

**La fattorizzazione LU a blocchi
di una matrice A ,
in ambiente MIMD
a Memoria Distribuita**

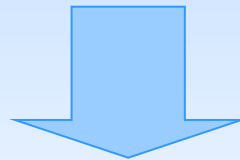
La fattorizzazione LU:

Metodo di fattorizzazione

di A nel prodotto di due matrici, L ed U tali che :

L – matrice triangolare inferiore

U – matrice triangolare superiore



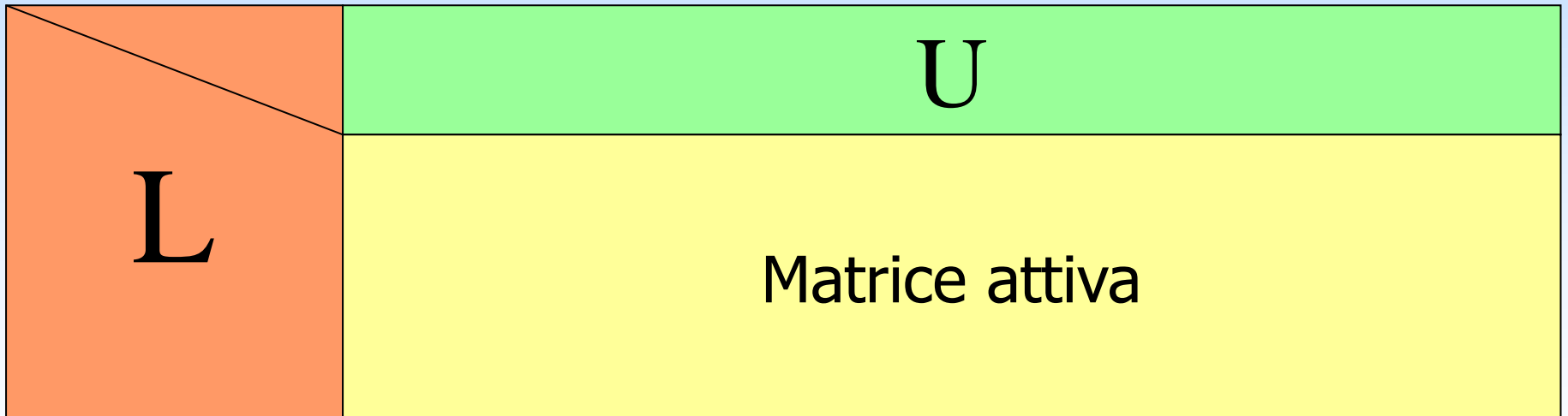
$$A = L \cdot U$$

La fattorizzazione LU a Blocchi:

Quali sono le operazioni di base
nella fattorizzazione LU a blocchi?

La fattorizzazione LU a Blocchi:

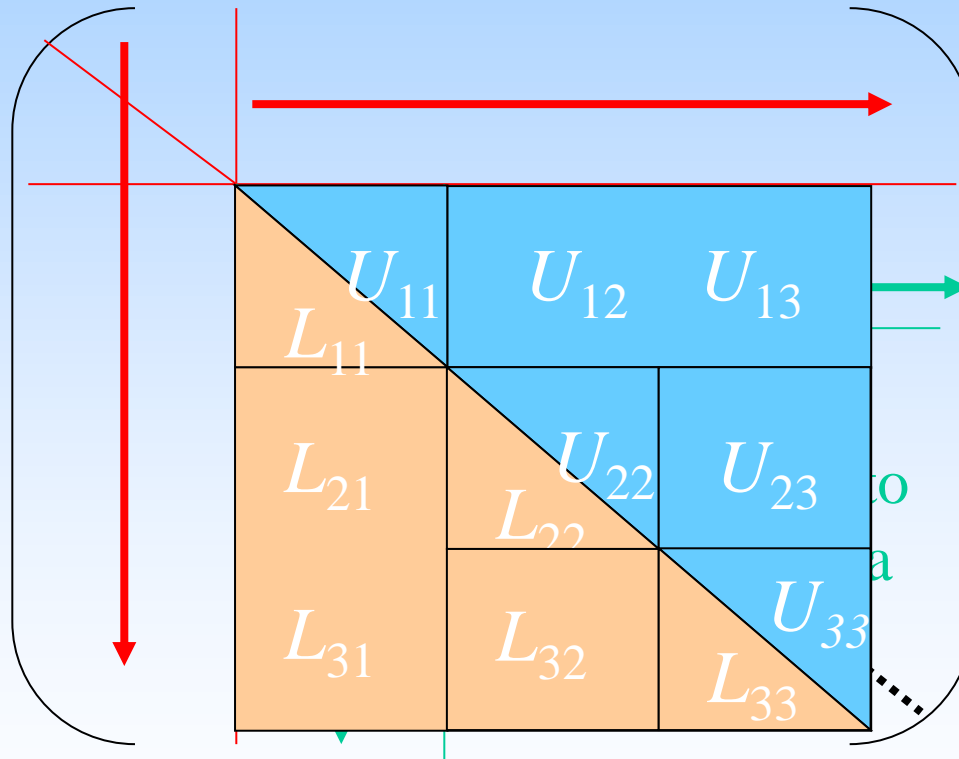
La fattorizzazione LU a Blocchi procede
allo stesso modo della fattorizzazione LU.
ovvero.....



Algoritmo LU *Block-Partitioned*

Calcolo blocco di righe di U

Calcolo blocco di colonne di L



Nuclei computazionali fondamentali

Ad ogni passo:

- ✱ Calcolo del **blocco di colonne di L**:
Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare
- ✱ Calcolo del **blocco di righe di U**:
Risoluzione di sistemi triangolari inferiori
a termine noto multiplo
- ✱ Aggiornamento della **matrice attiva**:
Prodotto matrice-matrice

Nuclei computazionali fondamentali

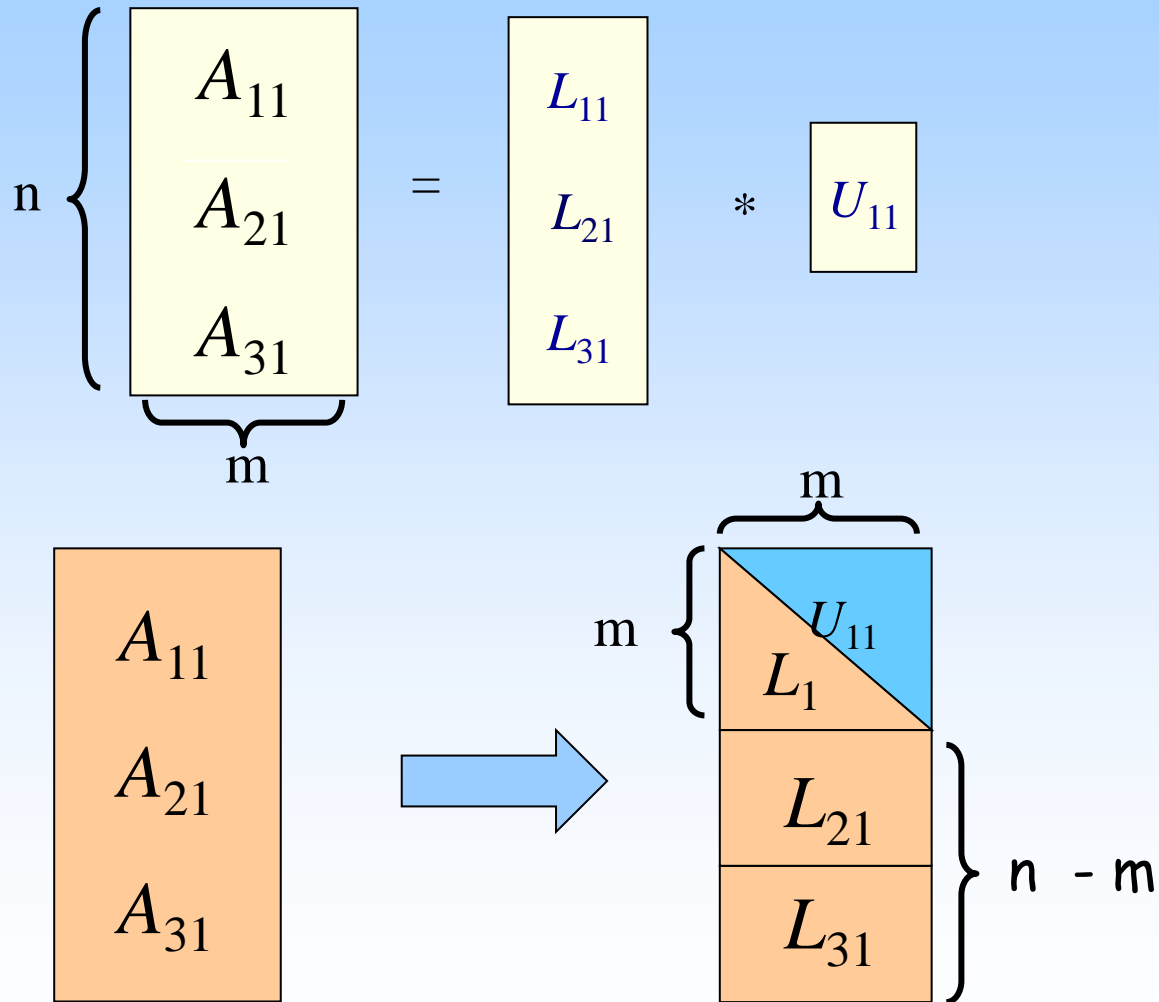
Ad ogni passo:

✦ Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare 

✦ Risoluzione di sistemi triangolari inferiori
a termine noto multiplo :

✦ Prodotto matrice-matrice


 Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
 con $n \gg m$: (pannello verticale della fattorizzazione LU a blocchi)

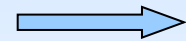


Nuclei computazionali fondamentali

Ad ogni passo:

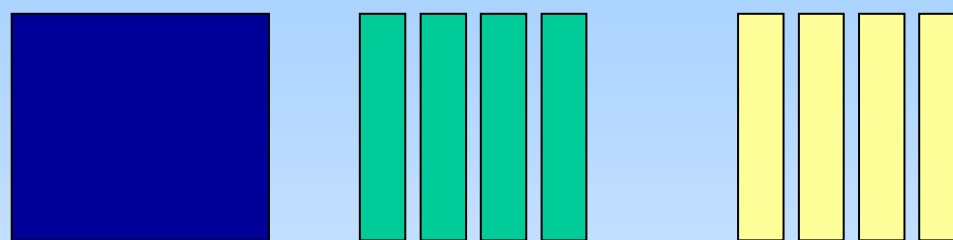
✦ Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare

✦ **Risoluzione di sistemi triangolari inferiori
a termine noto multiplo**



✦ Prodotto matrice-matrice

Risoluzione di sistema lineare multiplo:

$$L_{11} \quad U_{12} = A_{12}$$


Risoluzione di diversi sistemi lineari in cui

- la matrice dei coefficienti L_{11} è **la stessa**
- il termine noto è il vettore **colonna della matrice** A_{12}
- il vettore soluzione è il **vettore colonna** della matrice U_{12}

Nuclei computazionali fondamentali

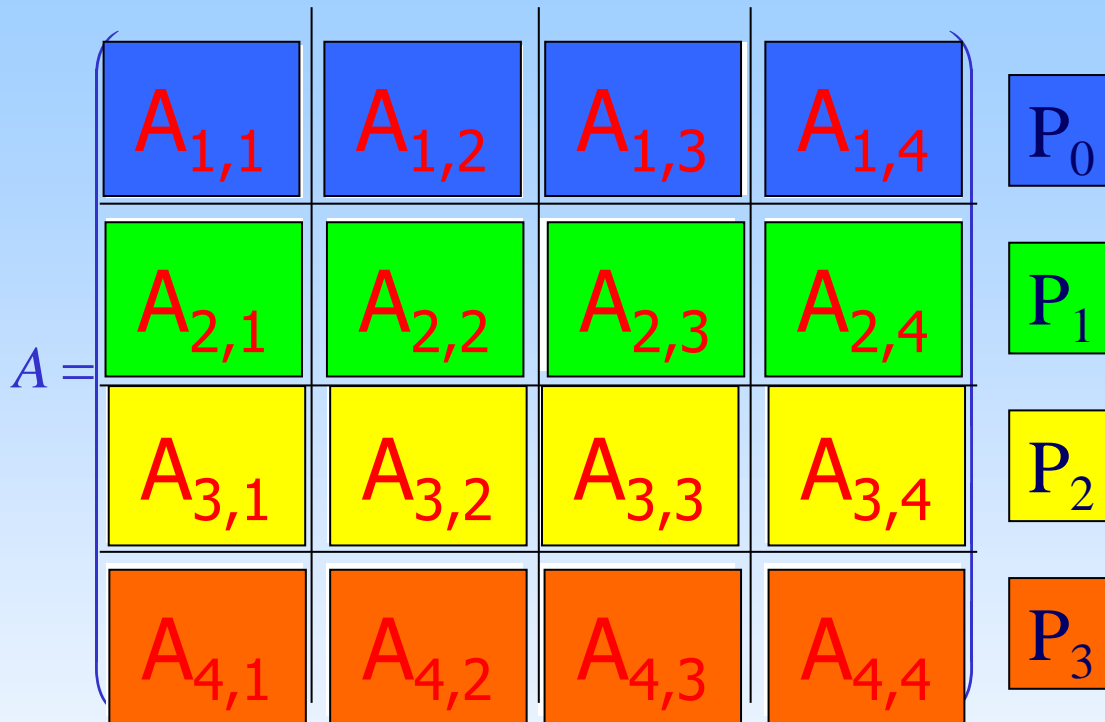
Ad ogni passo:

- ✦ Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare
- ✦ Risoluzione di sistemi triangolari inferiori a termine noto multiplo
- ✦ Prodotto matrice-matrice

**Quale Strategia di Distribuzione dei dati
è opportuno usare?**

Consideriamo ad esempio
la **distribuzione per blocchi di righe**

Esempio 1: distribuzione per blocchi di righe

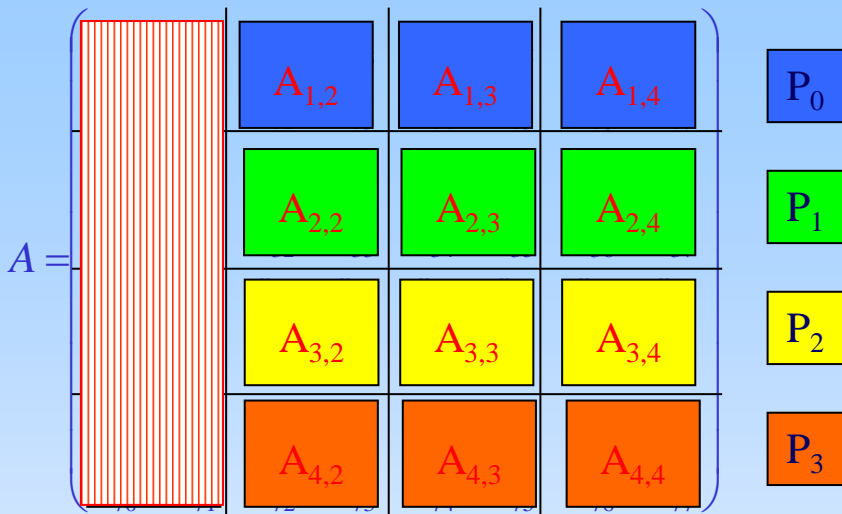


Dati:

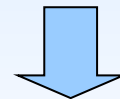
- A suddivisa in 4x4 blocchi
- P = 4 processi

**Con i dati così distribuiti
ogni processo cosa può calcolare?**

Passo 1.1: Fattorizzazione rettangolare

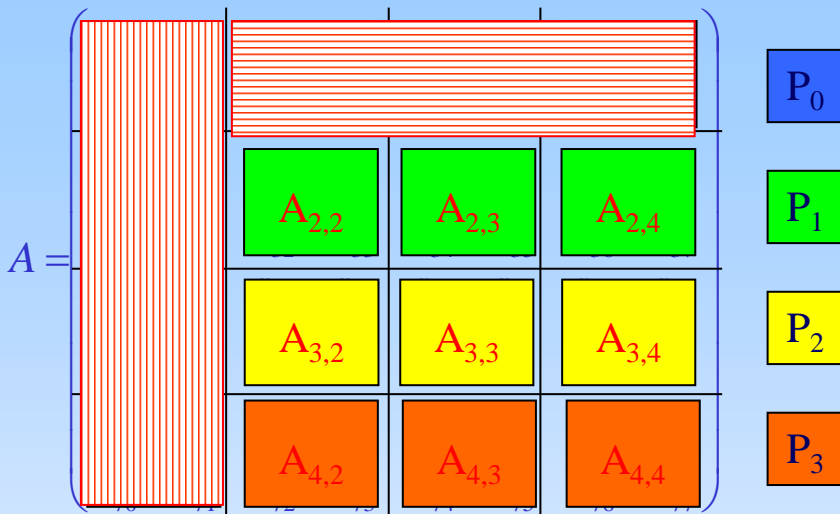


Passo 1.1 : Fattorizzazione del primo blocco colonna di A
costituito da : $A_{1,1}, A_{2,1}, A_{3,1}, A_{4,1}$

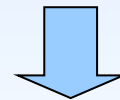


Contribuiscono **tutti** i processi

Passo1.2: Aggiornamento blocco riga

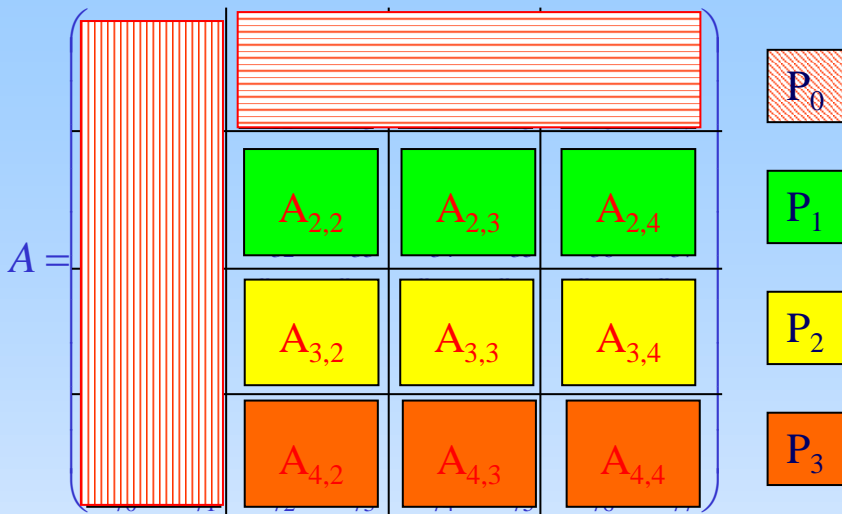


Passo1.2 : Aggiornamento del primo blocco riga di A
costituito da : $A_{1,2}, A_{1,3}, A_{1,4}$



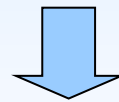
Solo P_0 lavora

Passo 1.3: Aggiornamento matrice attiva



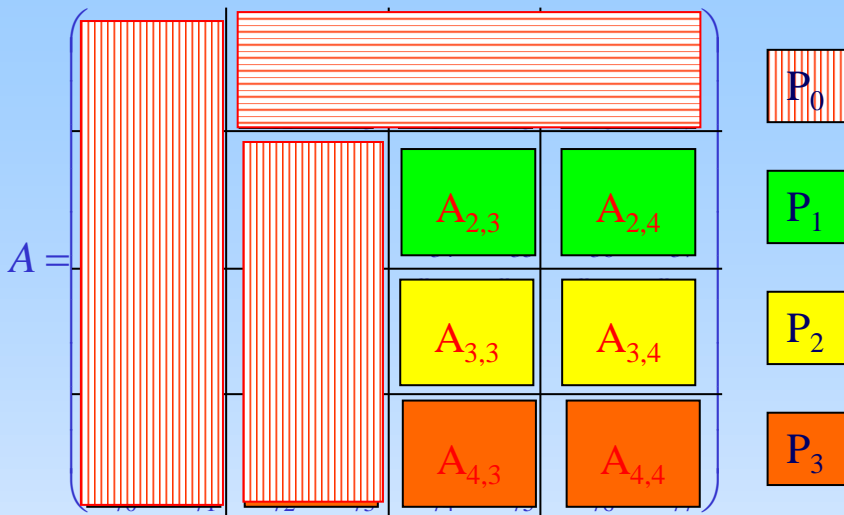
Passo 1.3 : Aggiornamento della matrice attiva
costituita dai blocchi :

$A_{2,2}, A_{2,3}, A_{2,4}, A_{3,2}, A_{3,3}, A_{3,4}, A_{4,2}, A_{4,3}, A_{4,4}$

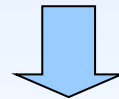


Solo P_1 , P_2 e P_3 contribuiscono

Passo 2.1: Fattorizzazione rettangolare

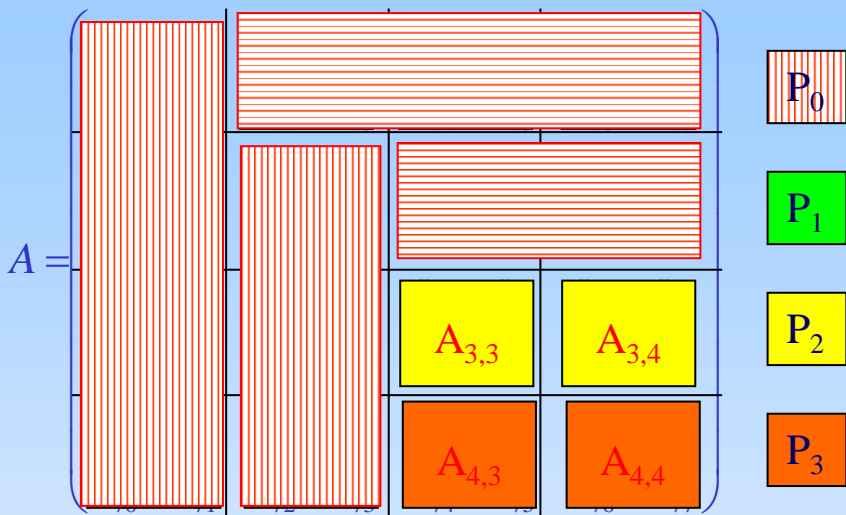


Passo 2.1 : Fattorizzazione del secondo blocco colonna di A
costituito da : $A_{2,2}$, $A_{3,2}$, $A_{4,2}$

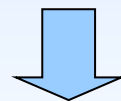


Contribuiscono i processi P_1 , P_2 e P_3

Passo 2.2: Aggiornamento blocco riga

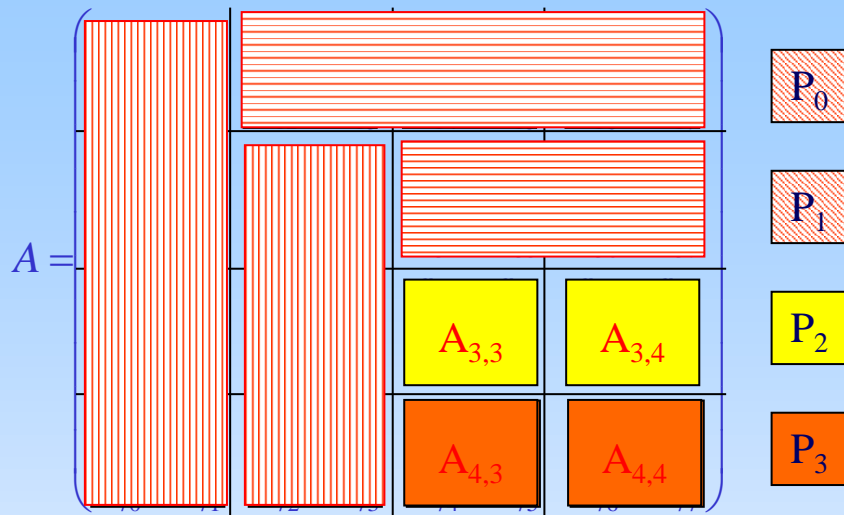


Passo 2.2 : Aggiornamento del secondo blocco riga di A
costituito da : $A_{2,3}, A_{2,4}$



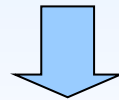
Solo P_1 contribuisce
e non ha più dati su cui eseguire operazioni

Passo 2.3: Aggiornamento matrice attiva



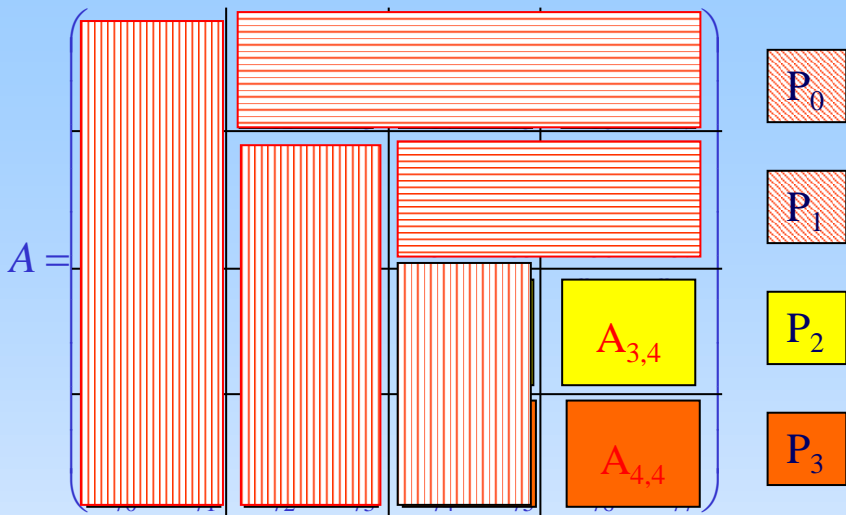
Passo 2.3 : Aggiornamento della matrice attiva
costituita dai blocchi :

$$A_{3,3}, A_{3,4}, A_{4,3}, A_{4,4}$$

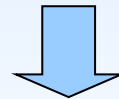


Solo P_2 e P_3 contribuiscono

Passo 3.1: Fattorizzazione rettangolare

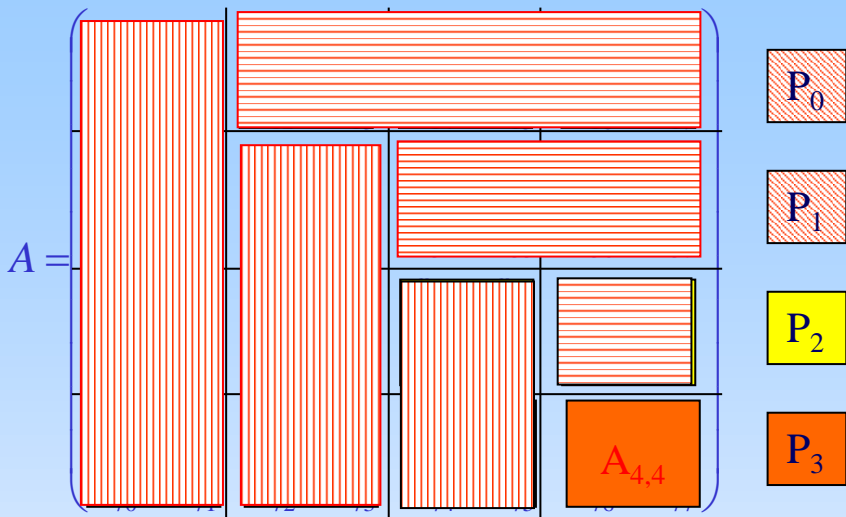


Passo 3.1 : Fattorizzazione del terzo blocco colonna di A
costituito da : $A_{3,3}$ e $A_{4,3}$

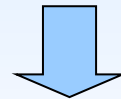


Contribuiscono i processi P_2 e P_3

Passo 3.2: Aggiornamento blocco riga

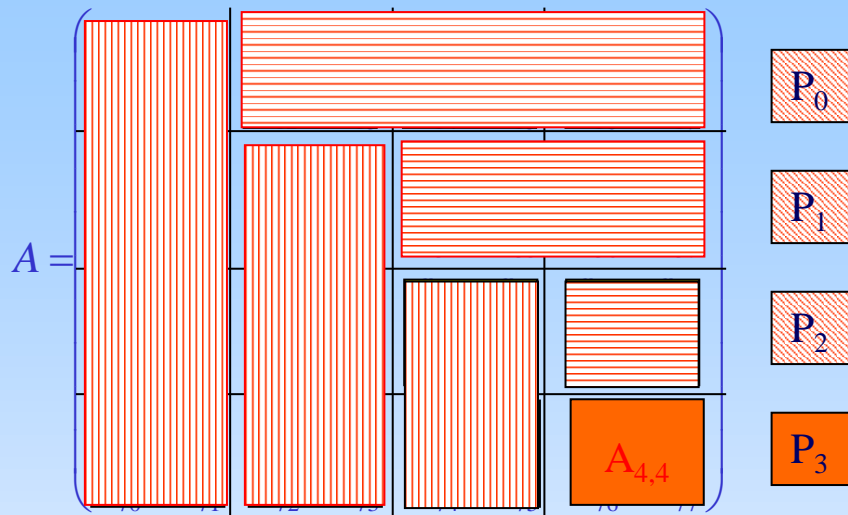


Passo 3.2 : Aggiornamento del terzo blocco riga di A
costituito da : $A_{3,4}$

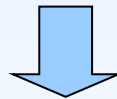


Solo P_2 contribuisce
e non ha più dati su cui eseguire operazioni

Passo 3.3: Aggiornamento matrice attiva

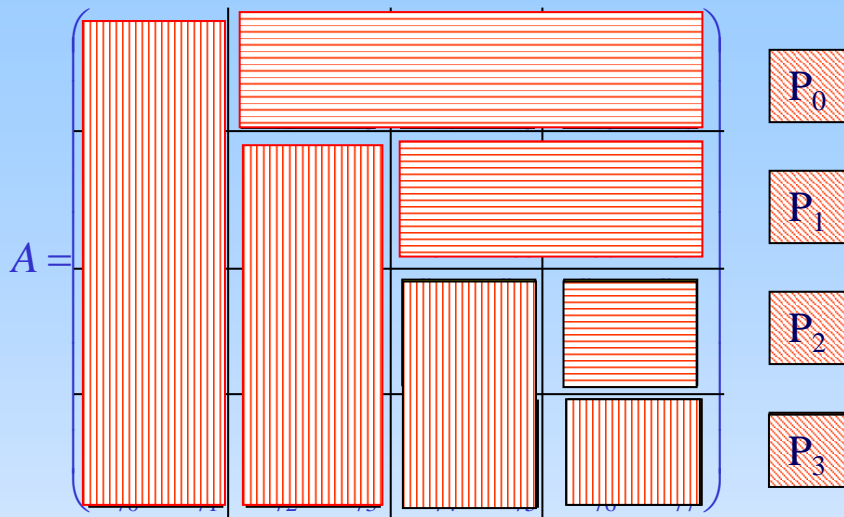


Passo 3.3 : Aggiornamento della matrice attiva
costituita dal blocco : $A_{4,4}$



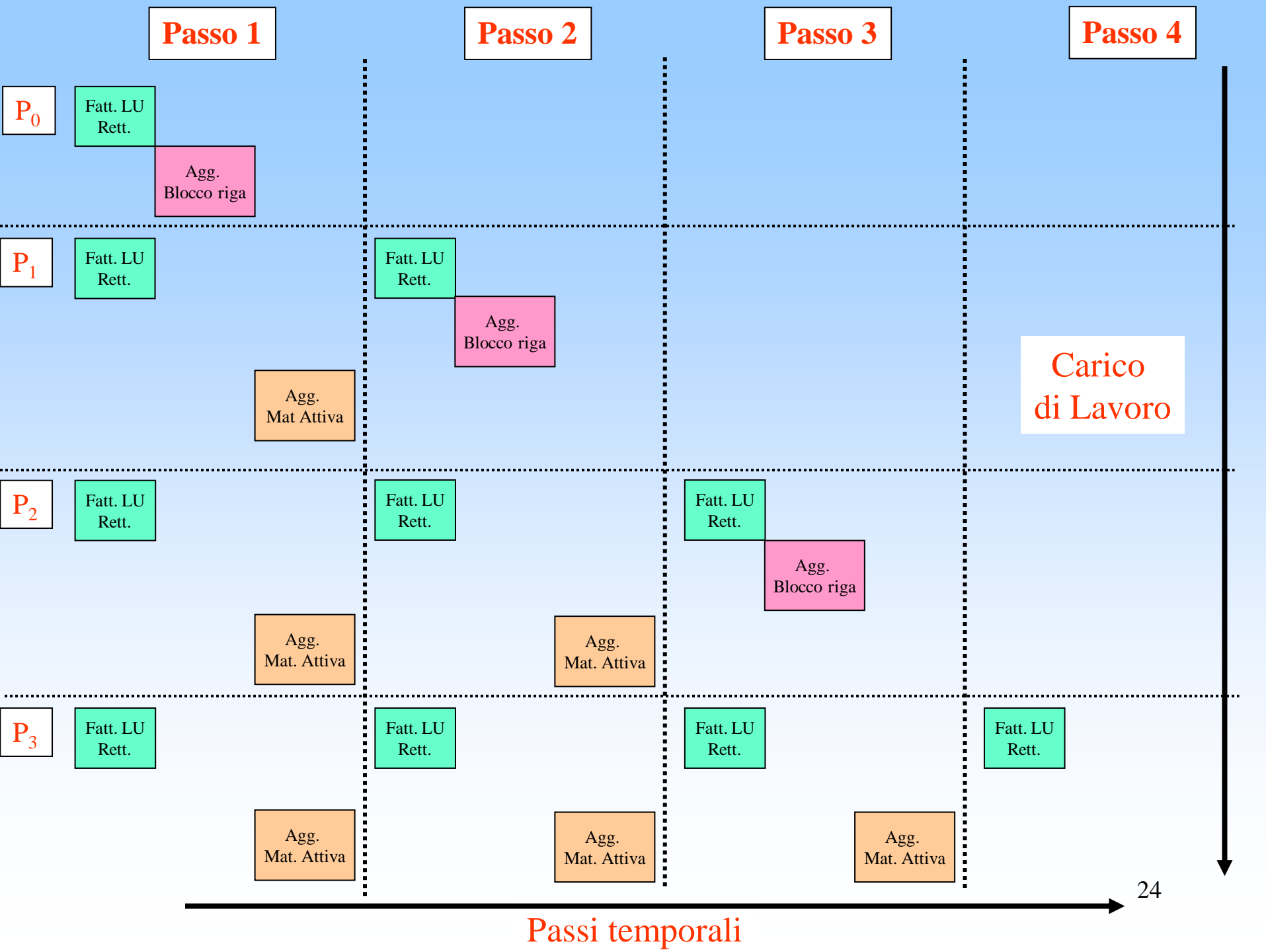
Solo P_3 contribuisce

Passo 4: Fattorizzazione blocco



Passo 4 : Fattorizzazione del quarto blocco colonna di A
costituito da : $A_{4,4}$

Fattorizzazione LU completata in 4 passi



Nella fattorizzazione LU , la “parte di dati” sulla quale si deve operare diminuisce ad ogni passo .

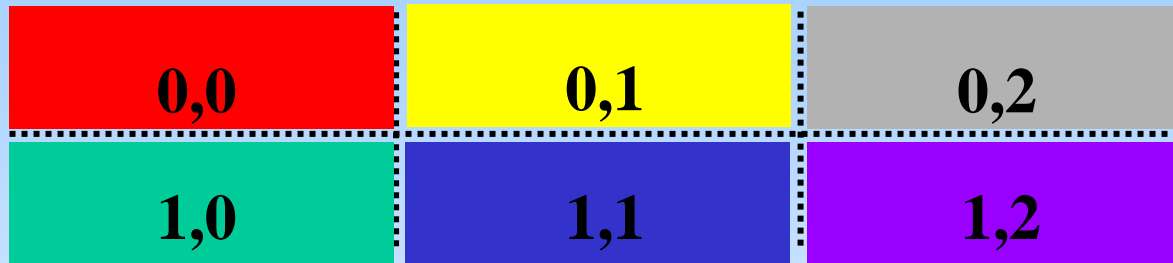
Una distribuzione **uniforme** della matrice tra i processori comporta un evidente **sbilanciamento** del carico di lavoro .

Quale strategia di Distribuzione dati permette **un miglior bilanciamento del carico di lavoro dei processori ?**

La distribuzione **ciclica** tra i processori

Distribuzione ciclica a blocchi

Esempio: consideriamo una griglia di
6 = 2 (righe) x 3 (colonne) processori



ed una matrice A decomposta in 8x8 blocchi $A_{i,j}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & A_{07} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ A_{40} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{50} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ A_{60} & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ A_{70} & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} \end{pmatrix}$$

Distribuzione ciclica a blocchi

$A =$


A_{00}	A_{01}	A_{02}	A_{03}	A_{04}	A_{05}	A_{06}	A_{07}
A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}
A_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}
A_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{37}
A_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}
A_{50}	A_{51}	A_{52}	A_{53}	A_{54}	A_{55}	A_{56}	A_{57}
A_{60}	A_{61}	A_{62}	A_{63}	A_{64}	A_{65}	A_{66}	A_{67}
A_{70}	A_{71}	A_{72}	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{76}	A_{77}

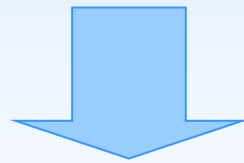
Ad ogni passo sono coinvolti tutti i
processori

Dettagli sulla Fattorizzazione LU a Blocchi
necessari per la descrizione
della Distribuzione ciclica a blocchi

La fattorizzazione LU a Blocchi:

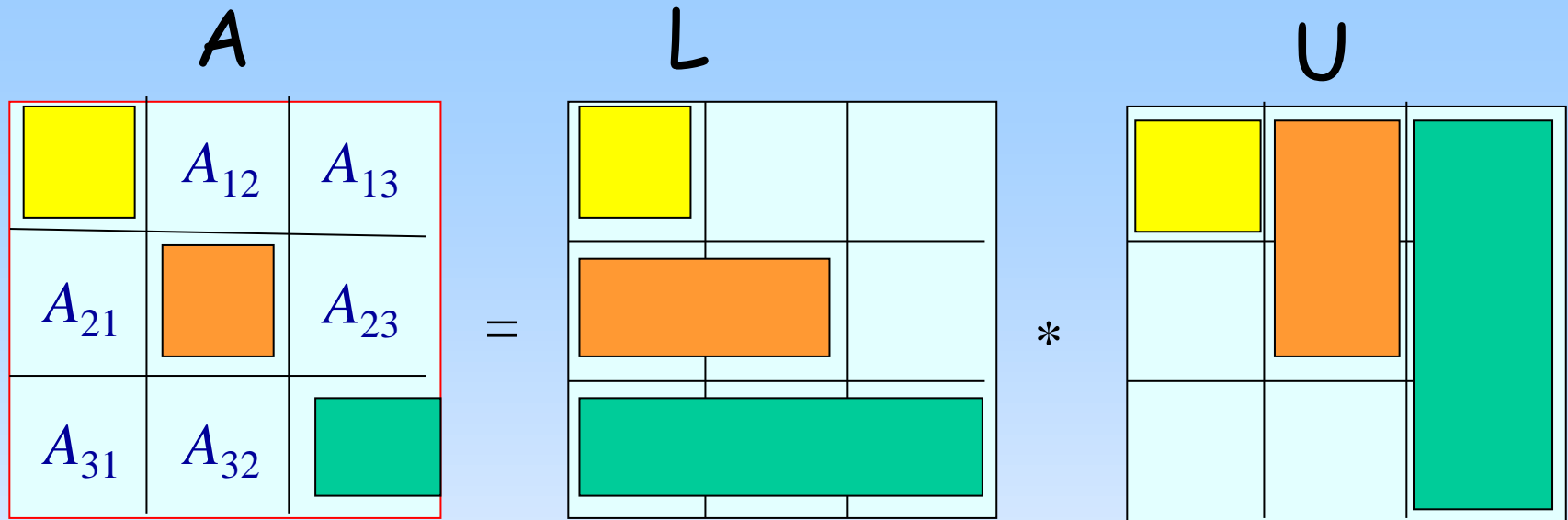
Esempio: A : matrice quadrata
partizionata in $9=3 \times 3$ blocchi $A_{ij} \in \mathbb{R}^{nb \times nb}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$




$$A = L \cdot U$$

Dettaglio...



effettuando il prodotto :

$$A_{11} = L_{11}U_{11}$$

$$A_{12} = L_{11}U_{12}$$

$$A_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$A_{21} = L_{21}U_{11}$$

$$A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$$

$$A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$$

$$A_{31} = L_{31}U_{11}$$

$$A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$$

$$A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$$

Nel dettaglio ... :

$$A_{11} = L_{11}U_{11}$$

$$A_{12} = L_{11}U_{12}$$

$$A_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$A_{21} = L_{21}U_{11}$$

$$A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$$

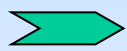
$$A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$$

$$A_{31} = L_{31}U_{11}$$

$$A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$$

$$A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$$

Passo 1 :



fattorizzazione LU del “**pannello verticale**”

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} \\ L_{21}U_{11} \\ L_{31}U_{11} \end{pmatrix}$$



Calcolo dei blocchi

$L_{11}, L_{21}, L_{31}, U_{11}$

Moltiplicatori

**Matrice
Triangolare
Superiore**

$$A_{11} = L_{11}U_{11}$$

$$A_{12} = L_{11}U_{12}$$

$$A_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$A_{21} = L_{21}U_{11}$$

$$A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$$

$$A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$$

$$A_{31} = L_{31}U_{11}$$

$$A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$$

$$A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$$

➡ Calcola un pannello orizzontale di U

$$(A_{12} \quad A_{13}) \rightarrow (L_{11}U_{12} \quad L_{11}U_{13})$$



$$U_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}, \quad U_{13} = L_{11}^{-1}A_{13}$$

➡ Aggiorna la matrice attiva

$$\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \bar{A}_{22} = A_{22} - L_{21}U_{12} & \bar{A}_{23} = A_{23} - L_{21}U_{13} \\ \bar{A}_{32} = A_{32} - L_{31}U_{12} & \bar{A}_{33} = A_{33} - L_{31}U_{13} \end{pmatrix}$$

Sintesi del Passo 1:

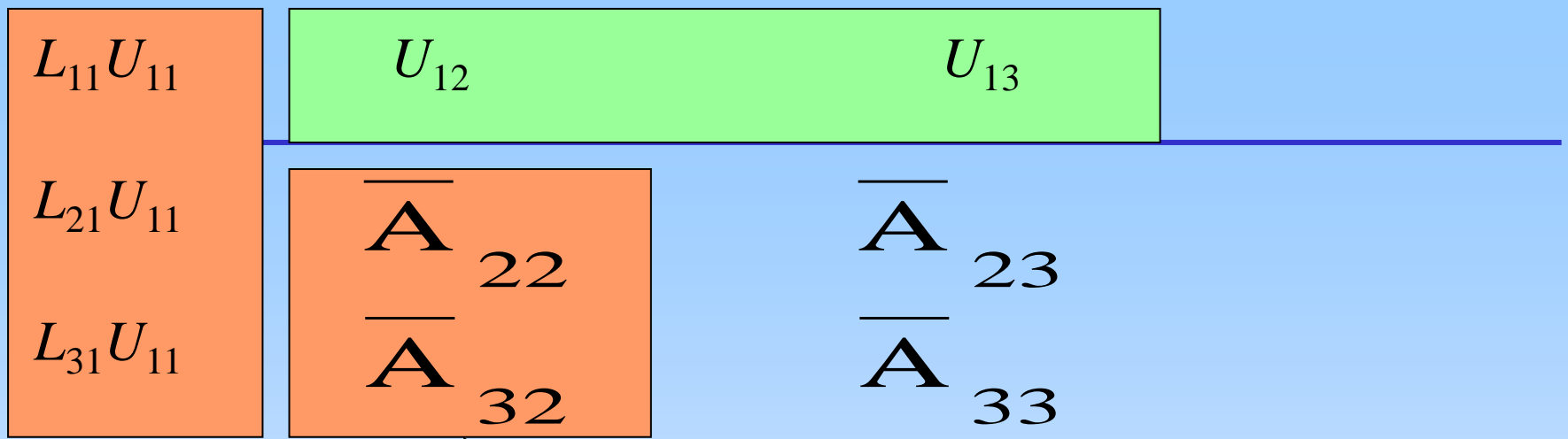
Alla fine del passo 1 abbiamo calcolato

$$\begin{pmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \end{pmatrix}$$

✦ Il primo pannello verticale di L

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \end{pmatrix}$$

✦ Il primo pannello orizzontale di U



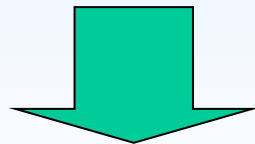
Passo 2 :



Calcola la fattorizzazione LU del pannello

$$\begin{matrix} \overline{A}_{22} \\ \overline{A}_{32} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} L_{22}U_{22} \\ L_{32}U_{22} \end{pmatrix}$$

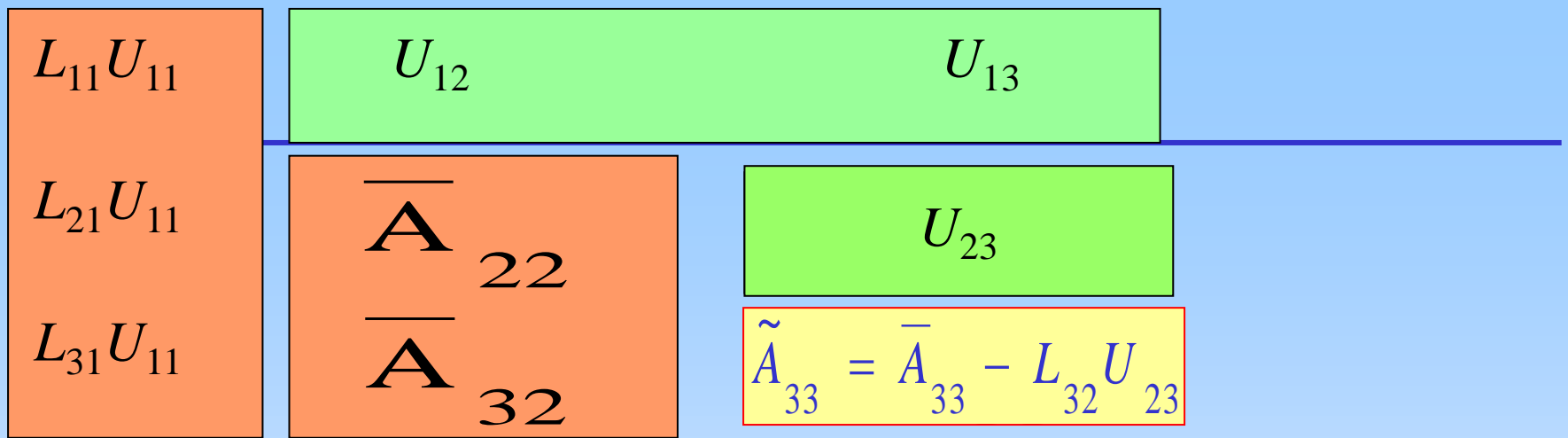


Calcola i blocchi

$$L_{22}, L_{32}, U_{22}$$

Moltiplicatori

**Matrice
Triangolare
Superiore**



➤ Calcola il pannello orizzontale di U

$$\overline{A}_{23} = L_{22}U_{23} \quad \longrightarrow \quad U_{23} = L_{22}^{-1} \overline{A}_{23}$$

➤ Aggiorna la matrice attiva

$$\left(\overline{A}_{33} \right) \longrightarrow \left(\tilde{A}_{33} = \overline{A}_{33} - L_{32}U_{23} \right)$$

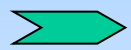
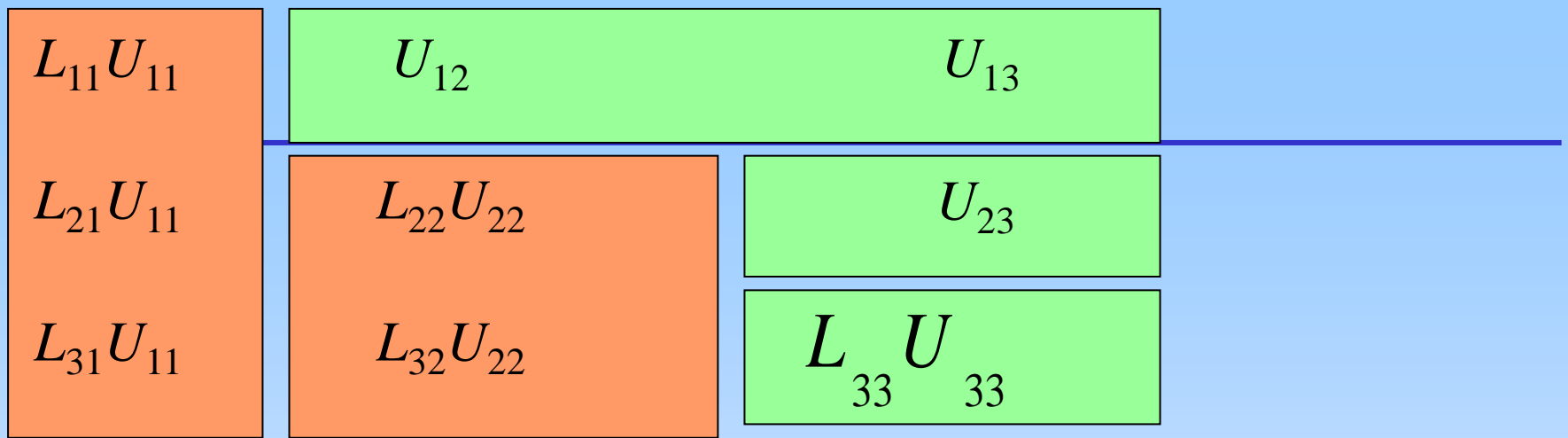
Sintesi del Passo 2:

Alla fine del passo 2 abbiamo calcolato

$$\begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & \boxed{L_{22}} & \\ L_{31} & \boxed{L_{32}} & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & \boxed{U_{22}} & \boxed{U_{23}} \\ & & \end{pmatrix}$$

✦ Il secondo pannello verticale di L

✦ Il secondo pannello orizzontale di U



Calcola la fattorizzazione LU del blocco

$$(\tilde{A}_{33}) = (L_{33}U_{33})$$

Alla fine del passo 3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & U_{22} & U_{23} \\ & & U_{33} \end{pmatrix}$$



**La fattorizzazione LU a Blocchi
è completa**

Algoritmo LU *Block-Partitioned*

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: decomposta in $(n/nb) \times (n/nb)$ blocchi di dimensione $nb \times nb$

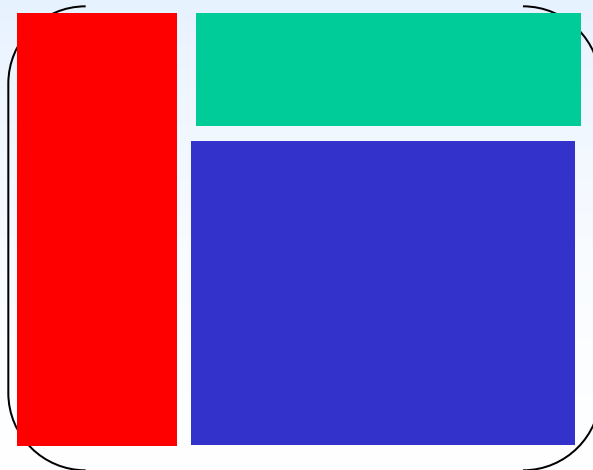
```
for  $k=1, n$  step  $nb$  do
```

→ • applica la fatt. *LU* al pannello $A(k:n, k:k+nb-1)$

→ • calcola il pannello $U(k:k+nb-1, k+nb:n)$

→ • aggiorna la matrice attiva

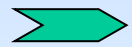
```
endfor
```



Distribuzione ciclica a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & A_{07} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ A_{40} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{50} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ A_{60} & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ A_{70} & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} \end{pmatrix}$$

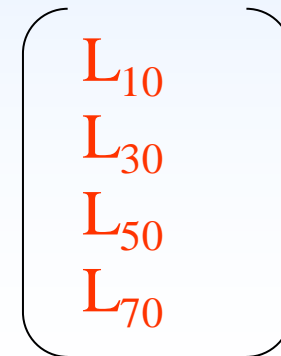
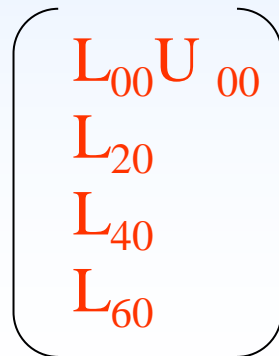
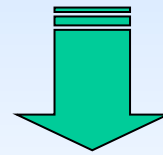
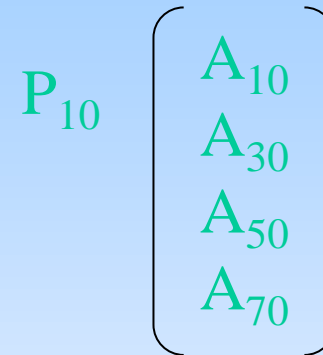
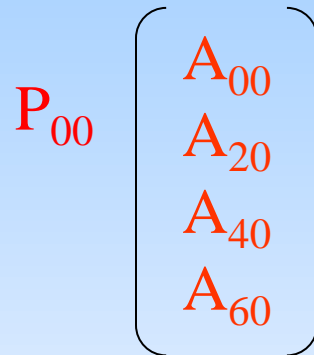
Passo 1 :



Calcolo della fattorizzazione LU del pannello

$$\begin{pmatrix} A_{00} \\ A_{10} \\ A_{20} \\ A_{30} \\ A_{40} \\ A_{50} \\ A_{60} \\ A_{70} \end{pmatrix}$$

Il pannello è distribuito tra i processi appartenenti alla prima colonna



Dopo questa prima fase la matrice diventa:

$$A = \begin{pmatrix} L_{00} & U_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & A_{07} \\ L_{10} & & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ L_{20} & & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ L_{30} & & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ L_{40} & & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ L_{50} & & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \\ L_{60} & & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} \\ L_{70} & & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} \end{pmatrix}$$

➡ Calcola un pannello orizzontale di U

$$A = (A_{01} \quad A_{02} \quad A_{03} \quad A_{04} \quad A_{05} \quad A_{06} \quad A_{07})$$

$$(L_{00}U_{01} \quad L_{00}U_{02} \quad L_{00}U_{03} \quad L_{00}U_{04} \quad L_{00}U_{05} \quad L_{00}U_{06} \quad L_{00}U_{07})$$

Il blocco L_{00} si trova nel processo (0,0)

Il processo (0,0) deve spedire L_{00} ai processi che si trovano sulla prima riga

Dopo questa seconda fase la matrice diventa:

L_{00}	U_{00}	L_{00}	U_{01}	L_{00}	U_{02}	L_{00}	U_{03}	L_{00}	U_{04}	L_{00}	U_{05}	L_{00}	U_{06}	L_{00}	U_{07}
L_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}								
L_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}								
L_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{37}								
L_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}								
L_{50}	A_{51}	A_{52}	A_{53}	A_{54}	A_{55}	A_{56}	A_{57}								
L_{60}	A_{61}	A_{62}	A_{63}	A_{64}	A_{65}	A_{66}	A_{67}								
L_{70}	A_{71}	A_{72}	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{76}	A_{77}								

➡ Aggiorna la matrice attiva

$$A_{ij} \rightarrow A_{ij} - L_{i0}U_{0j}, \quad i, j = 1,7$$



I processi $(i,0)$ appartenenti alla prima colonna
 spediscono i blocchi L_{i0} ad essi distribuiti in broadcast
 lungo la riga i del template

Dopo questa seconda fase la matrice diventa:

L_{00}	U_{00}	L_{00}	U_{01}	L_{00}	U_{02}	L_{00}	U_{03}	L_{00}	U_{04}	L_{00}	U_{05}	L_{00}	U_{06}	L_{00}	U_{07}
L_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}								
L_{20}	A_{21}	A_{22}	A_{23}	A_{24}	A_{25}	A_{26}	A_{27}								
L_{30}	A_{31}	A_{32}	A_{33}	A_{34}	A_{35}	A_{36}	A_{37}								
L_{40}	A_{41}	A_{42}	A_{43}	A_{44}	A_{45}	A_{46}	A_{47}								
L_{50}	A_{51}	A_{52}	A_{53}	A_{54}	A_{55}	A_{56}	A_{57}								
L_{60}	A_{61}	A_{62}	A_{63}	A_{64}	A_{65}	A_{66}	A_{67}								
L_{70}	A_{71}	A_{72}	A_{73}	A_{74}	A_{75}	A_{76}	A_{77}								

➡ Aggiorna la matrice attiva

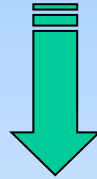
$$A_{ij} \rightarrow A_{ij} - L_{i0}U_{0j}, \quad i, j = 1,7$$



I processi $(i,0)$ appartenenti alla prima colonna
 spediscono i blocchi L_{i0} ad essi distribuiti in broadcast
 lungo la riga i del template

In generale ...

- ✦ I processi sono organizzati in una griglia bidimensionale
- ✦ La matrice è distribuita ciclicamente a blocchi



Ad ogni passo

il pannello da fattorizzare è distribuito tra i processi
appartenenti ad una medesima colonna del *template*

I blocchi di L calcolati devono essere spediti
in *broadcast* lungo le righe del *template*

I blocchi di U calcolati devono essere spediti
in *broadcast* lungo le colonne del *template*

for $k=1$ to n step nb do

- applica la fatt. LU con pivoting parziale al pannello $A((k-1)nb+1:n, (k-1)nb+1 : knb)$
- applica gli scambi alle colonne non appartenenti al pannello fattorizzato
- calcola il pannello $U((k-1)nb+1:knb, knb:n)$
- aggiorna la matrice attiva

endfor

for $k=1$ to n step nb do

• applica la fatt. LU con pivoting parziale al pannello $A((k-1)nb+1:n, (k-1)nb+1 : knb)$

• applica gli scambi alle colonne non appartenenti al pannello fattorizzato
Comunicazione degli elementi pivot tra i processi della colonna coinvolta nella fattorizzazione

• calcola il pannello $U((k-1)nb+1:knb, knb:n)$

• aggiorna la matrice attiva

Comunicazione degli elementi pivot alla matrice attiva coinvolta nella fattorizzazione e Spedizione di L lungo le righe scambio delle righe

Spedizione di U lungo le colonne

endfor

for $k=1$ to n step nb do

- applica la fatt. LU con pivoting parziale al pannello $A((k-1)nb+1:n, (k-1)nb+1 : knb)$

Comunicazione degli elementi pivot tra i processi della colonna coinvolta nella fattorizzazione

- calcola il pannello $U((k-1)nb+1:knb, knb:n)$
- aggiorna la matrice attiva

endfor

for $k=1$ to n step nb do

- applica la fatt. LU con pivoting parziale al pannello $A((k-1)nb+1:n, (k-1)nb+1 : knb)$

- applica gli scambi alle colonne non appartenenti al pannello fattorizzato

Comunicazione degli elementi

- pivot ai processi non appartenenti alla colonna coinvolta nella fattorizzazione e scambio delle righe

endfor

for $k=1$ to n step nb do

- applica la fatt. LU con pivoting parziale al pannello $A((k-1)nb+1:n, (k-1)nb+1 : knb)$
- applica gli scambi alle colonne non appartenenti al pannello fattorizzato

• calcola il pannello $U((k-1)nb+1:knb, knb:n)$

• aggiorna la matrice attiva

Spedizione di L lungo le righe

endfor

Spedizione di U lungo le colonne

FINE