Lavoro ed Energia II

Il Lavoro. F. costante / F. variabile

(1) **Lavoro svolto da una forza costante** che ha **la stessa direzione e verso** del vettore spostamento:

$$L = F\,s$$

(2) **Lavoro svolto da una forza costante** che però **non ha** la stessa direzione e verso del vettore spostamento:

$$L = F \Delta r\, cos\theta$$

(3) **Lavoro svolto da una forza variabile**:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

Il Lavoro della forza Elastica

Esempio di una forza variabile unidimensionale - la Forza Elastica (E_{el}, E_m) esercitata da una molla allungata o compressa.

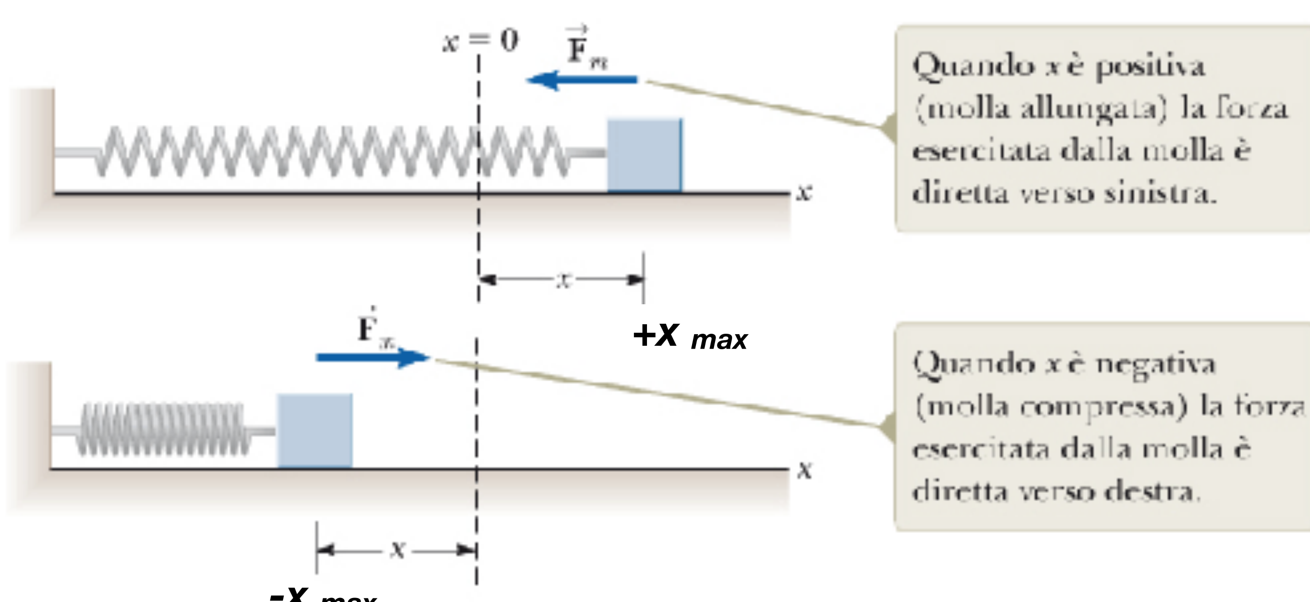
La forza elastica e la deformazione della molla che essa provoca sono legati con la legge di Hook:

$$F_m = -kx$$

x è la posizione del *blocco* (in figura) rispetto alla posizione di equilibrio ($x = 0$),
k è una *costante elastica* che caratterizza la rigidità della molla. Stessa legge, ma espressa nella forma vettoriale:

$$\overrightarrow{F}_m = -kx\hat{i}$$

Il **segno negativo** indica che la forza esercitata dalla nostra molla è sempre diretta in verso opposto rispetto a quello dello spostamento dalla posizione di equilibrio.



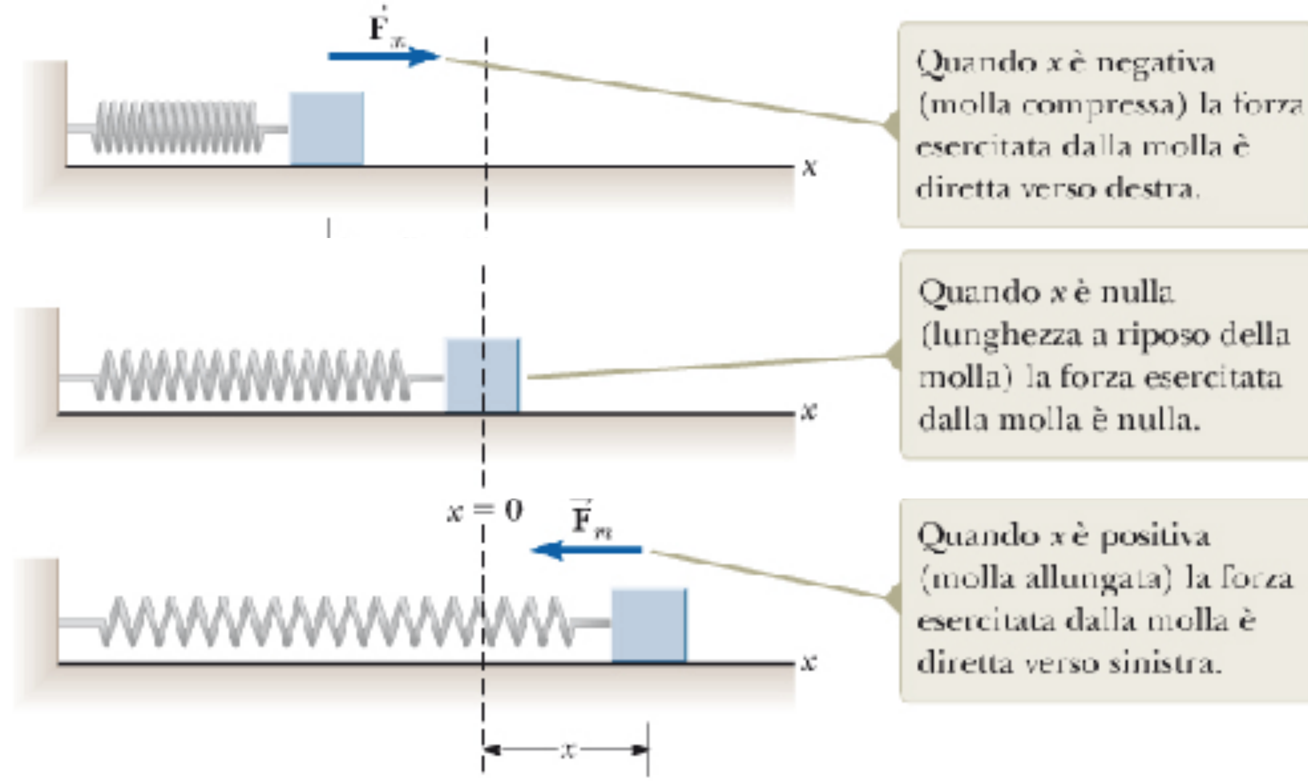
Essendo sempre diretta verso la posizione di equilibrio, la forza elastica viene anche chiamata ***la forza di richiamo***.

Il Lavoro della forza Elastica

Calcoliamo il **Lavoro** svolto *dalla* Forza elastica *sul* blocco.

Supponiamo che la molla inizialmente sia compressa e il blocco si trova a distanza $-x_{max}$ rispetto alla posizione di equilibrio.

Il sistema viene lasciato libero.



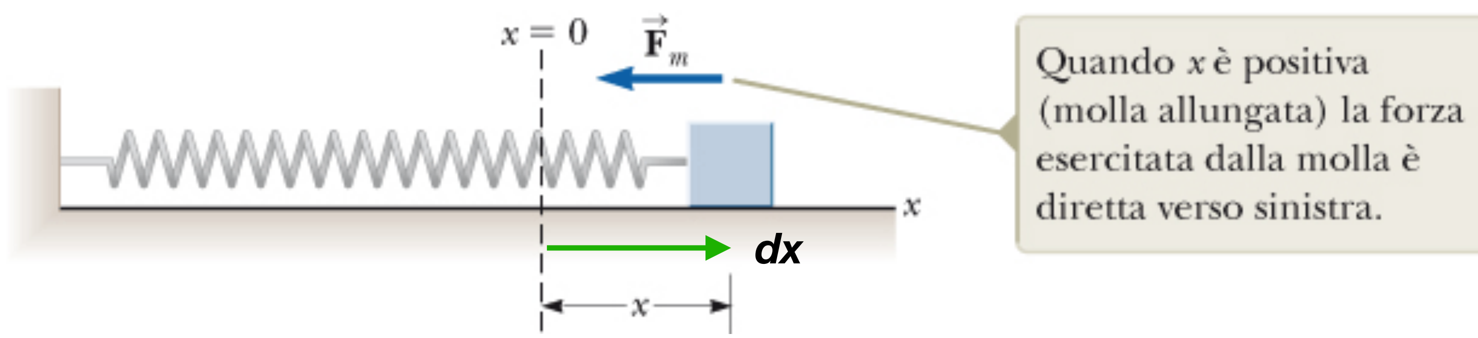
$$W_m = \int \vec{F}_m \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\hat{i}) \cdot (dx\hat{i}) = \int_{-x_{max}}^{0} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Il **Lavoro** svolto dalla forza elastica sul blocco nell'intervallo da $-x_{max}$ a 0 è positivo poiché la forza della molla, in questo caso, ha lo stesso verso dello spostamento.

Il Lavoro della forza Elastica

Il **Lavoro** fatto dalla forza elastica quando il blocco si sposta da 0 a $+x_{max}$ sarà

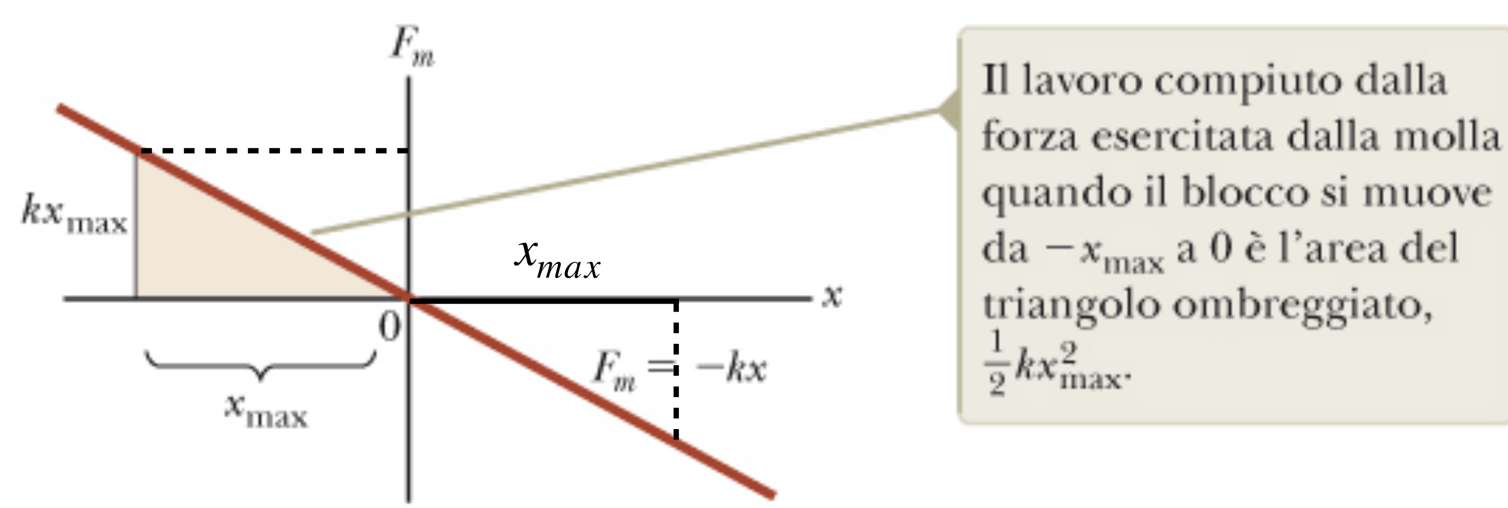
$$W_m = -\frac{1}{2}kx_{max}^2$$



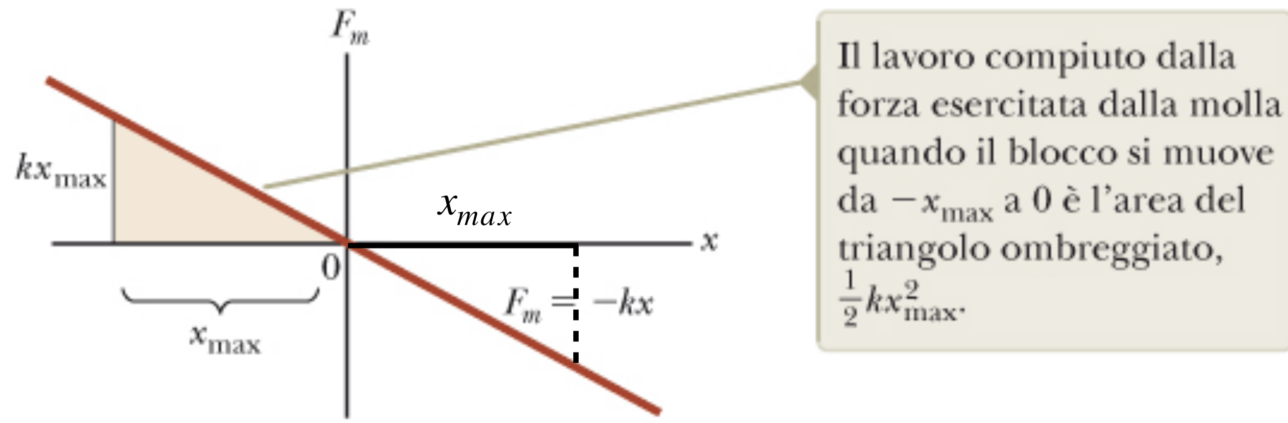
Quindi è <u>negativo</u> perché in questo caso il blocco va verso destra ma la forza elastica è diretta verso sinistra.

Il **Lavoro** totale da $x = -x_{max}$ a $x = +x_{max}$, invece, sarà uguale a **zero**!

Rappresentazione grafica
del lavoro svolto dalla forza elastica
fatta di due elementi: compressione
e allungamento.



Il Lavoro della forza Elastica



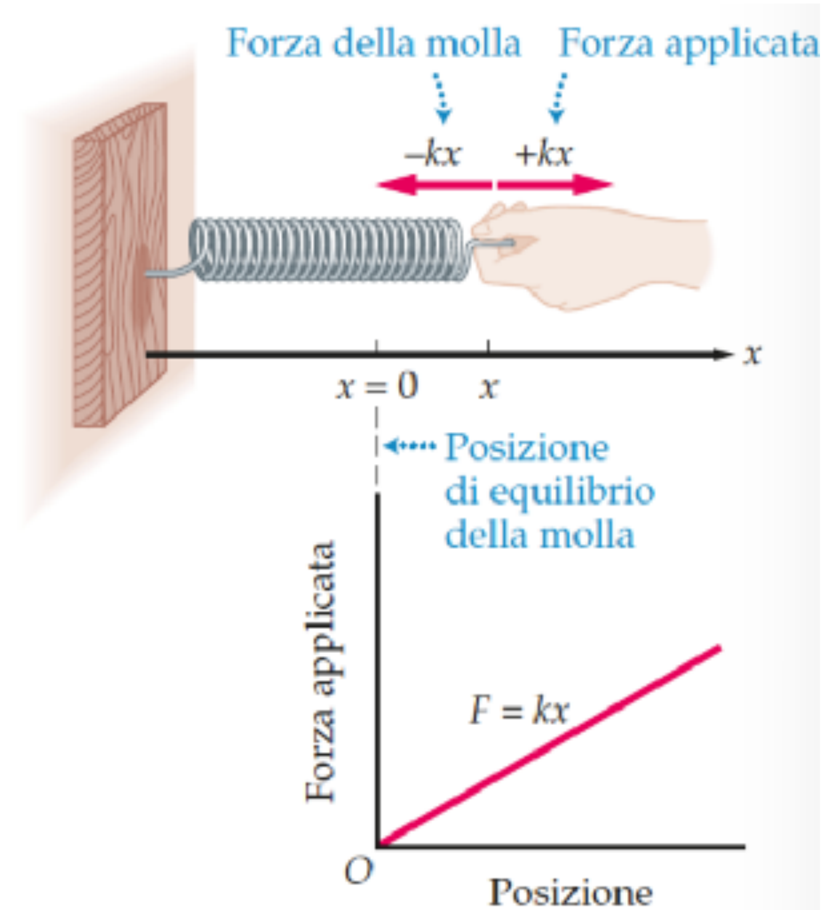
Analizzando il grafico e in particolare i triangoli con i cateti uguali a x_{max} e kx_{max} vediamo che le aree sono uguali a $\frac{1}{2}kx^2_{max}$.

Per un spostamento arbitrario da x_i a x_f il lavoro svolto dalla molla sarà dato da:

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Vediamo subito che nel caso in cui x_i **coincide** con x_f il lavoro svolto sarà uguale a zero.

Il Lavoro della forza applicata



L'espressione che abbiamo ottenuto descrive il lavoro compiuto dalla ***forza della molla sul blocco***.
Adesso consideriamo il lavoro compiuto da un agente esterno sullo stesso blocco. In questo caso l'agente esterno applica una forza al blocco che determina lo spostamento del blocco. Possiamo facilmente trovare il lavoro svolto da questa forza dell'agente esterno $\vec{F}_{app}$ che sarà uguale e opposta alla forza della molla $\vec{F}_m$ (*terza legge di Newton*). Quindi abbiamo:

$$\vec{F}_{app} = F_{app}\hat{i} = -\vec{F}_m = -(-kx\hat{i}) = kx\hat{i}$$

In questo caso il lavoro complessivo svolto dall'agente esterno sul blocco sarà:

$$W_{est} = \int_{x_i}^{x_f} (kx) \cdot dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Lavoro fatto dalla Forza applicata, *Esterna*

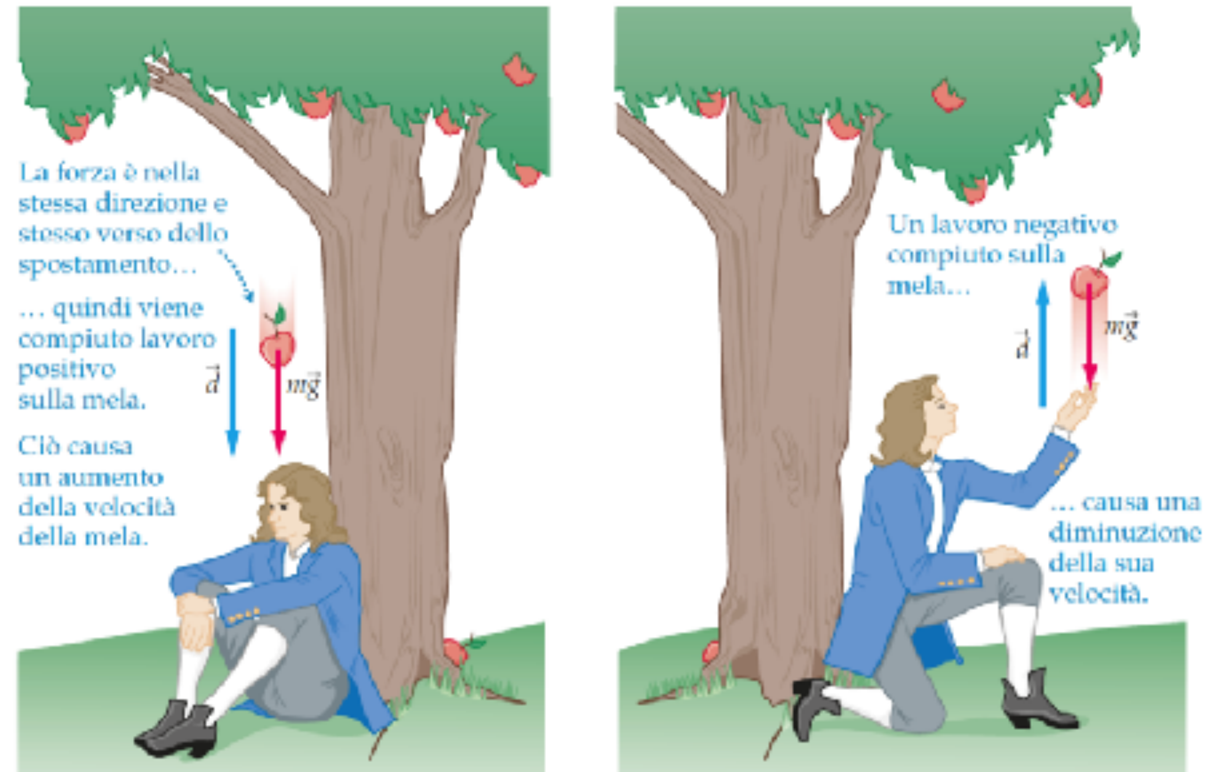
Quando allunghiamo o comprimiamo una molla rispetto alla posizione di equilibrio, il lavoro che facciamo è sempre positivo (il vettore forza e lo spostamento anno la stessa direzione e verso).
Il lavoro fatto dalla molla, invece, può essere si positiva sia negativa.

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Lavoro fatto dalla Forza *Elastica*

Lavoro e velocità

Immaginiamo la mela in caduta libera. Man mano che la mela cade la gravità compie ***L*** positivo e la v_{mela} aumenta. Se invece la mela viene lanciata verso l'alto, il ***L*** della forza di gravità è negativo e la v_{mela} diminuisce. Un oggetto in movimento possiede energia, detta **energia cinetica** (dalla parola greca ***kinesis*** - "***moto***").
Otteniamo una definizione operativa dell'energia cinetica e vediamo come il *lavoro può essere espresso in termini di modulo della velocità di un oggetto*.



Mela che cade: $L > 0$, v aumenta
Mela lanciata verso l'alto: $L < 0$, v diminuisce

Nel nostro studio della dinamica abbiamo appreso che un corpo, soggetto a una risultante delle forze non nulla $\sum F \neq 0$, **accelera** in conformità alla seconda legge di Newton. Significa che applicando questa forza per un dato intervallo di tempo la velocità del corpo varia dal valore iniziale $\vec{v}_i$ a quello finale $\vec{v}_f$.
Scriviamo la IIª legge usando i moduli della risultante delle forze e dell'accelerazione:

$$F_{ris} = ma$$

Il lavoro compiuto sulla oggetto da questa forza mentre si muove lungo la distanza ***d*** sarà:

$$L_{netto} = F_{ris}\, d = mad$$

Lavoro e velocità

Per mettere in relazione il Lavoro con la variazione del modulo della velocità usiamo le formule della Cinematica, per il **moto rettilineo uniformemente accelerato**:

$$v_f = v_i + at \qquad (1)$$

$$x_1 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = d \qquad (2)$$

Dall'equazione (1) possiamo trovare il tempo:

$$v_1 - v_0 = at \;\Rightarrow\; t = \frac{v_1 - v_0}{a}$$

e sostituirlo in (2) :

$$d = v_0\left(\frac{v_1 - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_1 - v_0}{a}\right)^2$$

Una volta semplificato otteniamo:

$$d = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$$

Lavoro e velocità

$$d = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a}$$

Da questa espressione possiamo immediatamente ricavare l'accelerazione a:

$$a = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2d}$$

Ora mettiamo questa espressione per accelerazione nella formula per il lavoro scritta prima ($L_{netto} = F_{ris}\,d$):

$$L_{netto} = F_{ris}\,d = mad = m\left(\frac{v_1^2 - v_0^2}{2d}\right)d = m\left(\frac{v_1^2 - v_0^2}{2}\right) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$L_{netto} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Abbiamo trovato la relazione che lega il *Lavoro* totale è direttamente legato alla *variazione* del modulo della *velocità*.

Osserviamo che:
$L_{tot} > 0$ nel caso di $v_f > v_i$ e
$L_{tot} < 0$ nel caso di $v_f < v_i$ e in fine
$L_{tot} = 0$ quando $v_f = v_i$

Teorema dell'energia cinetica

Come possiamo vedere il Lavoro è equivalente alla differenza tra il valore finale e iniziale della quantità $(1/2)mv^2$. Questo termine rappresenta **l'energia cinetica K**:

$$K = \frac{mv^2}{2} \equiv \frac{1}{2}mv^2$$

Generalmente parlando l'energia cinetica di un oggetto è l'energia dovuta al suo <u>movimento</u>. In questo caso abbiamo ***energia cinetica traslazionale***, per distinguere l'energia di un oggetto che si muove lungo una line retta, dall'energia di un oggetto che sta ruotando (l'energia cinetica rotazionale).

$$L_{netto} = \Delta K = K_1 - K_0 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Il Lavoro totale compiuto su un oggetto è uguale alla variazione della sua energia cinetica. Questa affermazione rappresenta il **Teorema dell'energia cinetica**, o **il teorema delle "*Forze vive*"**.

Si applica solo al Lavoro compressivo (totale) svolto su un oggetto, Lavoro che viene fatto dalla **Forza Risultante**.

Teorema dell'energia cinetica

Vediamo per completezza la dimostrazione generale del Teorema dell'Energia Cinetica. Consideriamo il caso unidimensionale con **le forze** che in generale **non siano costanti**. In questo caso la forza risultante agente sul corpo sarà $F_{res,x}$. Il lavoro totale svolto sul corpo da questa forza sarà data dall'integrale $L_{tot} = \int F_{rex,x} \, dx$, ricordiamo inoltre che l'accelerazione è data da $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$.

La forza $F_{res,x}$, grazie alla II^a legge di Newton, può essere espressa in seguente modo:

$$F_{res,x} = ma_x = m\frac{dv_x}{dx} = m\frac{dv_x}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv_x}{dx}v_x = mv_x\frac{dv_x}{dx}$$

Calcoliamo il Lavoro:

$$L_{tot} = \int F_{res,x}dx = \int mv_x\frac{dv_x}{dx}dx = \int mv_x dv_x$$

Siamo passati dall'integrale su ***dx*** all'integrale sul ***dv*** dove integriamo tra la velocità iniziale v_i e quella finale v_f . Quindi facendo integrazione otteniamo:

$$L_{tot} = \int_{v_{ix}}^{v_{fx}} mv_x dv_x = m\int_{v_{ix}}^{v_{fx}} v_x dv_x = \frac{1}{2}m(v_{fx}^2 - v_{ix}^2)$$

Teorema dell'energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Unità di misura dell'**Energia Cinetica** è Joule, come Lavoro. Entrambe le grandezze sono quantità scalari. A differenza dal Lavoro l'Energia Cinetica non è mai negativa ($K \sim v^2$) !

$$\left[kg\left(\frac{m}{s}\right)^2\right] = \left[kg\frac{m}{s^2}\right][m] = [N][m] = [J]$$

Il teorema dell'energia cinetica dimostra che il lavoro può *(e deve)* **essere considerato come un meccanismo per trasferire energia.**

Es: La campionessa di tuffi.
Nell'eseguire un tuffo da un trampolino di 3 m, una tuffatrice di 60 kg passa accanto alla posizione del trampolino diretta verso il basso con una velocità di 8 m/s ed entra in acqua a una velocità di 11 m/s. Quanto lavoro compie la forza di gravità sulla tuffatrice dal momento in cui passa accanto al trampolino fino all'ingresso in acqua?

Es: La forza di gravità compie un lavoro di 4.7 J su un sasso di $m=1.6 \times 10^{-1}$ kg lasciato cadere da un trampolino di 4m con la velocità iniziale v=0 m/s. Qual è il modulo della velocità del sasso quando entra in acqua?

Teorema dell’energia cinetica

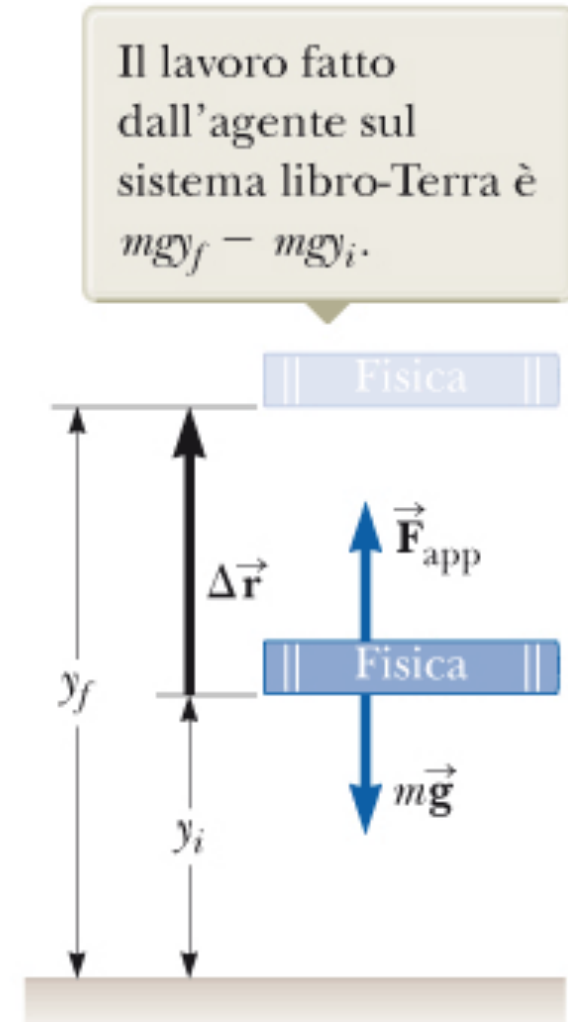
Es: Un corpo di m = 4.5 g, viene lasciato cadere da fermo da un’altezza h =10.5 m sopra la superficie terrestre. Trascurando la resistenza dell’aria trovare la velocità del corpo all’impatto.

Es: Consideriamo che la distanza minima di frenata per un auto che viaggia con la v=8.9 m/s è circa 7.6 m. Qual è la decelerazione richiesta per fermare l’auto supponendo che la forza di frenata sia costante? Assumere che le ruote dell’auto si bloccano (non ruotano) per coinvolgere la forza di attrito dinamico fra le gomme e la strada di produrre il lavoro necessario per ridurre il modulo della velocità dell’auto.

Es: Un blocco con m = 3.63 kg sta scivolando lungo un piano orizzontale privo di attrito con la velocità v =1.22 m/s. Incontra una molla e la comprime fino a completo arresto. Conoscendo la constante elastica k=135 N/m, calcolare di quanto verrà compressa la molla.

Energia Potenziale

Abbiamo introdotto il concetto di Lavoro che viene svolto da una Forza (sia costante che variabile). Abbiamo anche visto alcuni esempi delle forze e del lavoro che viene compiuto.



Consideriamo ora un <u>sistema</u> <u>composto</u> dal <u>libro e la Terra</u> che interagiscono fra di loro (*attraverso il campo gravitazionale*). Proviamo a compiere il lavoro sul sistema sollevando lentamente il libro in verticale in modo da provocare un spostamento $\Delta r = (y_f - y_i)\,\hat{j}$.

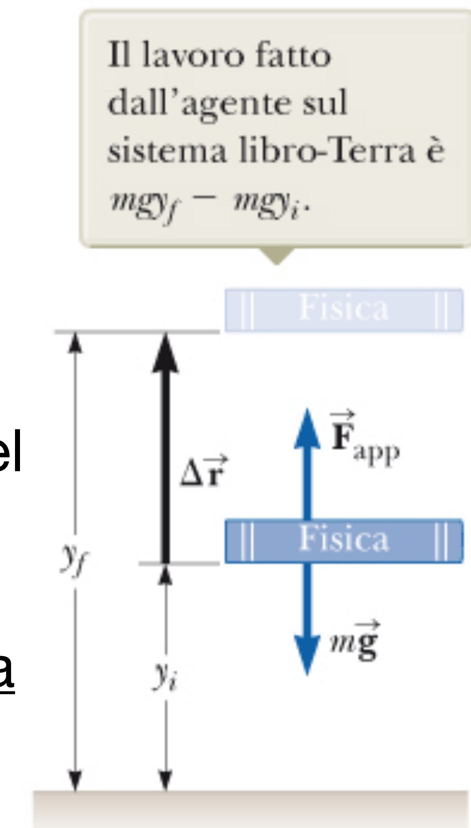
Abbiamo detto prima che il Lavoro provoca un trasferimento di energia, quindi, fatto *sul* sistema, il lavoro dovrebbe aumentare l'energia del sistema (*fluisce nel sistema*). Visto che il libro prima e dopo rimane sempre fermo la sua velocità iniziale e finale è pari a zero. Di conseguenza l'energia cinetica rimane sempre zero ($K = 0$).

In quale altra forma potrebbe essere immagazzinata l'energia trasferita al sistema?

Una volta sollevato il libro potrebbe essere lasciato libero e in quel caso avrà la velocità e quindi Energia Cinetica. Possiamo dire che mentre si trovava in altro il libro possedeva ***potenzialmente*** l'energia cinetica che può essere ***liberata*** una volta il libro viene lasciato cadere. Chiamiamo questo tipo di energia **Energia Potenziale.** Visto che si tratta di Forza di gravità precisiamo che in questo caso **l'energia potenziale** è del tipo **gravitazionale**.

Energia potenziale Gravitazionale

Va notato che **l'energia potenziale gravitazionale** del sistema dipende esclusivamente dall'altezza verticale dell'oggetto rispetto alla superficie terrestre (*sistema libro-Terra*). Quindi non importa come viene sollevato l'oggetto, **contano solo il punto iniziale e punto finale.**



La scelta del livello zero è completamente arbitraria, quello che conta è la differenza dei energia potenziale e la differenza è indipendente dalla scelta del livello iniziale.

E' importante sottolineare che **l'energia potenziale** è un attributo del sistema e non di un corpo isolato. Quindi dobbiamo dire *l'energia potenziale gravitazionale del sistema libro-Terra, non del libro*.

L'energia che caratterizza la potenzialità di un sistema di acquistare energia cinetica a causa dell'azione della forza di gravità è detta energia potenziale gravitazionale.

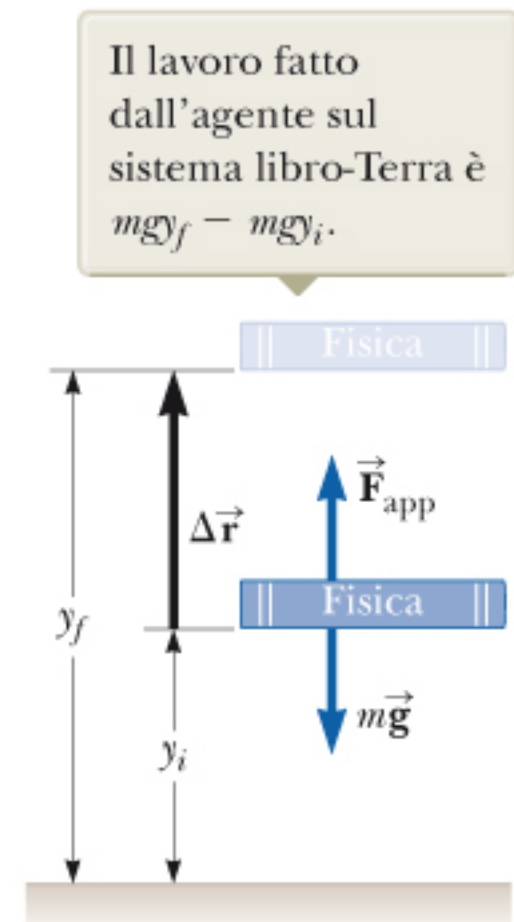
Troviamo il lavoro svolto sul sistema libro-Terra da una forza esterna al sistema. Questa forza cambia la distanza fra il libro e al Terra, aumenta altezza del libro e lo fa lentamente da considerare il moto uniforme (a=0, v=const) ⇒ la forza esterna costante:

$$W_{est} = \overrightarrow{F}_{app} \Delta\vec{r} = mg\hat{j}\,(y_f - y_i)\,\hat{j} = mgy_f - mgy_i$$

Energia potenziale Gravitazionale

$$U_g \equiv mgy \equiv mgh$$

L'unità di misura dell'energia potenziale gravitazionale è joule esattamente come nel caso del lavoro de dell'energia cinetica. Inoltre come il lavoro e l'energia cinetica, anche in questo caso abbiamo una grandezza scalare.



$$[kg]\left[\frac{m}{s^2}\right][m] = \left[\frac{kg\,m}{s^2}\right][m] = [J]$$

Sfruttando la definizione dell'energia potenziale gravitazionale possiamo scrivere:

$$L_{est} = \Delta U_g = U_{g,f} - U_{g,i} = mgy_f - mgy_i$$

Questo significa che il lavoro totale svolto sul sistema, nel nostro caso del libro e Terra, è uguale alla variazione di energia potenziale gravitazionale del sistema.

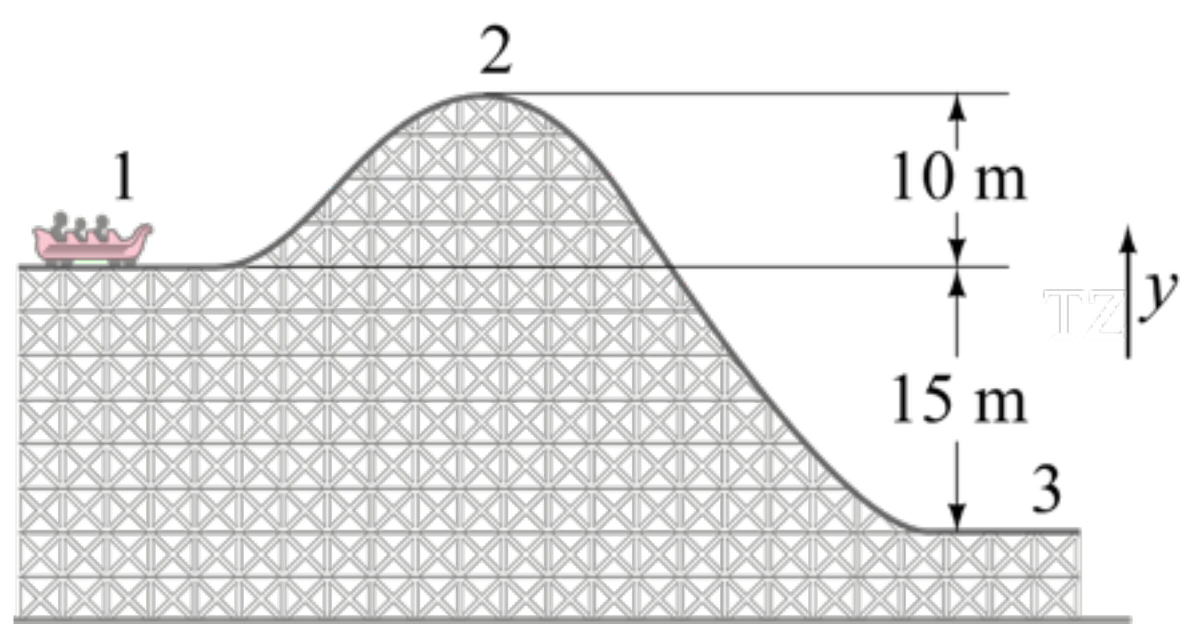
Va notato che l'energia potenziale gravitazionale dipende esclusivamente dall'altezza verticale dell'oggetto rispetto alla superficie terrestre. Quindi non importa come viene sollevato l'oggetto, importante solo di sapere il punto iniziale e punto finale.

La scelta del livello zero è completamente arbitraria, quello che conta è la differenza dei energia potenziale e la differenza è indipendente dalla scelta del livello iniziale.

Energia potenziale Gravitazionale

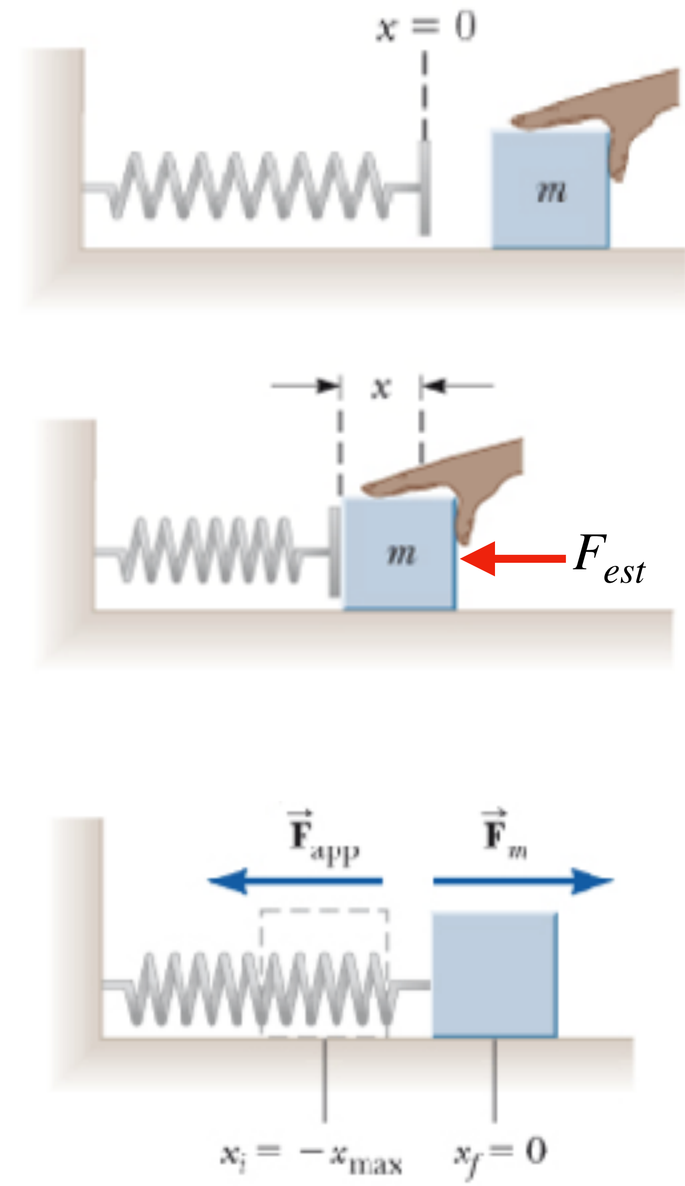
Es: Un vagoncino delle montagne russe di massa 1000 kg si muove dal punto 1 al punto 2 e quindi al punto 3.

A) Qual è l'energia potenziale gravitazionale nei punti 2 e 3 rispetto al 1?
B) Qual è la variazione di energia potenziale quando il vagoncino si sposta da 2 a 3?
C) Ripetere i calcoli A-B considerando però il punto 3 come riferimento.



Energia potenziale Elastica

Consideriamo un sistema costituito da un blocco ed una molla. La forza di richiamo, forza elastica della molla, è la forza con la quale interagiscono questi due elementi del sistema. Sappiamo che la forza elastica è data dalla Legge di Hook:



$$F_m = -kx$$

Sappiamo anche come calcolare il lavoro compiuto da una forza esterna applicata sul nostro sistema:

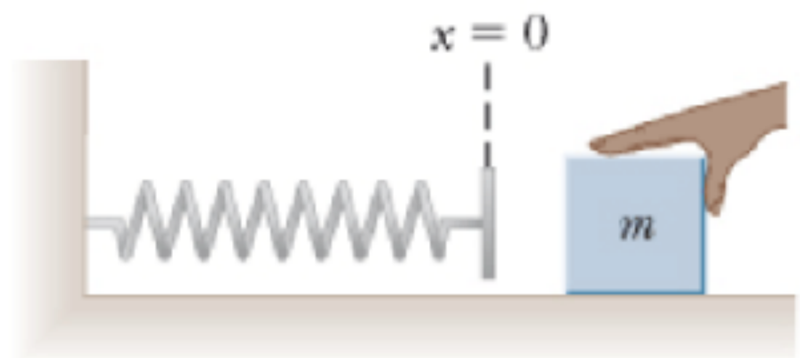
$$W_{est} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

Di nuovo vediamo che il lavoro è uguale alla differenza tra i valori assunti nella configurazione iniziale e finale.
Definiamo ora l'energia potenziale elastica associata al sistema blocco-molla come:

$$U_m \equiv \frac{1}{2}kx^2$$

Energia potenziale Elastica

L’energia potenziale elastica del sistema è l’energia immagazzinata nella deformazione della molla. Se la molla si trova in equilibrino (ne allungata, ne compressa) e quindi $x = 0$, l’energia potenziale elastica del sistema è uguale a zero.

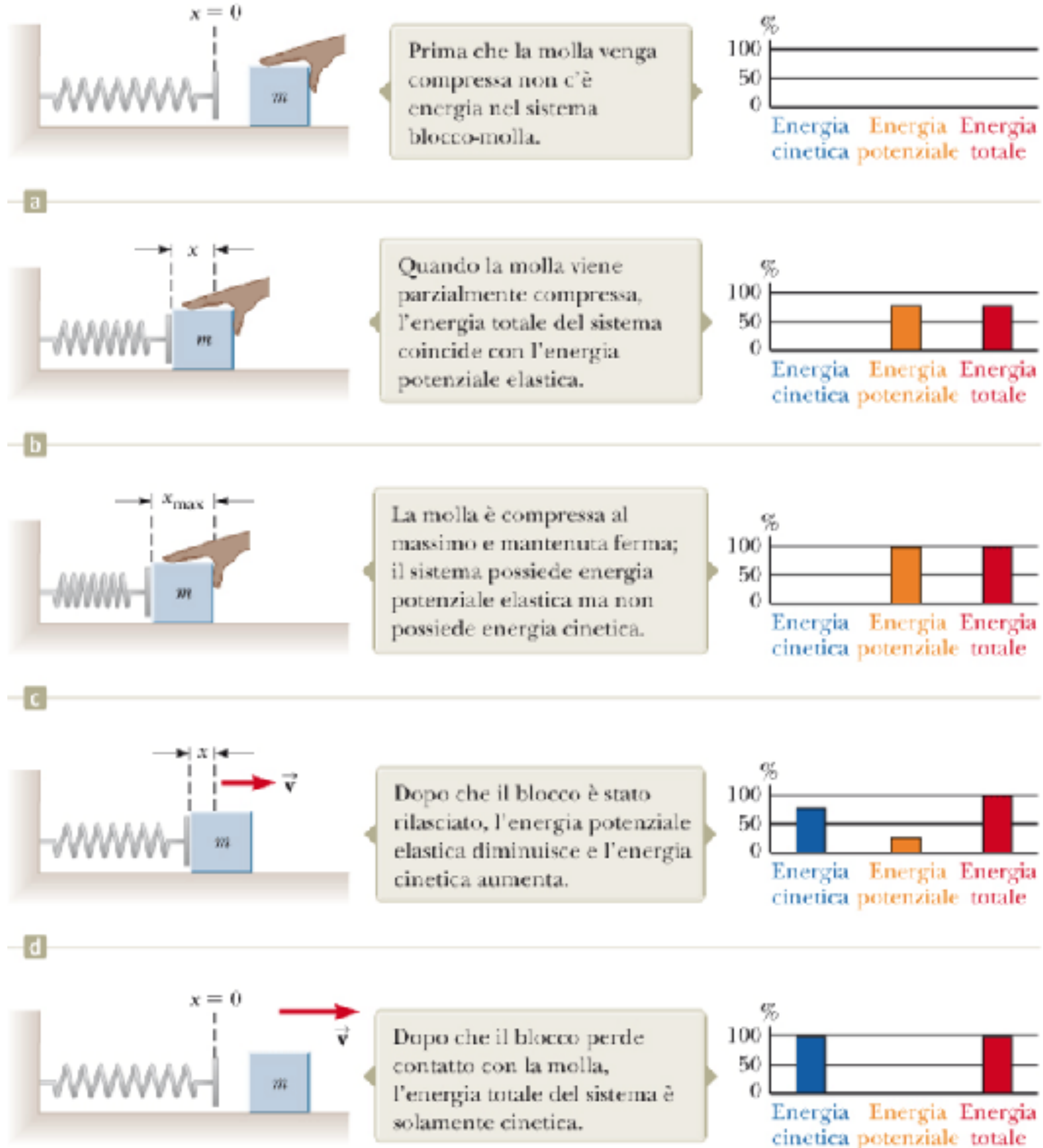


Possiamo individuare facilmente gli oggetti (sistemi) nelle quali viene sfruttata l’energia potenziale elastica immagazzinata in una molla: orologi meccanici, giocattoli per i bambini come trampolo a molla.

Vediamo in dettaglio come viene immagazzinata l’energia potenziale in una molla. Consideriamo il sistema composto da una molla e il blocco posti su una superficie orizzontale priva di attrito.

Energia potenziale Elastica

Quando il blocco viene spinto control la molla da una forza esterna, l'energia potenziale $U_m = (1/2)\, kx^2$ inizia a crescere (*con l'aumento della deformazione della molla*).
Quando la compressione raggiunge il valore massimo x_{max} l'energia potenziale elastica del sistema immagazzinata nella molla diventa $(1/2)\, kx_{max}^2$.
Successivamente, quando il blocco viene lasciato libero la molla esercito una forza su di lui e lo spinge verso destra. Il blocco quindi acquisisce una energia cinetica. L'energia potenziale elastica diminuisce mentre quella cinetica aumenta.
Quando la molla raggiunge la sua posizione di equilibrio, tutta l'energia potenziale immagazzinata viene liberata in forma di energia cinetica trasferita al blocco.

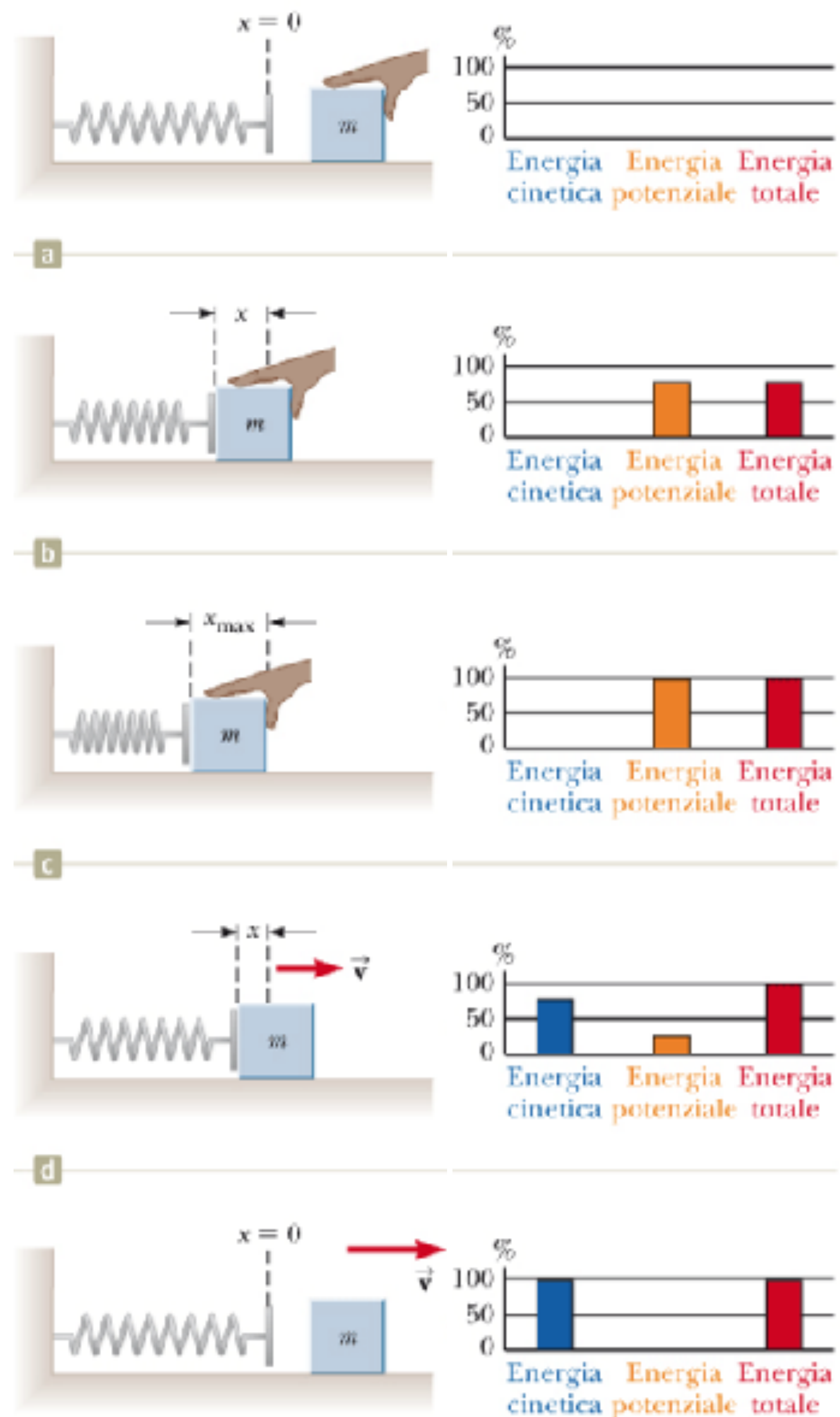


Energia potenziale Elastica

Istogrammi dell'energia.

L'informazione che riguarda l'energia del sistema può essere presentata in forma di una istogramma, costruito per ogni istante che ci interessa.

L'asse verticale da il valore di energia in percentuale mentre l'asse orizzontale riporta il tipo dell'energia come per esempio l'energia potenziale, l'energia cinetica e l'energia totale del sistema.



Forze conservative e dissipative

Vediamo insieme due esempi di **Energia Potenziale** quella ***gravitazionale*** e quella ***elastica***:

$$L_{est} = \Delta U_g = mgy_f - mgy_i \qquad L_{est} = \Delta U_m = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

La prima cosa che notiamo è che se il corpo ha eseguito un percorso chiuso tornado al punto di partenza, il lavoro svolto è nullo. Possiamo dire che in questi casi il lavoro svolto non dipende dal percorso. Le ***forze*** coinvolte in questi casi si chiamano ***conservative***.

Cosa succede nel caso di forza di attrito?

Proviamo a spostare un libro sul tavolo, più precisamente trasmettiamo un’accelerazione al libro spingendolo sul tavolo con la nostra mano.
Il libro, a causa della forza di attrito dinamico che agisce fra la superficie del libro in contatto con il tavolo e il tavolo, subirà un rallentamento e ad un certo punto si fermerà. In assenza di altre forza, l’unica che rimane in grado di compiere il lavoro sarà la forza di attrito. Essendo diretta nel verso opposto rispetto al movimento, il lavoro da lei compiuto sarà sempre negativo.

Anche se il libro fa un percorso circolare e ritorna nel punto di partenza, il lavoro svolto non sarà zero. Le ***forze*** che si comportano come la forza di attrito si chiamano ***non conservative*** o ***dissipative***.

Forze conservative e dissipative

a) Il lavoro svolto da una forza conservativa su un oggetto che si sposta da un punto ad un altro punto è indipendente dallo specifico percorso seguito.

b) Il lavoro svolto da una forza conservativa su un oggetto che si muove su un qualsiasi percorso chiuso (punto di partenza coincide con punto di arrivo) è nullo.

Un forza è non conservativa se non soddisfa le proprietà (a) e (b).

Dipendenza del lavoro svolto dal percorso caratterizza le forze che compiano questo lavoro come le forze non conservative. Esempi: forza di attrito o forza esercitata da una persona nel tirare o spingere qualcosa.