

LA MATEMATICA DELL' INCERTO

*Se noi non fossimo ignoranti non ci sarebbe probabilità,
ci potrebbero essere solo certezze. Ma la nostra ignoranza
non può essere assoluta, altrimenti non ci sarebbe più
probabilità. Così i problemi di probabilità possono
essere classificati a seconda della maggiore o minore
profondità della nostra ignoranza*
H. Poincaré

Eventi e notazione insiemistica

Nella vita dobbiamo affrontare spesso situazioni dall'esito incerto (colloquio di lavoro, prova di esame, partecipazione a una gara etc..), e che hanno importanza per il nostro futuro.

Il ragionamento probabilistico interviene ogni volta che ci troviamo di fronte a tali situazioni, o a fenomeno il cui modo di manifestarsi non ci risulta noto a priori: *uscirà "testa" se lancio la moneta?, supererò l'esame di matematica?, avrò quel posto di lavoro?, il treno arriverà puntuale?* A queste domande tendiamo a rispondere assegnando una probabilità di accadimento all'esito che ci interessa, ad esempio al "superamento dell'esame, alla "possibilità di essere assunto", alla "puntualità del treno".

La *probabilità di un evento* incerto è quindi *una valutazione, una misura della possibilità di realizzazione dell'evento*. Come assegnare una probabilità? La probabilità che assegniamo a un evento può essere il risultato di un ragionamento logico e del calcolo matematico (cfr. la valutazione classica della probabilità), può essere dedotta dall'osservazione di esperimenti utili per la comprensione di un fenomeno o dalla lettura di dati relativi a come il fenomeno si è manifestato nel passato (cfr. la valutazione frequentista della probabilità), o anche dalla nostra esperienza, dalla conoscenza anche approssimata di una situazione, dall'intuito etc... (cfr. la valutazione soggettiva della probabilità). Tali valutazioni regolano la nostra vita e determinano le nostre decisioni: la valutazione, nell'uscire di casa la mattina, della possibilità che piova o meno nel corso della giornata, ci permetterà di decidere se prendere o no l'ombrello, la valutazione della propria preparazione ci spingerà a partecipare ad una prova o a rinunciarci, etc....

Le origini della probabilità risalgono al XVII° secolo e ai giochi di azzardo che ebbero un notevole sviluppo in quel secolo. Una data molto importante per l'inizio della ricerca delle leggi che regolano l'assegnazione della probabilità è il 1654.

Un gioco molto alla moda in quei tempi era il seguente: chi comandava il gioco scommetteva alla pari con un giocatore che quest'ultimo, lanciando per 4 volte un dado, avrebbe ottenuto almeno una volta il numero 6. Il Cavalier de Méré, sulla base di calcoli matematici era giunto alla conclusione che: *"ottenere almeno un 6 in 4 lanci di un dado non truccato era equivalente ad ottenere almeno un doppio 6 in 24 lanci, sempre di un dado non truccato"*. Tuttavia, giocando secondo tale convinzione, invece di vincere, perdeva e nel 1654 scrisse a Pascal ponendogli il seguente problema: *perché i suoi calcoli matematici fallivano di fronte all'evidenza empirica?*. Da ciò scaturì una corrispondenza tra Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), in cui iniziò a delinarsi il concetto di probabilità nell'accezione frequentista.

Esistono diverse "valutazioni di probabilità" (classica, frequentista, soggettiva); in particolare la nozione frequentista è legata allo sviluppo della *Statistica* che determina la misura dell'incertezza relativa a un certo fenomeno con le osservazioni sperimentali del fenomeno stesso. Tuttavia per operare in modo logico e razionale, le valutazioni probabilistiche devono obbedire a leggi precise; queste determinano la **definizione assiomatica** della misura di probabilità e sono oggetto, insieme alle conseguenze da esse dedotte per via logica, della *Teoria della Probabilità*, disciplina matematica che, nata dai problemi di giochi legati alla sorte, ha oggi applicazioni nella fisica, nella biologia, nell'economia, nelle scienze finanziarie.

1. Eventi

La teoria della probabilità stabilisce le leggi che devono regolare l'assegnazione di probabilità agli eventi.

Ma cosa è un *evento*?

Nell'accezione generale **evento** è un **avvenimento**, un **fatto**: ciò che accade o può accadere o è accaduto.

Nella teoria della probabilità, un **evento** è un fatto *affermato attraverso un enunciato o frase il cui valore di verità o di falsità non è noto*: esso può essere stabilito solo in seguito, dopo che un dato esperimento è stato compiuto, o un'osservazione è compiuta che ci permette di verificare se il fatto è accaduto.

Nella teoria della probabilità, in realtà, l'evento si fa coincidere proprio con l'*affermazione sulla realizzazione di un fatto*, la cui verità può essere stabilita solo in seguito.

Esempi di eventi sono le affermazioni: “*domani a Napoli piove*”, “*il Napoli vince lo scudetto*”, “*esce tre sulla ruota di Napoli*”, “*al giro di roulette esce il rosso*”; infatti il valore di verità può essere stabilito, per la prima affermazione, solo dopo che il domani è sopraggiunto e si è osservata la situazione meteorologica a Napoli, per la seconda solo dopo che il campionato di calcio è terminato, per la terza solo dopo che sono usciti i risultati delle estrazioni etc..

In particolare, in *statistica*, **evento** è l'affermazione su *ciascuno dei casi* che possono presentarsi a seguito di una “*prova*” o “*esperimento aleatorio*”, dove per prova o esperimento aleatorio s'intende un esperimento dall'esito incerto, perché ripetuto più volte, nelle stesse condizioni, dà luogo a risultati diversi, ma anche un fenomeno o un'attività *che può manifestarsi in diversi modi*. Esempi di esperimenti aleatori sono: “*il lancio di una moneta*”, *il lancio di un dado*”, “*una gara di corsa*”, “*durata di vita di una lampadina*”, “*estrazione al lotto*”, etc... .

Un evento ha di per sé la caratteristica dell'incertezza, dell'aleatorietà, perché il verificarsi del fatto che enuncia dipende dal caso; tuttavia accanto agli **eventi incerti** sono considerati sempre i seguenti eventi:

- **evento certo**: *affermazione su un fatto che sicuramente accade;*
- **evento impossibile**: *affermazione su un fatto che sicuramente non si verifica.*

Ad esempio nel lancio di un dado:

evento *incerto* è “*esce un numero pari*”,

evento *certo* è “*esce un numero compreso tra 1 e 6*”,

evento *impossibile* è “*esce 10*”.

SPAZIO CAMPIONARIO E NOTAZIONE INSIEMISTICA PER GLI EVENTI

Una prova o fenomeno aleatorio è qualcosa di osservabile, ma l'esito, il modo in cui si manifesta, non è prevedibile a priori; tuttavia se non possiamo prevedere l'esito di una prova aleatoria, possiamo invece conoscere *l'insieme di tutti gli esiti possibili*.

L'insieme Ω degli esiti possibili di una prova è detto “spazio campionario”.

Nel caso di un numero finito di esiti possibili, e_1, e_2, \dots, e_k , lo spazio campionario è indicato con la notazione elencativa (cfr. esempi 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5)

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_k\},$$

Nel caso di un numero infinito di esiti, in particolare di un continuo di esiti, si ricorre alla notazione intensiva:

$$\Omega = \{e: \dots\} = \{e: \mathcal{P}(e)\}$$

(cfr. esempi 1.7, 1.8); anche se nel caso numerabile si usa talvolta anche la scrittura (cfr. esempio 1.6):

$$\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}$$

L'esito immediatamente leggibile di una prova è detto anche evento elementare o punto campionario. Lo spazio campionario è allora l'insieme degli eventi elementari.

Ad esempio, nel lancio di un dado, identificando ogni faccia del dado con un numero che indica, gli *esiti possibili* o *eventi elementari* o *punti campionari* sono **1, 2, 3, 4, 5, 6**; lo *spazio campionario* è $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Un evento E è un'affermazione che coinvolge uno o più eventi elementari, ognuno dei quali realizzandosi fa sì che si realizzi E ; E è rappresentato allora come insieme di tali eventi elementari e quindi come parte dello spazio campionario. Gli eventi si distinguono in eventi semplici ed eventi composti.

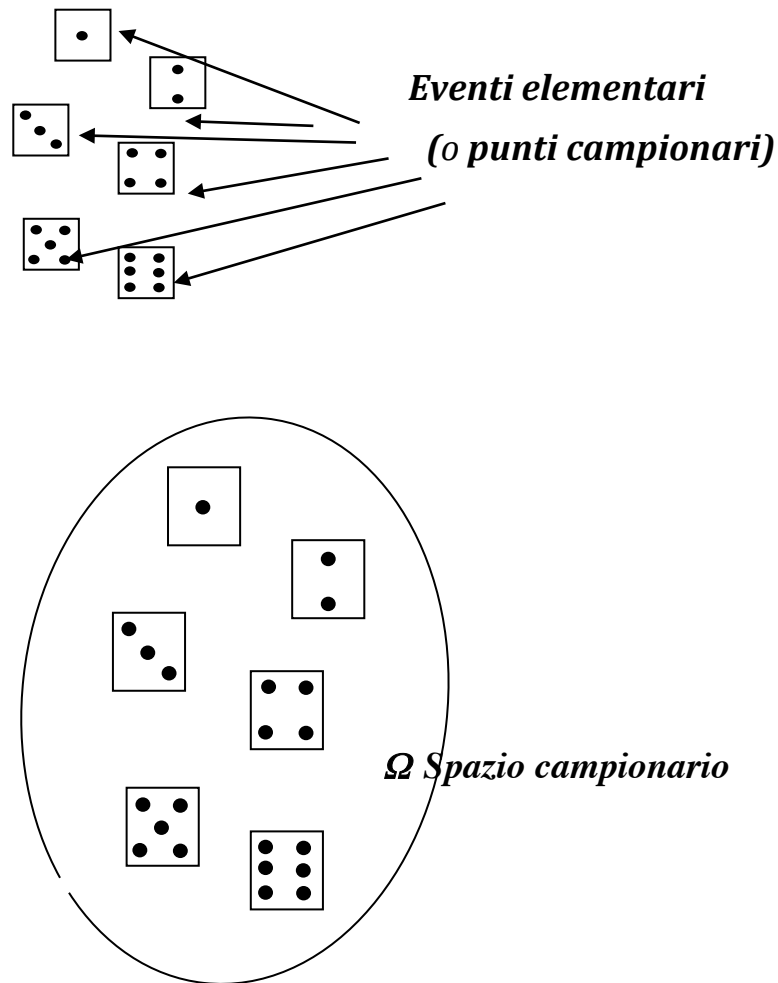
- **evento semplice:** evento che corrisponde a un solo evento **elementare** ed è indicato da un singleton, cioè un sottoinsieme di Ω costituito da un solo evento elementare: $\{e\}$;
- **evento composto:** evento che corrisponde a più di un evento elementare ed è quindi indicato con una parte dello spazio campionario costituita da due o più punti campionari.

I seguenti esempi dovrebbero rendere chiari le definizioni e le convezioni suindicate.

ESEMPI:

1.1) Lancio di un dado

L'esito del lancio è ciò che mostra la faccia visibile del dado una volta che questo si è fermato quindi: **evento elementare** (esito possibile) è ognuna delle sei facce del dado.



Identificando ogni esito con il numero che la faccia del dado mostra, **gli eventi elementari sono indicati dai numeri**

1, 2, 3, 4, 5, 6.

e lo **spazio campionario è rappresentato dall'insieme**

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ω è uno spazio campionario finito e la sua cardinalità è $|\Omega|=6$

Esempi di eventi collegati alla prova “lancio di un dado” sono:

A = “*esce un numero pari*”

A può realizzarsi in tre modi diversi: *se esce 2 , se esce 4, se esce 6*

A è allora un *evento composto* rappresentato dalla parte di Ω

$$\mathbf{A} = \{ 2, 4, 6 \}$$

B = “*esce un numero maggiore di 5*”

B è un *evento semplice* perché si può realizzare in un solo modo, *se esce 6*, quindi **B** = “*esce 6*” ed è rappresentato da

$$\mathbf{B} = \{ 6 \}$$

C = “*esce un numero compreso tra 1 e 6*”

C è l'evento certo **evento certo** ed è allora rappresentato da

$$\mathbf{C} = \Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

D = “*esce un numero maggiore di 6*”

D è un **evento impossibile** ed è allora rappresentato dalla parte vuota di Ω

$$\mathbf{D} = \{ n \in \Omega : n > 6 \} = \emptyset.$$

Altri eventi:

$$E_{(d)} = \text{“esce un numero dispari”} = \{1, 3, 5\}$$

$$E_{(\leq 3)} = \text{“esce un numero } \leq 3\text{”} = \{1, 2, 3\}$$

$$E_{(< 5)} = \text{“ esce un numero minore di 5”} = \{ \quad \quad \quad \}$$

L'insieme di tutti gli eventi collegati al lancio di un dado è rappresentato dall'insieme delle parti di Ω :

$$P(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} \emptyset \\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \\ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \\ \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\} \\ \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}, \\ \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,4,6\}, \{1,2,5,6\}, \{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{1,3,5,6\}, \\ \{1,4,5,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{3,4,5,6\}, \\ \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \\ \Omega \end{array} \right\}$$

Gli eventi collegati al lancio di un dado sono quindi in tutto $2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$.

1.2) Lancio di due dadi

Indichiamo ora con $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ l'insieme degli esiti del lancio di un dado. Allora:

esito del lancio di due dadi: coppia (a, b) , $a \in S$ e $b \in S$

a numero mostrato dal primo dado

b numero mostrato dal secondo dado

Se $a \neq b$, (a, b) e (b, a) sono eventi elementari distinti $(\square, \blacksquare) \neq (\blacksquare, \square)$

Quindi:

$\Omega = \{(a, b): a \in S, b \in S\} = S \times S = S^2$ spazio campionario

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\} \quad (1)$$

Gli esiti possibili del lancio di due dadi sono allora

$$n = |S| \times |S| = 6 \times 6 = 36$$

- $E =$ “la somma dei numeri usciti è 2”

E si realizza se e solo se entrambi i dadi mostrano 1 (\square, \square)
e quindi se e solo si realizza l'evento elementare $(1,1)$.

E è allora un *evento semplice* rappresentato dalla parte di Ω : $E = \{(1,1)\}$

- $F =$ “la somma dei numeri usciti è 3”

F si realizza se e solo se si realizza uno degli eventi elementari $(1, 2), (2,1)$.

(\square, \blacksquare) o (\blacksquare, \square)

- F è un *evento composto* rappresentato dalla parte di Ω : $F = \{(1,2), (2,1)\}$.
- $H =$ “la somma dei numeri mostrati dai due dadi è 5” = $\{(1, 4) (4, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.
- $D =$ “i due dadi mostrano la stessa faccia” = $\{(1,1), (2,2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

1.3) Due lanci successivi dello stesso dado

L'esito della prova è ancora una coppia (a, b) : $a, b \in S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a numero mostrato dal dado nel primo lancio

b numero mostrato dal dado nel secondo lancio

Se $a \neq b$, (a, b) e (b, a) sono eventi elementari distinti

$$(\square, \boxtimes) \neq (\boxtimes, \square)$$

L'insieme (1) rappresenta anche lo spazio campionario del nuovo esperimento.

Esempio di evento è:

- $F =$ “la somma dei numeri usciti è 3”

F si realizza se e solo se si realizza uno degli eventi elementari

“*esce prima 1 e poi 2*” o “*esce prima 2 e poi 1*”

$$(\square, \square) \quad \text{o} \quad (\square, \square)$$

I due eventi elementari che realizzandosi verificano F sono rappresentati dalle coppie $(1, 2)$ e $(2, 1)$.

F è allora un *evento composto* rappresentato dalla parte di Ω

$$F = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

Quali sono e quanti sono gli esiti del lancio di tre dadi?

1.4) Sesso di un nascituro in un parto non gemellare

Lo spazio campionario è $\Omega = \{F, M\}$ dove F sta per *sesso femminile* e M sta per *sesso maschile*.

$$E_{(F)} = \text{“nasce femmina”} = \{F\}$$

evento semplice

$$E_{(M)} = \text{“nasce maschio”} = \{M\}$$

evento semplice

$$\text{“nasce un bimbo o una bimba”} = \Omega$$

evento certo

$$\text{“nasce un orangutango”} = \emptyset$$

evento impossibile.

$$P(\Omega) = \{\emptyset, \{F\}, \{M\}, \Omega\}$$

insieme degli eventi

1.5) Lancio di una moneta

Lo spazio campionario è $\Omega = \{T, C\}$ dove T sta per *testa* e C per *croce*.

$E_{(T)} = \text{“ esce Testa ”} = \{ T \}$	evento semplice
$E_{(C)} = \text{“ esce Croce ”} = \{ C \}$	evento semplice
$\text{“ esce o Testa o Croce ”} = \Omega$	evento certo
$\text{“ non esce niente ”} = \emptyset$	evento impossibile.

Costruire l'insieme di tutti gli eventi

1.6) Numero di accessi ad un sito internet

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots\}$ spazio campionario numerabile

$E_0 = \text{“nessun accesso al sito”} = \{0\}$ evento semplice

$E_2 = \text{“2 accessi al sito”} = \{2\}$ evento semplice

$E = \text{“ numero di accessi al sito compreso tra 2 e 10 ”} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
evento composto

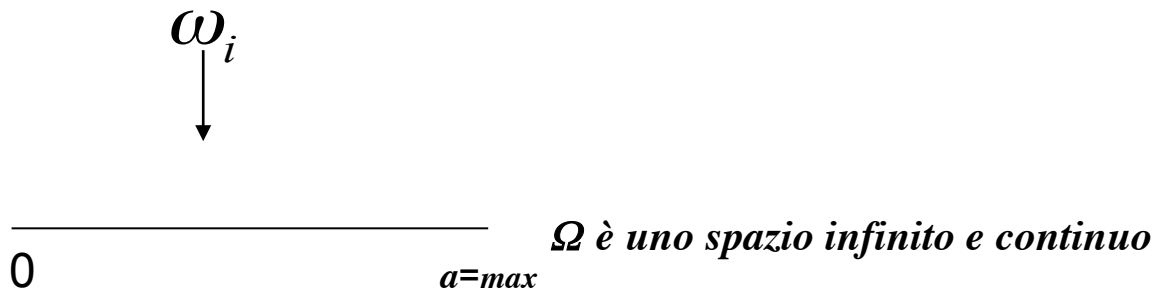
$H = \text{“ numero di accessi al maggiore di 10 ”} = \{11, 12, 13, \dots\} = \{n \in \mathbb{N}_0 : n > 10\}$
evento composto

$E_{-1} = \text{“-1 accessi al sito”} = \emptyset$ evento impossibile

1.7) Durata di vita di una lampadina alogena

La vita di una lampadina alogena può variare da 0 (caso di una lampadina uscita guasta dallo stabilimento che l'ha prodotta) ad una durata massima a stabilita da un esperto. Volendo considerare ogni istante di tempo t compreso tra 0 e a , *evento elementare* è allora ogni punto dell'intervallo di tempo che va da 0 ad a e lo spazio Ω campione è rappresentato dall'intervallo di tempo $[0, a]$.

$$\Omega = \{\omega : \omega = \text{durata di una lampadina alogena}\} = [0, a].$$



$$E_{(t)} = \text{“ il tempo di durata della lampadina è } t \text{”} = \{t\} \qquad \text{evento semplice}$$

$$E = \text{“ il tempo di durata della lampadina è compreso tra } t_1 \text{ e } t_2 \text{”} = [t_1, t_2]$$

1. 8) Arrivo del treno Roma – Napoli delle 16, 30 (arrivo previsto ore 18)

Calcolato il tempo minimo m di percorrenza del tratto Roma-Napoli lo spazio campionario Ω è costituito teoricamente da tutti i tempi di arrivo possibili che seguono il tempo minimo m e dalla cifra 0 con la quale indicare il caso che il treno non arrivi

$$\Omega = \{0\} \cup [m, +\infty[$$

$$E_{(0)} = \text{“ il treno non arriva”} = \{0\} \qquad \text{evento semplice}$$

$$E_{(18)} = \text{“il treno arriva alle 18”} = \{18\} \qquad \text{evento semplice}$$

$$E_{(18.10)} = \text{“il treno arriva alle 18.10”} = \{18.10\} \qquad \text{evento semplice}$$

$$E = \text{“ il treno arriva”} = \Omega - \{0\} \qquad \text{evento composto}$$

$$E_{(\leq 18)} = \text{“il treno arriva in anticipo o puntuale”} = \{x \in \Omega : m \leq x \leq 18\} \text{ evento comp.}$$

$$E^\circ = \text{“ il treno arriva ma non all'ora esatta “} = [m, +\infty[- \{18\}.$$

2. OPERAZIONI LOGICHE CON GLI EVENTI

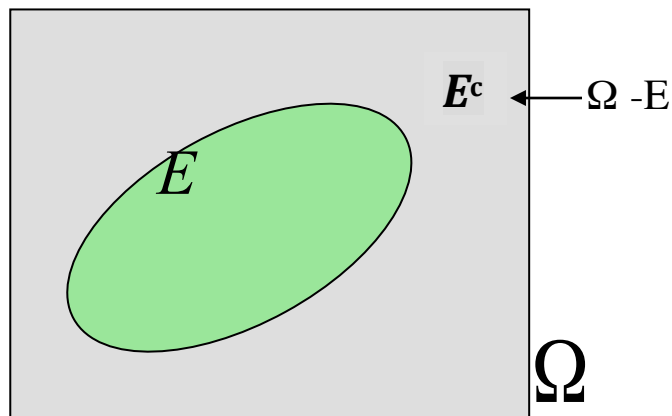
2.1 NEGAZIONE E DIFFERENZA

La **negazione** di un evento E o **evento contrario a E** è l'*evento che si realizza se e solo se E non si realizza*.

La negazione di E , si indica con uno dei simboli seguenti:

$$E^c, \quad \neg E, \quad -E, \quad \bar{E}$$

Utilizzando la notazione insiemistica: la negazione E^c è la **parte dello spazio campionario costituita dagli esiti che non appartengono a E** ; perciò E^c coincide con il **complemento** di E (cioè con la differenza $\Omega - E$) e è detto anche **evento complementare ad E** .

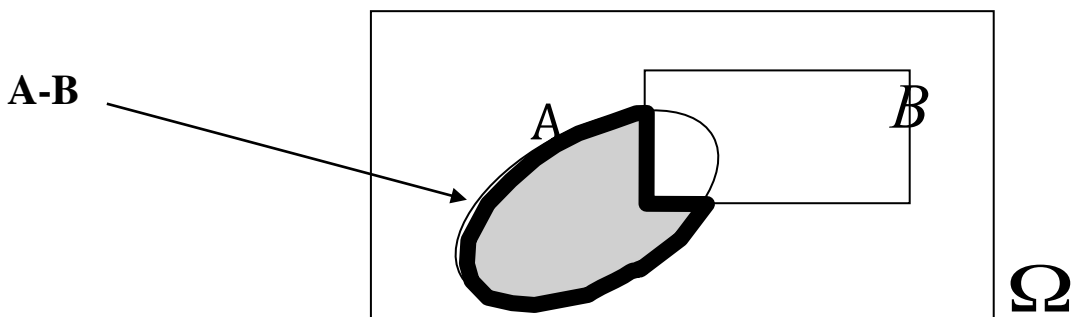


Proprietà: $-(-E) = E$ $-\Omega = \emptyset$ $-\emptyset = \Omega$

DIFFERENZA DI DUE EVENTI A e B

A-B: *evento che si realizza se e solo se A si realizza ma B non si realizza*

A-B coincide con il **complemento di B rispetto ad A**



ESEMPI

2.1) Lancio di un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Se $E_{(5)} = \text{“ esce il numero 5 ”} = \{5\}$

allora $E_{(5)}^c = -E_{(5)} = \text{“ non esce 5 ”} = \text{“ esce un numero diverso da 5 ”}$
 $= \text{“ esce 1 o 2 o 3 o 4 o 6 ”}$

negazione di $E_{(5)}$

allora

$$-E_{(5)} = \{1, 2, 3, 4, 6\} = \Omega - \{5\}$$

$$\text{complemento di } E_{(5)} = \{5\}$$

- $E_{(p)} = \text{“ esce un numero pari ”} = \{2, 4, 6\}$

$$-E_{(p)} = \text{“ non esce un numero pari ”} = \text{“ esce un numero dispari ”}$$

allora

$$= E_{(d)} = \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 4, 6\} = \Omega - \{2, 4, 6\}$$

- $E_{(d)} = \text{“ esce un numero dispari ”} = \{1, 3, 5\}$

$$-E_{(d)} = \text{“ esce un numero pari ”} = E_{(p)} = \{2, 4, 6\}$$

- $-(-E_{(p)}) = -E_{(d)} = E_{(p)}$

- $-\Omega = \text{“ non esce un numero compreso tra 1 e 6 ”} =$

$$\Omega - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega - \Omega = \emptyset$$

- $E_{(d)} - E_{(5)} = \text{“ esce un numero dispari ma non esce 5 ”} =$
 $= \{1, 3\} = \{1, 3, 5\} - \{5\}$

- **2.2) Lancio di due dadi**

Se $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ allora

$$\Omega = \{(a, b) : a \in S, b \in S\} = S \times S = S^2 \quad \text{spazio campionario}$$

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\} \quad n = 6 \times 6 = 36 \text{ esiti possibili}$$

- $D = \text{“i due dadi mostrano la stessa faccia”} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ diagonale di Ω

$$\neg D = \text{“i due dadi mostrano facce diverse”} = \Omega - D$$

.....

2.3) Arrivo del treno Roma – Napoli delle 16, 30 (arrivo previsto 18)

Lo spazio campionario Ω è fatto da tutti i tempi di arrivo possibili che seguono il tempo minimo e dalla cifra 0 con la quale indicare il caso che il treno non arrivi

$$\Omega = \{0\} \cup [m, +\infty[$$

- $E = \text{“il treno Roma – Napoli arriva in orario”} = \{18\}$

$$E^c = \text{“ il treno Roma – Napoli non arriva in orario”} = \Omega - \{18\}$$

negazione di E

2.2 SOMMA LOGICA O UNIONE

La somma logica o unione di due eventi A e B è l'evento che si realizza se si realizza uno almeno dei due eventi.

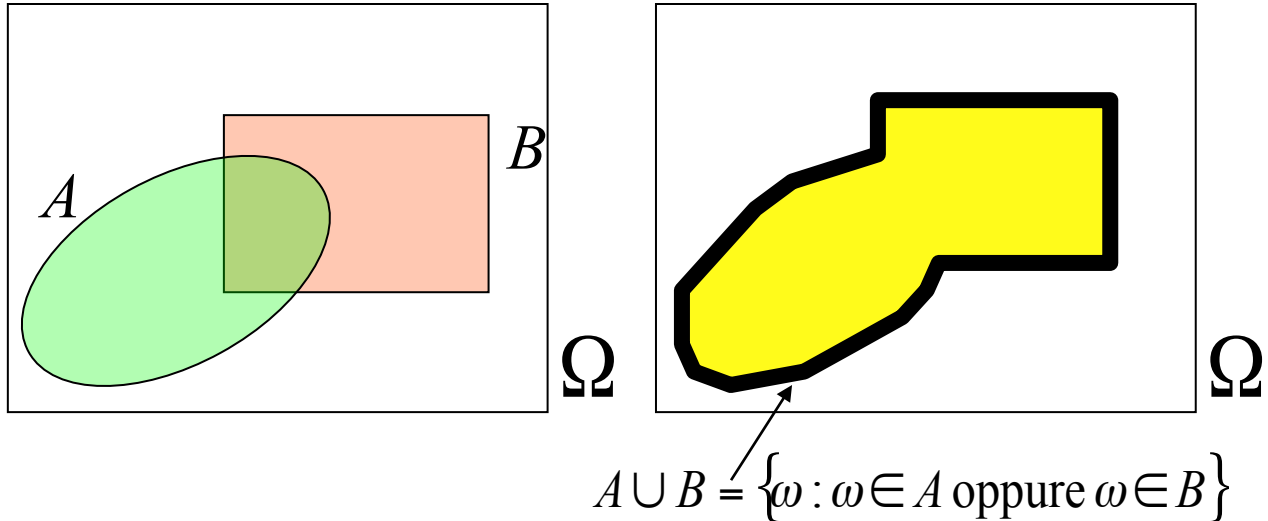
La somma logica di A ed B si indica con uno dei seguenti simboli

$$A+B \quad A \circ B \quad A \cup B$$

$$A+B = A \circ B = A \cup B = \text{“si verifica } A \text{ o si verifica } B\text{”}$$

Utilizzando la notazione insiemistica: $A+B$ si realizza se e solo si realizza uno degli eventi elementari costituenti A o uno degli eventi elementari costituenti B e cioè se e solo se si realizza uno degli eventi elementari costituenti l'unione insiemistica $A \cup B$.

Ciò giustifica la scrittura $A \cup B$ per indicare la somma logica.



La somma logica è

- *commutativa*
- *associativa*

$$(A \cup B = B \cup A),$$

$$((A \cup B) \cup C) = A \cup (B \cup C))$$

e si può estendere a più di due eventi:

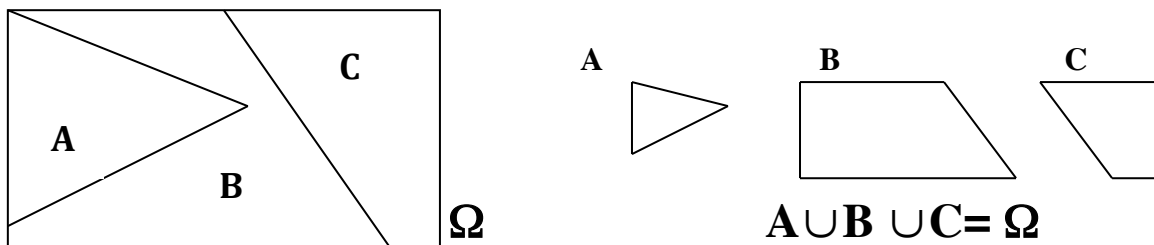
$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C =$ *evento che si verifica se si verifica uno almeno degli eventi A, B, C*

$\bigcup_{i=1}^n E_i = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n =$ *evento che si verifica se si verifica uno almeno degli eventi E_1, E_2, \dots, E_n .*

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n \cup \dots$ **Unione numerabile di eventi**

SOMMA LOGICA ED EVENTI ESAUSTIVI

Due o più eventi si dicono **necessari** o **esaustivi** se la loro somma logica è l'evento certo Ω : *uno degli eventi sicuramente si verifica*



ESEMPI

2.4) Lancio di un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se

$$E_{(1)} = \text{“ esce il numero 1 ”} = \{1\}$$

$$E_{(2)} = \text{“ esce il numero 2 ”} = \{2\}$$

$$E_{(\leq 2)} = \text{“ esce un numero minore o uguale di 2 ”} = \text{“ esce 1 o 2 ”} = \{1, 2\},$$

allora

$$E_{(1)} \cup E_{(2)} = \text{“ esce 1 o 2 ”} = \{1, 2\} = \{1\} \cup \{2\}$$

$$E_{(\leq 2)} = E_{(1)} \cup E_{(2)}$$

Se

$$E_{(4)} = \text{“ esce il numero 4 ”} = \{4\}$$

$$E_{(<4)} = \text{“ esce un numero minore di 4 ”} = \text{“ esce 1 o 2 o 3 ”} = \{1, 2, 3\}$$

$$E_{(d)} = \text{“ esce un numero dispari ”} = \text{“ esce 1 o 3 o 5 ”} = \{1, 3, 5\}$$

$$E_{(p)} = \text{“ esce un numero pari ”} = \text{“ esce 2 o 4 o 6 ”} = \{2, 4, 6\}$$

allora

$$E_{(<4)} \cup E_{(d)} = \text{“ esce un numero minore di 4 o un numero dispari ”} \\ = \text{“ esce 1 o 2 o 3 o 5 ”} = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$E_{(4)} \cup E_{(<4)} \cup E_{(d)} = \text{“ esce il numero 4 o esce un numero minore di 4 o un numero dispari ”} \\ = \text{“ esce 1 o 2 o 3 o 4 o 5 ”} \\ = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

pertanto

$$E_{(4)} \cup E_{(<4)} \cup E_{(d)} = \text{“ esce un numero minore o uguale di 5 ”} = E_{(\leq 5)}$$

$$E_{(\leq 5)} \cup E_{(p)} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ evento certo}$$

$E_{(\leq 5)}$ e $E_{(p)}$ eventi esaustivi

2.5) Arrivo del treno Roma – Napoli delle 16,30

$E =$ “ il treno Roma – Napoli arriva in orario” $=\{18\}$

$E_1 =$ “il treno non arriva” $= \{0\}$

$E \cup E_1 =$ “il treno arriva in orario o non arriva” $=\{0, 18\}$

L'evento

$E^c =$ “ **il treno Roma – Napoli non arriva in orario**” si verifica se si verifica uno degli eventi

$E_1 =$ “**il treno non arriva**”;

$E_2 =$ “**il treno arriva in ritardo**”

$E_3 =$ “**il treno arriva in anticipo**”.

Allora

$$E^c = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

2.3 PRODOTTO LOGICO O INTERSEZIONE O CONGIUNZIONE

Il Prodotto logico di due eventi A e B è l'evento che si verifica se e solo se si verifica ognuno degli eventi A e B .

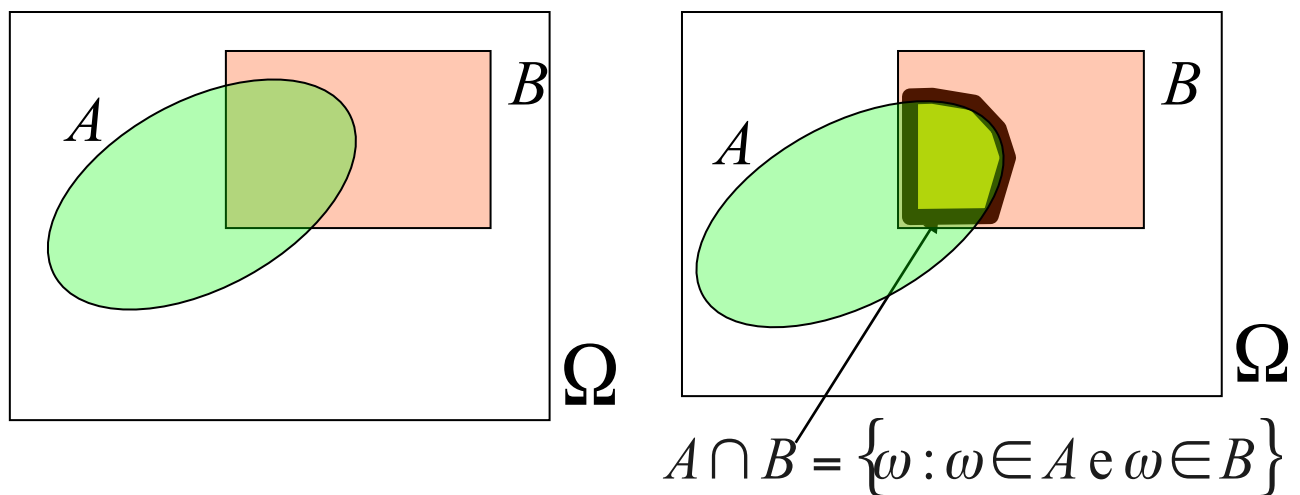
Il prodotto logico di A e B si indica con una delle seguenti scritte

$$AB \quad A \text{ e } B, \quad A \cap B$$

$AB = A \text{ e } B = A \cap B =$ "si verifica A e si verifica B "

Utilizzando la notazione insiemistica: AB si realizza se e solo se si realizza sia A che B e ciò è possibile se e solo se l'evento elementare che si realizza appartiene sia "all'insieme" A che "all'insieme" B e quindi alla loro intersezione; allora il prodotto logico AB coincide con l'intersezione insiemistica $A \cap B$.

Ciò giustifica la scrittura $A \cap B$ per indicare il prodotto logico



Legame dell' intersezione con l'unione e la negazione:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c.$$

Il prodotto logico è

- *commutativo*
- *associativo*

$$A \cap B = B \cap A, \\ ((A \cap B) \cap C) = A \cap (B \cap C)$$

e si può estendere a più eventi

$A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C =$ *evento che si verifica se si verifica si verifica ognuno degli eventi A, B, C*

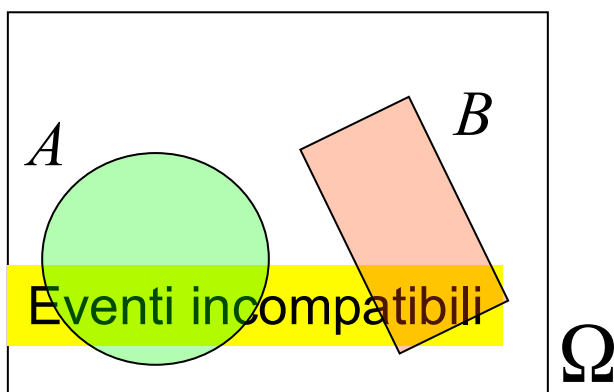
$\bigcap_{i=1}^n E_i = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n =$ *evento che si verifica se si verifica si verifica ognuno degli eventi E_1, E_2, \dots, E_n*

$\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i = E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n \cap \dots$ **intersezione numerabile di eventi.**

PRODOTTO LOGICO ED EVENTI INCOMPATIBILI

Due eventi si dicono **incompatibili** o **mutuamente esclusivi** se il loro prodotto logico è l'evento impossibile: *il verificarsi di un evento esclude il verificarsi dell'altro.*

A e B incompatibili se e solo se $A \cap B = \emptyset$



$$A \cap B = \emptyset$$

ESEMPI

2.6) Lancio di un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Se

$$E_{(4)} = \text{“ esce il numero 4 ”} = \{4\}$$

$$E_{(<4)} = \text{“ esce un numero minore di 4 ”} = \text{“ esce 1 o 2 o 3 ”} = \{1, 2, 3\}$$

$$E_{(d)} = \text{“ esce un numero dispari ”} = \text{“ esce 1 o 3 o 5 ”} = \{1, 3, 5\}$$

$$E_{(p)} = \text{“ esce un numero pari ”} = \text{“ esce 2 o 4 o 6 ”} = \{2, 4, 6\}$$

allora

$$E_{(<4)} \cap E_{(d)} = \text{“ esce un numero dispari minore di 4 ”} = \text{“ esce 1 o 3 ”} = \\ = \{1, 3\} = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\}$$

$$E_{(4)} \cap E_{(<4)} = \text{“ esce il numero 4 ed esce un numero minore di 4 ”} = \\ = \{4\} \cap \{1, 3, 5\} = \emptyset \quad \text{evento impossibile}$$

$E_{(4)}$ ed $E_{(<4)}$ **eventi incompatibili**

Poiché

$$E_{(p)} \cap E_{(d)} = \text{evento impossibile e } E_{(p)} \cup E_{(d)} = \text{evento certo}$$

$E_{(p)}$ e $E_{(d)}$ sono eventi incompatibili ed esaustivi

2.7) Arrivo del treno Roma – Napoli delle 16,30

E = “ il treno Roma – Napoli arriva in orario ”

E^c = “ il treno Roma – Napoli non arriva in orario ”

E_1 = “ il treno non arriva ”

E_2 = “ il treno arriva in ritardo ”

$$E^c \cap E_2 = \text{“ il treno arriva in ritardo ”} = E_2$$

$E \cap E_1 = \text{“ il treno arriva in orario e non arriva ”} \quad \text{evento impossibile}$

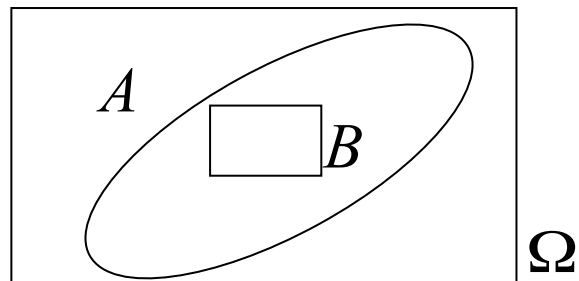
2.4 IMPLICAZIONE

Sia $B \neq \emptyset$

B implica A: ogni volta che si realizza B, si realizza anche A.

Utilizzando la notazione insiemistica: B implica A se e solo se ogni evento elementare ω appartenente a B (e che perciò verificandosi realizza B) appartiene anche a A (e quindi verificandosi realizza A); quindi

B implica A se e solo se B è incluso in A.



Per indicare che B implica A si usa una delle seguenti scritture:

$$B \Rightarrow A$$

$$B \subseteq A$$

ESEMPI

2.8) Lancio di un dado

$E_{(5)}$ = “ esce il numero 5”

$E_{(d)}$ = “ esce un numero dispari”

Se esce 5, esce un numero dispari e si realizza l'evento $E_{(d)}$, allora

$$E_{(5)} \Rightarrow E_{(d)}$$

D'altra parte: $E_{(5)} = \{5\} \subseteq \{1, 3, 5\} = E_{(d)}$.

2.9) Arrivo del treno Roma – Napoli delle 16, 30 (arrivo previsto 18)

A = “ il treno Roma – Napoli non arriva in orario” = $\Omega - \{\text{ore } 18\}$

E_2 = “il treno arriva in ritardo” = $\{x \in \Omega : x > \text{ore } 18\}$

$$E_2 \Rightarrow A$$

$$E_2 \subseteq A$$

Quadro su gli eventi, le operazioni sugli eventi e le corrispondenti notazioni insiemistiche

Ω spazio campionario	Ω insieme ambiente
ω = punto campionario = esito di una prova	ω = elemento dell'insieme
E evento	parte dell'insieme Ω
evento certo	insieme ambiente
evento impossibile	parte vuota \emptyset
\bar{E} negazione di E	complemento di E : insieme degli elementi di Ω non appartenenti ad E
A implica B	A è incluso in B : A è un sottinsieme di B
somma logica di A e B	unione $A \cup B$: è l'insieme costituito con gli elementi di A e quelli di B
Eventi esaustivi	Parti la cui unione è uguale a Ω
prodotto logico di A e B	intersezione $A \cap B$: è l'insieme costituito dagli elementi comuni ad A e B
A e B eventi incompatibili	A e B parti disgiunte : $A \cap B = \emptyset$

ESERCIZIO

Lancio di un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Considerati i seguenti eventi:

$$E_{(5)} = \text{“ esce 5 ”} = \{5\}$$

$$E = \text{“ esce un numero intero ”}$$

$$E_{(d)} = \text{“ esce un numero dispari ”} = \{1, 3, 5\}$$

$$E_{(p)} = \text{“ esce un numero pari ”} = \{2, 4, 6\}$$

$$E_{(\leq 3)} = \text{“ esce un numero } \leq 3 \text{ ”} = \{1, 2, 3\}$$

$$E_{(<5)} = \text{“ esce un numero minore di 5 ”} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E' = \text{“ esce 0 ”}$$

$$E'' = \text{“ esce 7 ”}$$

- Utilizzare la notazione insiemistica per descrivere E
- Individuare gli eventi certi, gli eventi semplici, gli eventi impossibili
- Determinare:
 - gli eventi contrari ad ognuno degli eventi elencati,
 - eventi che implicano altri eventi,
 - le collezioni di eventi esaustivi,
 - le coppie di eventi incompatibili.

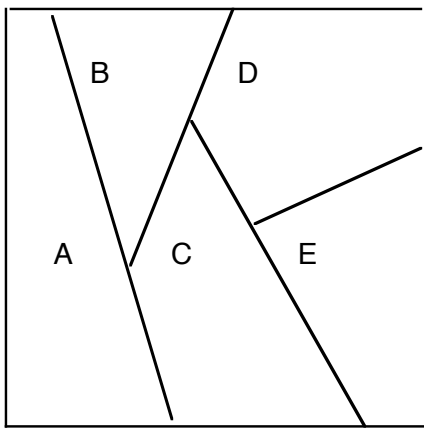
3. PARTIZIONE DELLO SPAZIO CAMPIONARIO

Ricordiamo che:

- due o più eventi si dicono **esaustivi** se la loro somma logica è uguale evento certo, cioè uno almeno degli eventi deve necessariamente verificarsi: $A \cup B = \Omega$;
- due eventi A e B si dicono **incompatibili** se il loro prodotto logico è l'evento impossibile, cioè il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro: $A \cap B = \emptyset$.

Una partizione dello spazio campionario Ω è una collezione di eventi, esaustivi e a due a due incompatibili, nessuno dei quali sia l'evento impossibile.

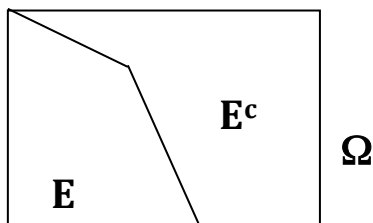
Gli elementi di una partizione di Ω si dicono costituenti di Ω



$\{A, B, C, D, E\}$ partizione di Ω Ω A, B, C, D, E costituenti di Ω

Se $E \neq \emptyset$ ed $E^c \neq \emptyset$ Ω allora $\{E, E^c\}$ partizione di Ω

E, E^c costituenti di Ω



Gli eventi semplici di uno spazio campione sono esaustivi e a due a due incompatibili

ESEMPI

3.1) Lancio del dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sono esaustivi e incompatibili i due eventi:

$$E_{(d)} = \text{“esce un numero dispari”} = \{1, 3, 5\}$$

$$E^c = E_{(p)} = \text{“esce un numero pari”} = \{2, 4, 6\}$$

o i due eventi:

$$E^* = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E^\wedge = \{5, 6\} = E^{*c}$$

allora

$$\{E_{(d)}, E_{(p)}\} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\} \text{ partizione di } \Omega$$

$$\{E^*, E^\wedge\} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\}\} \text{ partizione di } \Omega.$$

Sono esaustivi e a due a due incompatibili gli eventi:

$$E_{(d)} = \text{“esce un numero dispari”} = \{1, 3, 5\},$$

$$E^\circ = \text{“esce un numero pari minore di 6”} = \{2, 4\},$$

$$E_{(6)} = \text{“esce 6”} = \{6\}$$

in quanto ogni evento è diverso dall'evento certo e dall'evento impossibili e

$$E_{(d)} \cap E^\circ = \emptyset \quad E_{(d)} \cap E_{(6)} = \emptyset \quad E^\circ \cap E_{(6)} = \emptyset$$

$$E_{(d)} \cup E^\circ \cup E_{(6)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega.$$

Allora

$$\{E_{(d)}, E^\circ, E_{(6)}\} \text{ partizione di } \Omega$$

$$E_{(d)}, E^\circ, E_{(6)} \text{ costituenti di } \Omega$$

Gli eventi semplici sono esaustivi e a due a due incompatibili

Posto infatti $E_{(i)} = \{i\}$, per $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$, risulta

$$E_{(i)} \cap E_{(j)} = \{i\} \cap \{j\} = \emptyset \text{ se } i \neq j \quad e \quad \{1\} \cup \{2\}, \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\} = \Omega$$

Quindi:

$$\{E_{(1)}, E_{(2)}, E_{(3)}, E_{(4)}, E_{(5)}, E_{(6)}\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$$

partizione di Ω

3.2) Arrivo del treno Roma – Napoli delle 16.30

Calcolato il tempo minimo m di percorrenza del tratto Roma-Napoli lo spazio campionario Ω è fatto da tutti i tempi di arrivo possibili che seguono il tempo minimo e dalla cifra 0 con la quale indicare il caso che il treno non arrivi.

Gli eventi

$E_{(18)}$ = "il treno arriva alle 18" = {18}

$E_{(>18)}$ = "il treno arriva dopo le 18" = { $x \in \Omega: x > 18$ }

$E_{(<18)}$ = "il treno arriva in anticipo cioè prima delle 18" = { $x \in \Omega: m \leq x < 18$ }

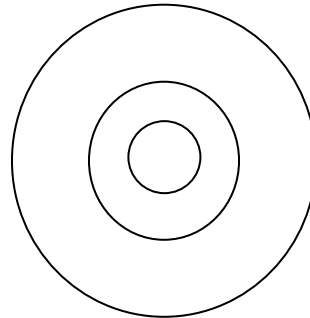
$E_{(0)}$ = "il treno non arriva" = {0}

sono **costituenti di Ω** perché esaustivi, non nulli e a due a due incompatibili

4. ALGEBRA e σ - ALGEBRA DI EVENTI

Sia Ω lo spazio campionario costituito dagli esiti possibili di una prova.

L'insieme $P(\Omega)$ rappresenta l'insieme di tutti gli eventi possibili: esso è talora troppo ampio e contiene eventi che non sono di interesse. Ad esempio nel lancio di una freccia su di un disco non è di interesse che la freccia cada in un punto preciso del disco (evento semplice) quanto piuttosto in una zona precisa del disco.



Conviene allora restringersi a una collezione di eventi inclusa strettamente in $P(\Omega)$. Si considerano collezioni che contengono comunque l'evento certo e che siano chiuse rispetto alle operazioni di complementazione e di unione ed intersezione. Tali collezioni di eventi sono dette algebre di Boole

Definizione 1. Sia \mathcal{B} una collezione di eventi (insieme di parti di Ω).

\mathcal{B} è detta algebra di Boole se e solo se verifica gli assiomi:

a) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

b) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{B}$. □

Se \mathcal{B} è un algebra di Boole allora \mathcal{B} verifica anche le seguenti condizioni

c) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{B}$

d) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{B}$

-- Dimostriamo la verità delle asserzioni c) e d) nel caso che \mathcal{B} sia un algebra di Boole.

Sia $A \in \mathcal{B}$. Allora per a) anche $A^c \in \mathcal{B}$ e, per b): $A \cup A^c = \Omega \in \mathcal{B}$

Poichè $\Omega \in \mathcal{B}$, per a), anche $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{B}$

Infine, se $A, B \in \mathcal{B}$ allora $A^c, B^c \in \mathcal{B}$ e per b) $A^c \cup B^c \in \mathcal{B}$; da ciò segue che

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{B}$$

Nota 1. Se Ω è lo spazio campionario, esempi particolari di algebra di Boole sono:

- $\{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{P}(\Omega)$ insieme di tutti gli eventi

Nota 2. Se \mathcal{B} è un'algebra di Boole allora da b) e d) segue che l'unione $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ e l'intersezione $E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n$ di un numero finito di eventi di \mathcal{B} appartiene ancora a \mathcal{B}

Definizione 2. Sia \mathcal{B} una collezione di eventi. \mathcal{B} è detta σ -algebra di Boole se e solo se verifica gli assiomi a) e b) (e quindi è una algebra di Boole) e l'unione

$\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ e l'intersezione $\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i$ numerabile di eventi di \mathcal{B} appartiene ancora a \mathcal{B} .

La sigma-algebra è una generalizzazione del concetto di algebra di eventi. Se ci si limita a utilizzare il concetto di algebra di eventi si può incorrere nello spiacevole inconveniente di non considerare eventi quali "prima o poi piove" legati al fenomeno "situazione metereologica". Infatti questo evento è traducibile in linguaggio insiemistico come insieme degli esiti "piove oggi" oppure "piove domani" oppure "piove dopodomani" oppure Ovvero l'evento è descritto dall'unione di infiniti eventi semplici. Per poter considerare eventi del tipo ora indicato si introduce la nozione di sigma-algebra sopra esposta.

Nota 3. *Utilizzando una collezione di eventi dello spazio campionario si può costruire una algebra di eventi attraverso le operazioni di unione, intersezione e complemento.*

Esempio

4.1) Lancio di un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Sigma = \{\{1, 3, 5\}\}$$

L'unico evento costituente Σ è $E_{(d)} = \{1, 3, 5\}$.

Costruiamo:

1. il complemento di $E_{(d)}$: $E_{(p)} = \{2, 4, 6\}$.
2. l'unione $E_{(d)} \cup E_{(p)} = \Omega$,
3. l'intersezione $E_{(d)} \cap E_{(p)} = \emptyset$ che coincide con il complemento $-(E_{(d)} \cup E_{(p)})$.

Consideriamo l'insieme costituito da tutti gli eventi suindicati; otterremo

$\mathcal{B} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ che è un'algebra di Boole (in quanto verifica le condizioni a) e b)).

Diremo che \mathcal{B} è l'algebra generata da Σ .

Quale è l'algebra generata da $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$?

5. EVENTI CONDIZIONATI

Ω spazio campionario

E, H eventi

$E|H$ (*E dato H*): affermazione *che può essere vera o falsa* (cioè della cui veridicità si decide) sotto l'assunzione che H è vero

$$E | H \rightarrow \begin{cases} \text{Vero: se, essendo vero } H, \text{ è vero } E; \\ \text{Falso: se, essendo vero } H, \text{ è falso } E; \\ \text{Indeterminato: nessun valore logico se } H \text{ è falso;} \end{cases}$$

$E|H$ è detto **evento E condizionato ad H**

H è detto **evento condizionante**

Nota : per definizione

$E|H$ è vero se e solo se $E \cap H$ è vero,

$E|H$ è falso se $E \cap H$ è falso ma H è vero.

ESEMPIO:

5.1) Lancio di un dado

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ spazio campionario

Consideriamo l'evento

$$E = E_{(<5)} = \text{“ esce un numero minore di 5 ”} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$E_{(<5)}$ *si puo' realizzare in quattro modi diversi*: infatti quattro (sui sei possibili) sono gli esiti favorevoli a $E_{(<5)}$.

Supponamo di trovarci ora nella seguente situazione:

α) *il dado è truccato in modo che esce di sicuro un numero dispari cioè*

$$H = E_{(d)} = \text{“ esce un numero dispari ”} = \{1, 3, 5\}$$

si realizza di sicuro ma non sappiamo in che modo;

Cosa è cambiato?

- gli “*esiti possibili*” sono ora **1, 3, 5**, quelli costituendo l'evento

$$H = E_{(d)} = \{1, 3, 5\}$$

che è ora **lo spazio campione;**

- l'evento $E = E_{(<5)}$ **va sostituito con l'evento condizionato $E_{(<5)} | H$** e, poiché $E_{(<5)}$ contiene solo due dispari, **1 e 3**, *gli esiti favorevoli a $E_{(<5)} | H$* sono solo due (sui tre possibili) *e sono quelli costituenti l'evento $E_{(<5)} \cap H = \{1, 3\}$* ;

Consideriamo ora l'evento

$$E_{(p)} = \text{“ esce un numero pari ”} = \{1, 2, 4\}$$

$E_{(p)}$ *si puo' realizzare in tre modi diversi*: tre (sui sei possibili) sono gli esiti favorevoli a $E_{(p)}$.

Sotto l'assunzione α) *però* l'evento $E' = E_{(p)}$ **va sostituito con l'evento condizionato $E_{(p)} | H$** e, poiché $E_{(p)}$ non contiene dispari ($E_{(p)} \cap H = \emptyset$), **non c'è nessun esito favorevole sui tre possibili**: $E_{(p)} | H$ è l'evento impossibile, cioè è sempre falso.

5.2) esempio attraverso rappresentazione grafica

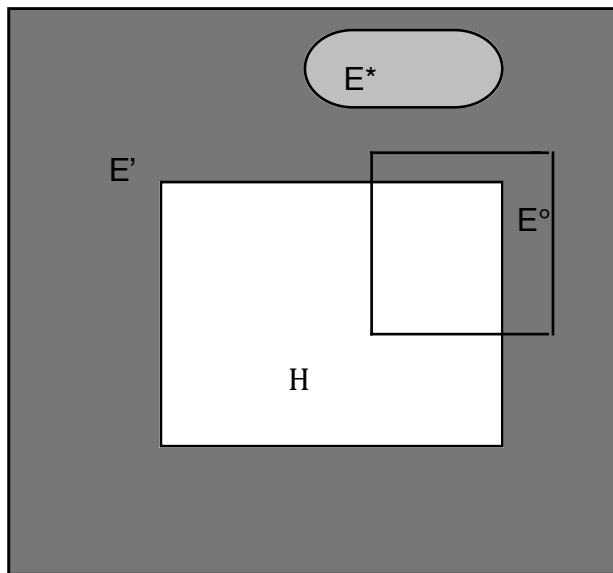
Ω = spazio campionario **H** evento

Sappiamo che **H** si è verificato (o si verificherà)

$E|H$ evento **E** condizionato da **H** “**E** dato **H** “

H evento condizionante

Ω



Consideriamo gli eventi E° ed E^* e determiniamo gli eventi condizionati $E^\circ|H$ ed $E^*|H$

$\Omega \leftarrow H$ **H nuovo spazio campionario**

$E^\circ \leftarrow = E^\circ|H = E \cap H$ **parte di H**

$E^* \leftarrow = E^*|H = E^* \cap H = \emptyset$ **evento impossibile**

5.3) Arrivo del treno Roma – Napoli delle 16.30

Calcolato il tempo minimo m di percorrenza del tratto Roma-Napoli lo spazio campionario Ω è fatto da tutti i tempi di arrivo possibili che seguono il tempo minimo e dalla cifra 0 con la quale indicare il caso che il treno non arrivi.

$$\Omega = \{0\} \cup [m, +\infty[$$

Consideriamo gli eventi:

$E_1 =$ “ *il treno arriva in anticipo*”

$E_2 =$ “ *il treno arriva puntuale*”

$E_3 =$ “ *il treno arriva in ritardo*”

$E_4 =$ “*il treno non arriva*”

Sappiamo che

i) $H =$ “*treno non arriva in ritardo*” si realizza

e osserviamo che

$$H = E_1 \cup E_2 \cup E_4$$

In quanti modi si realizza l'evento $E =$ “ *il treno arriva*” ?

Senza l'informazione i) l'evento E si può realizzare in ognuno dei seguenti modi:

il treno arriva in anticipo, il treno arriva puntuale, il treno arriva in ritardo. Quindi

$$E = \text{“ il treno arriva”} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

Con l'informazione i), l'evento $E =$ “ *il treno arriva*” si trasforma nell'evento condizionato $E|H$ che si realizza se si realizza uno dei seguenti due eventi: *arriva in anticipo* o *arriva puntuale*; quindi :

$$\text{da } E \text{ a } E|H = E_1 \cup E_2 = (E_1 \cup E_2 \cup E_3) \cap (E_1 \cup E_2 \cup E_4) = E \cap H$$