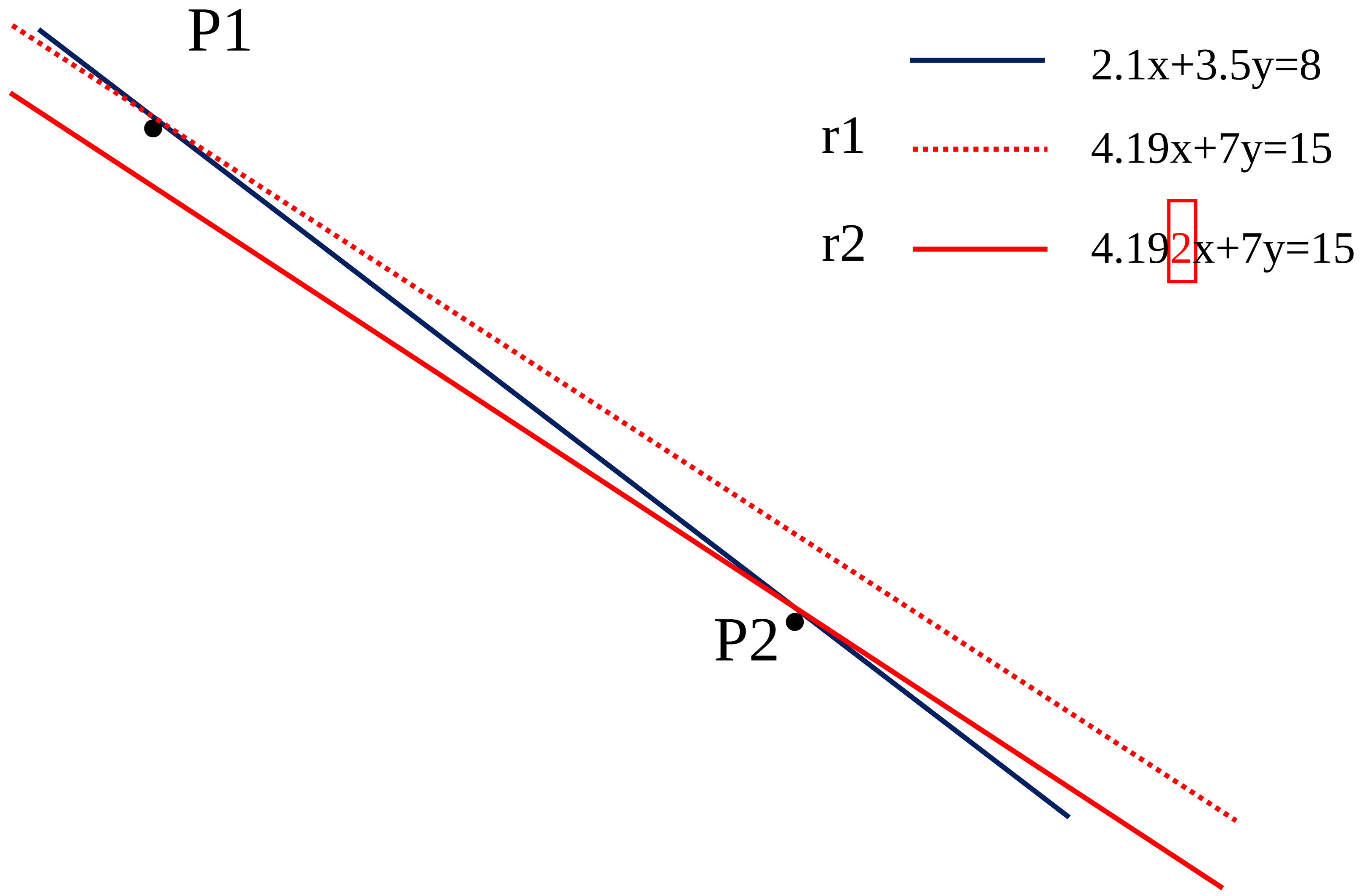
Interpretazione geometrica



Interpretazione geometrica



Interpretazione geometrica



Perturbazione del dato sulla 4ª cifra significativa

del coefficiente di X nella prima equazione

ovvero

$$E'_{4.19} = \frac{|4.19 - 4.19\boxed{2}|}{|4.19|} = 0.4773 \times 10^{-3}$$

$$\Downarrow$$

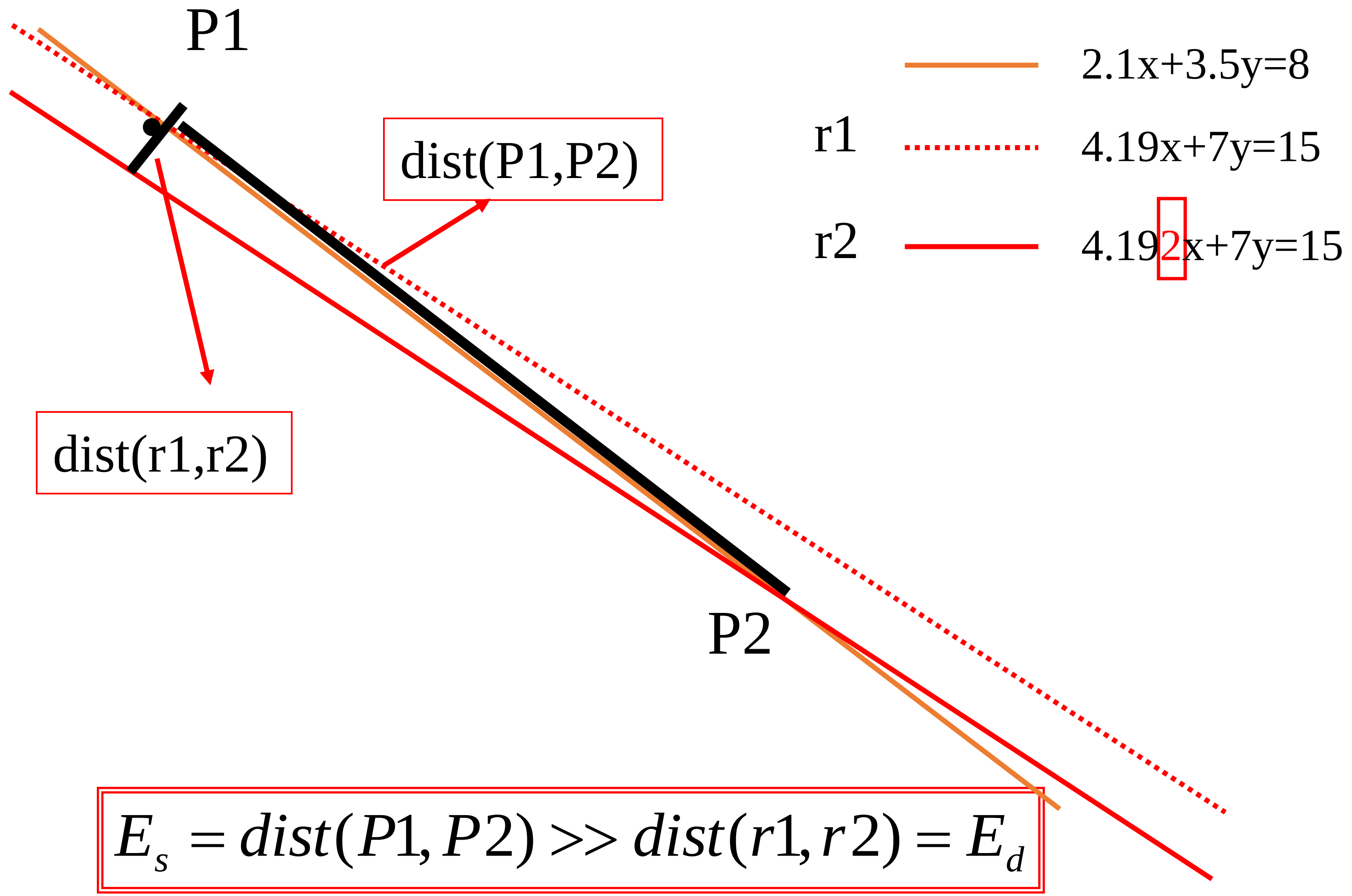
Soluzione con al più una cifra significativa corretta

ovvero

$$E'_x = \frac{|100 - 125|}{|100|} = 0.25 \times 10^{0}$$

$$E'_y = \frac{|57.714 - 72.714|}{|57.714|} = 0.2599 \times 10^{0}$$

Interpretazione geometrica



$$E_s = dist(P1, P2) >> dist(r1, r2) = E_d$$

Esempio 2:

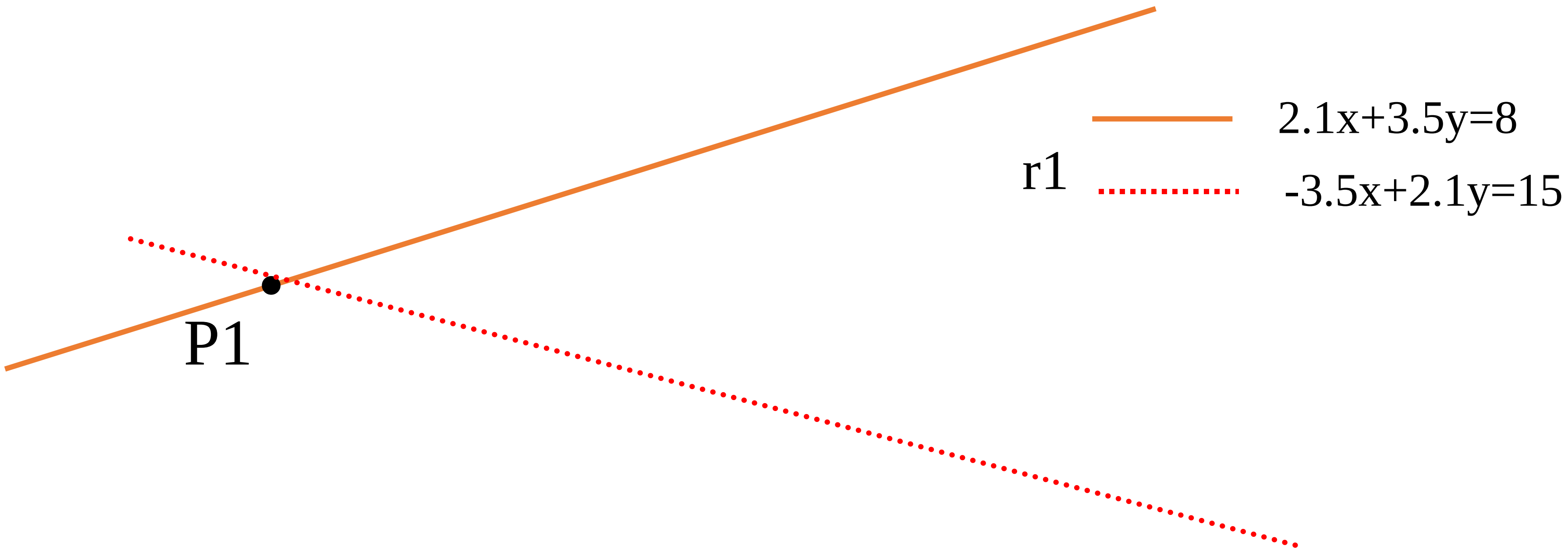
Problema P risoluzione di

$$\begin{cases} -3.5x + 2.1y = 15 \\ 2.1\ \ x + 3.5y = 8 \end{cases}$$

Soluzione di P
in un sistema aritmetico a
precisione infinita

$$\begin{pmatrix} -0.6723 \\ 2.6891 \end{pmatrix}$$

Interpretazione geometrica



Problema $\tilde{P}$ risoluzione di

$$\begin{cases} -3.50\underline{2}\,x + 2.1y = 15 \\ 2.1\,x + 3.5y = 8 \end{cases}$$

Soluzione di $\tilde{P}$

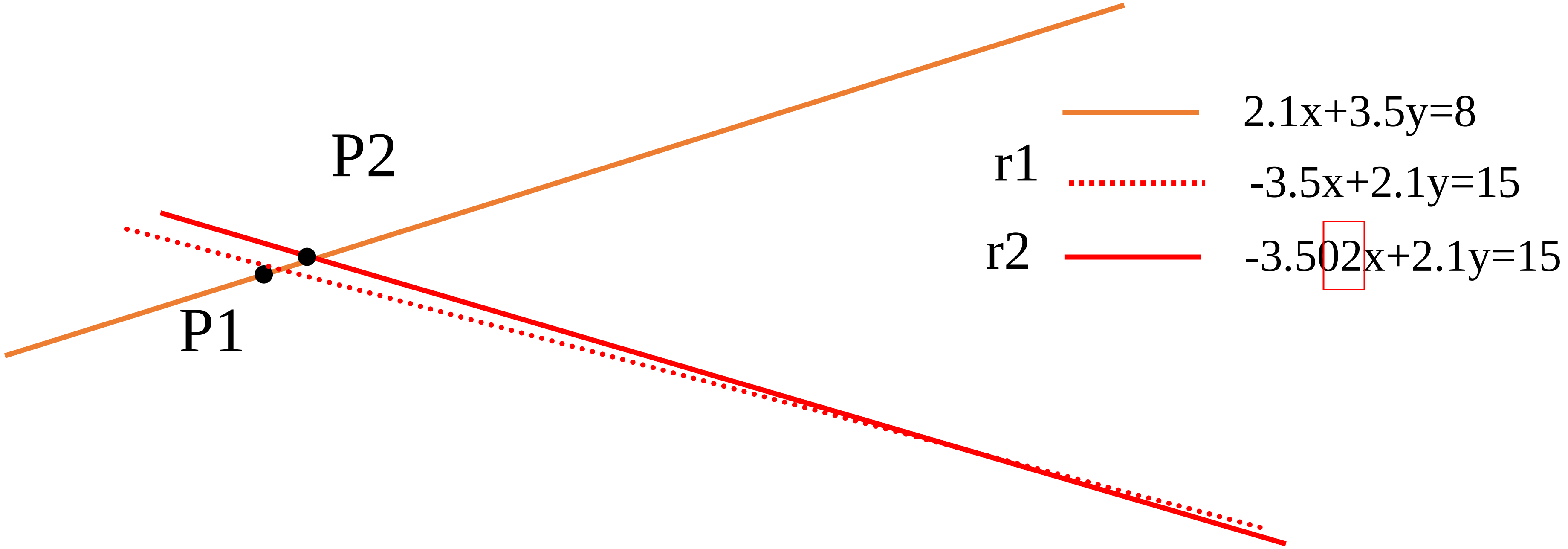
in un sistema aritmetico a

precisione infinita

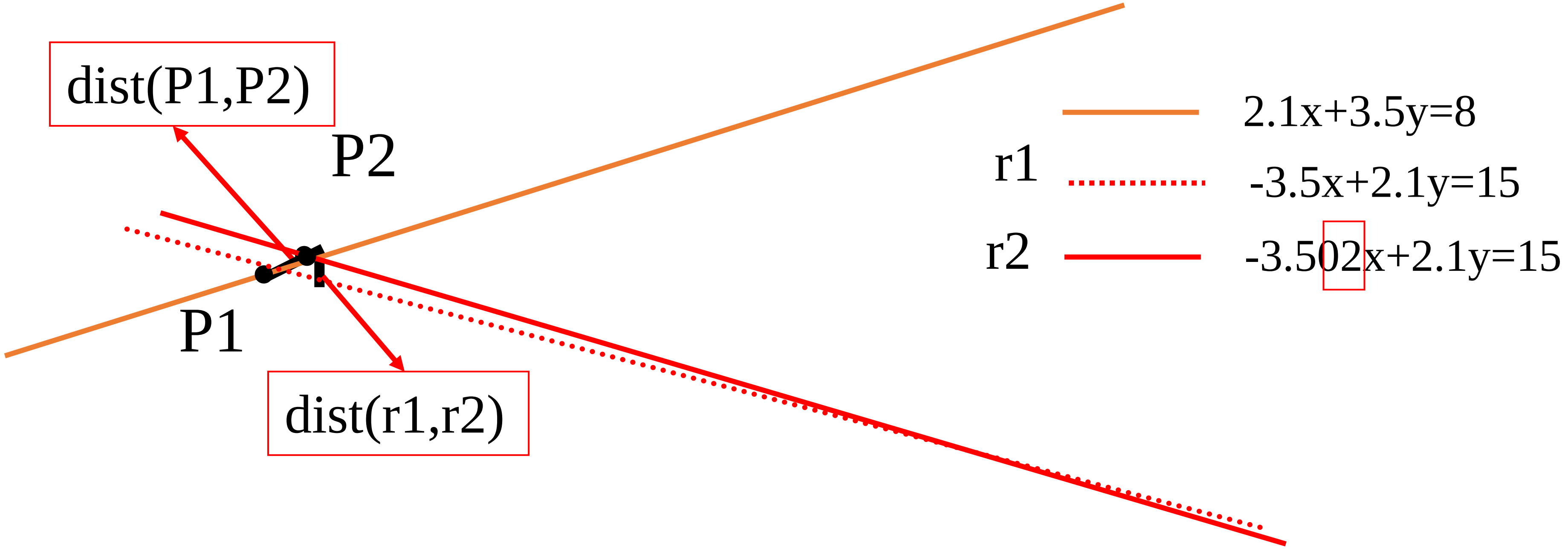
$$\begin{pmatrix} -0.6720 \\ 2.6889 \end{pmatrix}$$

Soluzione "vicina" alla soluzione di P

Interpretazione geometrica



Interpretazione geometrica



$$E_s = dist(P1, P2) \approx dist(r1, r2) = E_d$$

Perturbazione del dato sulla 3ª cifra significativa

del coefficiente di X nella prima equazione

ovvero

$$E'_{3.5} = \frac{|3.50 - 3.502|}{|3.50|} = 0.5714 \times 10^{-2}$$

Soluzione con almeno 3 cifre significative corrette

ovvero

$$E'_x = \frac{|-0.6723 - 0.6720|}{|-0.6723|} = 0.446 \times 10^{-3}$$

$$E'_y = \frac{|2.6891 - 2.6889|}{|2.6891|} = 0.743 \times 10^{-4}$$

Problema P

Calcolo di $z = x - y$ con

$x = 12345678.0$

$y = 12345677.0$

Soluzione di P (in un sistema aritmetico a precisione infinita)

$z = 1.0$

Problema $\tilde{P}$

Calcolo di $\tilde{z} = \tilde{x} - \tilde{y}$ con

$\tilde{x} = 12345678.1$ (Perturb. relativa di 10^{-9})

$\tilde{y} = 12345676.9$ (Perturb. relativa di 10^{-9})

Soluzione di $\tilde{P}$ (in un sistema aritmetico a precisione infinita)

$\tilde{z} = 1.20000000$ (errore relativo di 10^{-1})

Perturbazione **del dato** sulla 9ª cifra significativa di x e y

ovvero

$$E'_x = \frac{|12345678 - 12345678.1|}{|12345678|} = 0.81 \times 10^{-8}$$

$$E'_y = \frac{|12345677 - 12345676.9|}{|12345677|} = 0.81 \times 10^{-8}$$

$$\Downarrow$$

Soluzione con un errore sulla 2ª cifra significativa

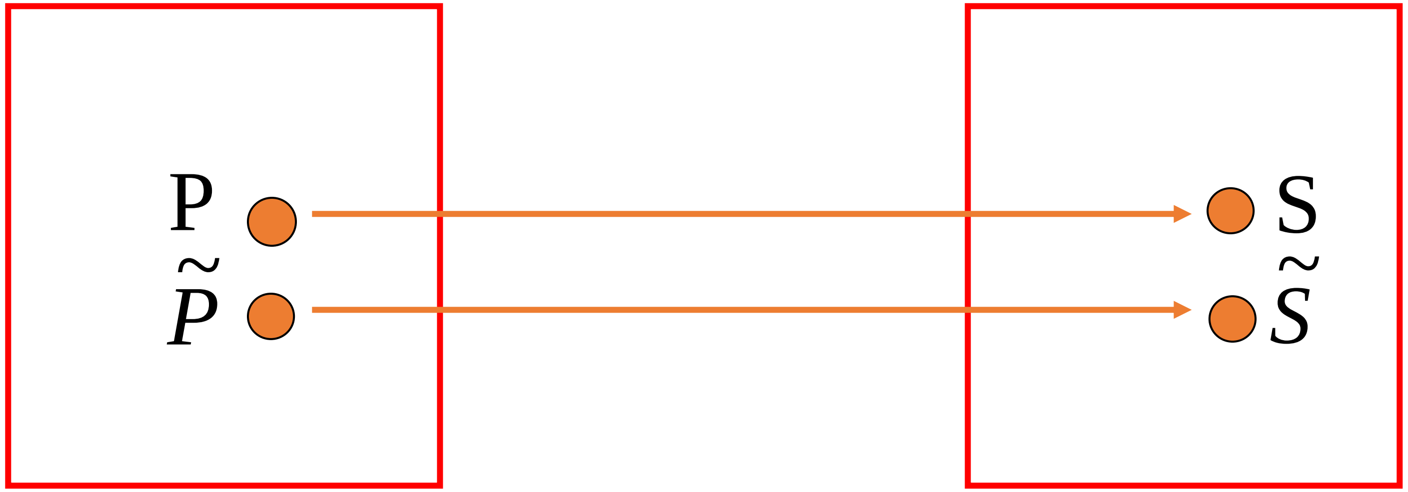
ovvero

$$E'_1 = \frac{|1.0 - 1.2|}{|1.0|} = 0.2 \times 10^{0}$$

(amplificazione dell'errore relativo di 10^7)

Problema ben condizionato:

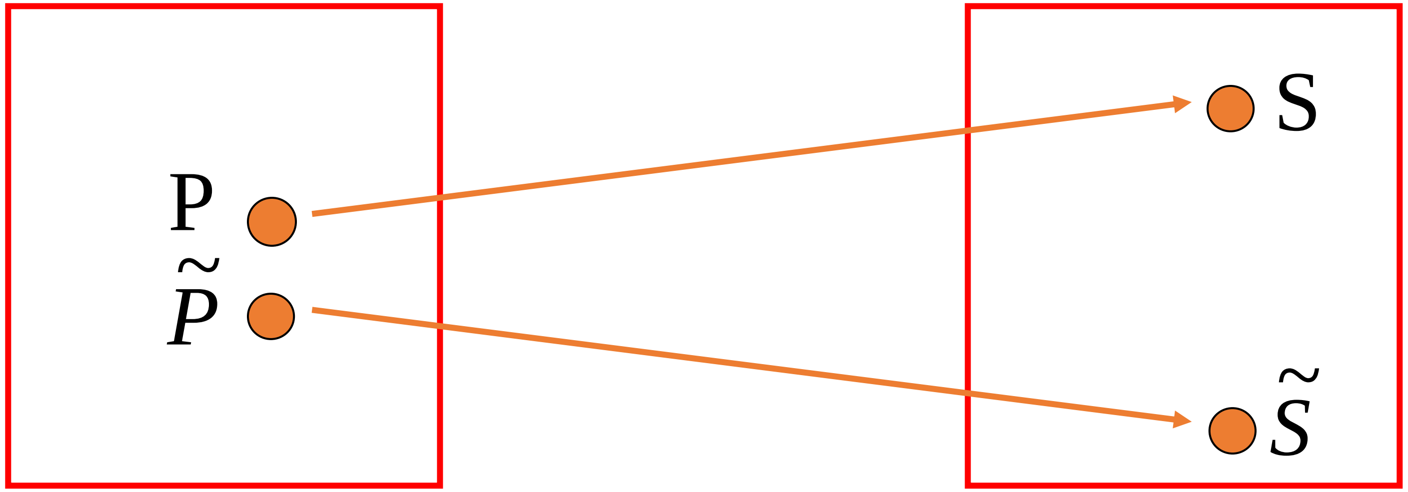
Una "piccola" perturbazione nei dati del problema produce una "piccola" perturbazione nella soluzione



Problemi "vicini" hanno soluzioni "vicine"

Problema mal condizionato:

Una "**piccola**" perturbazione nei dati del problema provoca una "**grande**" perturbazione nella soluzione



Problemi "**vicini**" hanno soluzioni "**lontane**"

Buon condizionamento di un problema

Definizione:

Un problema si dice ben condizionato se l'errore relativo (assoluto) nella soluzione ha al più lo stesso ordine di grandezza dell'errore relativo (assoluto) nei dati.

Un problema per il quale l'errore relativo (assoluto) nella soluzione ha ordine di grandezza maggiore rispetto all'errore relativo (assoluto) nei dati si dice mal condizionato.

P problema, $\tilde{P}$ problema perturbato

P: d = dati, s = soluzione

$\tilde{P}$: $\tilde{d}$ = dati, $\tilde{s}$ = soluzione

$\boxed{\tilde{d} = d(1+\delta)} \longrightarrow \boxed{\tilde{s} = s(1+\sigma)}$

Relazione tra i dati di P e di $\tilde{P}$

Relazione tra le soluzioni di P e di $\tilde{P}$

P ben condizionato: $\sigma \leq \delta$

P mal condizionato: $\sigma >> \delta$

$\boxed{\text{In generale: } \sigma = \mu\delta}$

Con:

- σ errore nella soluzione;
- δ errore nei dati.

μ fattore di amplificazione dell'errore

o

indice di condizionamento

Come misurare il condizionamento di un problema matematico

?

ovvero

Come calcolare l'indice di condizionamento

?

La corrispondenza tra dati e soluzione
di un problema P si può esprimere come:

$$f : \Re \longrightarrow \Re$$

$$x \longrightarrow f(x)$$

Dato iniziale	soluzione

$$x + \Delta x \longrightarrow f(x + \Delta x)$$

Dato perturbato	Soluzione perturbata

Conoscendo la **perturbazione sul dato** si può **stimare** quella sulla **soluzione** ?

f derivabile

$$|\Delta f| = |f(x+\Delta x) - f(x)| = |f'(x)||\Delta x| + O(\Delta x^2)$$

Fattore di amplificazione dell'errore (assoluto)

Errore (assoluto) sul dato

Da

$$|\Delta f| = |f(x+\Delta x) - f(x)| = |f'(x)||\Delta x| + O(\Delta x^2)$$

Trascurando $O(\Delta x^2)$

$$C_A(f,x) = |f'(x)|$$

Indice di condizionamento assoluto

Analogamente, se $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ e' l'errore relativo sul dato x

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \left|\frac{f'(x)x}{f}\right|\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + O(\Delta x^2)$$

moltiplicando e dividendo per |x|

$$C_R(f,x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right|$$

Indice di condizionamento relativo

Esempio: $f(x) = x^n$

$$\boxed{C(f,x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{nx^{n-1}x}{x^n}\right| = n}$$

$n \approx 1$
problema BEN condizionato

$n >> 1$
problema MAL condizionato

Esempio: $f(x) = (1-x)^{1/2}, \; x <= 1$

$$\boxed{C(f,x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{x}{2\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right| = \frac{|x|}{2\,|1-x|}}$$

$$\frac{|x|}{2\,|1-x|} \xrightarrow{x \to 1} \infty$$

$x = 0.9999 \longrightarrow C(f,x) = 4999$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Problema MAL condizionato per } x \approx 1}$

Esempio: $f(x) = \exp(x)$

$$\boxed{C(f,x) = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right| = \left|\frac{e^x x}{e^x}\right| = |x|}$$

Problema BEN condizionato per $0 < x < 1$

Problema MAL condizionato per $x \gg 1$

osservazione

Avendo trascurato i termini $O(\Delta x^2)$

$$|\Delta f| = |f'(x)||\Delta x|$$

$$C_A(f,x) = |f'(x)| = \left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$$

Analogamente

$$C_R(f,x)=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{x\Delta f}{f(x)\Delta x}\right|$$

Osservazione

$$\begin{array}{r} 12345678.1 \\ 12345676.9 \\ \hline 00000001.2 \end{array}$$

7 cifre "cancellate"

Fenomeno della cancellazione catastrofica

Esempio: $f(x,y) = x-y$ (funzione in due variabili)

$$\boxed{C(f,x,y) = \frac{|x| + |y|}{|x - y|}}$$

Errore relativo
Nella soluzione

$$\sigma = \mu\delta$$

Errore relativo
nei dati

Indice di condizionamento

Se $\mu \cong 10^q$

Errore relativo soluzione $\cong 10^q \times 10^{-t} \cong 10^{q-t}$

La soluzione ha al più t-q cifre corrette

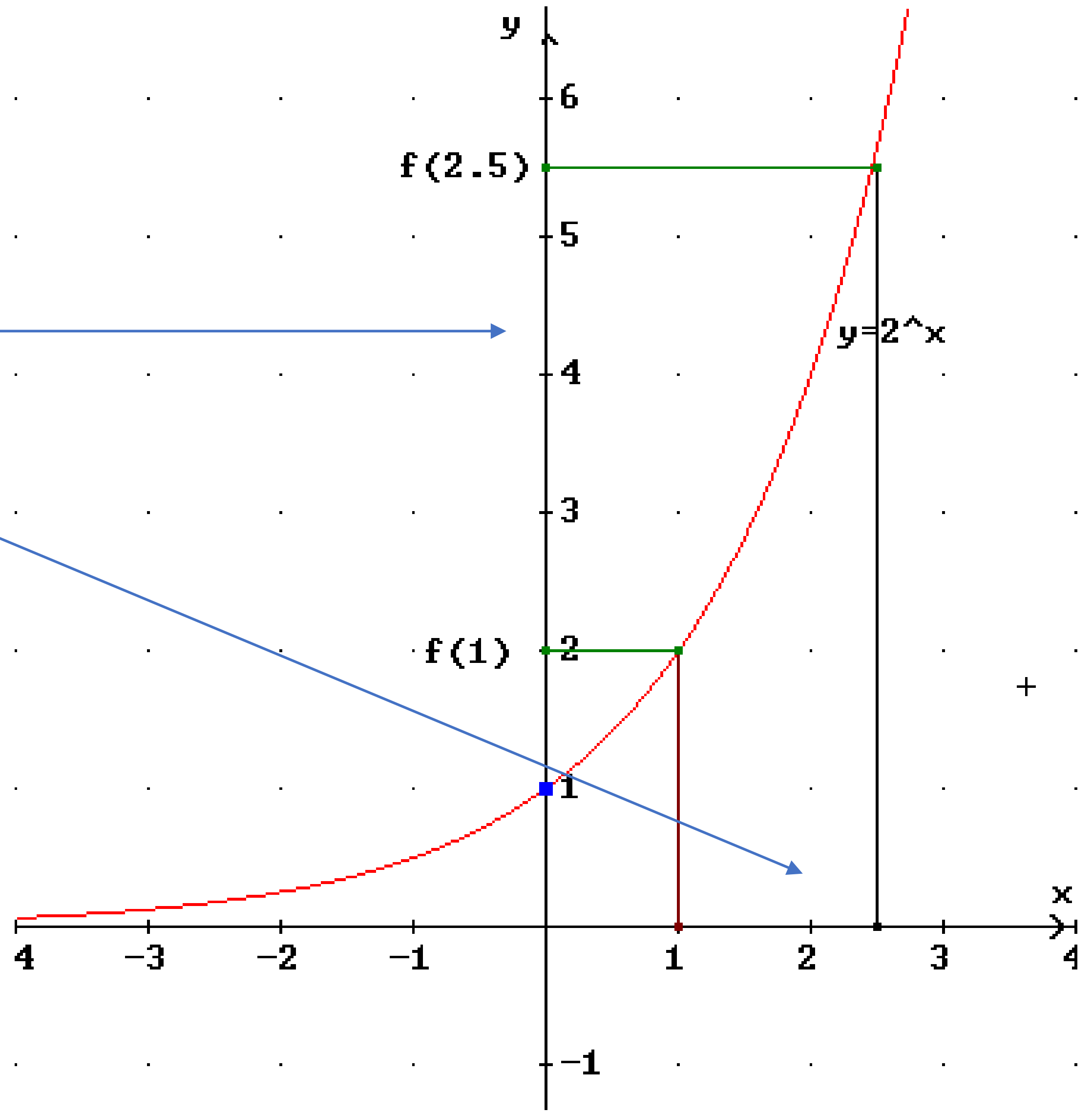
se $t \cong q$ soluzione inaffidabile

(errore del 100%)

ESEMPI

Valutazione di una funzione

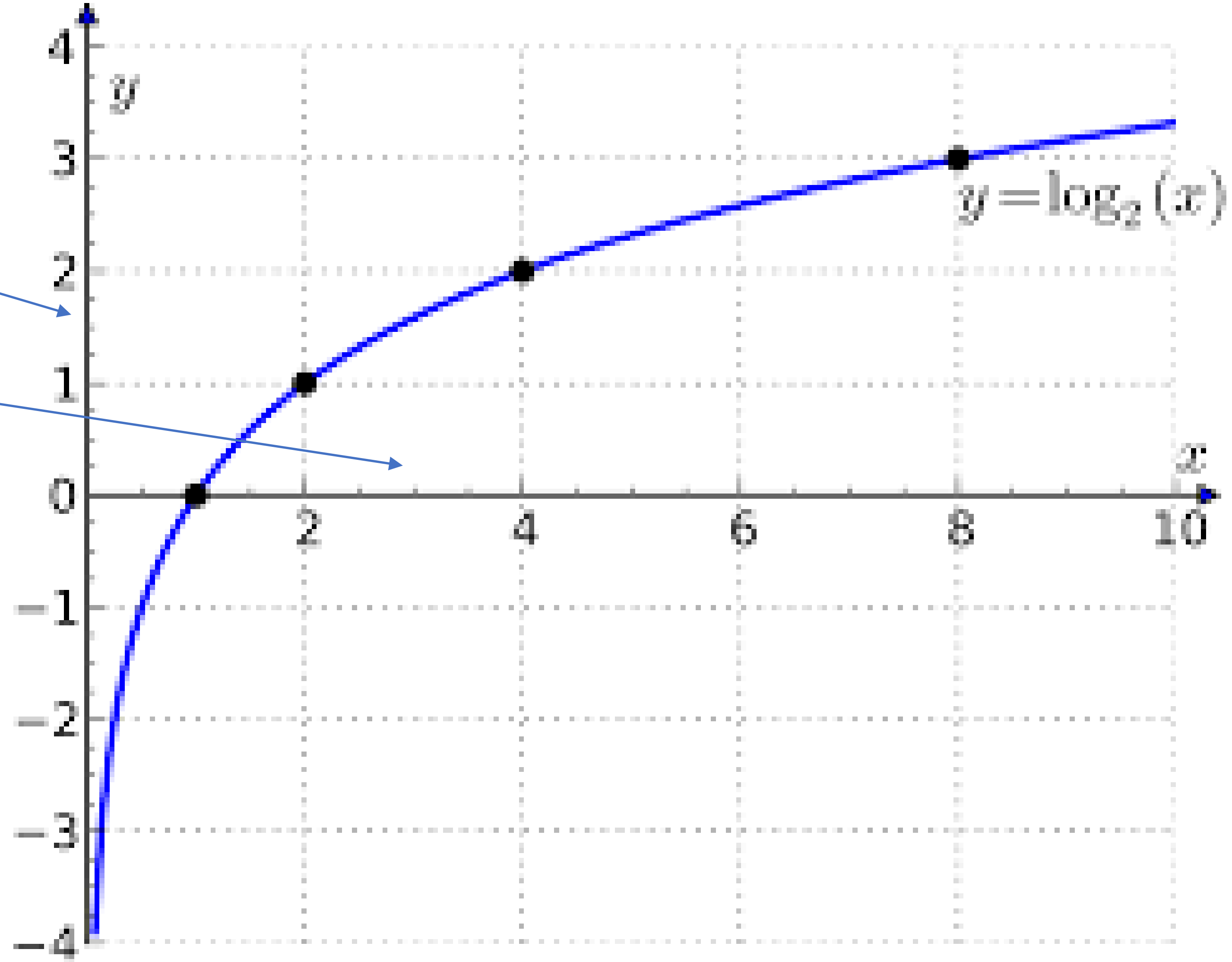
$$C_A(f,x) = |f'(x)| = \left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$$



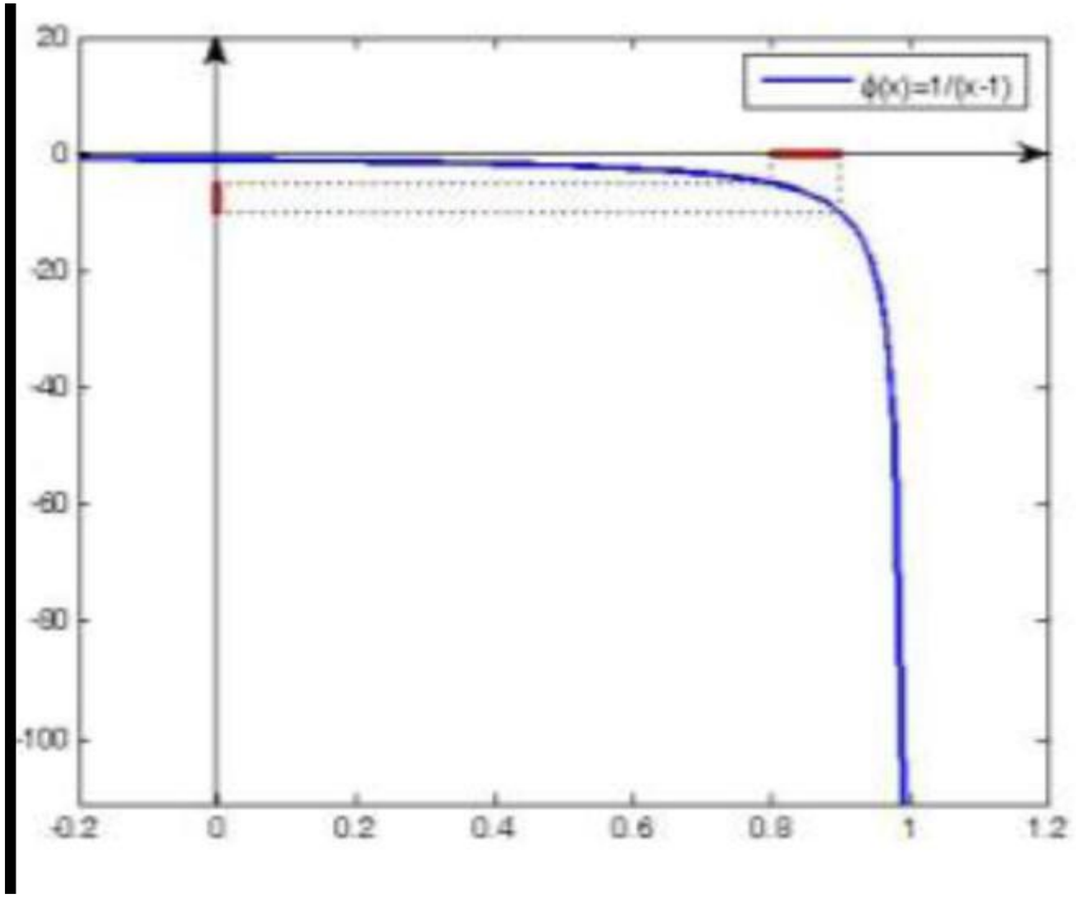
Mal condizionato

$$C_A(f,x) = |f'(x)| = \left|\frac{\Delta f}{\Delta x}\right|$$

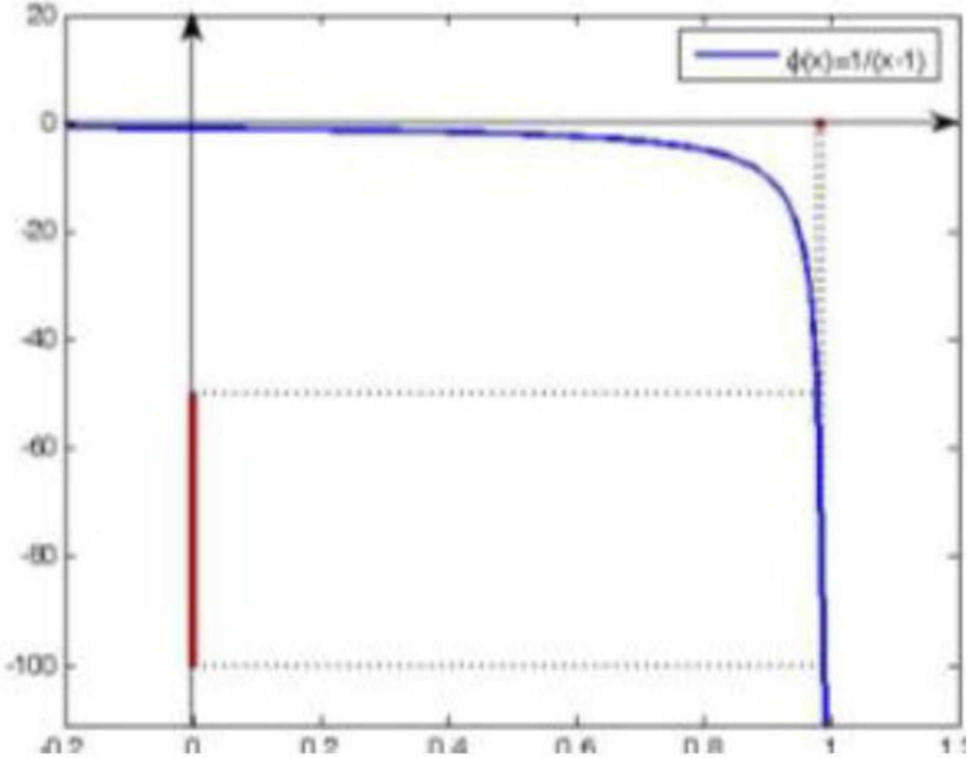
Ben condizionato



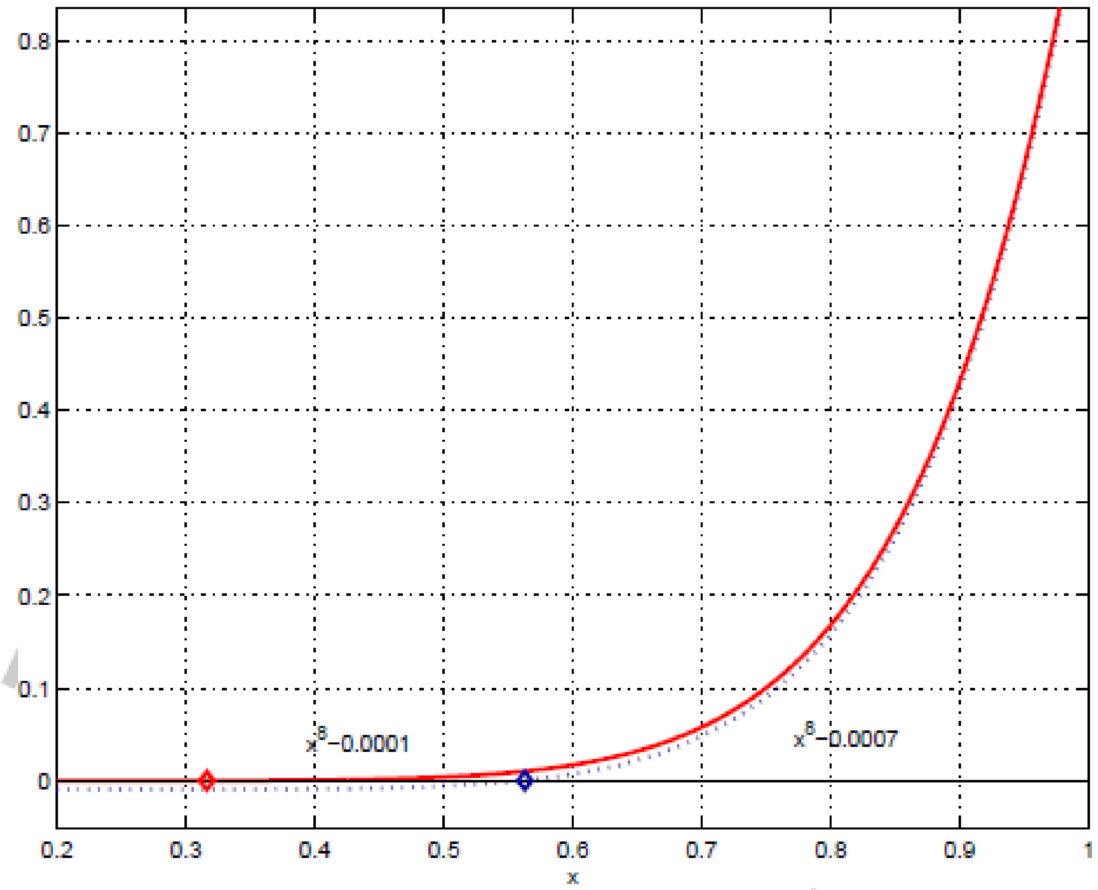
Per una stessa funzione il condizionamento dipende da x



Ben condizionato



Mal condizionato



Differenza tra le funzioni

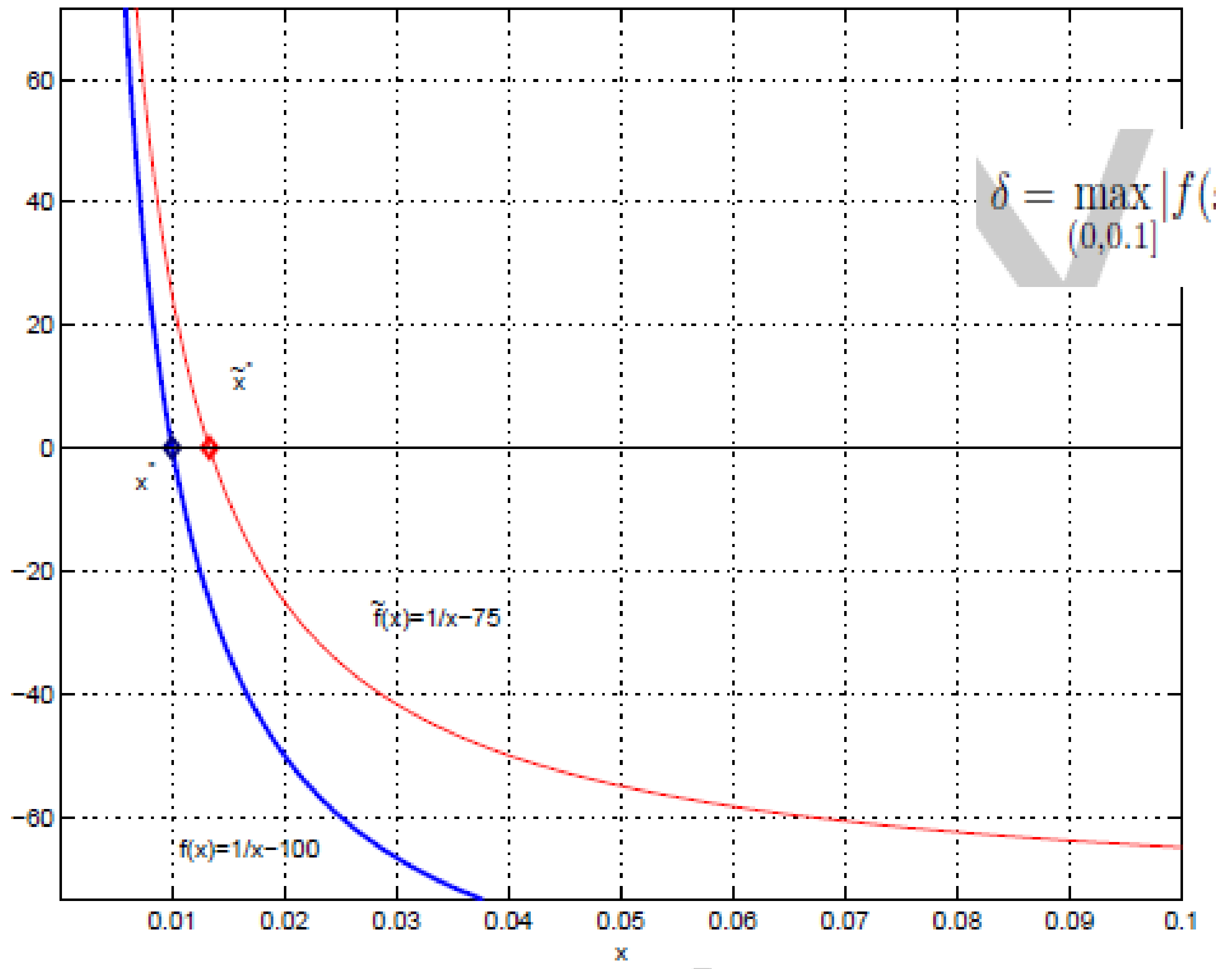
$$\delta = \max_{[0,1]} |f(x) - \tilde{f}(x)| = 0.6 \times 10^{-3}$$

$$\sigma = |0.316227 - 0.403308| = 0.8708062\ldots \times 10^{-1}$$

Differenza tra gli zeri

MAL condizionato

Figura 1.25: Grafico di $f(x) \equiv x^8 - 10^{-4}$ (linea continua) e di $\tilde{f}(x) \equiv x^8 - 7 \times 10^{-4}$ ('$\bullet$') in $[0.2, 1]$. Con il simbolo '$\diamond$' si indicano gli zeri delle funzioni.



Differenza tra le funzioni

$$\delta = \max_{(0,0.1]} |f(x) - \tilde{f}(x)| = \left|\frac{1}{x} - 100 - \frac{1}{x} + 75\right| = |-35| = 35$$

$$\sigma = |x^* - \tilde{x}^*| = 0.3333\ldots \times 10^{-2}\ .$$

Differenza tra gli zeri

BEN condizionato

Figura 1.26: Grafico di $f(x) \equiv 1/x - 100$ e di $\tilde{f}(x) \equiv 1/x - 75$ in $[0.001, 0.1]$. Con il simbolo '$\diamond$' si indicano gli zeri delle funzioni.