

Lavoro ed energia

Prof. Francesco Di Capua

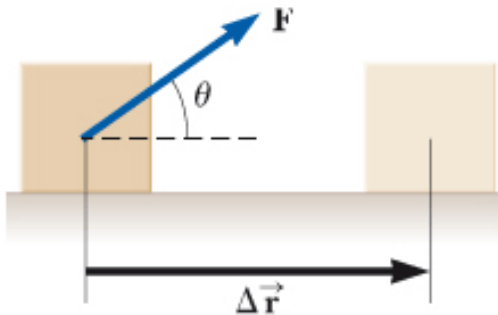
a.a. 2022/23

Concetti di Lavoro ed Energia

- Lavoro ed Energia sono due concetti strettamente connessi
- Il Lavoro è un **trasferimento di energia che viene compiuto attraverso una forza**: applicare una forza ad un corpo che ne fa variare la velocità significa compiere un lavoro che fa aumentare energia (cinetica) al corpo
- Il lavoro è strettamente collegato allo spostamento provocato: se si applica una forza ad una parete, pur facendo molta fatica, se la parete non si muove il lavoro compiuto è nullo

Concetto di Lavoro

- Si consideri un oggetto sottoposto ad uno spostamento $\Delta \mathbf{r}$ sotto l'azione di una forza costante $\mathbf{F}$



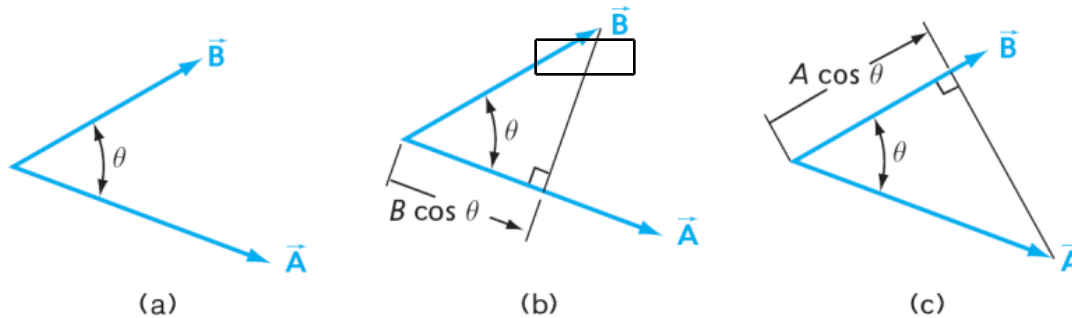
$$W = F \Delta r \cos(\theta)$$

- Il lavoro $\mathbf{W}$ svolto da un agente che esercita una forza costante su un sistema è il prodotto del modulo della forza F , del modulo dello spostamento Δr e il coseno dell'angolo compreso tra forza e spostamento
- Il lavoro è l'energia scambiata tra due sistemi sotto l'azione di una forza quando un oggetto subisce uno spostamento per azione della forza e la direzione della forza ha una componente non nulla rispetto allo spostamento
- Il Lavoro è una grandezza scalare ed ha le dimensioni del $[\text{N}][\text{m}]$ e si esprime in Joule (J).

Prodotto scalare

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = F \Delta r \cos(\theta)$$

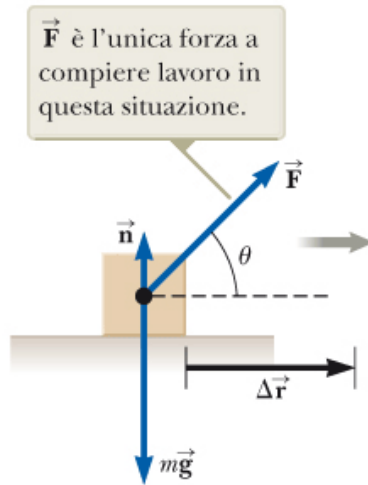
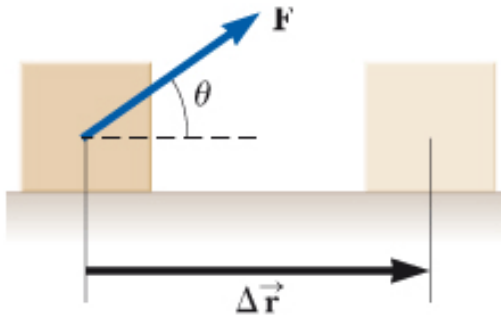
Il prodotto scalare può essere interpretato geometricamente come la proiezione di un vettore sull'altro moltiplicato l'altro vettore stesso



In termini delle singole componenti x,y,z, il prodotto scalare si può scrivere:

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = F_x \Delta_x + F_y \Delta_y + F_z \Delta_z$$

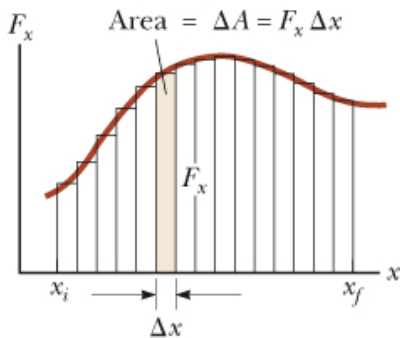
Concetto di Lavoro



- Affinchè venga compiuto del lavoro da una forza su un corpo, questo deve muoversi sotto l'azione della forza
- **Se la forza è perpendicolare allo spostamento il lavoro è nullo**
- Il segno del lavoro dipende dalla direzione di $\vec{F}$ rispetto alla spostamento, se la componente di $\vec{F}$ si trova nello stesso verso dello spostamento allora il lavoro è positivo. Viceversa se $F \cos \theta$ è nel verso opposto allora W è negativo
- Se Forza e Spostamento sono paralleli allora $W = F \Delta r$

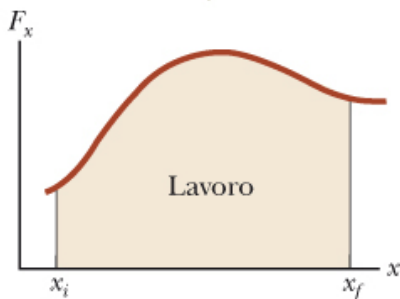
Lavoro svolto da una forza variabile

Il lavoro totale per lo spostamento da x_i ad x_f è approssimativamente dato dalla somma delle aree di tutti i rettangoli.



a

Il lavoro fatto dalla componente F_x della forza variabile agente sulla particella mentre si muove da x_i ad x_f è dato *esattamente* dall'area sotto la curva.



b

- Quando ci troviamo nel caso di una forza che dipende dalla posizione, il lavoro sull'intero spostamento può essere approssimato, suddividendo lo spostamento totale in un gran numero di spostamenti molto piccoli

$$W_1 = F_x \Delta x \quad W_{tot} = \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

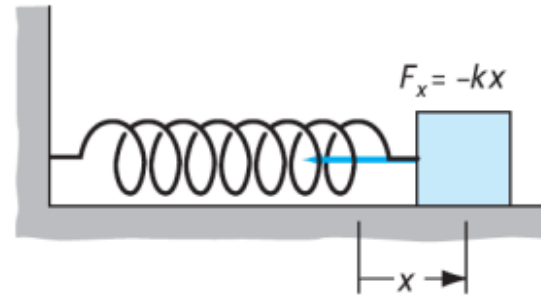
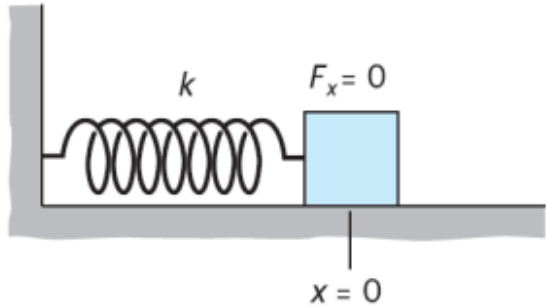
- Immaginando di effettuare il calcolo su una sequenza sempre maggiore di intervalli aventi lunghezza sempre più piccola

$$W_{tot} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x) \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x) dx$$

Il lavoro è l'integrale (area sotto la curva) della Forza rispetto allo Spostamento

Esempio: Lavoro necessario per allungare una molla

Un estremità di una molla orizzontale ($k=80 \text{ N/m}$) è tenuta fissa mentre una forza esterna è applicata all'estremità libera allungandola da $x_A=0$ a $x_B=4 \text{ cm}$. **Trovare il lavoro svolto dalla forza esterna**



$$W = \frac{1}{2} k x_A^2 - \frac{1}{2} k x_B^2 = 0 - \frac{1}{2} (80 \text{ N/m}) (0.04 \text{ m})^2 = -0.064 \text{ J}$$

Trovare il lavoro addizionale per passare da $x_B=4$ a $x_C=8 \text{ cm}$.

$$W = \frac{1}{2} k x_B^2 - \frac{1}{2} k x_C^2 \quad W = \int_{x_B}^{x_C} -kx dx = \frac{1}{2} k x_B^2 - \frac{1}{2} k x_C^2$$

$$W = \frac{1}{2} (80 \text{ N/m}) (0.04 \text{ m})^2 - \frac{1}{2} (80 \text{ N/m}) (0.08 \text{ m})^2 = \frac{1}{2} k x_B^2 = (0.064 - 0.256) \text{ J} = -0.192 \text{ J}$$

N.B: il sistema compie percorsi di uguale lunghezza (4cm) ma il lavoro compiuto è diverso

Espressione generale lavoro

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Per una forza ed uno spostamento in tutte le direzioni dello spazio

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}) \cdot (dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k})$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$W = \int_i^f F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Lavoro della forza gravitazionale

$$F_y = -mg \quad F_x = 0 \quad F_z = 0$$

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{y_i}^{y_f} -mg = -mg(y_f - y_i)$$

Il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale nello spostamento dalla posizione i alla posizione f è indipendente dal percorso seguito, ma dipende solo dalla differenza tra altezza finale ed iniziale

Il Lavoro è negativo per un corpo che sale a quota più elevata ($y_f > y_i$)

Il Lavoro è positivo per un corpo che sale a quota più bassa ($y_f < y_i$)

Energia

- L'energia è una misura della capacità di un corpo o di un sistema fisico di compiere lavoro
- Si tratta di una grandezza fisica scalare associata allo stato di uno o più corpi
- Ogni processo fisico coinvolge l'energia e trasferimenti (o trasformazioni) di energia
- Se una forza interviene a modificare lo stato di un sistema (ad esempio muovendolo) il numero associato all'energia cambia
- L'energia associata al moto di una particella si chiama energia cinetica
- Energia associata alla sua posizione -> energia potenziale
- Energia associata alla temperatura -> energia termica

Energia cinetica

- Energia associata allo stato di moto di un corpo
- Quanto più veloce è un corpo tanto maggiore è la sua energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- L'energia cinetica ha le dimensioni di

$$[\text{Kg m}^2/\text{s}^2] = [\text{N m}] = [\text{Joule}]$$

- In caso di più corpi l'energia cinetica è la somma delle energie cinetiche dei singoli corpi
- L'energia cinetica è presente anche a livello microscopico: l'energia termica di un gas è l'energia cinetica di atomi e molecole

Cinematica

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$


$$v_x = v_{x0} + a_x t$$


$$t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{x0}\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_x}\right)^2$$


$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Lavoro ed energia cinetica

Consideriamo una forza che agisce su un corpo di massa m determinando un movimento lungo l'asse x

$$F_x = ma_x$$

Supponiamo che la forza agisce sul corpo per uno spostamento d e modifica la velocità iniziale da v_0 a v . Vale la relazione:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x d \quad \rightarrow \quad v^2 = v_0^2 + 2\frac{F_x}{m}d$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x d$$

$$K_f - K_0 = \text{Lavoro}$$

La variazione di energia cinetica è uguale al lavoro compiuto dalla forza

Teorema dell'energia cinetica

$$W_{tot} = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

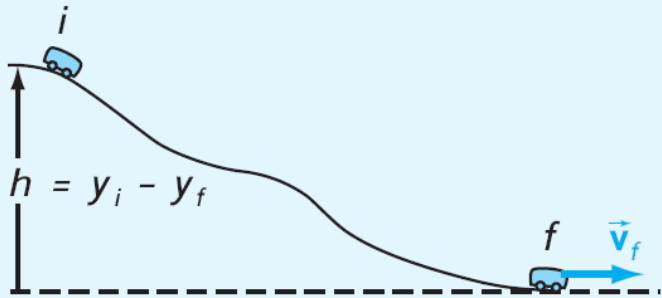
$$W_{tot} = \int_{x_i}^{x_f} m a dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx = \int_{x_i}^{x_f} m v dv$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$W_{tot} = K_f - K_i = \Delta K$$

Quando è compiuto un Lavoro su un sistema e la sola variazione nel sistema è il modulo della sua velocità, Il lavoro risultante è dato dalla variazione di energia cinetica del sistema

Esempio



- Consideriamo un vagoncino delle montagne russe che si muove sul suo binario
- Il vagoncino parte da fermo, vogliamo determinarne la velocità finale (si trascurino gli attriti)

- Usiamo l'approccio di determinare il lavoro totale sul vagoncino: su di esso agiscono due forze, la forza gravitazionale e la forza normale
- La forza normale in ogni punto della traiettoria è perpendicolare allo spostamento, per cui il contributo al lavoro è nullo
- La forza gravitazionale dà invece un contributo al lavoro pari a:

$$L_{tot} = -mg(y_f - y_i) = mgh$$

Per il teorema dell'energia cinetica

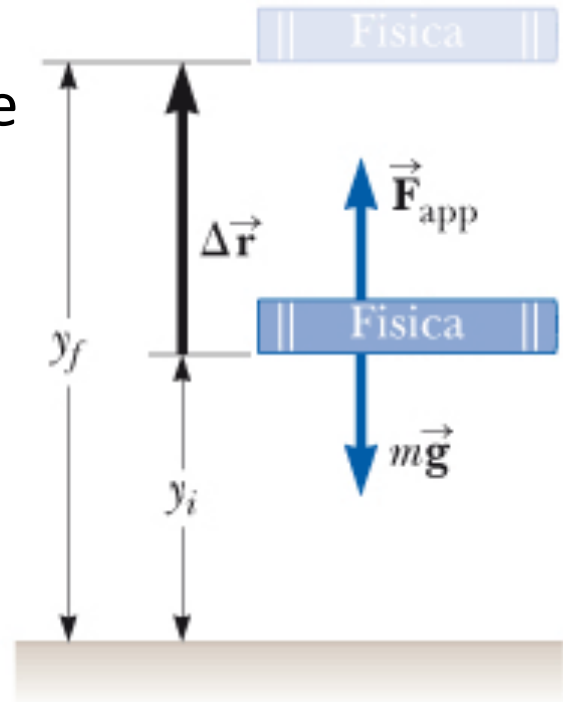
$$L_{tot} = mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

$$v_f^2 = 2gh \quad v_f = \sqrt{2gh}$$

- N.B.: la velocità finale raggiunta è indipendente dalla forma del binario
- Il tempo per raggiungere lo stato finale dipende dalla forma del binario

Energia potenziale

- Per sollevare un corpo massivo con una forza esterna occorre compiere un lavoro
- Il corpo inizialmente fermo risulta essere fermo anche dopo lo spostamento non ha subito variazioni di energia cinetica
- Ma l'oggetto ha in se una energia immagazzinata, se rilasciato infatti si mette in moto e cade
- L'energia potenziale esprime il concetto di questa energia immagazzinata



Energia potenziale gravitazionale

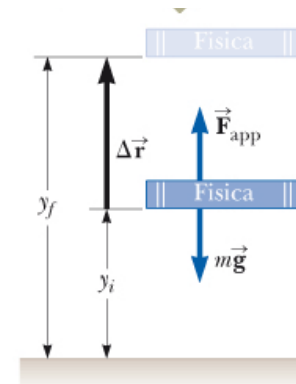
$$\vec{F}_{est} = -m\vec{g} \quad \vec{\Delta r} = \Delta y \hat{j}$$

$$L = (-m\vec{g}) \cdot \vec{\Delta r} = -mg(y_f - y_i) = mgy_i - mgy_f$$

Definendo $U = mgy$

$$L = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

Il lavoro appare in questo caso come una variazione dell'energia potenziale gravitazionale



Se si fa un percorso di andata e ritorno ($y_f = y_i$) il lavoro totale è nullo

$$L = -mg(y_f - y_i) = 0$$

Le forze che su un percorso di andata e ritorno hanno questa caratteristica si dicono conservative

Forza conservativa

- In meccanica una forza che non causa trasformazioni di energia meccanica in energia interna al sistema è detta conservativa
- Il Lavoro compiuto da una forza conservativa non dipende dalla traiettoria del moto, ma dipende solo dalle configurazioni iniziale e finale
- Il lavoro di una forza conservativa su un percorso chiuso è nullo

Conservazione dell'energia

- Consideriamo un corpo in caduta libera (trascuriamo l'attrito)
- Il lavoro della forza gravitazionale è dato da

$$L_{tot} = -mg(y_f - y_i)$$

- Per il teorema dell'energia cinetica

$$L_{tot} = K_f - K_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -mg(y_f - y_i)$$



$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i$$

La quantità $\frac{1}{2}mv^2 + mgy$ si conserva

Conservazione dell'energia meccanica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Energia Cinetica

$$U = mgy$$

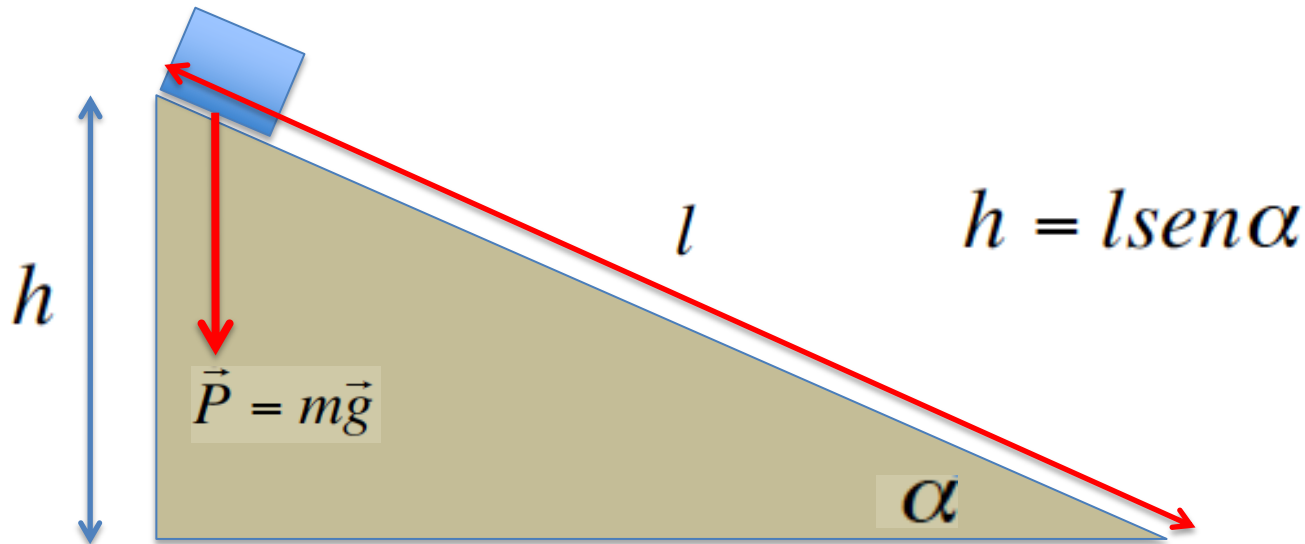
Energia Potenziale gravitazionale

$$E = K + U \quad E_f = E_i$$

La somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale si conservano

queste due forme di energia si trasformano l'una nell'altra ma la loro somma resta costante nell'evoluzione del sistema

Lavoro energia gravitazionale su un piano inclinato



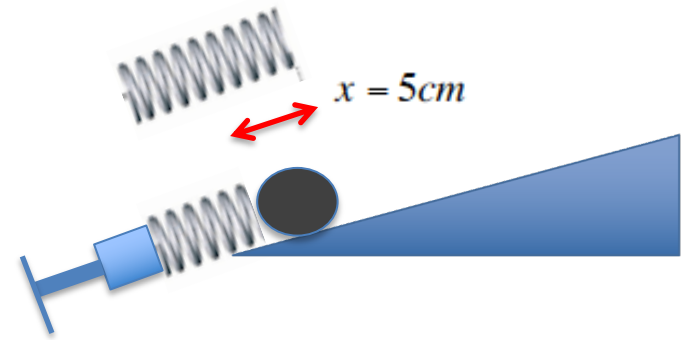
$$L_{tot} = -mg(y_f - y_i) = mgh = mg(l \sin \alpha)$$

$$L_{tot} = P_x(x_f - x_i) = mg \sin \alpha (l - 0) = mgl \sin \alpha$$

Esercizio su teorema energia cinetica

- Il sistema per il lancio della pallina in un flipper è fatto da una molla con costante elastica $k=120 \text{ N/m}$
- La pallina si muove su una superficie inclinata di 10° .
- Determinare la velocità di lancio della pallina ($m=100\text{g}$) comprimendo la molla di 5 cm

$$L_{tot} = K_f - K_i$$



$$L_{tot} = L_{molla} + L_{peso} = \frac{1}{2}kx^2 - mg\text{sen}(10^\circ)x$$

$$x = 5\text{cm}$$

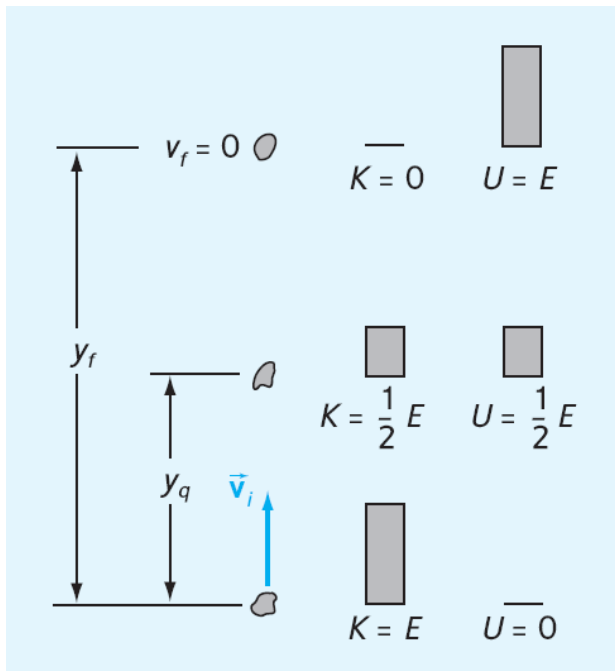
$$L_{tot} = \frac{1}{2}(1.2\text{N/m})0.0025\text{m}^2 + 0.1 \times (9.81\text{m/s}^2)\text{sen}(10^\circ)(0.05\text{m})$$

$$L_{tot} = 0.141\text{J} \quad K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad K_i = 0$$

$$L_{tot} = \frac{1}{2}mv_f^2 \quad v_f = \sqrt{\frac{2L_{tot}}{m}} = 1.68\text{m/s}$$

Esempio conservazione dell'energia meccanica

- Una pietra di massa $m=2.0\text{kg}$ viene lanciata verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale di $v_i=8\text{m/s}$. Calcoliamo:
 - l'energia meccanica totale del sistema
 - Fino a che altezza sale la pietra e quanto vale l'energia potenziale in questa posizione
 - Modulo della velocità quando la pietra raggiunge un'altezza pari alla metà di quella massima



Nel punto iniziale l'energia cinetica e potenziale valgono

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2.0\text{kg})(8\text{m/s})^2 = 64\text{J}$$

$$U_i = mgy_i = 0$$

$$E_i = K_i + U_i = 64\text{J}$$

Esempio(2)

Indicando con y_f l'altezza massima raggiunta dalla pietra, sappiamo che nel punto massimo tale velocità è nulla

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = 0$$

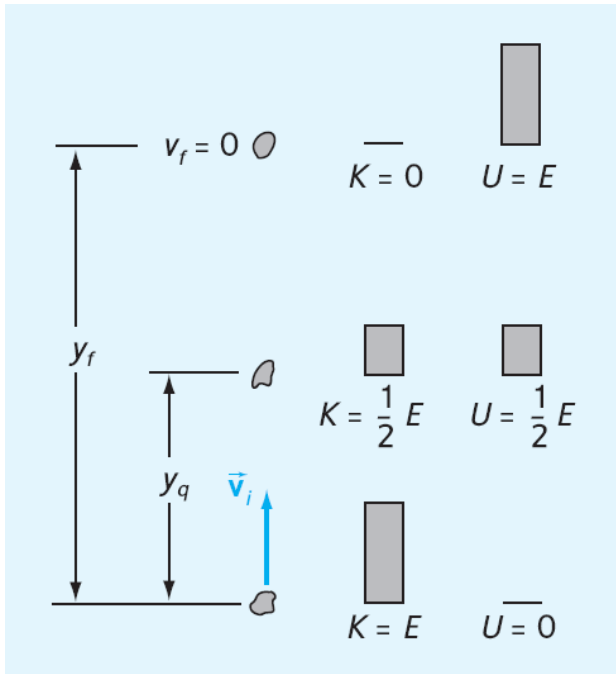
$$E_f = E_i = 64J$$

$$E_f = K_f + U_f = U_f = 64J$$

$$U_f = mgy_f = 64J \quad \rightarrow$$

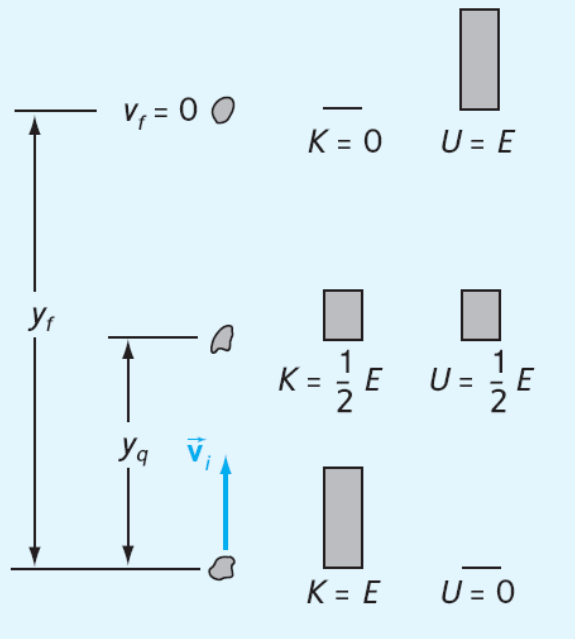
$$y_f = \frac{U_f}{mg} = \frac{64J}{(2kg)(9.8m/s^2)} = 3.3m$$

Altezza massima



Esempio(3)

Indicando con $y_q = (1/2)y_f$ la coordinata a metà dell'altezza massima



$$E_q = K_q + U_q = E_i = 64J$$

$$E_q = \frac{1}{2}mv_q^2 + mgy_q = 64J$$

$$\frac{1}{2}(2.0kg)v_q^2 = 64J - (2.0kg)(9.8m/s^2)(1/2)y_f$$

$$v_q^2 = 32m^2/s^2 \quad v_q = \pm 5.7m/s$$

$$K_q = \frac{1}{2}mv_q^2 = \frac{1}{2}(2.0kg)(5.7m/s)^2 = 32J$$

$$U_q = mgy_q = (2.0kg)(9.8m/s^2)(1.65m) = 32J$$

N.B. alla metà dell'altezza massima l'energia si è suddivisa equamente tra energia cinetica ed energia potenziale

Energia potenziale elastica

- La legge di Hooke $F_x = -kx$ costituisce un altro esempio di forza conservativa
- Il lavoro compiuto dalla forza elastica lo abbiamo calcolato in precedenza

$$L_{tot} = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

$$U_f - U_i = -L_{tot} = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Energia potenziale elastica

Relazione Forza-Energia potenziale

- Per uno spostamento infinitesimo si ha una variazione infinitesima di energia potenziale

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

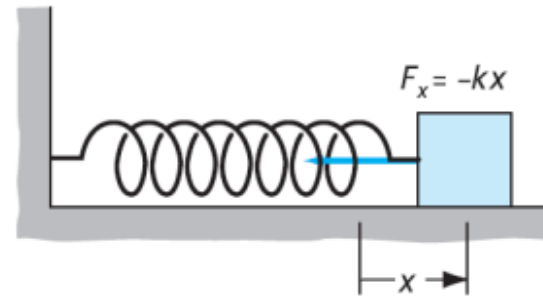
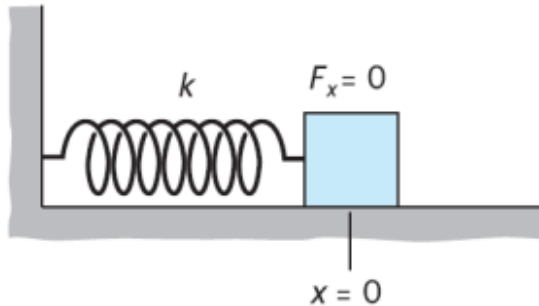
- Per l'energia potenziale elastica:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

- Ad esempio per l'energia potenziale gravitazionale:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}(mgx) = -mg$$

Esempio: molla con blocco



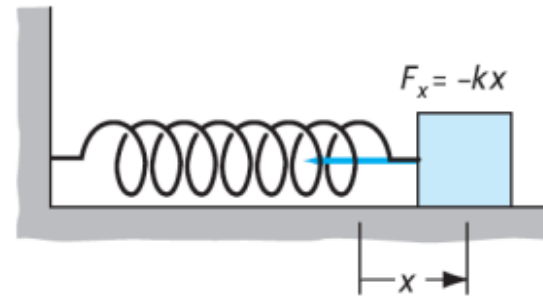
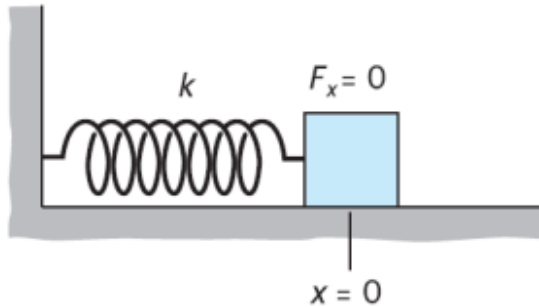
- Sia un blocco di una certa massa m posto all'estremità di una molla che costante elastica k , Il blocco viene tirato di una certa quantità x rispetto all'equilibrio.
- In base alla leggi di conservazione dell'energia possiamo trovare una relazione tra la velocità del blocco in modulo e la sua coordinata x
- Avendo esteso la molla di una quantità x_i si ha una energia potenziale

$$U_i = \frac{1}{2} k x_i^2$$

- Il blocco è inizialmente fermo per cui: $K_i = 0$
- Trascurando gli attriti si ha:

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2} k x_i^2 = K_f + U_f = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} k x_f^2$$

Esempio(2)



$$\frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}kx_f^2 = \frac{1}{2}kx_i^2$$

$$v_f^2 + \frac{k}{m}x_f^2 = \frac{k}{m}x_i^2 \quad \Rightarrow \quad v_f^2 = \frac{k}{m}(x_i^2 - x_f^2)$$

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}(x_i^2 - x_f^2)}$$

- Quando x_f passa per la posizione di equilibrio ($x_f=0$) si ha:

$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}x_i^2} = x_i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Esempio(3)

- Se $m=2.5 \text{ kg}$, $k=1100\text{N/m}$ ed $x_i=0.15 \text{ m}$
- Per qualsiasi punto x_f , utilizzando la relazione precedente è possibile determinare il modulo della velocità
- Quando il blocco passa per l'origine ($x_f=0$)
- Nota che per valori di $x_f>0$ o $x_f<0$ la velocità è minore rispetto al caso $x_f=0$

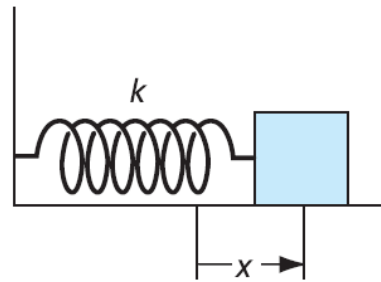
$$v_f = x_i \sqrt{\frac{k}{m}} = (0.15\text{m}) \sqrt{\frac{(1100)\text{N/m}}{2.5\text{kg}}} = 3.1\text{m/s}$$

- Superata l'origine la molla si comprime verso sinistra fino ad un valore massimo che corrisponde ad una velocità finale nulla ($v_f=0$)

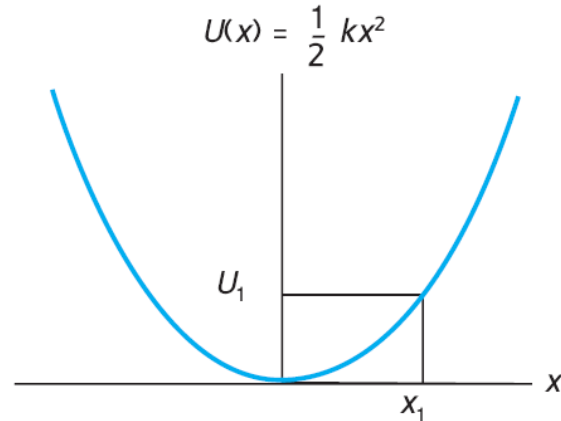
$$v_f = \sqrt{\frac{k}{m}(x_i^2 - x_f^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_i^2 - x_f^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_f = \pm x_i$$

- Il blocco raggiunge alla sua sinistra la posizione $x_f=-0.15 \text{ m}$

Analisi grafica: energia cinetica e potenziale

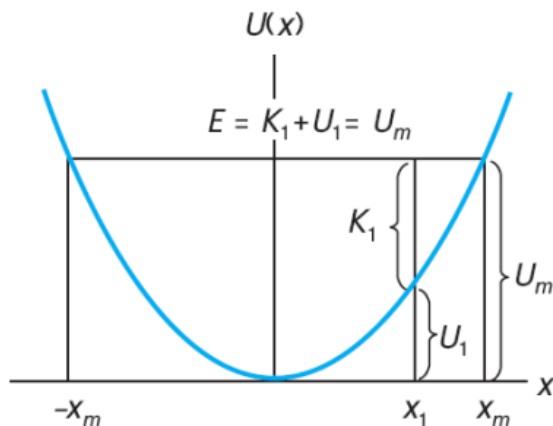


(a)



(b)

- L'espressione matematica dell'energia potenziale elastica è rappresentata graficamente da una parabola

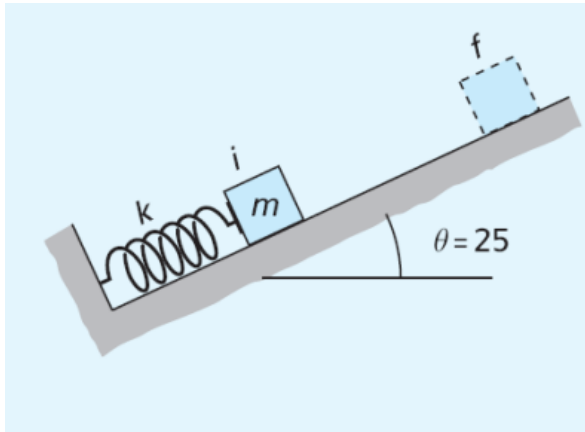


- Rilasciando la molla dalla sua estensione massima (in cui l'energia totale è data tutta dall'energia potenziale) si ha una trasformazione in energia cinetica.
- L'energia cinetica è massima quando la molla passa per la sua condizione di equilibrio

Un video divertente (...by Walter Levin)

<https://www.youtube.com/watch?v=PWNs7i4rEWA>

Esempio: molla sul piano inclinato



- Un blocco ($m=2.1\text{kg}$) viene spinto contro una molla ($k=2400\text{ N/m}$) che viene compressa di $x=0.15\text{ m}$ (stato iniziale i)
- La molla lancia il blocco sul piano inclinato, determinare la distanza massima a cui viene lanciato il blocco sul piano inclinato (distanza i - f)
- Si trascuri l'attrito

- Nello stato di compressione della molla il sistema si trova alla quota $y_i=0$
- L'energia potenziale del sistema è

$$U_i = \frac{1}{2}kx_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}kx_i^2 + 0 = \frac{1}{2}(2400\text{ N/m})(0.15)^2 = 27\text{ J}$$

- Il blocco nell'istante iniziale è fermo (alla compressione della molla) e quando arriva nella posizione finale f sarà nuovamente fermo, quindi l'energia cinetica degli istanti iniziali e finali è nulla
- Nella posizione finale f l'energia potenziale gravitazionale è

$$U_f = mgy_f$$

Esempio: molla sul piano inclinato(2)

- Per la conservazione dell'energia totale

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$U_i + 0 = U_f + 0$$

$$U_i = \frac{1}{2} k x_i^2 = 27 J = m g y_f \quad \Rightarrow \quad y_f = \frac{27 J}{m g} = \frac{27 J}{(2.1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)} = 1.3 \text{ m}$$

A partire dalla quota si ricava la distanza d_{if} percorsa sul piano inclinato

$$d_{if} = \frac{y_f}{\sin(25^\circ)} = 3.1 \text{ m}$$

- Quanto vale il modulo della velocità del corpo nella fase di ricaduta a metà della distanza i-f?

In questo caso i 27J di energia sono ripartiti tra energia cinetica e potenziale

Sostituendo $y_h = (1/2) \times 1.3 \text{ m}$

$$27 J = m g y_h + \frac{1}{2} m v_h^2 \quad \Rightarrow \quad v_h = 3.6 \text{ m/s}$$

Potenza

- La potenza esprime la rapidità nel tempo con la quale un lavoro viene compiuto

$$P = \frac{L}{\Delta t}$$

Supponiamo di avere una Forza costante $L = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$

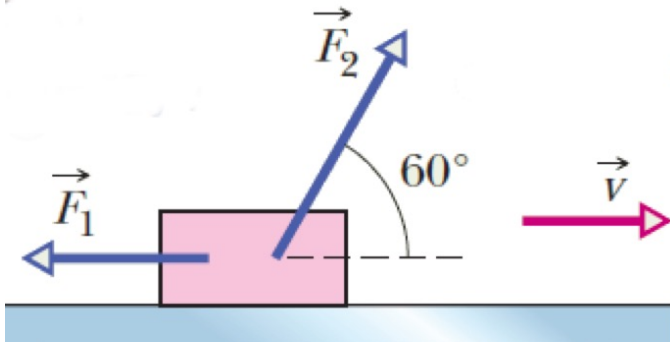
$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{s}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Potenza (esempi)

- Si supponga che spostando un certo corpo si compia un lavoro $L=200\text{J}$, se lo spostamento avviene in un intervallo di tempo $\Delta t=5\text{s}$ allora la potenza è $P=200\text{J}/5\text{s}=40\text{J/s}$

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{200\text{J}}{5\text{s}} = 40\text{J/s} = 40\text{W}$$

- Su di una cassa agiscono le Forze $F_1=1.1\text{ N}$ ed $F_2=4.0\text{ N}$ (angolo F_2 rispetto orizzontale 60°) se la velocità della cassa è 3 m/s , qual'è la potenza prodotta?



$$\begin{aligned} P &= \vec{F} \cdot \vec{v} = F_2 \cos(60^\circ)v - F_1 v \\ P &= (4.0\text{N})\cos(60^\circ)(3\text{m/s}) - (1.1\text{N})(3\text{m/s}) \\ P &= 2.7\text{W} \end{aligned}$$

Forze non conservative

- In presenza di attrito (una forza non conservativa), l'energia meccanica non si conserva e può variare durante il moto del corpo

$$L_{tot} = K_f - K_i$$

$$L_{tot} = L_{con} + L_{non}$$

Il teorema dell'energia cinetica è valido per tutte le forze (conservative e non)

$$L_{con} = -(U_f - U_i)$$

$$K_f - K_i = L_{con} + L_{non} = -(U_f - U_i) + L_{non}$$

$$K_f + U_f = K_i + U_i + L_{non}$$

$$E_f = E_i + L_{non}$$

- La variazione di energia meccanica è pari al lavoro delle forze non conservative lungo il percorso da i ad f

$$E_f - E_i = L_{non}$$

Esempio

- Una cassa di massa $m=3\text{kg}$ scivola lungo una rampa lunga 1 m ed inclinata di 30° . La cassa parte da ferma dalla sommità e subisce una forza di attrito costante di 5N

Determinare la velocità della cassa alla fine della rampa

$$h = y_i \sin(30^\circ) = 0.5\text{m}$$

$$E_i = K_i + U_i = 0 + mgh$$

$$E_f = K_f + U_f = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

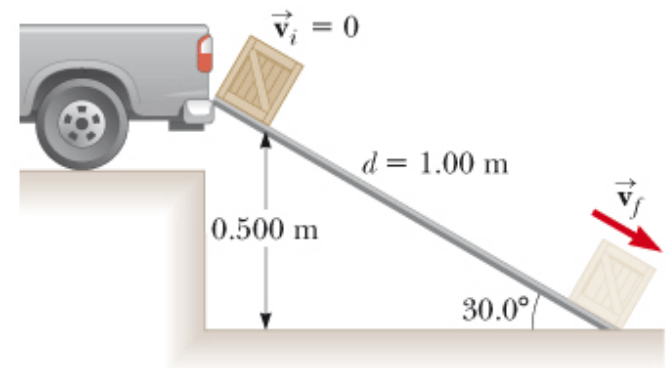
$$L_{\text{non}} = F_k d$$

$$E_f = E_i + L_{\text{non}}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh + F_k d$$

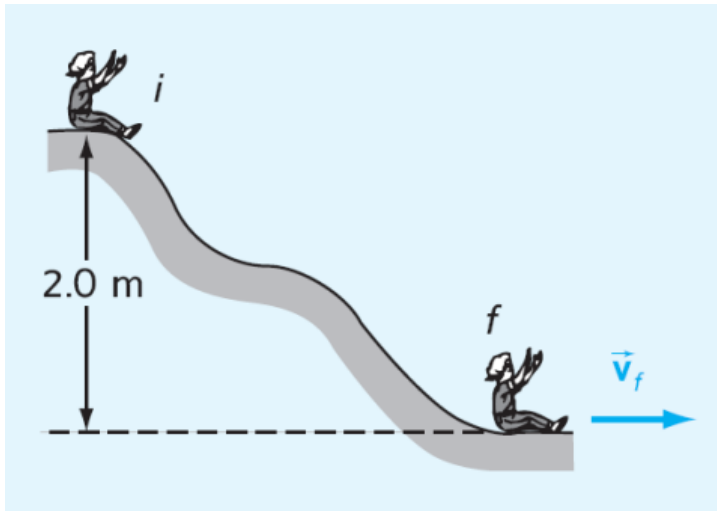


$$v_f = ?$$



Altro Esempio

- Una bambina di $m=17\text{kg}$ parte da ferma su uno scivolo da un'altezza $h=2.0\text{m}$. In fondo raggiunge una velocità di 4.2 m/s . Quanto vale il lavoro effettuato dalle forze di attrito?



$$L_{non} = E_f - E_i$$

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}(17\text{kg})(4.2\text{m/s})^2 = 150\text{J}$$

$$E_i = mgh = (17\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(2.0\text{m}) = 333\text{J}$$

$$L_{non} = E_f - E_i = (150 - 333)\text{J} = -183\text{J}$$

- L'attrito compie un lavoro negativo corrispondente ad una diminuzione complessiva dell'energia meccanica