Prova scritta Elettrodinamica Classica – Prof. Lorenzo Marrucci – 21/03/2023

Nota: per superare lo scritto è necessario impostare la soluzione di almeno un esercizio correttamente. Per ottenere un punteggio alto è necessario risolvere tutti e tre gli esercizi correttamente o con errori minori.

Esercizio 1

Un condensatore a facce piane e parallele, di base quadrata con lato L e distanza d (assumete $d \ll L$), viene parzialmente immerso in un liquido di permettività elettrica relativa ε_r e densità di massa ρ. Il condensatore è posizionato in modo da avere le facce perpendicolari alla superficie del liquido, con un lato del quadrato parallelo alla superficie. Quando al condensatore è applicata una differenza di potenziale ΔV, si osserva un effetto di risucchio elettrico, per il quale la superficie superiore del liquido all'interno del condensatore si solleva ad un livello più alto che all'esterno. Assumendo che lo spazio esterno al liquido sia riempito di aria, di permettività elettrica relativa approssimativamente pari a 1, e trascurando gli eventuali effetti di capillarità, determinare di quanto risale il liquido all'interno del condensatore. [*Suggerimento: le forze di risucchio laterali nei condensatori sono calcolabili a partire dall'espressione dell'energia*]

Esercizio 2

Si considerino due gusci cilindrici concentrici, di raggio a e $b > a$, rispettivamente, di altezza assimilabile ad infinita. Sulla superficie del guscio interno, composto di materiale isolante, è depositata una carica distribuita secondo la legge $\sigma(z, \varphi) = \frac{\sigma_0}{b} z + \sigma_1 \sin(2\varphi)$, dove ρ, φ, z sono le coordinate cilindriche e σ_0, σ_1 sono due costanti. Il guscio esterno è composto di materiale conduttore ed è collegato a terra. Lo spessore dei due gusci può essere considerato trascurabile e nel resto dello spazio c'è il vuoto. Calcolare l'andamento del potenziale elettrico in tutto lo spazio.

[MEMO: *Laplaciano in coordinate cilindriche:* $\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$]

Esercizio 3

Due particelle cariche stanno viaggiando nel vuoto di moto rettilineo uniforme a velocità relativistiche. Nel riferimento di laboratorio la prima particella ha carica q_1 e velocità v_1 diretta come l'asse x (in direzione positiva) e la seconda ha carica q_2 e velocità v_2 diretta come l'asse y (in direzione positiva). Ad un certo istante la prima particella passa per l'origine del riferimento e la seconda si trova nella posizione $\mathbf{r}_2 = [0, d, 0]$. In questa situazione (nel medesimo istante) calcolare (a) la forza (intesa come vettore) che la particella 1 esercita sulla particella 2 e (b) la forza che la particella 2 esercita sulla particella 1, entrambe calcolate nel riferimento di laboratorio. Verificare poi se le due forze così determinate siano uguali e opposte, discutendo brevemente il risultato di questa verifica (c).

Soluzioni

Esercizio 1

Il problema va risolto calcolando le variazioni di energia elettrica e di energia gravitazionale in funzione del livello del liquido dentro al condensatore e trovando il punto di equilibrio (minimo dell'energia), ovvero equivalentemente trovando l'equilibrio tra la forza peso del liquido sollevato dentro il condensatore e la forza di risucchio elettrica.

L'energia gravitazionale corrisponde all'energia potenziale del fluido, che può essere calcolata come se tutta la massa fosse localizzata nel centro di massa, ossia a metà altezza. Quindi l'energia della porzione di fluido interna al condensatore che si alza sopra il livello esterno fino alla quota h, sarà data da

$$U_g = mgh_{cm} = \rho dLhg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\rho dLgh^2$$

Calcoliamo ora l'energia elettrostatica del condensatore quando questo è riempito parzialmente di fluido fino al livello h. Possiamo trattare il condensatore come il parallelo di due condensatori, uno interamente pieno di fluido e l'altro interamente vuoto. La capacità del parallelo è la somma delle capacità, per cui si ha

$$C = C_{fluido} + C_{aria} = \frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 L(h_0 + h)}{d} + \frac{\varepsilon_0 L(L - h_0 - h)}{d} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d} + (\varepsilon_r - 1)\frac{\varepsilon_0 L(h_0 + h)}{d}$$

L'energia elettrostatica corrispondente è quindi

$$U_e = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{\varepsilon_0 L^2\Delta V^2}{2d} + \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 L\Delta V^2(h_0 + h)}{2d}$$

Essendo il problema a potenziali costanti, l'energia da utilizzare per calcolare le forze di risucchio non è questa, ma quella che si ottiene con la trasformata di Legendre, ossia

$$\widetilde{U}_e = U_e - Q\Delta V = -U_e = -\frac{\varepsilon_0 L^2\Delta V^2}{2d} - \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 L\Delta V^2(h_0 + h)}{2d}$$

Sommando le due energie e derivando rispetto ad h otteniamo la seguente equazione per il punto di equilibrio (ossia l'equazione di bilancio delle forze agenti sul dielettrico):

$$\frac{d\widetilde{U}_{tot}}{dh} = \frac{dU_g}{dh} + \frac{d\widetilde{U}_e}{dh} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho dLgh - \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 L\Delta V^2}{2d} = 0$$

Quindi l'altezza raggiunta dalla superficie superiore del fluido è

$$h = \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0\Delta V^2}{2\rho g d^2}$$

In realtà è anche possibile non utilizzare il metodo della trasformata di Legendre, lasciando cioè l'energia elettrica nella forma iniziale U_e, purché prima di eseguire la derivata rispetto ad h la si esprima in termini della carica $Q = C\Delta V$ (che viene così mantenuta costante al posto della differenza di potenziale), ossia riscrivendola in questa forma:

$$U_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2}\left[\frac{\varepsilon_0 L^2}{d} + \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 L(h_0 + h)}{d}\right]^{-1}$$

Derivando quindi l'energia totale $U_{tot} = U_e + U_g$ scritta in questa forma rispetto ad h ed imponendo l'annullamento (ossia l'equilibrio delle forze) si riottiene il risultato precedente.

Esercizio 2

Notiamo subito che lo spazio esterno al guscio più esterno avrà potenziale identicamente nullo, essendo il guscio esterno messo a terra e non essendoci altre fonti di campo. Quindi dobbiamo focalizzarci esclusivamente sulle regioni interne al guscio esterno, ossia $\rho < b$.

Dato che la dipendenza della σ in questo problema è un po' inusuale con la dipendenza sia da z che da φ, ripercorriamo per sicurezza i passaggi del metodo di soluzione dell'equazione di Laplace per separazione di variabili. Impostiamo il problema in coordinate cilindriche, ossia ponendo $V(\rho, \varphi, z) = V_1(\rho)V_2(\varphi)V_3(z)$ e scrivendo le equazioni differenziali separate per queste tre funzioni. In particolare, quelle per V_2 e V_3 sono le più semplici:

$$\frac{d^2V_2}{d\varphi^2} = \lambda_2 V_2 \quad (1)$$
$$\frac{d^2V_3}{dz^2} = \lambda_3 V_3 \quad (2)$$

L'equazione per V_1 che ne risulta è invece la seguente:

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dV_1}{d\rho}\right) + (\lambda_2 + \lambda_3 \rho^2)V_1 = 0 \qquad (3)$$

Iniziamo da V_2. Risolvendo la (1) con la condizione di periodicità su 2π per la variabile angolare φ troviamo facilmente le seguenti soluzioni indipendenti possibili: $V_2(\varphi) = e^{im\varphi}$, con $\lambda_2 = -m^2$, con m intero qualsiasi, positivo, negativo o nullo. Equivalentemente, si può usare la base di seni e coseni, ossia le soluzioni

$$V_2(\varphi) = \sin(m\varphi), \;\; V_2(\varphi) = \cos(m\varphi), \quad V_2(\varphi) = \text{cost.}$$

dove adesso m va ristretto ai numeri naturali (interi positivi non nulli). La soluzione costante può essere anche identificata con la soluzione coseno (oppure quella esponenziale immaginario) con $m = 0$. Nel nostro caso questa seconda scelta è suggerita come più conveniente dalle condizioni al contorno non omogenee riportate nel testo, che per il guscio interno sono espresse in termini di un seno.

Nel caso di $V_3(z)$, l'equazione (2) ammette in generale soluzioni esponenziali del tipo $V_3 = e^{\pm\sqrt{\lambda_3}z}$. Per $\lambda_3 = 0$ otteniamo però le seguenti due soluzioni indipendenti

$$V_3(z) = \text{cost.}, \qquad V_3(z) = z$$

Queste soluzioni sembrano adatte ad imporre le condizioni al contorno non omogenee che abbiamo nel problema, per cui proviamo a risolvere il problema limitandoci a queste, senza considerare le soluzioni esponenziali (che sono necessarie per descrivere dipendenze da z più complesse). Quindi nell'equazione (3) possiamo imporre $\lambda_3 = 0$, il che ci permette di trovare le seguenti coppie di soluzioni indipendenti (del tutto analoghe al caso in cui non vi è nessuna dipendenza da z):

$$V_1(\rho) = \rho^{|m|}, \qquad V_1(\rho) = \rho^{-|m|}, \qquad \text{per } m \neq 0$$
$$V_1(\rho) = \text{cost.}, \qquad V_1(\rho) = \ln\rho\,, \qquad \text{per } m = 0$$

Mettendo tutto insieme in una combinazione lineare di tutti i possibili prodotti tra queste soluzioni otteniamo la seguente soluzione generale (applicabile per qualsiasi problema in cui la dipendenza da z è costante oppure lineare e gli angoli φ spaziano in tutto l'angolo giro):

$$V(\rho,\varphi,z) = A_0 + B_0 \ln\rho + C_0 z + D_0 z \ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m\rho^m + B_m\rho^{-m} + C_m z\rho^m + D_m z\rho^{-m}) \sin(m\varphi)$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (E_m\rho^m + F_m\rho^{-m} + G_m z\rho^m + H_m z\rho^{-m}) \cos(m\varphi) \qquad (4)$$

Guardando le condizioni al contorno non omogenee del nostro problema possiamo fare l'ipotesi plausibile che nella (4) compaiono solo i primi 4 termini (in $m = 0$) e il solo termine in seno con $m = 2$ delle due sommatorie successive. Inoltre, possiamo ipotizzare anche che $C_m = D_m = 0$, in quanto la dipendenza da z che compare nelle condizioni al contorno non c'è nei termini dipendenti da φ ma solo nei termini costanti in φ. Questo ci porta a ridurre la soluzione generale al seguente *ansatz* più semplice (comunque da verificare ex post con le condizioni al contorno, e nel caso non funzioni possiamo sempre tornare indietro e includere gli altri termini):

$$V(\rho,\varphi,z) = A_0 + B_0 \ln\rho + C_0 z + D_0 z \ln\rho + (A_2\rho^2 + B_2\rho^{-2}) \sin(2\varphi) \qquad (5)$$

Questo *ansatz* va poi specializzato per ciascuna delle due regioni in cui suddividere il problema, ossia interna ed esterna al guscio di raggio a (non consideriamo la regione esterna al guscio di raggio b che abbiamo già visto essere nulla). Scriviamo quindi:

$$V(\rho,\varphi,z) = A_0 + C_0 z + A_2\rho^2 \sin(2\varphi) \quad \text{per} \quad \rho < a \qquad (6)$$

$$V(\rho,\varphi,z) = A_0' + B_0' \ln\rho + C_0' z + D_0' z \ln\rho + (A_2'\rho^2 + B_2'\rho^{-2}) \sin(2\varphi) \quad \text{per} \quad \rho > a \quad (7)$$

dove nella (6) abbiamo escluso i termini divergenti per $\rho \to 0$. Nella (7) possiamo imporre ora la condizione al contorno omogenea sul guscio esterno:

$$V(\rho = b,\varphi,z) = A_0' + B_0' \ln b + C_0' z + D_0' z \ln b + (A_2' b^2 + B_2' b^{-2}) \sin(2\varphi) = 0$$

che deve valere per qualsiasi z e φ. Sfruttando l'ortogonalità delle funzioni, questo si traduce nelle seguenti relazioni tra i coefficienti:

$$B_0' = -\frac{A_0'}{\ln b}, \quad D_0' = -\frac{C_0'}{\ln b}, \quad B_2' = -A_2' b^4$$

Quindi la (7) diventa:

$$V(\rho,\varphi,z) = A_0'\left(1 - \frac{\ln\rho}{\ln b}\right) + C_0' z\left(1 - \frac{\ln\rho}{\ln b}\right) + A_2'\left(\rho^2 - \frac{b^4}{\rho^2}\right)\sin(2\varphi)$$
$$= A_0' \frac{\ln b/\rho}{\ln b} + C_0' z \frac{\ln b/\rho}{\ln b} + A_2'\left(\rho^2 - \frac{b^4}{\rho^2}\right)\sin(2\varphi) \quad \text{per} \quad \rho > a \quad (8)$$

Imponiamo ora la condizione di continuità del potenziale per $\rho = a$:

$$A_0 + C_0 z + A_2 a^2 \sin(2\varphi) = A_0' \frac{\ln b/a}{\ln b} + C_0' z \frac{\ln b/a}{\ln b} + A_2'\left(a^2 - \frac{b^4}{a^2}\right)\sin(2\varphi)$$

Anche questa deve valere per qualsiasi z e φ, il che ci fornisce le seguenti ulteriori relazioni tra coefficienti:

$$A_0 = A_0' \frac{\ln(b/a)}{\ln b}, \quad C_0 = C_0' \frac{\ln(b/a)}{\ln b}, \quad A_2 = A_2' \left(1 - \frac{b^4}{a^4}\right) \quad (9)$$

Resta solo da imporre la condizione al contorno non omogenea, che deriva dalla densità di carica presente sul guscio interno. Questa corrisponde alla discontinuità di campo elettrico radiale, quindi alla seguente espressione:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \rho}\right|_{\rho=a^-} - \left.\frac{\partial V}{\partial \rho}\right|_{\rho=a^+} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{b\varepsilon_0} z + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \sin(2\varphi)$$

Utilizzando la (6) e la (8) per calcolare le due derivate, questa equazione diventa la seguente:

$$2A_2 a \sin(2\varphi) + \frac{A_0'}{a \ln b} + \frac{C_0' z}{a \ln b} - 2A_2' \left(a + \frac{b^4}{a^3}\right) \sin(2\varphi) = \frac{\sigma_0}{b\varepsilon_0} z + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \sin(2\varphi)$$

Che fornisce le seguenti equazioni per i coefficienti:

$$A_0' = 0$$

$$C_0' = \frac{\sigma_0 a \ln b}{b\varepsilon_0}$$

$$A_2 - A_2' \left(1 + \frac{b^4}{a^4}\right) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0 a}$$

Quest'ultima equazione va combinata con l'ultima delle (9) per ottenere

$$A_2' = -\frac{\sigma_1 a^3}{4\varepsilon_0 b^4}$$

Inserendo questi risultati nelle (9) otteniamo tutti gli altri coefficienti:

$$A_0 = 0$$

$$C_0 = \frac{\sigma_0 a \ln(b/a)}{b\varepsilon_0}$$

$$A_2 = -\frac{\sigma_1 a^3}{4\varepsilon_0 b^4} \left(1 - \frac{b^4}{a^4}\right)$$

Infine, sostituendo nelle (6) e (8) otteniamo l'espressione completa del potenziale:

$$V(\rho, \varphi, z) = \frac{\sigma_0 a \ln(b/a)}{b\varepsilon_0} z - \frac{\sigma_1 a^3}{4\varepsilon_0 b^4} \left(1 - \frac{b^4}{a^4}\right) \rho^2 \sin(2\varphi) \quad \text{per} \quad \rho < a$$

$$V(\rho, \varphi, z) = \frac{\sigma_0 a}{b\varepsilon_0} z \ln\left(\frac{b}{\rho}\right) - \frac{\sigma_1 a^3}{4\varepsilon_0 b^4} \left(\rho^2 - \frac{b^4}{\rho^2}\right) \sin(2\varphi) \qquad \text{per} \quad \rho > a$$

<u>Esercizio 3</u>

Il problema può essere risolto facilmente in due modi equivalenti. Il primo modo si basa sul calcolare i campi elettrici e magnetici che ciascuna particella genera nel riferimento di laboratorio, ad esempio sfruttando le trasformazioni relativistiche dei campi per determinarli a partire dal riferimento solidale con ciascuna particella, e poi da questi campi calcolare le forze direttamente nel riferimento di laboratorio con la formula di Lorentz. Il secondo modo invece si basa sul mettersi nel riferimento solidale con una delle particelle, calcolare le forze in quello e poi tornare al riferimento di laboratorio usando le trasformazioni relativistiche delle forze (anziché quelle dei campi), che si ottengono inserendo la forza nel 4-vettore forza-potenza. Vediamo entrambi i metodi.

Iniziamo con il primo approccio. Scegliamo per semplicità l'origine dei tempi in modo che l'istante considerato nel testo sia $t = 0$. Le formule relativistiche generali per la trasformazione dei campi elettromagnetici sono le seguenti:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_\parallel = \mathbf{E}'_\parallel \\ \mathbf{E}_\perp = \gamma(\mathbf{E}'_\perp - \mathbf{v}\times\mathbf{B}') \\ \mathbf{B}_\parallel = \mathbf{B}'_\parallel \\ \mathbf{B}_\perp = \gamma\left(\mathbf{B}'_\perp + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\times\mathbf{E}'\right)\end{gathered} \qquad (1)$$

dove i simboli $\parallel$ e $\perp$ sono relativi alla direzione della velocità (boost) della trasformazione. Calcoliamo con queste formule il campo elettrico e il campo magnetico che la particella 1 genera nella posizione dove si trova la particella 2, considerando come S′ il riferimento solidale con la particella 1. Nel riferimento S′ la posizione della particella 2, essendo in posizione trasversale rispetto al boost, ha le stesse coordinate che nel riferimento S. Quindi si ha

$$\mathbf{E}'_1(\mathbf{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}'_1 = 0$$

dove indichiamo con $\mathbf{e}_{x_i}$ il versore orientato come l'asse x_i (con $x_i = x, y, z$). Sostituendo nelle (1) otteniamo quindi

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) = \gamma_1 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\mathbf{e}_y \\ \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2) = \gamma_1 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 d^2}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{e}_y = \gamma_1 \frac{q_1 v_1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 d^2}\mathbf{e}_z\end{gathered}$$

dove abbiamo introdotto la notazione

$$\gamma_i = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

La forza di Lorentz sulla particella 2 dovuta ai campi generati dalla particella 1 è quindi la seguente:

$$\mathbf{F}_2 = q_2[\mathbf{E}_1(\mathbf{r}_2) + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}_2)] = \gamma_1 \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(\mathbf{e}_y + \frac{v_1 v_2}{c^2}\mathbf{e}_x\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}\left(\mathbf{e}_y + \frac{v_1 v_2}{c^2}\mathbf{e}_x\right)$$

Calcoliamo ora con lo stesso criterio la forza sulla particella 1. In questo caso usiamo il riferimento S″ solidale con il moto della particella 2. Manteniamo però l'origine di S″ coincidente con quella di S al tempo $t = 0$ per evitare le complicazioni relative alla traslazione dell'origine. Quindi la particella 1 resta nell'origine, mentre la particella 2 cambia coordinate nel modo seguente:

$$x''_2 = x_2 = 0, \;\; y''_2 = \gamma_2(y_2 - v_2 t) = \gamma_2 d, \;\; z''_2 = z_2 = 0, \quad t'' = \gamma_2\left(t - \frac{v_2}{c^2}y_2\right) = -\gamma_2\frac{v_2}{c^2}d$$

In pratica le due particelle al tempo $t = 0$ (che <u>non</u> coincide con $t'' = 0$ per la particella 2) si trovano nel riferimento S″ ad una distanza incrementata del fattore γ_2 rispetto alla distanza vista nel sistema S. Questo può apparire in contraddizione con la contrazione di Lorentz, ma bisogna tenere conto che la contrazione avviene nei riferimenti in cui i due eventi sono simultanei, mentre in questo caso nel sistema S″ non lo sono. Lo sono invece nel sistema S, per cui è la distanza del sistema S che è contratta rispetto a quella del sistema S″ e non viceversa. Otteniamo quindi per i campi corrispondenti alla posizione della particella 1 al tempo $t = 0$:

$$\mathbf{E}_2''(\mathbf{r}_1) = -\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 \gamma_2^2}\mathbf{e}_y, \quad \mathbf{B}_2'' = 0$$

Inserendo questi nelle trasformazioni (1) e tenendo conto che il campo elettrico in questo caso è longitudinale rispetto al boost, otteniamo:

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = -\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 \gamma_2^2}\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}_1) = 0$$

Quindi la forza sulla particella 1 dovuta ai campi generati dalla particella 2 risulta essere la seguente:

$$\mathbf{F}_1 = q_1\mathbf{E}_2(\mathbf{r}_1) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 \gamma_2^2}\mathbf{e}_y = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)\mathbf{e}_y$$

Le due forze evidentemente NON sono affatto uguali e opposte. Questo accade perché, in presenza di campi elettrici e magnetici, parte della quantità di moto è scambiata con i campi anziché tra le particelle, per cui non vale il terzo principio della dinamica nella sua forma standard.

Per completezza vediamo adesso se effettivamente otteniamo gli stessi risultati anche con il secondo approccio. Nel riferimento S′ solidale con la particella 1, la forza agente sulla particella 2 è solo la forza elettrica (di Coulomb), ossia

$$\mathbf{F}_2' = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\mathbf{e}_y$$

Questa forza produce sulla particella 2 una potenza

$$W_2' = \mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{F}_2' = \frac{q_1 q_2 v_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2 \gamma_1}$$

dove nella seconda espressione abbiamo usato le trasformazioni relativistiche delle velocità per ottenere

$$v_{2x}' = \frac{v_{2x} - v_1}{1 - \frac{v_{2x}v_1}{c^2}} = -v_1, \quad v_{2y}' = \frac{v_{2y}}{\gamma_1\left(1 - \frac{v_{2x}v_1}{c^2}\right)} = \frac{v_2}{\gamma_1}$$

Il 4-vettore forza sulla particella 2 nel sistema S′ è quindi il seguente:

$$F_2'^{\mu} = \left(\gamma_2' \frac{W_2'}{c}, \gamma_2'\mathbf{F}_2'\right) = \left(\gamma_2 \frac{q_1 q_2 v_2}{4\pi\varepsilon_0 c d^2}, \gamma_1\gamma_2 \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\mathbf{e}_y\right)$$

dove $\gamma_2' = \gamma_1\gamma_2$ è il fattore γ della particella 2 misurato nel riferimento S′. Ora trasformiamo questo 4-vettore forza nuovamente nel riferimento S usando le normali trasformazioni di Lorentz con boost lungo x. In particolare, ci servono solo le componenti spaziali relative alla 4-forza:

$$F_2^x = \gamma_1\left(F_2'^x + \frac{v_1}{c}F_2'^0\right) = \gamma_1\gamma_2 \frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 d^2}$$
$$F_2^y = F_2'^y = \gamma_1\gamma_2 \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Il 3-vettore forza sulla particella 2 si ottiene quindi dividendo queste due componenti per γ_2, il che restituisce il risultato già trovato per $\mathbf{F}_2$. Analogamente possiamo ritrovare il risultato relativo alla forza agente sulla particella 1 (non riportiamo i calcoli).