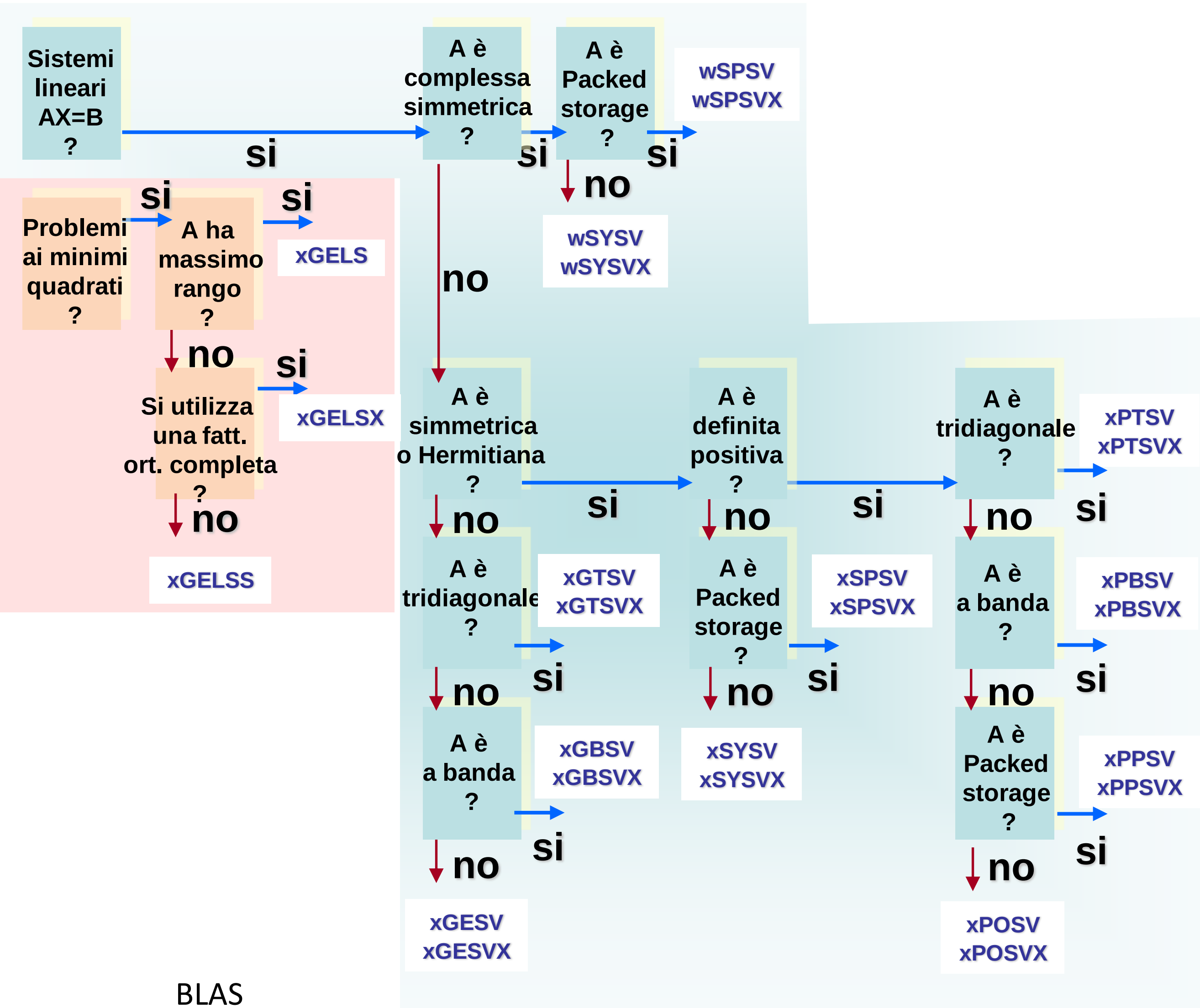
# APPLICAZIONI DELLA FATTORIZZAZIONE LU

Luisa D’Amore

# albero delle routine driver di LAPACK



E' possibile **ridurre** la complessità di tempo della fattorizzazione ***LU*** sfruttando **particolari caratteristiche** della matrice?

- **matrici simmetriche**
- **matrici simmetriche definite positive**
- **Matrici tridiagonali**
- **Etc**

**Come si specializza la fattorizzazione $A = LU$ di una matrice simmetrica ?**

$A=L\,U$

$U=DL^T \Rightarrow A=LDL^T$

Matrice triangolare inferiore (moltiplicatori)

Matrice diagonale (elementi diagonali di U)

Quindi, se $A$ è una matrice simmetrica
la fattorizzazione $A=LU$ (senza pivoting)
si specializza in

$$A=LDL^T$$

Esercizio: fattorizzazione lu eLDL’ della matrice A simmetrica.

```
>> A=[10 2 3 4;  2 35 5 6; 3 5 20 7;4 6 7 50];
>> [L,U]=lu(A)
L =
    1.0000         0         0         0
    0.2000    1.0000         0         0
    0.3000    0.1272    1.0000         0
    0.4000    0.1503    0.2772    1.0000
U =

   10.0000    2.0000    3.0000    4.0000
         0   34.6000    4.4000    5.2000
         0         0   18.5405    5.1387
         0         0         0   46.1942
```

```
>> [L,D]=ldl(A)
L =
    1.0000         0         0         0
    0.2000    1.0000         0         0
    0.3000    0.1272    1.0000         0
    0.4000    0.1503    0.2772    1.0000

D =

   10.0000         0         0         0
         0   34.6000         0         0
         0         0   18.5405         0
         0         0         0   46.1942
```

**Esercizio:** tempo di esecuzione per matrice A simmetrica con fattorizzazione LU e LDL’.

```
function[t1,t2]=tempo_lu_ldl(A)
%tempo di esecuzione fattorizzazione LU
%e LDL'

%input
%A matrice simmetrica
%Output
%t1, t2 i relativi tempi

tic
[L,U]=ldl(A);
t1=toc;
tic
[L,U]=lu(A);
t2=toc;

end
```

Tic, toc utile per valutare porzioni di codice, oppure Timeit (media dei tempi)

**Esercizio:** tempo di esecuzione per matrice A simmetrica con fattorizzazione LU e LDL'.

```
function[t1,t2]=tempo_lu_ldl(A)
%tempo di esecuzione fattorizzazione LU
%e LDL'

%input
%A matrice simmetrica
%Output
%t1, t2 i relativi tempi

tic
[L,U]=ldl(A);
t1=toc;
tic
[L,U]=lu(A);
t2=toc;

end
```

Tic, toc utile per valutare porzioni di codice, oppure
Timeit (media dei tempi)

**Esercizio:** tempo di esecuzione per matrice A simmetrica con fattorizzazione LU e LDL'.

```
function[L,U]=tempo_LU(A)
%tempo di esecuzione fattorizzazione LU

%input
%A matrice simmetrica
%Output
%L, U matrice ottenute dalla
fattorizzazione

[L,U]=lu(A);
end
```

```
>> n=100;
>> B=rand(n,n);
>> A=B'*B;
>> timeit( @() tempo_ldl(A))

ans =

  5.5187e-04
```

```
function[L,D]=tempo_ldl(A)
%tempo di esecuzione fattorizzazione LDL'

%input
%A matrice simmetrica
%Output
%L, D matrice ottenute dalla
fattorizzazione
[L,D]=ldl(A);

end
```

```
>> timeit( @() tempo_LU(A))

ans =

  7.2089e-04
```

```
>> n=100;
>> B=rand(n,n);
>> A=B’*B;
>> timeit( @() tempo_LU(A))
ans =
  7.8987e-04

>> timeit( @() tempo_ldl(A))
ans =
  5.5187e-04
```

```
>> n=500;
>> B=rand(n,n);
>> A=B’*B;
>> timeit(@() tempo_ldl(A))
ans =
  5.5187e-04

>> timeit( @() tempo_LU(A))
ans =
  7.2089e-04
```

```
>> n=1000;
>> timeit( @() tempo_LU(A))
ans =
   0.2059

>> timeit( @() tempo_ldl(A))
ans =


   0.1824
```

```
>>n=2000;
>> timeit( @() tempo_LU(A))

ans =


   1.4341
>> timeit( @() tempo_ldl(A))
ans =


   1.1160
```

```
>> n=3000;
>> B=rand(n,n);
>> A=B'*B;
>> timeit( @() tempo_LU(A))
ans =


   6.9210
>> timeit( @() tempo_ldl(A))
ans =


   3.2511
```

```
>> n=4000;
>> B=rand(n,n);
>> A=B'*B;
>> timeit( @() tempo_LU(A))
ans =
  10.6885

>> timeit( @() tempo_ldl(A))
ans =
   7.5692
```

```
>>n=5000;
>> B=rand(n,n);
>> A=B'*B;
>> timeit( @() tempo_LU(A))

ans =
  20.8148
>> timeit( @() tempo_ldl(A))
ans =


  15.3711
```

Esistono altre condizioni sotto le quali per una matrice simmetrica
è possibile evitare il pivoting
nella fattorizzazione LU ?

Matrici simmetriche e definite positive

## Cosa significa che una matrice è definita positiva ?

A simmetrica.

A definita positiva $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $x^T Ax > 0, x \neq 0$

# Come si può verificare se una matrice è definita positiva ?

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -18 \\ 4 & 30 & 4 \\ -18 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

**A1**
Det(A1)=16>0

**A2**
Det(A2)=464>0

**A3**
Det(A3)=584>0

Det(Ak) >0 $\Leftrightarrow$ A: Simmetrica e Definita positiva

# Criterio di Sylvester

A simmetrica.

A definita positiva $\Longleftrightarrow$ $\det(A_k) > 0$

$$A_k = (a_{ij}),\; \begin{matrix} i=1,k \\ j=1,k \end{matrix}$$

Come si specializza la fattorizzazione $LDL^T$ di una matrice simmetrica e definita positiva?

## Teorema :

Sia A simmetrica e definita positiva. Allora
Esiste un'unica matrice L triangolare inferiore
Tale che:

$$\boxed{A = L\,L^T}$$

Come si costruisce la matrice L della fattorizzazione $A=LL^T$

# Algoritmo di Cholesky:

For j=1,n

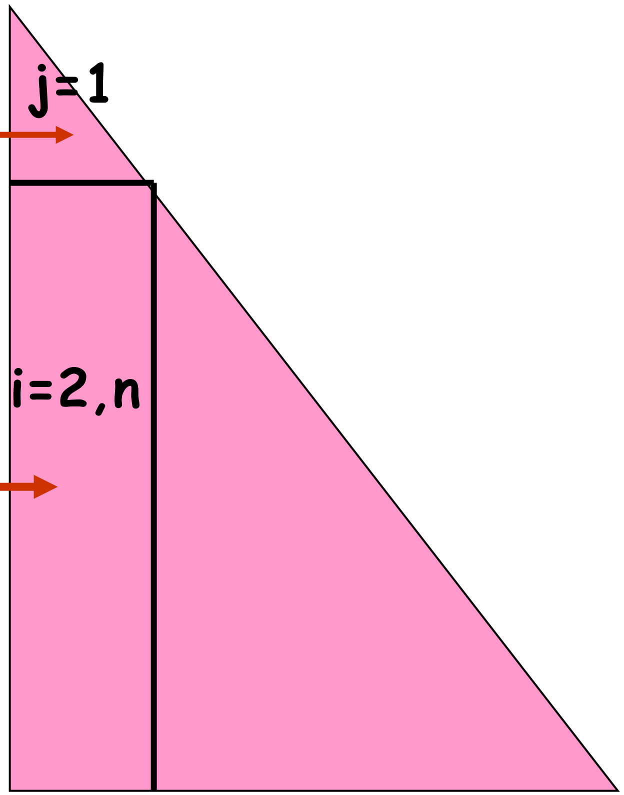
$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2},$$

For i=j+1,n

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}},$$

endfor

endfor



Quando una
matrice simmetrica a diagonale dominante
è anche definita positiva
?

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice $A$ è:

**TEOREMA**

- non singolare
- simmetrica
- a diagonale dominante
- ha gli elementi sulla diagonale non negativi

$\Downarrow$

$A$ è definita positiva

**Esempio:**

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Passo 1: Pivot=4=a11**

**NON è necessario effettuare scambi di righe!**

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Passo 2: pivot = 15/4 = a $22^{(1)}$**

**NON è necessario effettuare scambi di righe:**

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 56/15 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Passo 3: pivot = 56/15 =a $33^{(2)}$**

**NON è necessario effettuare scambi di righe:**

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 56/15 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 209/56 \end{pmatrix}$$

Ad ogni passo k, l'elemento massimo (in modulo) della colonna k, si trova già sulla diagonale

Il pivoting parziale,

in questo caso è INUTILE!

Per quale classe di matrici simmetriche si riesce a garantire che, ad ogni passo, il pivot si trovi già sulla diagonale ?

# Nell'esempio …

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{-4} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

**4 =|-4|= |a11| >|-1| +0+0=1**

**A è a diagonale dominante**

$$\left|a_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{i,j}\right|$$

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

**15/4 = a22 $^{(1)}$ >|-1| +0+0=1**

**$A^{(1)}$ è a diagonale dominante**

$$\left|a^{(1)}{}_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a^{(1)}{}_{i,j}\right|$$

# Nell'esempio ...

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{56/15 \quad -1} \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ **56/15 = a33 $^{(2)}$ >|-1|=1**

**$A^{(2)}$ è a diagonale dominante** $\left|a^{(2)}{}_{i,i}\right| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a^{(2)}{}_{i,j}\right|$

# Quindi …

A è a diagonale dominante $\quad |a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$

$$\Downarrow$$

Al generico passo k
Le sottomatrici attive sono
A diagonale dominante

## Inoltre ...

*A* simmetrica e a diagonale dominante

Al passo k,
Il massimo della riga
coincide con il massimo della colonna
e si trova sulla diagonale

$$\max_{k\le j\le n}\left|a_{i,j}^{(k-1)}\right| = \max_{k\le i\le n}\left|a_{i,j}^{(k-1)}\right| = \left|a_{k,k}^{(k-1)}\right|$$

simmetria

dominanza diagonale

**Il pivoting parziale è INUTILE !**

## Case study: **fattorizzazione LU** per una matrice tridiagonale

# Esempio 1…

**A: matrice a banda di ampiezza**

$w = p + q + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

**(Tridiagonale)**

$$\begin{array}{cc} & \mathbf{p=1} \\ \mathbf{q=1} & \\ A = & \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Eseguiamo la fattorizzazione LU**

# I passo:

## Calcolo dei moltiplicatori

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**bisogna calcolare 1 solo Moltiplicatore m2,1=1/5**

## Trasformazione della matrice attiva

$$U^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 23/5 & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

**bisogna modificare 1 solo elemento : a22**

# II passo:

## Calcolo moltiplicatori

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/23 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**bisogna calcolare 1 solo Moltiplicatore m32=-5/23**

## Trasformazione matrice attiva

$$U^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 23/5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 59/23 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

**bisogna modificare 1 sol elemento : a33**

# III passo:

Calcolo moltiplicatori
(1 solo moltiplicatore)
*m4,3= 46/59*

Trasformazione
matrice attiva
(1 solo elemento)
*u4,4= a4,4– m4,3
a3,4=249/59*

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5/23 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 46/59 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{(3)} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 23/5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 59/23 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 249/59 \end{pmatrix}$$

$L^{(3)}$ matrice bidiagonale

$U^{(3)}$ matrice bidiagonale

- La fattorizzazione LU applicata a matrici tridiagonali ad ogni passo comporta
  - Il calcolo di un solo moltiplicatore (diagonale inferiore di L )
  - Il calcolo di un solo elemento della matrice attiva (diagonale principale di U)

# IN GENERALE: fattorizzazione LU di matrici Tridiagonali

## A matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

## La fattorizzazione **LU** conduce alle matrici bidiagonali

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

# Quindi ……

$$\begin{pmatrix} \boxed{d_1} & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \boxed{c_2} & \boxed{d_2} & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

**A** **L** **U**

Gli elementi di ***L*** da determinare sono: ***l2 … , ln***

Gli elementi di ***U*** da determinare sono: ***u1 ,… , un***

Eseguendo il prodotto ***L U*** si ottiene:

**d(1)= u(1)**
**c(2)=l2*u1**
**d(2) = u2 + l2* f1**
**…**
**ci=li*ui-1**
**di = ui + li* fi-1** ***con i =3,n***

# Algoritmo di fattorizzazione LU per matrici tridiagonali

```
u(1) := d(1)
for i = 2 to n do
        l(i) := c(i) / u(i-1)
        u(i) := d(i) – l(i)* f(i-1)
endfor
```

complessità di tempo = **O(n)**

La complessità di tempo della fattorizzazione **LU**
di una matrice **tridiagonale**
**Si riduce** di 2 ordini di grandezza,
rispetto alla fattorizzazione di una generica matrice.

Come si risolvono i due sistemi Ly=b, Ux=y

con **L e U** matrici **bidiagonali**

**?**

# Risoluzione di un sistema con matrice bidiagonale…

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}$$

**L y = b**

```
y(1) := b(1)
for j = 2 to n do
    y(i):= b(i) - l(i)* y(i-1)
endfor
```

**forward substitution**

$$\begin{pmatrix} u_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$$

**U x = y**

```
x(n) := y(n) /u(n)
for j = n-1 to 1 do
    x(i):= (y(i) - f(i)* x(i+1)) /
u(i)
endfor
```

**back substitution**

# Algoritmi di forward e back substitution (matrici bidiagon

complessità di tempo $= O(n)$

complessità di tempo $= O(n)$

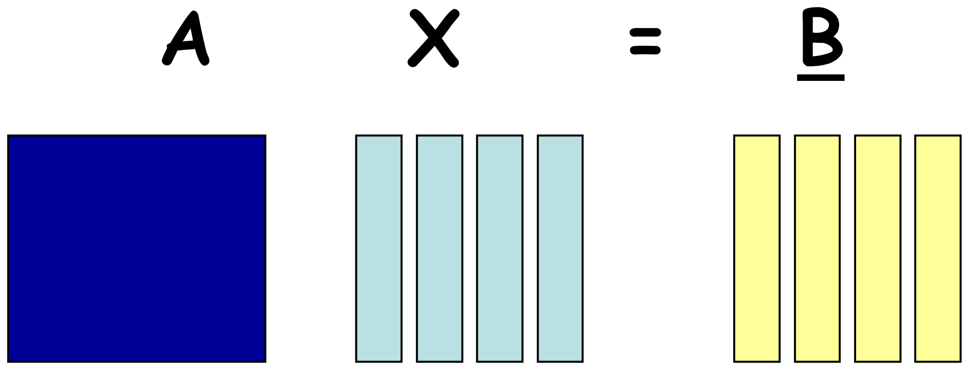
Le complessità di tempo si riduce di 1 ordine di grandezza, rispetto a quelle applicate ad matrice non strutturata.

```
%test tempi
d=ones(4000,1);
A=spdiags([d 3*d d],-1:1,4000,4000);
x=ones(4000,1);b=A*x;
f=@()A\b;

t=timeit(f);
a=full(A);
f1=@()a\b;
t1=timeit(f1);
```

```
>> t
t =
  1.8271e-04
>> t1
t1 =
  1.1806e+00
```

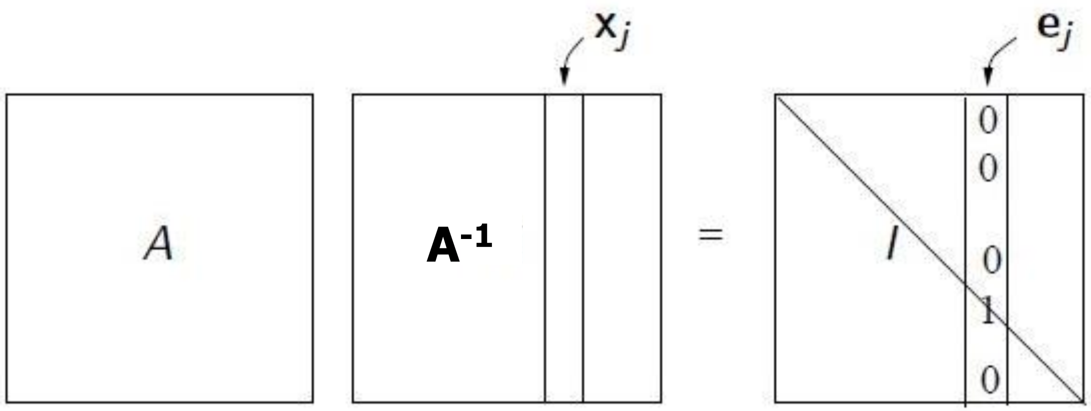
# Risoluzione di sistema lineare multiplo:




**Risoluzione di diversi sistemi lineari in cui**

- **la matrice dei coefficienti è la stessa**
- **il termine noto è il vettore colonna della matrice**
- **il vettore soluzione è il vettore colonna della matrice**

# Calcolo dell'inversa di A $AA^{-1} = I$




$e_1, e_2, \ldots, e_n$ colonne di I
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ colonne di $A^{-1}$

$$AA^{-1} = I \iff Ax_i = e_i \quad i=1,\ldots,n$$

n sistemi lineari con stessa matrice dei coefficienti e incognite coincidenti con le colonne di $A^{-1}$

## Calcolo la fattorizzazione LU con pivoting di A una sola volta

for $j = 1 : n$
  pongo $\mathbf{b} = \mathbf{e}_j$
  risolvo $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$
  risolvo $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$
  copio $\mathbf{x}$ nel vettore colonna $j - simo$ della matrice
end

## complessità

$$T(n)=O(n^3/3+n\times n^2)=O(4n^3/3)$$

# MATRICI A BLOCCHI

**A : matrice 6x6**

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 110 & 76 & 78 & 90 & 52 & -16 \\ 76 & 146 & 124 & 72 & 90 & 52 \\ 78 & 124 & 210 & 116 & 72 & 90 \\ \hline 90 & 72 & 116 & 210 & 124 & 78 \\ 52 & 90 & 72 & 124 & 146 & 76 \\ -16 & 52 & 90 & 78 & 76 & 110 \end{array}\right) \Rightarrow A=\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 3x3 gli elementi di A

**A matrice a blocchi**

# Esempio

**A : matrice 6x6**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{pmatrix}$$

**A matrice diagonale a blocchi**

# Esempio 2

**A** **matrice 6 x6**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \mathbf{0} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \mathbf{0} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

**A matrice Tridiagonale a blocchi**

se raggruppiamo i coefficienti di $A$
in blocchi
e
riguardiamo ciascun blocco come
un coefficiente

⬇

**Decomposizione di una matrice in blocchi**

# Esempio 2 (cont.)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 7 & 0 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\quad \xleftrightarrow{\text{Partizionando in blocchi}} \quad
A=\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0\\ E_1 & D_2 & F_2\\ 0 & E_2 & D_3 \end{pmatrix}$$

**A** <u>non</u> è diagonale
MA
alcuni suoi blocchi lo sono
($D_1$, $D_2$, $D_3$, $E_2$, $F_2$).

**A** <u>non</u> è simmetrica
MA
alcuni suoi blocchi lo sono
($F_1$, $E_1$).

# Esempio 3 (cont)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 8 & -1 \\ -1 & 8 & 6 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 8 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Partizionando in blocchi

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \boxed{A_{12}} \\ \boxed{A_{21}} & \boxed{A_{22}} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = A_{22}$ simmetrica

$A_{21} = A_{12}^T$ triangolare

# RISOLUZIONE SISTEMI TRIANGOLARI A BLOCCHI

Sistemi triangolari

Sistemi triangolari
inferiori

Sistemi triangolari
superiori

$$\begin{cases} a_{00}x_0 = b_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = b_0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Forward Substitution

$( x_0 , x_1 , x_2 )$

Backward Substitution

$( x_2 , x_1 , x_0 )$

# Sistemi triangolari inferiori …

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & & & & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & & & & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & & & & = b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & & & & = \vdots \\
a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & & & & = b_n
\end{cases}
$$

## Algoritmo di Forward Substitution

$$
\begin{cases}
x_0 = b_0 / a_{00} \\
x_i = \left( b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j \right) \Big/ a_{ii}
\end{cases}
$$

$\forall$ i= 1, … , n

# Algoritmo a blocchi

**Partizioniamo la matrice , il vettore x e il vettore b in blocchi**

$$\begin{bmatrix} A_{0,0} & & & & & \\ A_{1,0} & A_{1,1} & & & & \\ A_{2,0} & A_{2,1} & A_{2,2} & & & \\ A_{3,0} & A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & & \\ A_{4,0} & A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & \\ A_{5,0} & A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{bmatrix}$$

**Le matrici $A_{ii}$ sono matrici triangolari inferiori**

# Algoritmo a blocchi

$$\begin{cases} A_{00}x_0 & = B_0 \\ A_{10}x_0 + A_{11}x_1 & = B_1 \\ A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 & = B_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & = \vdots \\ A_{n0}x_0 + A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n & = B_n \end{cases}$$

$\mathbf{A_{00} X_0 = B_0}$

$B_1 = A_{10} X_0 + \mathbf{A_{11} X_1}$

$\mathbf{B_2 = A_{20} X_0 + A_{21} X_1 + A_{22} X_2}$

$\mathbf{B_3 = A_{30} X_0 + A_{31} X_1 \;\; A_{32} X_2 + A_{33} X_3}$

$\mathbf{B_n = A_{n0} X_0 + A_{n1} X_1 \;\; A_{32} X_2}$ .......... $\mathbf{+ A_{nn} X_n}$

# Algoritmo a blocchi …

$$\begin{cases} A_{00}x_0 & = b_0 \\ A_{10}x_0 + A_{11}x_1 & = b_1 \\ A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 & = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & = \vdots \\ A_{n0}x_0 + A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{00}\, x_0 = B_0 \\ \forall\ i = 1, \ldots, n \quad A_{ii}x_i = B_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} X_j \end{cases}$$

# Algoritmo a blocchi

$$
\begin{cases}
A_{00}x_0 & = B_0 \\
A_{10}x_0 + A_{11}x_1 & = B_1 \\
A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + A_{22}x_2 & = B_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & = \vdots \\
A_{n0}x_0 + A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n & = B_n
\end{cases}
$$

$\mathbf{A_{00} X_0 = B_0}$

$B_1 - A_{10} X_0 = \mathbf{A_{11} X_1}$

$\mathbf{B_2 - A_{20} X_0 - A_{21} X_1 = A_{22} X_2}$

$\mathbf{B_3 - A_{30} X_0 - A_{31} X_1 - A_{32} X_2 = A_{33} X_3}$

$\mathbf{B_n - A_{n0} X_0 - A_{n1} X_1 - A_{32} X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots = A_{nn} X_n}$

# Algoritmo a blocchi: passi temporali ...

$$
\begin{cases}
\boxed{A_{00}x_0} & & & & = B_0 \\
A_{10}x_0 + \boxed{A_{11}x_1} & & & & = B_1 \\
A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + \boxed{A_{22}x_2} & & & & = B_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & & & & = \vdots \\
A_{n0}x_0 + A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + \boxed{A_{nn}x_n} & & & & = B_n
\end{cases}
$$

**Passo 0**

$A_{00}\,X_0 = B_0$

**Passo 1**

$B_1 - A_{10}X_0 = A_{11}X_1$

**Passo 2**

$\mathbf{B_2 - A_{20}X_0 - A_{21}X_1 = A_{22}X_2}$

$\mathbf{B_3 - A_{30}X_0 - A_{31}X_1 - A_{32}X_2 = A_{33}X_3}$

**Passo n**

$\mathbf{B_n - A_{n0}X_0 - A_{n1}X_1 - A_{32}X_2 \ldots\ldots\ldots = A_{nn}X_n}$

**Passo 0.1** **Passo 1.1** **Passo 2.1**

# Algoritmo a blocchi: sequenza temporale …

$$
\begin{cases}
\overset{\mathbf{0}}{\boxed{A_{00}x_0}} & & & & = B_0 \\
A_{10}x_0 + \overset{\mathbf{1}}{\boxed{A_{11}x_1}} & & & & = B_1 \\
A_{20}x_0 + A_{21}x_1 + \overset{2}{\boxed{A_{22}x_2}} & & & & = B_2 \\
\vdots \quad \mathbf{0.1} \quad \vdots \quad \ddots \; \mathbf{1.1} & \quad \mathbf{2.1} & & & = \vdots \\
A_{n0}x_0 + A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + \boxed{A_{nn}x_n} & & & & = B_n
\end{cases}
$$

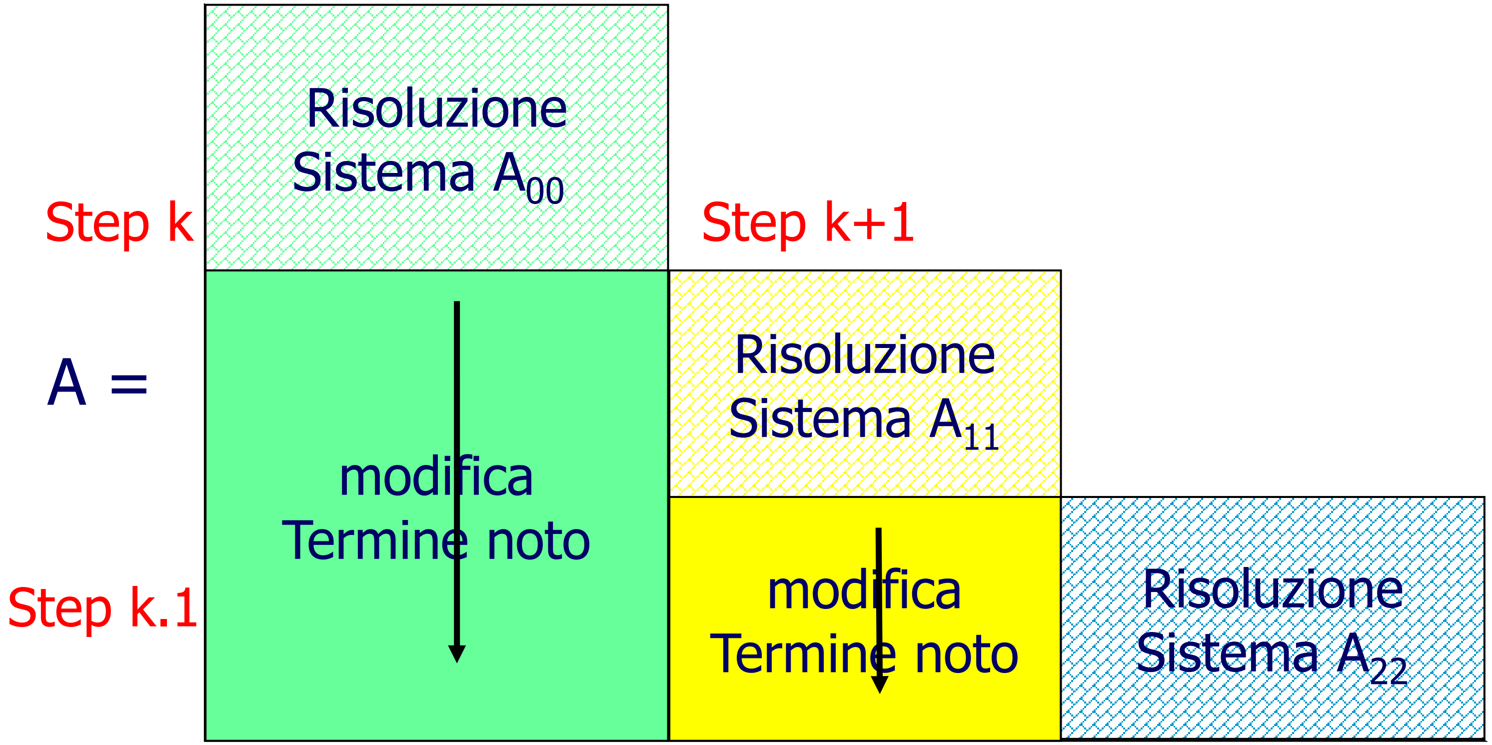
Step k: Risoluzione sistema triangolare $\mathbf{A_{kk} X_k = B_k}$

Step k.1: Aggiornamento termine noto del sistema relativo alla matrice $\mathbf{A_{k+1k+1}}$

Step k+1:Risoluzione sist.triangolare $\mathbf{A_{k+1k+1} X_{k+1} = B_{k+1}}$

# Algoritmo a blocchi: Fasi di calcolo

La matrce è decomposta in  3 x 3 blocchi

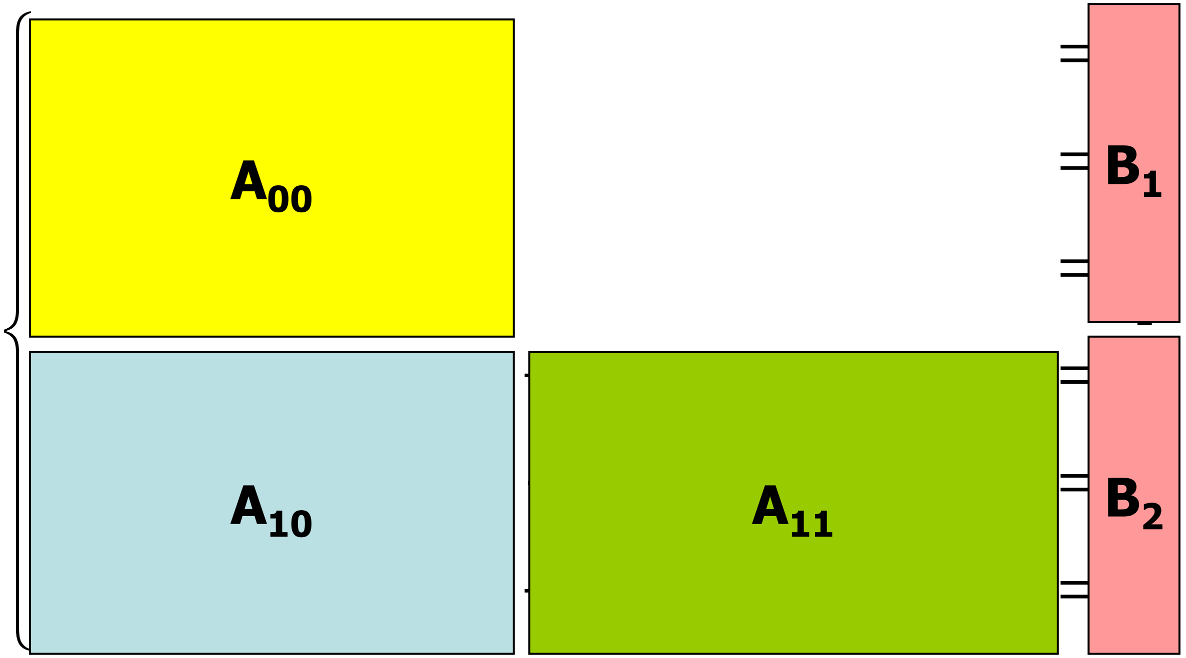



L'algoritmo a blocchi procede
Per colonne

# Consideriamo un sistema di dimensione n=6 e 2 blocchi 3x3

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = b_5
\end{cases}
$$

# Partizioniamo la matrice a blocchi di dimensione 3 x3



# Si risolve il sistema $A_{00}X_0 = B_0$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\boxed{\begin{aligned}
&a_{00}x_0 && = b_0\\
&a_{10}x_0 + a_{11}x_1 && = b_1\\
&a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 && = b_2
\end{aligned}}\\
&a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\\
&a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4\\
&a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{aligned}
\right.
$$

# Si modifica il termine noto $B_1$

Valori noti

| $A_{10}X_0$ | $A_{11}\ X_1$ | = | $B_1$ |
| --- | --- | --- | --- |

$$
\begin{cases}
a_{33}x_3 = b_3 - \left(a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) \\
a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2\right) \\
a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2\right)
\end{cases}
$$

$$\boxed{B_1 - A_{10}X_0 = \tilde{B}_1}$$

$$\begin{cases} a_{33}x_3 & = b_3 - \left(a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) = \tilde{b}_3 \\ a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2\right) = \tilde{b}_4 \\ a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2\right) = \tilde{b}_5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

**Si risolve il sistema Triangolare Inferiore**

$$\boxed{A_{11}X_1 = \tilde{B}_1}$$

# Consideriamo un sistema di dimensione n=6 e 3 blocchi 2x2

$$
\begin{cases}
\boxed{\begin{array}{l} a_{00}x_0 = b_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l} a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l} a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\ a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 \end{array}}
\end{cases}
$$

## Si risolve il sistema $A_{00}\,X_0 = B_0$

$$
\begin{cases}
\boxed{a_{00}x_0} & = b_0 \\
\boxed{a_{10}x_0 + a_{11}x_1} & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = b_5
\end{cases}
$$

## Si modifica il termine noto $B_1$ ($b_2$, $b_3$)

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 = b_2 - (a_{20}x_0 + a_{21}x_1) = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - (a_{30}x_0 + a_{31}x_1) = \tilde{b}_3
\end{cases}
$$

$$\tilde{B}_1 = B_1 - A_{10}X_0$$

## Si modifica il termine noto $B_2$ ( $b_4$, $b_5$ )

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & & & & & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & & & & & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & & & & = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 & + a_{32}x_2 & + a_{33}x_3 & & & = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 & + a_{42}x_2 & + a_{43}x_3 & + a_{44}x_4 & & = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 & + a_{52}x_2 & + a_{53}x_3 & + a_{54}x_4 & + a_{55}x_5 & = b_5
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1\right) = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1\right) = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

$$\tilde{B}_2 = B_2 - A_{20}X_0$$

$$
\begin{cases}
\boxed{\begin{array}{l} a_{22}x_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} = \tilde{b}_2 \\ = \tilde{b}_3 \end{array}} \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

**Si Calcola X $_1$( $x_2$, $x_3$)**
**risolvendo il sistema**
**Triangolare Inferiore**
**$A_{22}X_1=B_1$**

## Si modifica il termine noto $B_2$

$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 & & & & = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & & & & = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 & + a_{44}x_4 & & & = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 & + a_{54}x_4 & + a_{55}x_5 & & = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 - \left(a_{42}x_2 + a_{43}x_3\right) = \hat{b}_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 - \left(a_{52}x_2 + a_{53}x_3\right) = \hat{b}_5
\end{cases}
$$

$$
\underline{B_2 - A_{20}X_0} - A_{21}X_0 = \hat{B}_2
$$

$$
\begin{cases}
a_{44}x_4 & = \hat{b}_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \hat{b}_5
\end{cases}
$$

**Si Calcola $X_2$ =( $x_4$, $x_5$)**
**risolvendo il sistema**
**Triangolare Inferiore**
**$A_{33}$ $X_2$= $B_2$**

# Passo 1.

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 \\
a_{60}x_0 + a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = b_6 \\
a_{70}x_0 + a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = b_7 \\
a_{80}x_0 + a_{81}x_1 + a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = b_8 \\
a_{90}x_0 + a_{91}x_1 + a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = b_9 \\
a_{10,0}x_0 + a_{10,1}x_1 + a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = b_{10} \\
a_{11,0}x_0 + a_{11,1}x_1 + a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = b_{11}
\end{cases}
$$

## Dopo il Passo 1

$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 \\
a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = \tilde{b}_6 \\
a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \tilde{b}_7 \\
a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \tilde{b}_8 \\
a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \tilde{b}_9 \\
+a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \tilde{b}_{10} \\
+a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \tilde{b}_{11}
\end{cases}
$$

Si ottiene il seguente Sistema “Attivo”

## Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 \\
a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = \tilde{b}_6 \\
a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \tilde{b}_7 \\
a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \tilde{b}_8 \\
a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \tilde{b}_9 \\
a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \tilde{b}_{10} \\
a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \tilde{b}_{11}
\end{cases}
$$

## Dopo il Passo 2

$$\begin{cases}
a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \hat{b}_5 \\
a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = \hat{b}_6 \\
a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \hat{b}_7 \\
a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \hat{b}_8 \\
a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \hat{b}_9 \\
+a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \hat{b}_{10} \\
+a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \hat{b}_{11}
\end{cases}$$

Si ottiene il seguente Sistema “Attivo”

## Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{cases}
a_{44}x_4 = \hat{b}_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \hat{b}_5 \\
a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = \hat{b}_6 \\
a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \hat{b}_7 \\
a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \hat{b}_8 \\
a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \hat{b}_9 \\
a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \hat{b}_{10} \\
a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \hat{b}_{11}
\end{cases}
$$

## Dopo il passo 3…

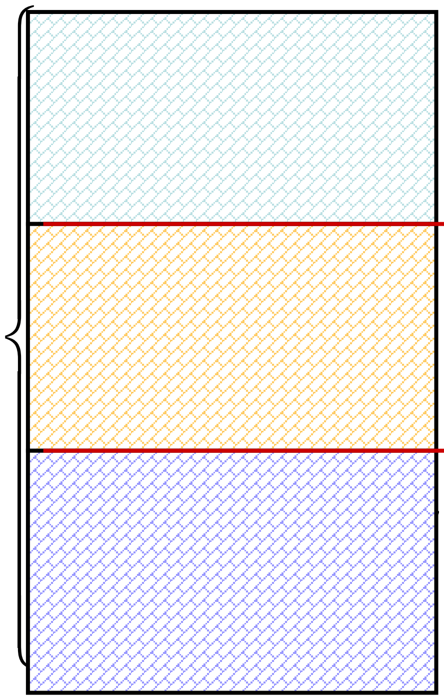
$$
\begin{aligned}
a_{66}x_6 & = \ddot{b}_6 \\
a_{76}x_6 + a_{77}x_7 & = \ddot{b}_7 \\
a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 & = \ddot{b}_8 \\
a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 & = \ddot{b}_9 \\
+ a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} & = \ddot{b}_{10} \\
+ a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} & = \ddot{b}_{11}
\end{aligned}
$$

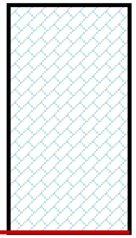
Si ottiene il seguente Sistema "Attivo"

Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{cases}
a_{66}x_6 = \ddot{b}_6 \\
a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \ddot{b}_7 \\
a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \ddot{b}_8 \\
a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \ddot{b}_9 \\
a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \ddot{b}_{10} \\
a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \ddot{b}_{11}
\end{cases}
$$

## Dopo il Passo 4





$$
\begin{cases}
a_{88}x_8 = \bar{b}_8 \\
a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \bar{b}_9 \\
+ a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \bar{b}_{10} \\
+ a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \bar{b}_{11}
\end{cases}
$$

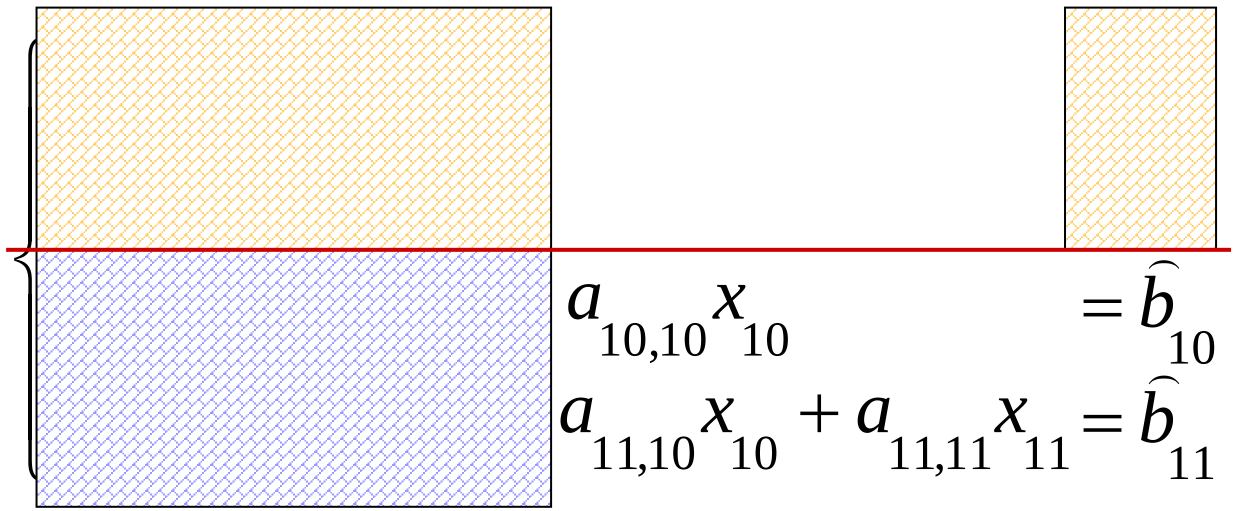
Si ottiene il seguente Sistema “Attivo”

## Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{cases}
a_{88}x_8 = \bar{b}_8 \\
a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \bar{b}_9 \\
a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \bar{b}_{10} \\
a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \bar{b}_{11}
\end{cases}
$$

risolve il sistema $\mathbf{A_{44}X_4=B_4}$

## Dopo il passo 5…



$$\begin{cases} a_{10,10}x_{10} = \widehat{b}_{10} \\ a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \widehat{b}_{11} \end{cases}$$

Si ottiene il seguente Sistema “Attivo”

Parte attiva del sistema triangolare

$$\begin{cases} a_{10,10}x_{10} = \widehat{b}_{10} \\ a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \widehat{b}_{11} \end{cases}$$

In generale i passi dell'algoritmo a blocchi sono

m = N/nb

**Fine lezione**