Esercitazione sul moto in due dimensioni – moto circolare uniforme

Prof. Francesco Di Capua

a.a. 2022/23

…breve riepilogo

Cinematica: accelerazione costante

$$\boxed{x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2}$$

$$\boxed{v_x = v_{x0} + a_x t}$$

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{x0}\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x}\right)^2$$

$$\boxed{v_x^{\ 2} = v_{x0}^{\ 2} + 2a_x(x - x_0)}$$

Moto in caduta libera

$$\boxed{y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2}$$

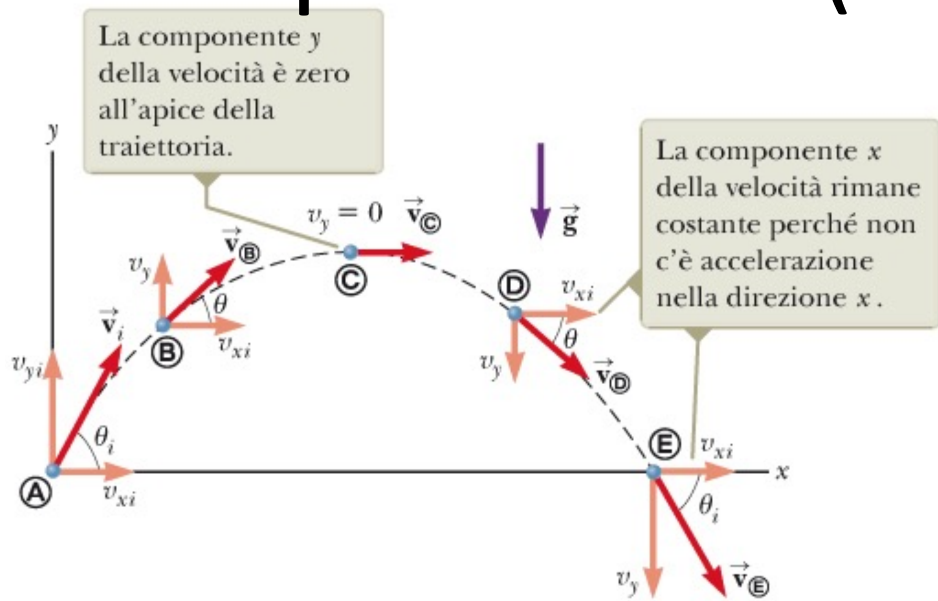
$$\boxed{v_y = v_{y0} - g t}$$

$$\boxed{v_y^{\ 2} = v_{y0}^{\ 2} - 2g(y - y_0)}$$

Non compare la massa!!!

...quindi velocità, tempi di caduta sono indipendenti dalla massa di un corpo?
1638 Galilei: "in assenza di aria tutti I corpi cadono con la stessa accelerazione che non dipende dalla massa dei corpi"

Moto parabolico (...moto del proiettile)



Consideriamo un proiettile lanciato all'origine con una velocità che ha componenti diverse da zero sia sull'asse x che y

Condizioni iniziali

posizione iniziale $\vec{r}_i = 0 \qquad x_i = 0 \qquad y_i = 0$

velocità iniziale $\vec{v}_i$

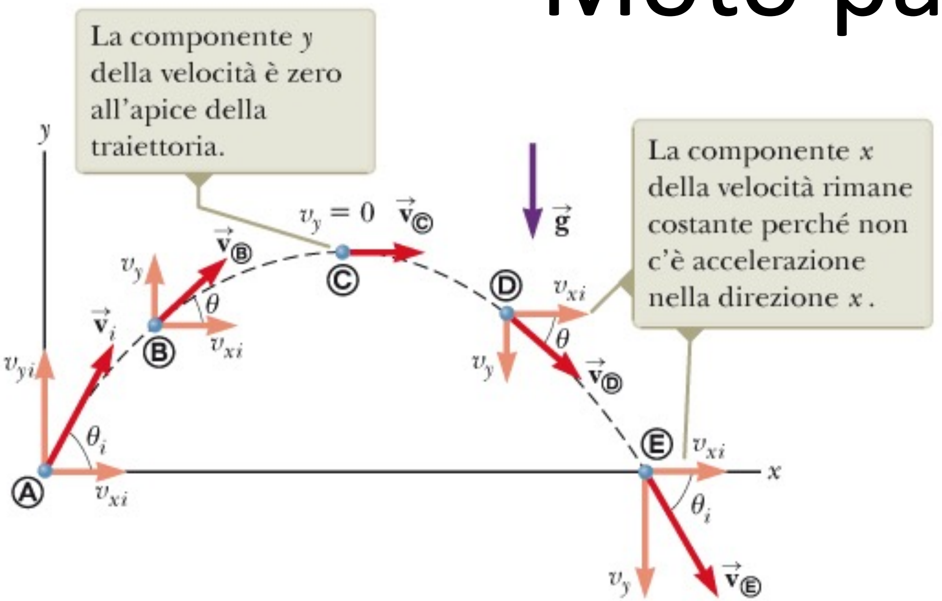
Detto θ_i l'angolo che il vettore velocità ha con l'asse delle x si ha:

$$v_{xi} = v_i \cos\theta_i \qquad v_{yi} = v_i sen\theta_i$$

accelerazione $a_x = 0 \qquad a_y = -g$

Il proiettile una volta lanciato è sottoposto alla sola accelerazione di gravità diretta lungo y

Moto parabolico



Le equazioni per la velocità sono:

$$\vec{v}_f = (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j}$$

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$$

$$v_{xf} = v_{xi} = v_i \cos\theta_i = \text{costante}$$

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t$$

$$v_{yf} = v_{yi} - gt = v_i sen\theta_i - gt$$

Le equazioni per la posizione sono:

$$\vec{r}_f = (x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2)\hat{i} + (y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2)\hat{j}$$

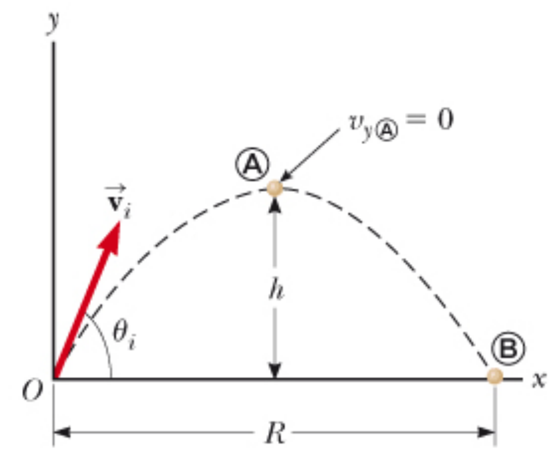
$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (v_i \cos\theta_i)t$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (v_i sen\theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Il moto lungo l'asse x è un moto unidimensionale con velocità costante (moto rettilineo uniforme)
Il moto lungo y è un moto unidimensionale con accelerazione costante

Moto parabolico: altezza massima

Calcolo dell’altezza massima



Imponendo che nel punto più alto sia v_y=0

$$v_{y(A)} = v_i sen\theta_i - gt_{(A)} = 0$$

$$t_{(A)} = \frac{v_i sen\theta_i}{g}$$

Sostituendo nella legge oraria della componente y

$$y_{(A)} = y_i + v_{yi}t_{(A)} - \frac{1}{2}gt_{(A)}{}^2 = (v_i sen\theta_i)t_{(A)} - \frac{1}{2}gt_{(A)}{}^2 = (v_i sen\theta_i)(\frac{v_i sen\theta_i)}{g}) - \frac{1}{2}g(\frac{v_i sen\theta_i}{g})^2$$

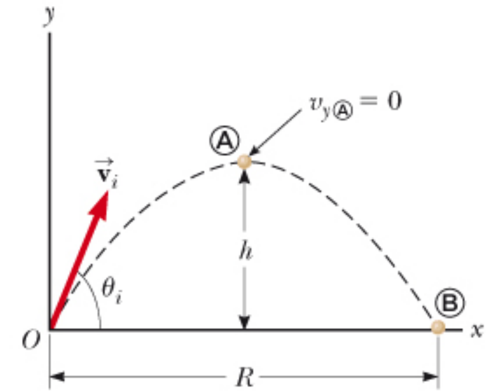
$$y_{(A)} = h = \frac{v_i^{\,2} sen^2\theta_i}{2g}$$

Nel moto del proiettile l’altezza massima aumenta se si aumenta la velicità iniziale e se si aumenta l’angolo iniziale di incidenza

Moto parabolico: gittata

Calcolo della gittata R

$$x_f = R = x_i + v_{xi}t_{(B)} + \frac{1}{2}a_x t_{(B)}^{\ 2} = (v_i\cos\theta_i)t_{(B)}$$

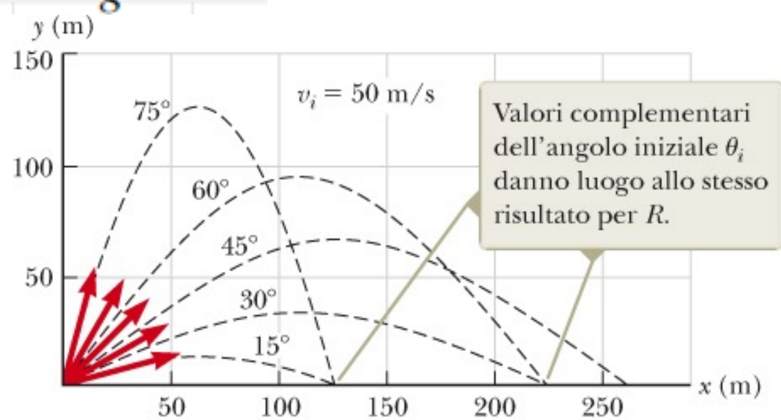


Il tempo di discesa per andare da A a B è uguale al tempo per raggiungere la massima altezza, per cui il tempo totale è $t_B=2t_A$

$$R = (v_i\cos\theta_i)t_B = (v_i\cos\theta_i)2t_A$$

$$R = (v_i\cos\theta_i)t_B = (v_i\cos\theta_i)\frac{2v_i sen\theta_i}{g} = \frac{2v_i^{\ 2} sen\theta_i\cos\theta_i}{g}$$

$$R = \frac{v_i^{\ 2} sen(2\theta_i)}{g}$$



$$R_{MAX} \Rightarrow sen(2\theta_i) = 1 \Rightarrow 2\theta_i = 90^\circ \Rightarrow \theta_i = 45^\circ$$

La gittata è massima quando l'angolo di lancio è di 45°

N.B. : I valori degli angoli θ e 90-θ danno luogo allo stesso valore di gittata

Esercitazione

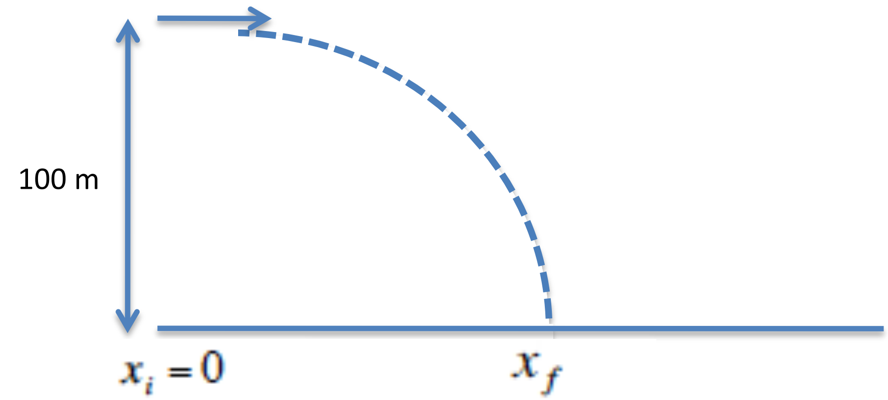
esercizio sul moto in due dimensioni

Lancio di un pacco da un aereo.
L'aereo vola orizzontalmente a 40 m/s ad un altezza di 100 m.

A che distanza verrà lanciato il pacco rispetto alla posizione in cui è lanciato?

$$x_f = x_i + v_{xi} t_f = 0 + (40 m/s) t_f$$

$$y_f = y_i + v_{yi} t_f - \frac{1}{2} g t_f^{\,2}$$

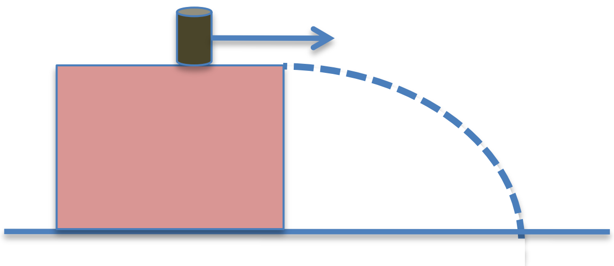


$$-100 m = 0 + 0 - \frac{1}{2} g t_f^{\,2} \quad \Rightarrow \quad t_f^{\,2} = \frac{2 \cdot 100}{g} \qquad t_f = 4.51 s$$

$$x_f = (40 m/s) t_f = 40 \cdot 4.51 = 180 m$$

Lancio della birra

Un boccale di birra viene lanciato su un bancone, il boccale cade a terra ad una distanza di 1.40 m dalla base del banco. L'altezza del bancone è 0.860 m



Calcolare la velocità finale del boccale prima dell'impatto a terra (e la sua direzione)

Calcolare la velocità iniziale del boccale all'uscita dal bancone

Condizioni iniziali:
$X_i=0$
$Y_i=0$
$X_f=1.40$ m
$Y_f=-0.860$ m
$V_{yi}=0$
$a_x=0$
$a_y=-g=-9.80\ m/s^2$

$$y_f = y_i + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^{\,2}$$

$$-0.860m = 0 + 0 - \frac{1}{2}(9.8m/s^2)t_f^{\,2} \qquad t_f\,?$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t_f \Rightarrow 1.40m = 0 + v_{xi}t_f$$

$$v_{xi} = \frac{x_f}{t_f} = \frac{1.40m}{t_f}$$

$V_{xf} = V_{xi}$

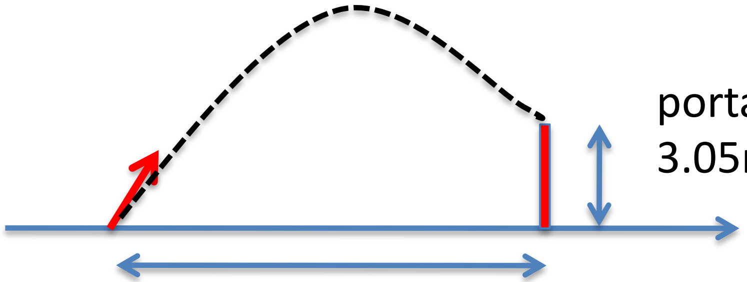
La velocità è costante lungo x

$$v_{yf} = v_{yi} - gtf = 0 - gt_f \Rightarrow v_f = \sqrt{v_{xf}^{\,2} + v_{yf}^{\,2}}$$

Altro esempio: Il calciatore

Un calciatore calcia il pallone da una distanza di 36 m dalla porta
Il pallone lascia il suolo con un angolo di 53° rispetto all'orizzontale ed ha una velocità di 20 m/s
Riesce il pallone ad entrare in porta (altezza traversa 3.05 m)
A che distanza passa dalla traversa?

Condizioni iniziali:
$X_i=0$; $Y_i=0$
$X_f=36$ m
$v_{Xi}=v\cos\theta$; $v_{Yi}=v\,\mathrm{sen}\theta$
$a_x=0$
$a_y=-g=-9.80$ m/s^2

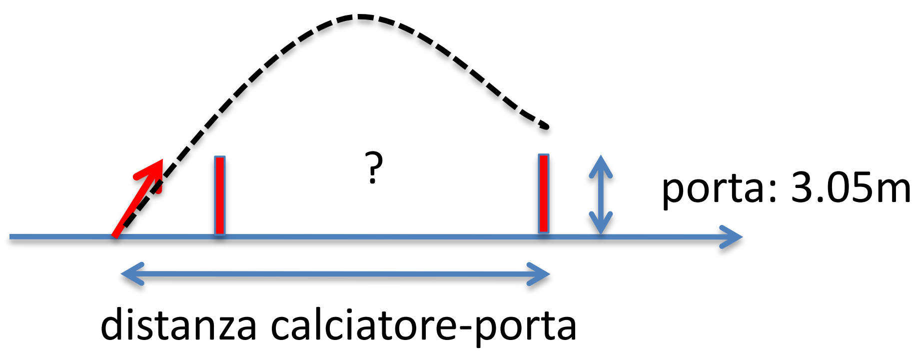


$$x_f = x_i + v_{xi}t_f \Rightarrow 36m = 0 + v_{xi}t_f \Rightarrow t_f$$

$$y_f = y_i + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^{\,2} \Rightarrow y_f = 0 + v_{yi}t_f - \frac{1}{2}gt_f^{\,2} \Rightarrow y_f$$

Il calciatore (2)

Il pallone passa alto sulla traversa nella sua fase ascendente o discendente



Alla massima altezza

$$v_{yf} = 0 = v_{yi} - gt_{\max h} \Rightarrow v_{yf} = 0 = v_i sen\vartheta_i - gt_{\max h}$$

$$t_{\max h} = \frac{v_i sen\vartheta}{g}$$

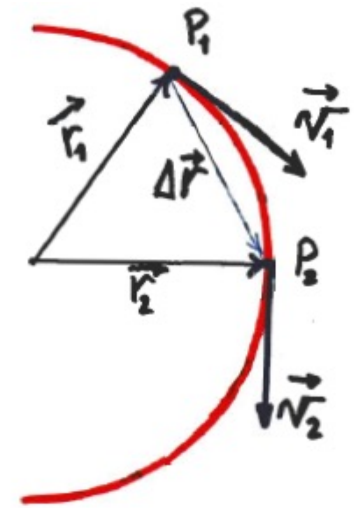
$$t_{\max h} = \frac{20 sen(53°)}{9.8} = 1.63s$$

Se $t_f > t_{maxh}$ allora il pallone supera la traversa in fase di discesa

Moto circolare uniforme

- Un moto può essere vincolato a compiersi lungo una circonferenza
- Se vengono percorsi archi di circonferenza uguali in tempi uguali si parla di moto circolare uniforme
- Il modulo della velocità è costante

Moto circolare uniforme

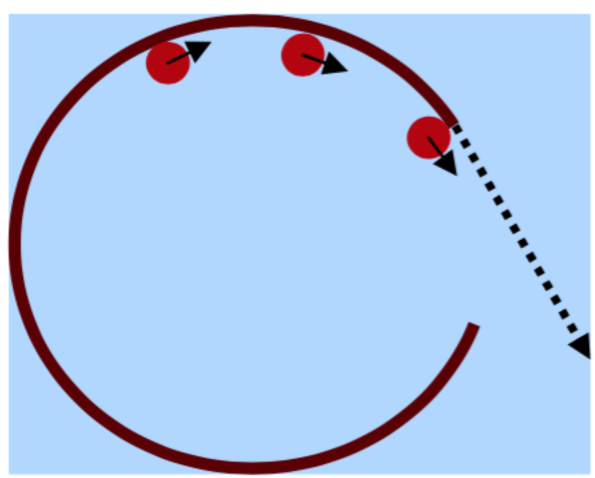


- Moto di un punto materiale che si muove lungo una circonferenza ad una velocità costante
- L'oggetto si muove con velocità costante in modulo ma la direzione del vettore velocità cambia continuamente
- Il vettore velocità nel moto circolare uniforme è sempre tangente ad una circonferenza.
- Accelerazione diretta verso il centro dovuta alla variazione nel tempo della direzione della velocità
- Detto T il tempo per percorrere l'intera circonferenza di raggio r di ha che il modulo della velocità vale

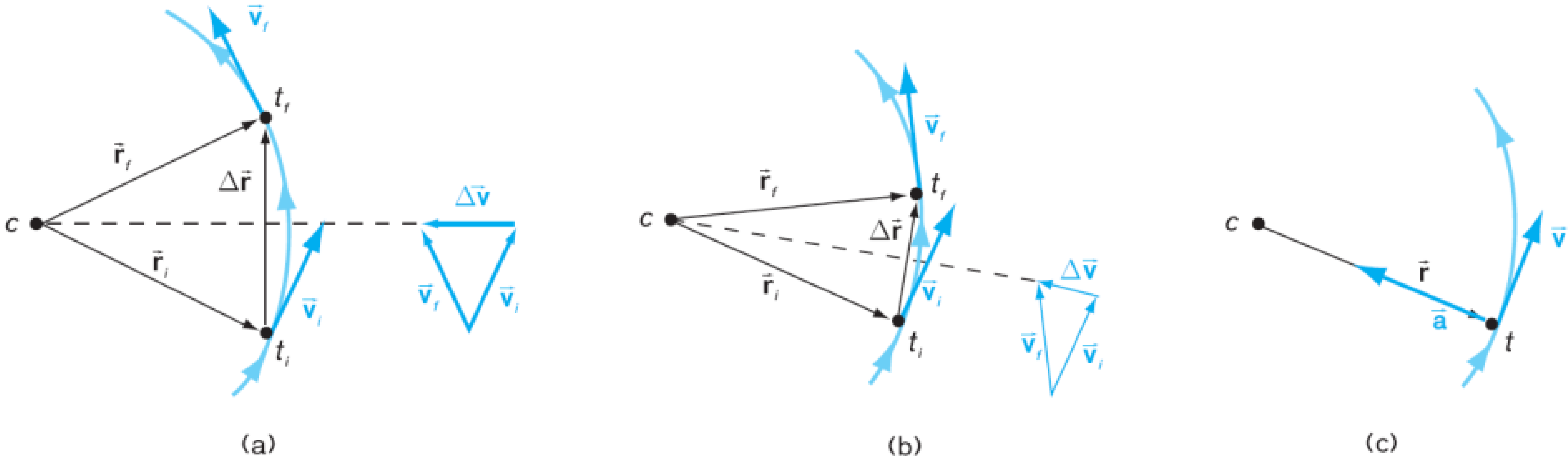
$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Moto circolare uniforme

- Vettore velocità tangente alla circonferenza in cui si svolge il moto
- Per capire questa cosa si immagini una pallina che si muove in una guida circolare con un'apertura
- Nel momento in cui la pallina raggiunge l'apertura, questa non segue più un moto circolare, ma il suo moto diventerà rettilineo nella direzione tangente alla guida circolare



Moto circolare uniforme: accelerazione centripeta



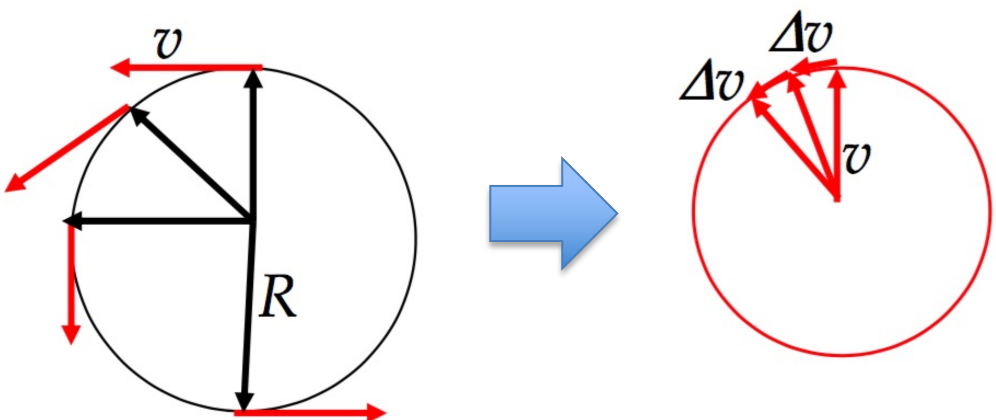
La direzione di **v** è sempre perpendicolare ad **r,** per cui anche **Δv** è perpendicolare a **Δr e diretto verso il centro della circonferenza**

Nota che il vettore Δv ha la stessa direzione dell'accelerazione **a (la quale quindi è anch'essa diretta verso il centro)**

$$\vec{a}_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

Moto circolare uniforme: accelerazione centripeta

- In un moto circolare uniforme il vettore velocità può essere visto come un vettore che descrive una circonferenza di raggio v



$$\vec{a}_c = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

- Una rotazione completa avviene in un tempo T
- Sia Δt un intervallo piccolo, la N-ma parte di T

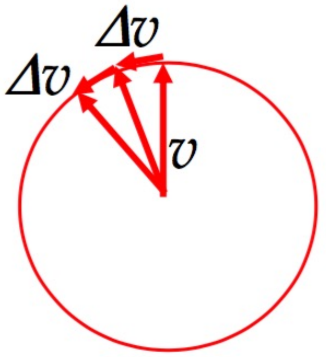
$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

Moto circolare uniforme: accelerazione centripeta

- Nell'intervallo di tempo Δt la velocità subirà una variazione Δv tale che

$$\Delta v = \frac{2\pi v}{N}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v / N}{T / N} = \frac{2\pi v}{T}$$

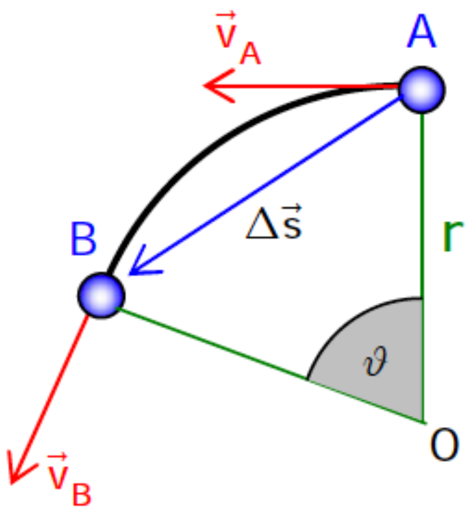


$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{2\pi R / v} = \frac{v^2}{R}$$

modulo dell'accelerazione centripeta

Moto circolare uniforme:accelerazione centripeta



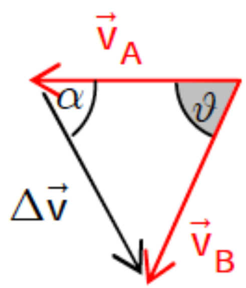
I triangoli formati dai vettori posizione e velocità (iniziale e finale) sono dei triangoli simili: l'angolo tra due lati è uguale e rapporto tra le lunghezze dei lati uguale

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|\Delta\vec{s}|}{r}$$

Dividendo ambo i membri per Δt

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t \cdot |\vec{v}|} = \frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t \cdot r}$$

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t \cdot} = \frac{|\vec{v}|}{r}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t}$$



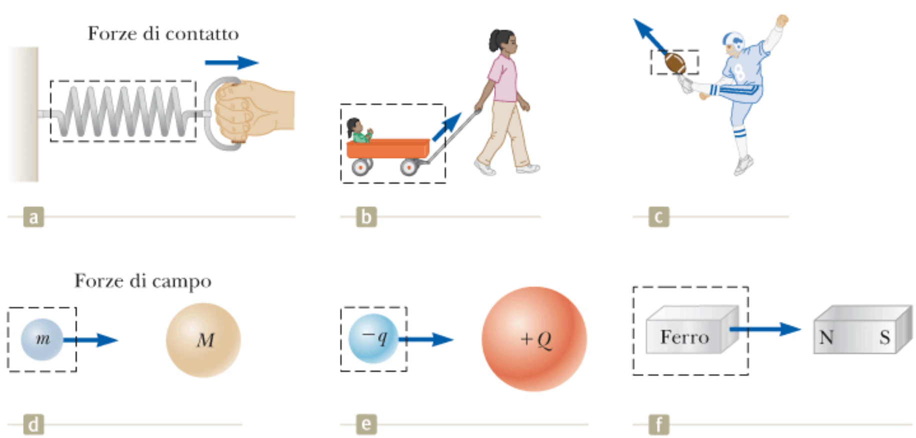
$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad \frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t} \rightarrow |\vec{v}|$$

$$\vec{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{|\vec{v}|}{r}|\vec{v}| = \frac{|\vec{v}|^2}{r}$$

Concetti di Forza e di Massa

- **Forza** associata ad un cambiamento dello stato di quiete o di moto rettilineo di un oggetto: si tratta di un azione in grado di modificare lo stato di moto ed è misurabile proprio misurando come il moto di un corpo si discosta dal moto rettilineo uniforme
- Una spinta o un attrazione oltre ad una intensità hanno una direzione ed un verso: **La Forza è una grandezza vettoriale**
- Un corpo anche se sottoposto ad un insieme di forze può restare in quiete quando le forze presenti si bilanciano
- Forze di contatto e campi di forza (azioni a distanza)
- La **massa** è la misura della resistenza di un corpo alle variazioni di velocità: proprietà intrinseca di un corpo



Primo principio della dinamica: principio di inerzia

- Galileo fu il primo ad affermare:” Una volta comunicata ad un corpo una qualsiasi velocità, questa sarà invariabilmente mantenuta fino a quando non ci saranno cause esterne ritardanti.”
- Se su un corpo non agisce alcuna forza, la velocità del corpo non può cambiare, ossia il corpo non può accelerare
- Lo stato naturale di un corpo è il moto rettilineo
- **Un corpo in quiete rimane in quiete a meno che su di esso non agiscano forze esterne. Un corpo in moto continua il suo moto con velocità costante in linea retta, a meno che su di esso non agiscano forze esterne.**

Primo principio della dinamica

- Due o più forze possono comporsi dando luogo ad una forza risultante

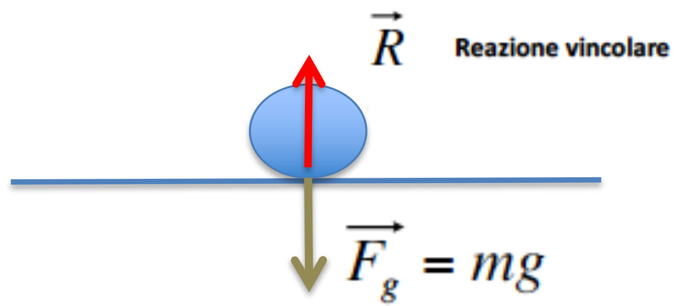
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots..$$

- **Se una forza risultante che agisce su un corpo è nulla, allora il corpo o è fermo o si muove con velocità costante (cioè l'accelerazione del corpo è nulla)**

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = 0 \\ \vec{v} = \text{costante} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = 0$$

Esempi

Corpo fermo su un piano $\vec{v} = 0$

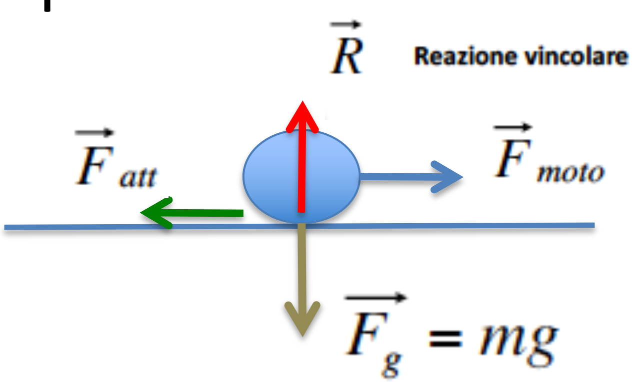


$$\sum \vec{F} = \vec{R} + \vec{F_g} = 0$$

$$R - F_g = 0$$

$$\vec{a} = 0$$

Corpo in movimento con velocità costante $\vec{v} = \text{costante}$



$$\vec{R} + \vec{F_g} = 0$$

$$\vec{F}_{moto} + \vec{F}_{att} = 0$$

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\vec{a} = 0$$

Verifiche del primo principio

- Per effettuare la verifica sperimentale, o si va nello spazio oppure si deve trovare il modo di eliminare l'attrito

https://www.youtube.com/watch?v=kzNbBaFMZus