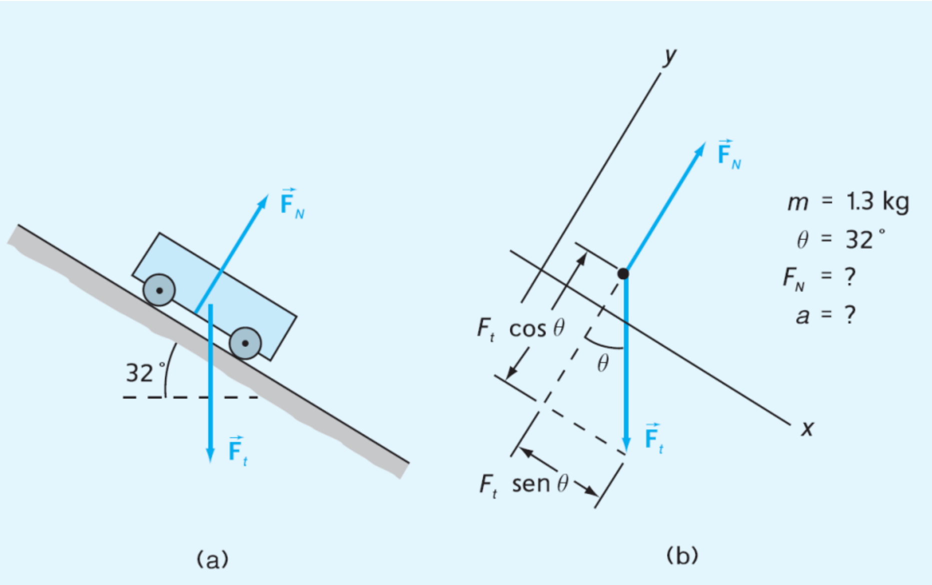
Applicazioni della dinamica, Lavoro ed energia

Prof. Francesco Di Capua

a.a. 2022/23

Esercizio sul piano inclinato



Un carrello (m=1.3 kg) sta su un piano inclinato (θ=32°)

Determinare:

1) l'accelerazione del carrello
2) La Forza esercitata dalla superficie del piano inclinato
3) la velocità del carrello e la distanza percorsa dopo un tempo t=1.5s

$$\sum F_x = mgsen(\theta) = ma_x \qquad a_x = a = gsen(\theta) = 9.8(m/s^2)sen(32°) = 5.40m/s^2$$

$$\sum F_y = F_N - mg\cos(\theta) = 0 \qquad F_N = mg\cos(\theta) = 1.3(kg)9.8(m/s^2)\cos(32°) = 10.6N$$

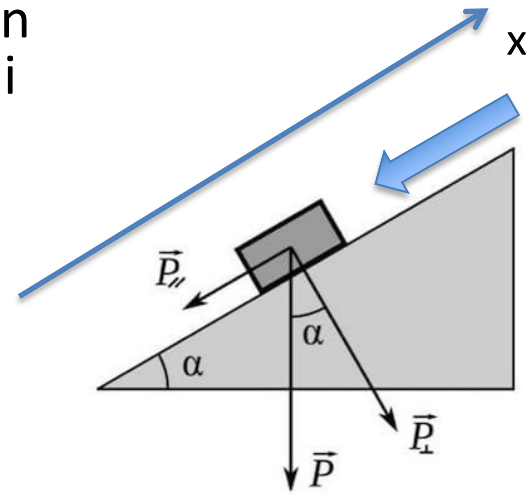
Velocità iniziale =0 (partenza da fermo)

$$v_c(t) = 0 + at \qquad v_c(t = 1.5s) = 5.40(m/s^2)\cdot 1.5s = 8.1m/s$$

$$x_c(t) = 0 + 0 + \frac{1}{2}at^2 \qquad x_c(t = 1.5s) = \frac{1}{2}5.40(m/s^2)\cdot (1.5s)^2 = 6.1m$$

Blocco in caduta da un piano inclinato

- Un blocco di 3kg parte da fermo dalla sommità di un piano inclinato di α=30° e scorre per una distanza di 2.0 m verso il basso in un tempo t=1.5 s. Determinare:
  - L 'accelerazione del blocco
  - La Forza di attrito agente sul blocco
  - Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco ed il piano
  - La velocità del blocco dopo aver scivolato 2 m



Accelerazione del blocco

Il blocco con il piano ha un attrito per cui la sua accelerazione non è data dal termine gsenα ma c'è anche il contributo (negativo) della forza di attrito

Dai dati del problema
$$x_f = 2m = x_i + v_{in}t_f + \frac{1}{2}at_f^{\,2} = 0 + 0 - \frac{1}{2}a(1.5s)^2$$

$$a = \frac{x_f - x_i}{t_f^{\,2}} = \frac{2m}{(1.5s)^2} = 1.78 m/s^2$$

Blocco in caduta da un piano inclinato(2)

Determiniamo la forza di attrito agenti sul blocco

$$\sum Forze = ma$$

$$\sum F_x = P_x - F_k = mgsen\alpha - F_k = ma$$

$$F_k = mgsen\alpha - ma \qquad F_k = m(gsen\alpha - a)$$

$$F_k = (3kg)(9.8m/s^2 sen 30° - 1.78m/s^2) = 9.37N$$

Coefficiente di attrito tra il blocco ed il piano

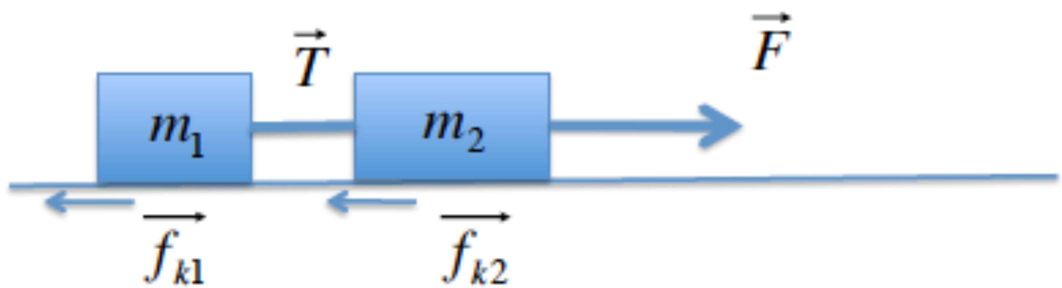
$$F_k = \mu F_N \qquad F_N = mg\cos\alpha = (3kg) \times 9.8m/s^2 \times \cos 30° = 25.46N$$

$$\mu = \frac{F_k}{F_N} = \frac{9.37N}{25.5N} = 0.368$$

Velocità del blocco dopo aver percorso 2m

$$v_f = v_{in} + at = 0 + (1.78m/s^2)(1.5s) = 2.67m/s$$

Blocchi su un piano orizzontale



- Due blocchi (m_1=12kg ed m_2=18kg) sono collegati da una fune e sono trascinati da una forza orizzontale F=68 N. Il coefficiente di attrito di entrambi I blocchi e la supeficie è μ=0.1

  Determinare:

  - L'accelerazione di tutto il sistema

  - La tensione T del filo

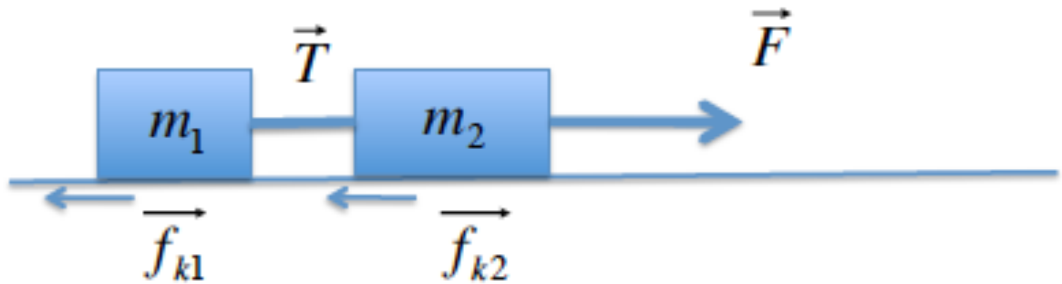
Per m_1 $$\sum F_x = T - f_{k1} = m_1 a$$

$$f_{k1} = \mu F_N = \mu m_1 g \qquad f_{k1} = (0.1)(12kg)(9.8m/s^2) = 11.8N$$

Per m_2 $$\sum F_x = F - T - f_{k2} = m_2 a$$

$$f_{k2} = \mu F_N = \mu m_2 g \qquad f_{k2} = (0.1)(18kg)(9.8m/s^2) = 17.6N$$

Blocchi su un piano orizzontale(2)



Sommando le due equazioni per m1 ed m2

$$\sum F_x = T - f_{k1} = m_1 a$$
$$\sum F_x = F - T - f_{k2} = m_2 a$$

$$F - T - f_{k2} + T - f_{k1} = m_2 a + m_1 a$$

$$F - f_{k2} - f_{k1} = a(m_2 + m_1)$$

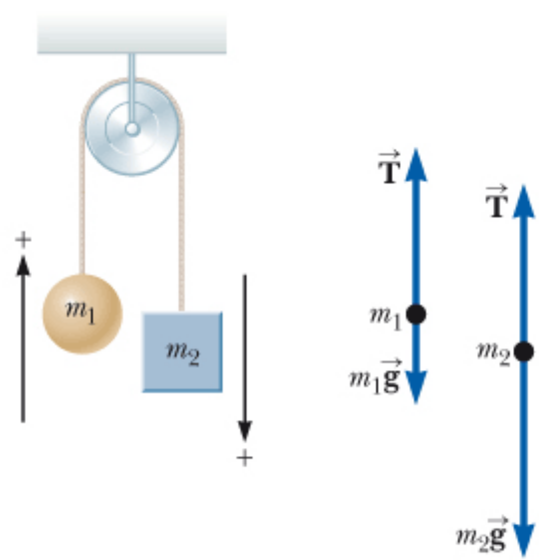
$$a = \frac{F - f_{k2} - f_{k1}}{m_2 + m_1} = \frac{68N - 17.6N - 11.8N}{18kg + 12kg} = 1.29 m/s^2$$

Usando la prima equazione

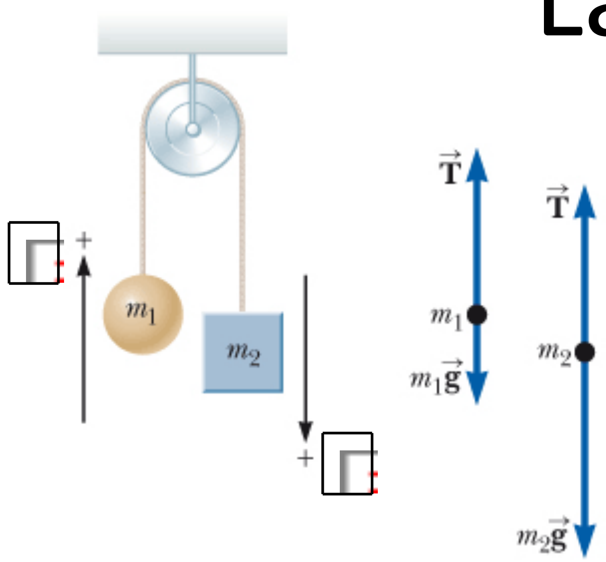
$$T = f_{k1} + m_1 a = (11.8 + 12(1.29))N = 27.2N$$

Macchina di Atwood

- Si tratta di una carrucola ideale: essa è costituita da due oggetti di massa m_1 ed m_2 connessi da un filo inestensibile di massa trascurabile e posti su una carrucola
- La carrucola è considerata di massa nulla e priva di attrito
- La tensione **T** del filo ai due lati della carrucola è la stessa



La macchina di Atwood



Note le due masse, determinare l'accelerazione dei due corpi e la tensione della fune

Nel risolvere questo problema si deve tenere conto che se si assume positiva la direzione del moto della massa m_1 quando questa sale, allora si deve considerare positiva la direzione in cui m_2 scende

Su m1: $$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a$$

Su m2: $$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a$$

Sommando le due equazioni

$$-m_1 g + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$
$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2)$$

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g$$

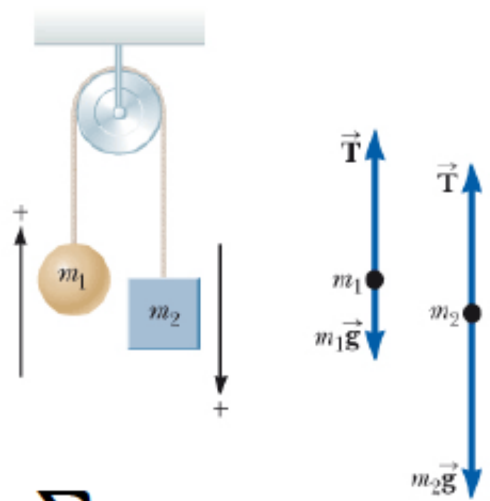
Dall'espressione ottenuta per a

$m_2 > m_1$ $\quad a > 0$ **m1 sale ed m2 scende**

$m_1 > m_2$ $\quad a < 0$ **m1 scende ed m2 sale**

Sostituendo l'accelerazione a in una delle due equazioni si ottiene la tensione T

La macchina di Atwood



Le due masse sono legate dal filo e le intensità delle forze esercitate dal filo sulle due masse sono lo stesse: le accelerazioni subite dalle due masse sono uguali

$$a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g$$

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a$$

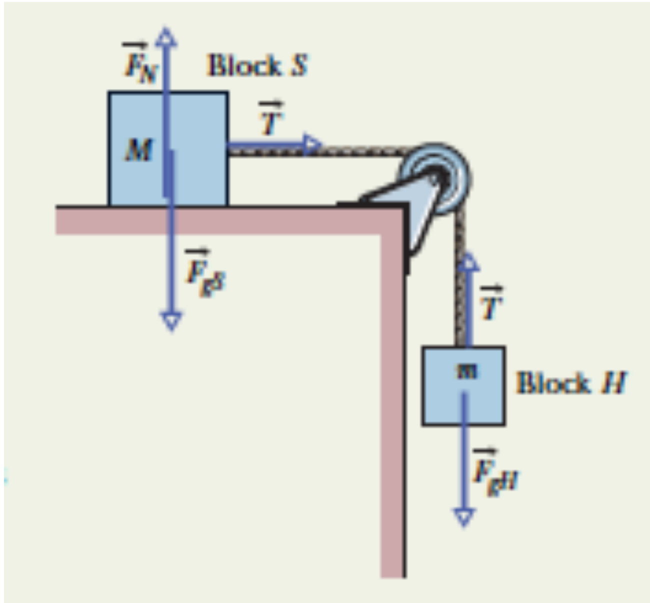
$$T = m_1(g + a) \qquad T = m_1\left(g + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)g\right) \qquad T = \left(\frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)g$$

$$m_1 = m_2 = m \qquad a = 0 \qquad T = \left(\frac{2m^2}{2m}\right)g = mg$$

$$m_2 >> m_1 \qquad a \approx \frac{m_2}{m_2}g = g \qquad T \approx \left(\frac{2m_1m_2}{m_2}\right)g = 2m_1 g$$

T molto piccola

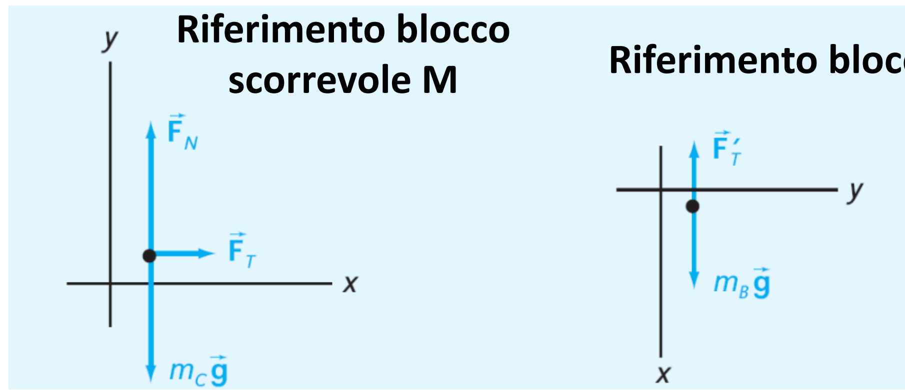
Due blocchi collegati alla puleggia



Blocco di massa M=3.3 Kg che scorre orizzontalmente

Secondo blocco di massa m=2.1 Kg che libero di muoversi verticalmente

Determinare l'accelerazione del blocco scorrevole M e la tensione T del filo



Per il blocco scorrevole di massa M $\sum F_x = T = Ma_x = Ma$

Per il blocco appeso m $\sum F_x = F_g - T = ma$

$$mg - T = ma$$

Le intensità delle forze esercitate dalla tensione T sulle due masse sono lo stesse: le accelerazioni subite dalle due masse sono uguali

$$T = Ma$$

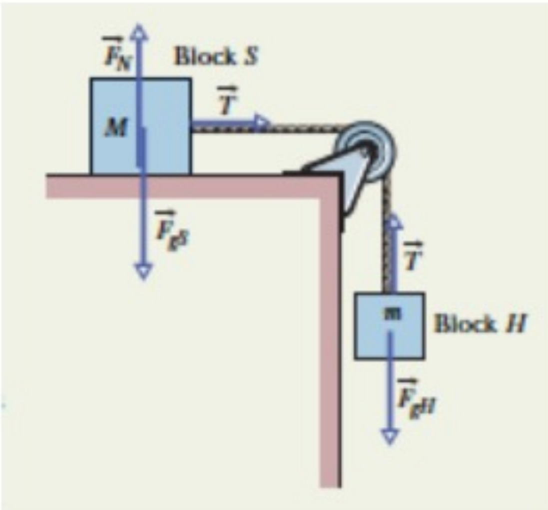
$$T = mg - ma = m(g - a)$$

$$Ma = m(g - a)$$

$$a(M + m) = mg$$

$$\boxed{a = \frac{m}{m + M} g}$$

Due blocchi collegati alla puleggia



Per determinare la tensione della corda sostituiamo in $T = Ma$

$$a = \frac{m}{m+M} g \qquad T = \frac{Mm}{m+M} g$$

Studio dei casi limite

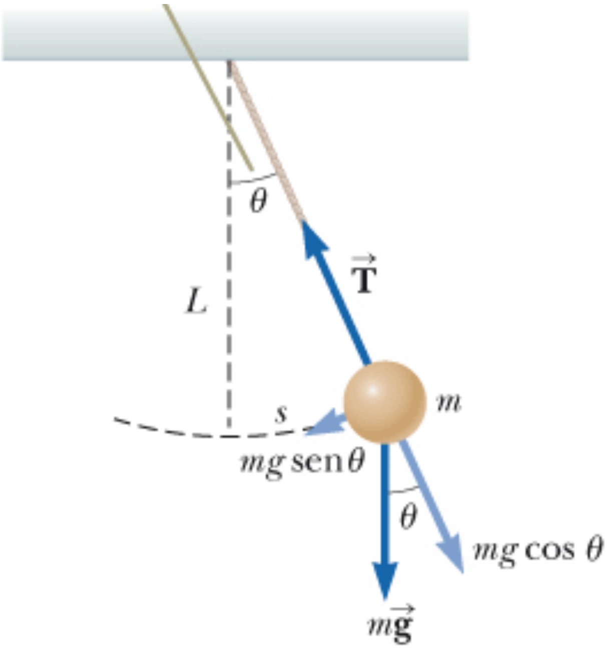
$m << M \Rightarrow a \approx \frac{m}{M} g \approx 0 \quad T \approx \frac{Mm}{M} g = mg$ **T molto piccola**

$m >> M \Rightarrow a \approx \frac{m}{m} g = g \quad T \approx \frac{Mm}{m} g = Mg$ **T molto piccola**

$m = M \Rightarrow a = \frac{m}{2m} g = \frac{g}{2} \quad T = \frac{m^2}{2m} g = \frac{mg}{2}$

N.B.: La tensione T sulla fune è sempre ≤ mg

Pendolo semplice

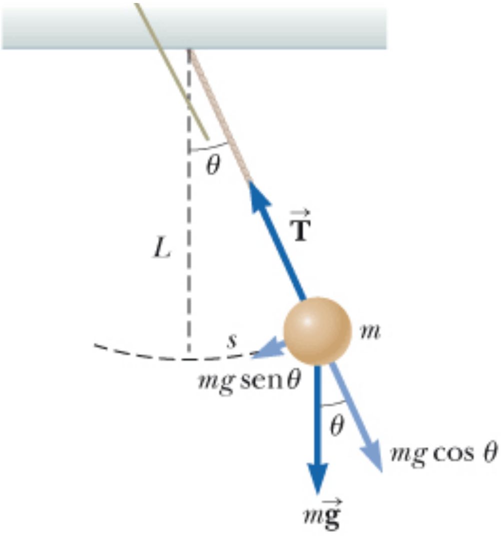


- Un punto materiale di massa m sospeso attraverso un filo di lunghezza L
- La forza T esercitata dal filo è equilibrata dala forza di gravità
- Se si fa oscillare la sferetta esiste una componente tangenziale (lungo l'arco della circonferenza) della forza pari a –mgsen(θ)
- La forza di gravità agisce come forza di richiamo verso la posizione di equilibrio

$$F_t = ma_t \Rightarrow -mgsen\theta = ma_t \Rightarrow -gsen\theta = a_t$$

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -gsen\theta$$

Pendolo semplice(2)



$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g sen\theta \qquad s = L\theta$$

$$\frac{d^2(L\theta)}{dt^2} = -g sen\theta$$

$$L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g sen\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} sen\theta$$

Equazione del moto oscillatorio: esempio di una molla

$$\frac{d^2x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Per il pendolo noi abbiamo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}sen\theta$$

Per piccole oscillazioni (per piccoli valori di θ)

$$sen\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{L}\theta$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Il periodo di oscillazione non dipende dalla massa

Determinazione di g

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

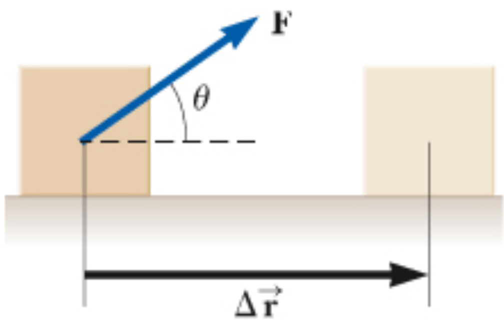
- Misure precise del periodo di oscillazione di un pendolo, consentono di effettuare una stima di g
- Misure molto precise consentono di scoprire variazioni locali di g dovute a variazioni della densità degli strati superficiali della terra, il metodo è usato per individuare giacimenti di risorse naturali

Concetti di Lavoro ed Energia

- Lavoro ed Energia sono due concetti strettamente connessi
- Il Lavoro è un **trasferimento di energia che viene compiuto attraverso una forza**: applicare una forza ad un corpo che ne fa variare la velocità significa compiere un lavoro che fa aumentare energia (cinetica) al corpo
- Il lavoro è strettamente collegato allo spostamento provocato: se si applica una forza ad una parete, pur facendo molta fatica, se la parete non si muove il lavoro compiuto è nullo

Concetto di Lavoro

- Si consideri un oggetto sottoposto ad uno spostamento **Δr** sotto l'azione di una forza costante **F**



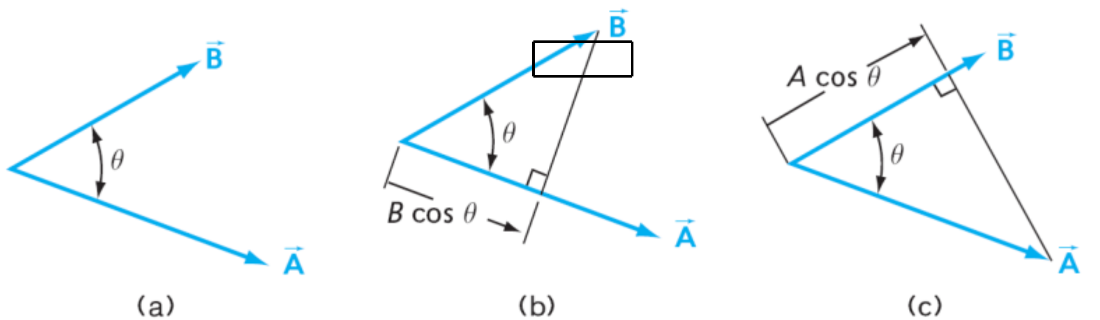
$$W = F\Delta r\cos(\theta)$$

- Il lavoro **W** svolto da un agente che esercita una forza costante su un sistema è il prodotto del modulo della forza F, del modulo dello spostamento Δr e il coseno dell'angolo compreso tra forza e spostamento
- Il lavoro è l 'energia scambiata tra due sistemi sotto l'azione di una forza quando un oggetto subisce uno spostamento per azione della forza e la direzione della forza ha una componente non nulla rispetto allo spostamento
- Il Lavoro è una grandezza scalare ed ha le dimensioni del [N][m] e si esprime in Joule (J).

Prodotto scalare

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = F \Delta r cos(\theta)$$

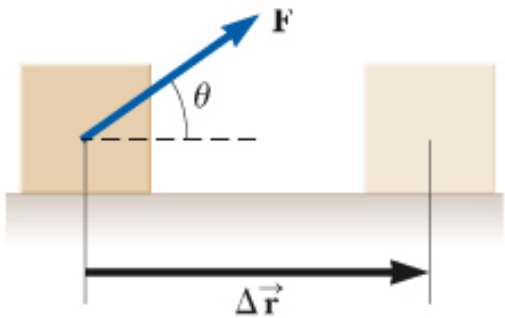
Il prodotto scalare può essere interpretato geometricamente come la proiezione di un vettore sull'altro moltiplicato l'altro vettore stesso

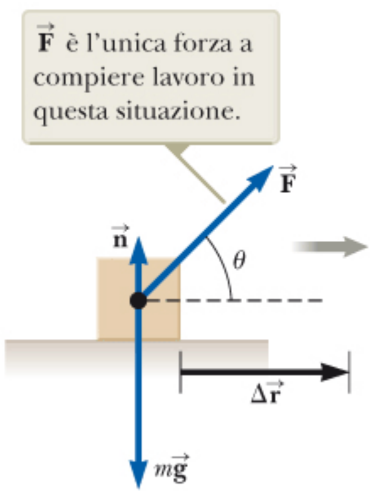


In termini delle singole componenti x,y,z, il prodotto scalare si può scrivere:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = F_x \Delta_x + F_y \Delta_y + F_z \Delta_z$$

Concetto di Lavoro

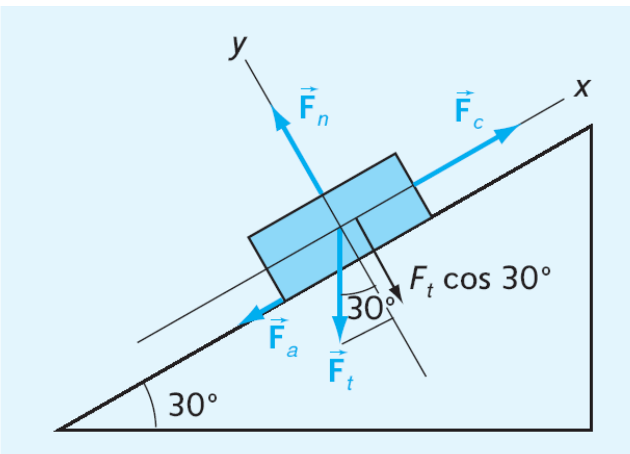




- Affinchè venga compiuto del lavoro da una forza su un corpo, questo deve muoversi sotto l'azione della forza
- **Se la forza è perpendicolare allo spostamento il lavoro è nullo**
- Il segno del lavoro dipende dalla direzione di F rispetto alla spostamento, se la componente di F si trova nello stesso verso dello spostamento allora il lavoro è positivo. Viceversa se Fcosθ è nel verso opposto allora W è negativo
- Se Forza e Spostamento sono paralleli allora $W = F\Delta r$

Lavoro (esempio)

- Se su un sistema sono presenti più forze, si può calcolare il lavoro complessivo compiuto separatamente
- Consideriamo una cassa di m=48 kg tirata da una corda con tensione costante F_c=540N per una distanza di 8m. Sia μ_k=0,40 il coefficiente di attrito dinamico. Si determini il lavoro di tutte le forze che agiscono sulla cassa



$$F_c = 540N$$
$$F_t = mg = (48kg)(9.81m/s^2) = 471N$$
$$F_N = mg\cos(\theta) = (48kg)(9.81m/s^2)\cos(30°) = 408N$$
$$F_a = \mu_k F_N = (0,4)(408N) = 163N$$

Applichiamo la definizione di Lavoro ad ogni singola forza

$$L = F\Delta r\cos(\theta) = \vec{F}\cdot\vec{\Delta r}$$

$$L_c = (540N)(8.0m)\cos(0°) = 4320J$$

Lavoro applicato dalla corda nella stessa direz. dello spostamento

$$L_t = (471N)(8.0m)\cos(120°) = -1884J$$

Lavoro negativo della forza peso: angolo>90°

$$L_N = (408N)(8.0m)\cos(90°) = 0$$

Lavoro nullo: forza perpendicolare allo spostamento

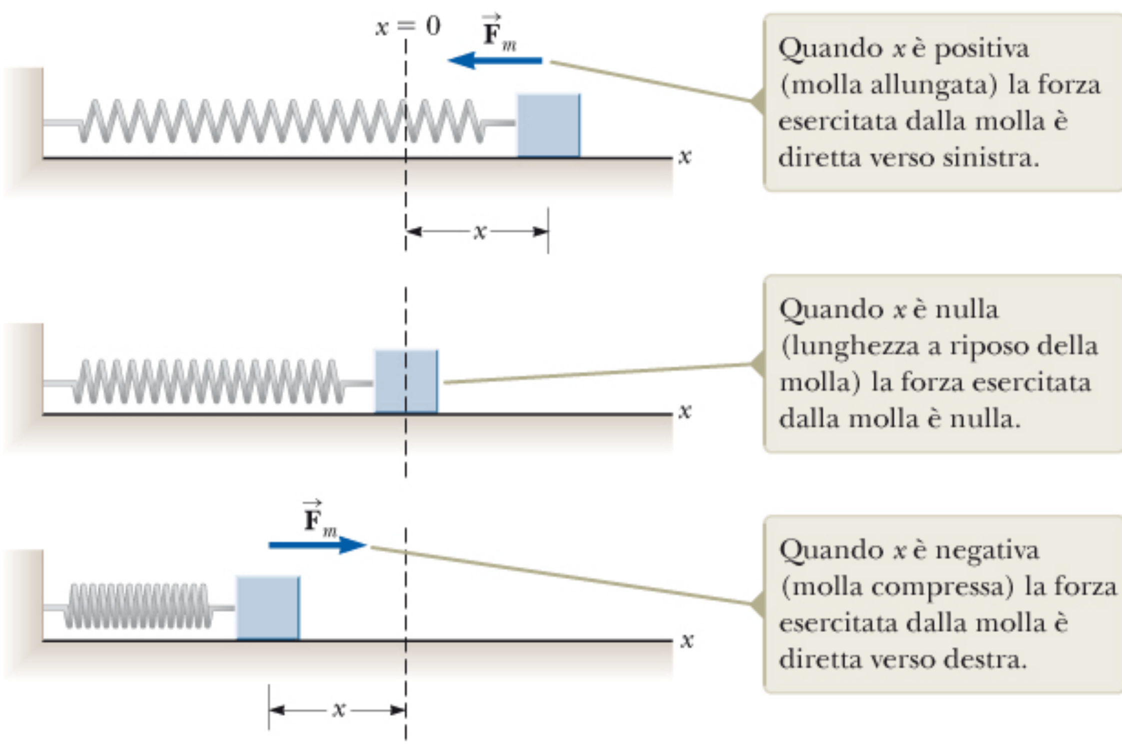
$$L_a = (163N)(8.0m)\cos(180°) = -1304J$$

Lavoro negativo: la forza di attrito si oppone allo spostamento

Lavoro svolto da una forza variabile (la molla)

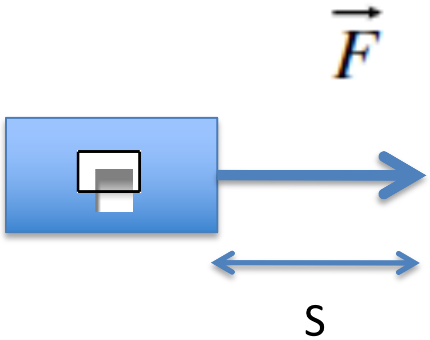
Blocco collegato ad una molla: se la molla è compressa o allungata rispetto alla sua posizione di equilibrio la molla esercita una forza sul blocco

$$F = -kx$$ **Legge di Hooke**



- La forza di una molla su un blocco varia con lo spostamento del blocco dalla sua posizione di equilibrio

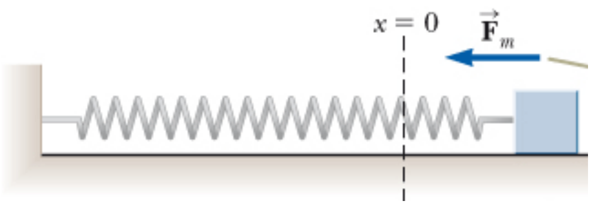
Lavoro per forze variabili



$$L = F \cdot S$$

Forza costante lungo lo spostamento

$$F = -kx$$

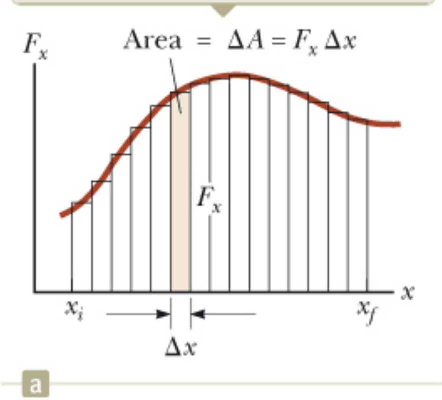


La forza non è costante lungo lo spostamento
In ogni posizione x assume un valore diverso (-kx)

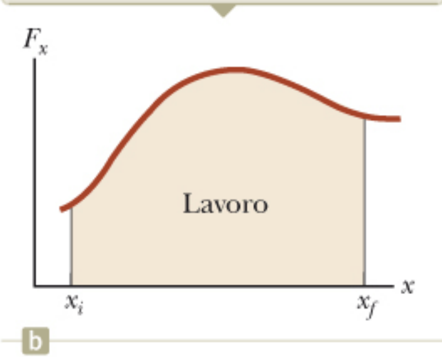
$$L = ?$$

Lavoro svolto da una forza variabile

Il lavoro totale per lo spostamento da x_i ad x_f è approssimativamente dato dalla somma delle aree di tutti i rettangoli.



Il lavoro fatto dalla componente F_x della forza variabile agente sulla particella mentre si muove da x_i ad x_f è dato *esattamente* dall'area sotto la curva.



- Quando ci troviamo nel caso di una forza che dipende dalla posizione, il lavoro sull'intero spostamento può essere approssimato, suddividendo lo spostamento totale in un gran numero di spostamenti molto piccoli

$$W_1 = F_x \Delta x \qquad W_{tot} = \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

- Immaginando di effettuare il calcolo su una sequenza sempre maggiore di intervalli aventi lunghezza sempre più piccola

$$W_{tot} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x) \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx$$

Il lavoro è l'integrale (area sotto la curva) della Forza rispetto allo Spostamento

Lavoro: integrale della forza rispetto allo spostamento

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$

- Si consideri una forza costante che agisce su un blocco nella stessa direzione del moto

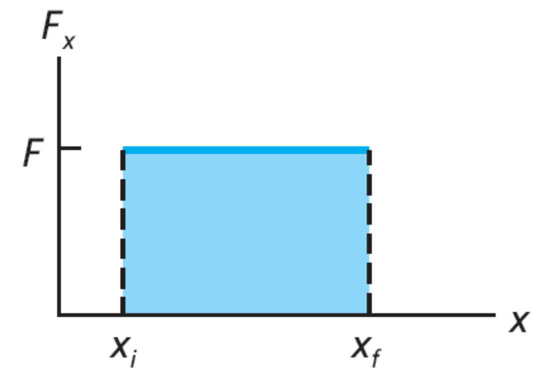


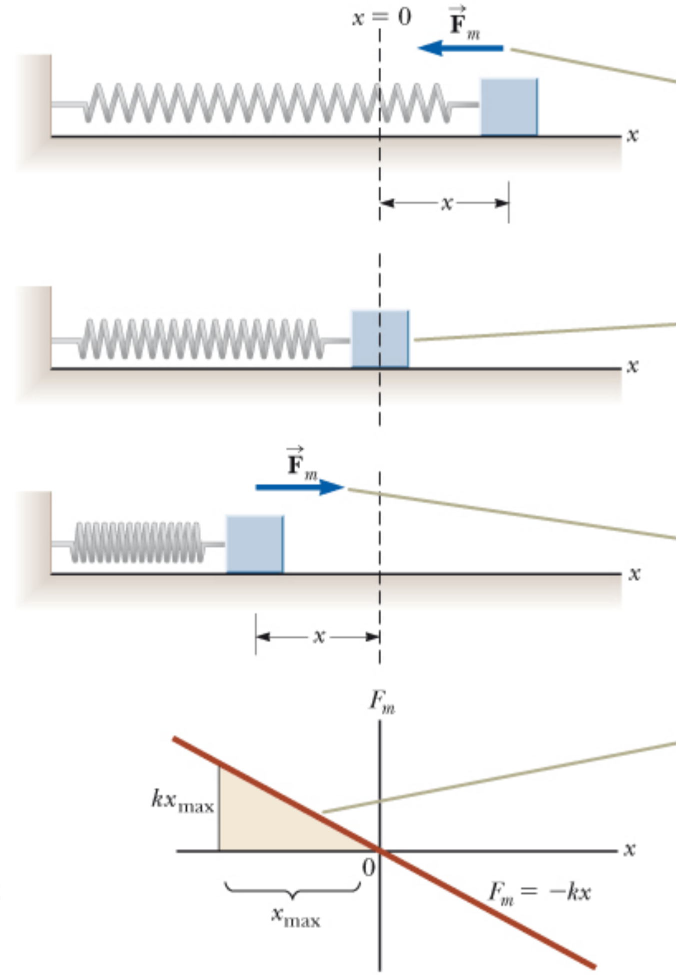
Figura 8.7
Una forza costante compie lavoro su un corpo. Il lavoro compiuto è pari all'area del rettangolo, $W = F(x_f - x_i)$.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx = \int_{x_i}^{x_f} F dx = F\int_{x_i}^{x_f} dx = F(x_f - x_i)$$

- Si ritrova la definizione di lavoro che abbiamo dato all'inizio, il risultato è la forza per lo spostamento

Lavoro svolto da una molla

$$F_x(x) = -kx$$



Se comprimiamo una molla da x_i=0 a x_f=-x_{max}

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{0}^{-x_{max}} (-kx) dx = \frac{1}{2} k x_{max}^{\ 2}$$

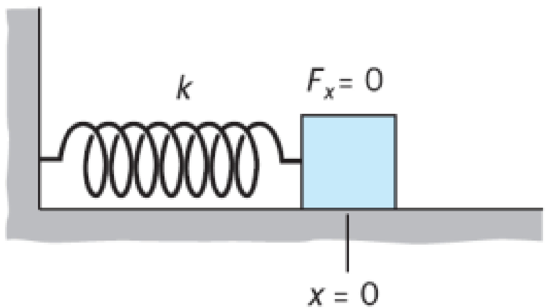
Per uno spostamento arbitrario

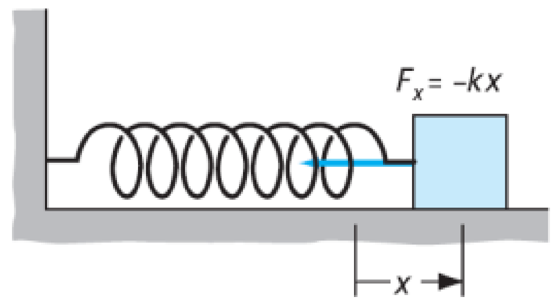
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} k x_i^{\ 2} - \frac{1}{2} k x_f^{\ 2}$$

$W = 0$ Se x_i=x_f oppure x_i=-x_f

Esempio:Lavoro necessario per allungare una molla

Un estremità di una molla orizzontale (k=80 N/m) è tenuta fissa mentre una forza esterna è applicata all'estremità libera allungandola da $x_A=0$ a $X_B=4$ cm. **Trovare il lavoro svolto dalla forza esterna**





$$W = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = 0 - \frac{1}{2}(80N/m)(0.04m)^2 = -0.064J$$

Trovare il lavoro addizionale per passare da $x_B=4$ a $X_C=8$ cm.

$$W = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_C^2 \qquad W = \int_{x_B}^{x_C} -kx\,dx = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_C^2$$

$$W = \frac{1}{2}(80N/m)(0.04m)^2 - \frac{1}{2}(80N/m)(0.08m)^2 \frac{1}{2}kx_B^2 = (0.064 - 0.256)J = -0.192J$$

N.B: il sistema compie percorsi di uguale lunghezza (4cm) ma il lavoro compiuto è diverso

Espressione generale lavoro

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Per una forza ed uno spostamento in tutte le direzioni dello spazio

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W = \int_i^f F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Lavoro della forza gravitazionale

$$F_y = -mg \qquad F_x = 0 \qquad F_z = 0$$

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{y_i}^{y_f} -mg = -mg(y_f - y_i)$$

Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale nello spostamento dalla posizione i alla posizione f è indipendente dal percorso seguito, ma dipende solo dalla differenza tra altezza finale ed iniziale

Il Lavoro è negativo per un corpo che sale a quota più elevata ($y_f > y_i$)

Il Lavoro è positivo per un corpo che sale a quota più bassa ($y_f < y_i$)

Energia

- L‘energia è una misura della capacità di un corpo o di un sistema fisico di compiere lavoro
- Si tratta di una grandezza fisica scalare associata allo stato di uno o più corpi
- Ogni processo fisico coinvolge l‘energia e trasferimenti (o trasformazioni) di energia
- Se una forza interviene a modificare lo stato di un sistema (ad esempio muovendolo) il numero associato all‘energia cambia
- L‘energia associata al moto di una particella si chiama energia cinetica
- Energia associata alla sua posizione -> energia potenziale
- Energia associata alla temperatura -> energia termica

Trasferimenti di energia

- L‘energia di un corpo può variare solo se avviene un trasferimento di energia dall‘ambiente circostante al corpo stesso
- Un trasferimento di energia avviene tramite forze che compiono un lavoro meccanico, scambi di calore,….
- In un sistema isolato (non avvengono scambi di energia con l‘esterno) l‘energia totale si conserva

Energia cinetica

- Energia associata allo stato di moto di un corpo
- Quanto più veloce è un corpo tanto maggiore è la sua energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

- L'energia cinetica ha le dimensioni di

  [Kg m^2/s^2]=[N m]=[Joule]
- In caso di più corpi l'energia cinetica è la somma delle energie cinetiche dei singoli corpi
- L'energia cinetica è presente anche a livello microscopico: l'energia termica di un gas è l'energia cinetica di atomi e molecole

Cinematica

$$\boxed{x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2}$$

$$\boxed{v_x = v_{x0} + a_x t}$$

$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{x0}\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x}\right)^2$$

$$\boxed{v_x^{\,2} = v_{x0}^{\,2} + 2a_x(x - x_0)}$$

Lavoro ed energia cinetica

Consideriamo una forza che agisce su un corpo di massa m determinando un movimento lungo l'asse x

$$F_x = ma_x$$

Supponiamo che la forza agisce sul corpo per uno spostamento d e modifica la velocità iniziale da v_0 a v. Vale la relazione:

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a_x d \qquad v^2 = v_0^{\,2} + 2\frac{F_x}{m}d$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^{\,2} = F_x d$$

$$K_f - K_0 = Lavoro$$

La variazione di energia cinetica è uguale al lavoro compiuto dalla forza

Teorema dell'energia cinetica

$$W_{tot} = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx$$

$$W_{tot} = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}dx = \int_{x_i}^{x_f} mv\,dv$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_i^{\,2}$$

$$W_{tot} = K_f - K_i = \Delta K$$

Quando è compiuto un Lavoro su un sistema e la sola variazione nel sistema è il modulo della sua velocità, Il lavoro risultante è dato dalla variazione di energia cinetica del sistema

Esempio

Un blocco di 6kg inizialmente fermo è tirato verso destra su una superficie orizzontale liscia da una forza costante F=12N.

Trovare la velocità del blocco dopo che si è spostato di 3m

$$W = F\Delta x = (12N)(3m) = 36J$$

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 36J}{6kg}} = 3.46m/s$$

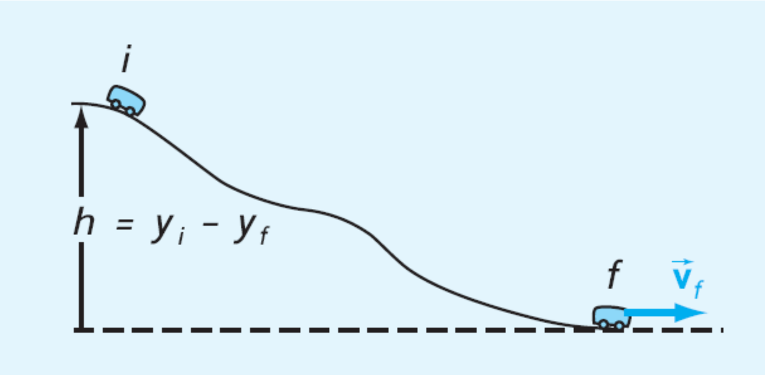
...come avrei fatto fino a ieri

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$x = 3m = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t$$

$$v_f = at$$

Esempio



- Consideriamo un vagoncino delle montagne russe che si muove sul suo binario
- Il vagoncino parte da fermo, vogliamo determinarne la velocità finale (si trascurino gli attriti)

- Usiamo l'approccio di determinare il lavoro totale sul vagoncino: su di esso agiscono due forze, la forza gravitazionale e la forza normale
- La forza normale in ogni punto della traiettoria è perpendicolare allo spostamento, per cui il contributo al lavoro è nullo
- La forza gravitazionale da invece un contributo al lavoro pari a:

$$L_{tot} = -mg(y_f - y_i) = mgh$$

Per il teorema dell'energia cinetica

$$L_{tot} = mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f^2 = 2gh \qquad v_f = \sqrt{2gh}$$

- N.B.: la velocità finale raggiunta è indipendente dalla forma del binario
- Il tempo per raggiungere lo stato finale dipende dalla forma del binario