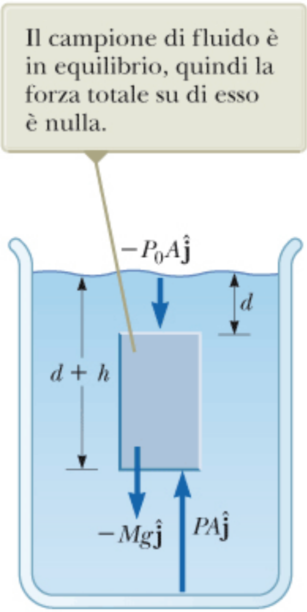
Fluidodinamica

Prof. Francesco Di Capua

a.a. 2022/23

Fluidi a riposo: variazione pressione con la profondità



- Si consideri un campione di liquido di una certa densità, un cilindro di fluido con base di area A, all'interno di un volume di fluido più ampio
- Il cilindro di fluido si estende dalla profondità d fino a d+h
- Il liquido esterno esercita forze su tutti i punti della superficie del campione, perpendicolarmente alla superficie
- Orizzontalmente le forze dovute alla pressione si cancellano
- Detta P la pressione sul lato inferiore del campione, la forza esercitata verso l'alto dal fluido sul campione è pari a PA
- Detta P_0 la pressione sul lato superiore, La forza esercitata dal fluido sul campione verso il basso è pari a P_0A

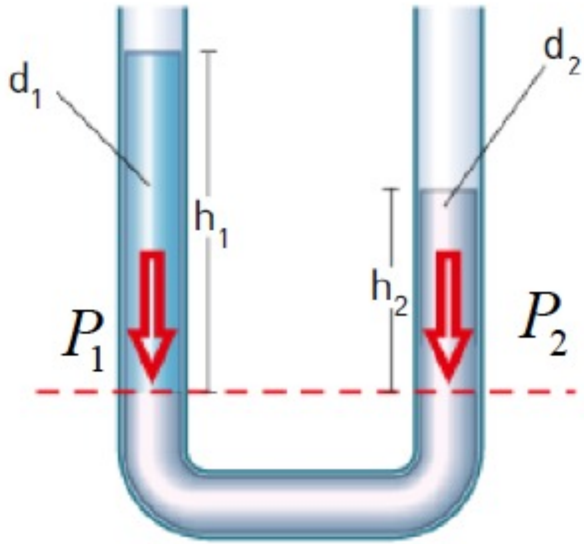
Essendo il campione in equilibrio $\sum F_y = 0 \Rightarrow PA - P_0A - Mg = 0$

$M = \rho V = \rho A h$ $\qquad PA - P_0A - \rho A h g = 0$

$$P = P_0 + \rho h g$$

Legge di Stevino-Pascal

2 vasi comunicanti: caso generale



$$P_1 = P_{atm} + \rho_1 g h_1$$

$$P_2 = P_{atm} + \rho_2 g h_2$$

$$P_1 = P_2$$

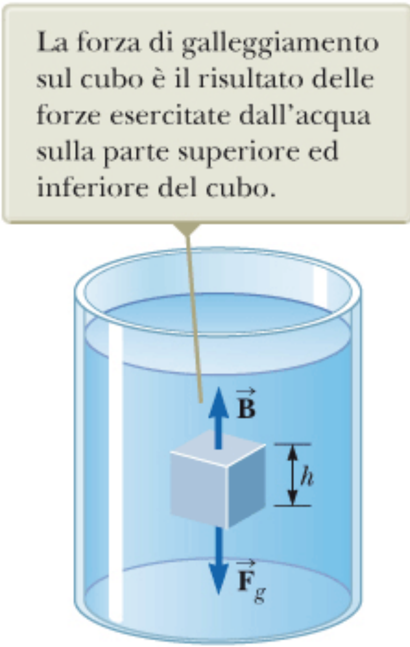
$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Principio di Archimede

- Un corpo che immerso parzialmente o totalmente in un fluido riceve una spinta di intensità pari al peso del fluido spostato, tale spinta è diretta verso l’alto

Origine della Spinta di Archimede



- Per comprendere meglio l'origine della spinta di Archimede si consideri un cubo di un materiale (faccia di superficie A e lato h) immerso in un liquido
- Secondo la legge di Stevino-Pascal P_{basso} è maggiore di P_{alto}

$$P_{basso} = P_{alto} + \rho_{fluido} g h$$

$$(P_{basso} - P_{alto}) = \rho_{fluido} g h$$

- Esiste quindi una forza verso l'alto:

$$B = (P_{basso} - P_{alto})A = (\rho_{fluido} g h)A$$

A area della faccia inferiore

$$V_{spost} = Ah$$

Volume del fluido spostato

$$B = \rho_{fluido} g V_{spost}$$

$$\rho_{fluido} V_{spost} = M_{fluido}$$

$$B = M_{fluido} g$$

La forza di galleggiamento è pari alla forza peso del fluido spostato (come dice il pr. di Archimede)

Oggetto completamente immerso

Se un oggetto è totalmente immerso nel fluido
Il Volume del'oggetto è uguale al Volume del fluido spostato

$$V_{spost} = V_{ogg}$$

Spinta di Archimede

$$B = \rho_{fluido} V_{ogg} g$$

Forza Peso

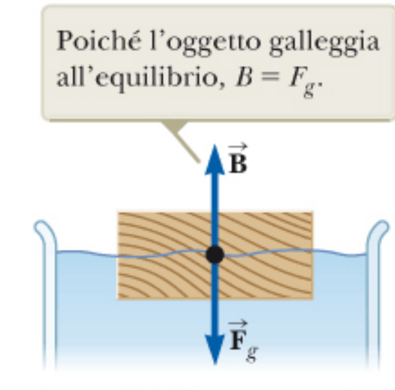
$$F_g = M_{ogg} g = \rho_{ogg} V_{ogg} g$$

Forza netta applicata su un oggetto completamente immerso

$$B - F_g = \rho_{fluido} V_{ogg} g - \rho_{ogg} V_{ogg} g = (\rho_{fluido} - \rho_{ogg}) V_{ogg} g$$

Quindi se la densità dell'oggetto immerso è minore della densità del fluido, la forza gravitazionale è minore della forza di galleggiamento ($B-F_g>0$), per cui l'oggetto accelera verso l'alto

Oggetto galleggiante



Consideriamo un oggetto di volume V_{ogg} $\rho_{ogg} < \rho_{fluido}$

L'oggetto galleggia sulla superfice del fluido, la forza di galleggiamento è bilanciata dalla forza gravitazionale

V_{spost} È il volume di fluido spostato, volume dell'oggetto che si trova sotto la superficie del fluido

Forza di galleggiamento

$$B = \rho_{fluido} V_{spost} g$$

Forza peso sull'oggetto

$$F_g = M_{ogg} g = \rho_{ogg} V_{ogg} g$$

All'equilibrio

$$F_g = B \Rightarrow \rho_{fluido} g V_{spost} = \rho_{ogg} g V_{ogg}$$

$$\frac{V_{spost}}{V_{ogg}} = \frac{\rho_{ogg}}{\rho_{fluido}}$$

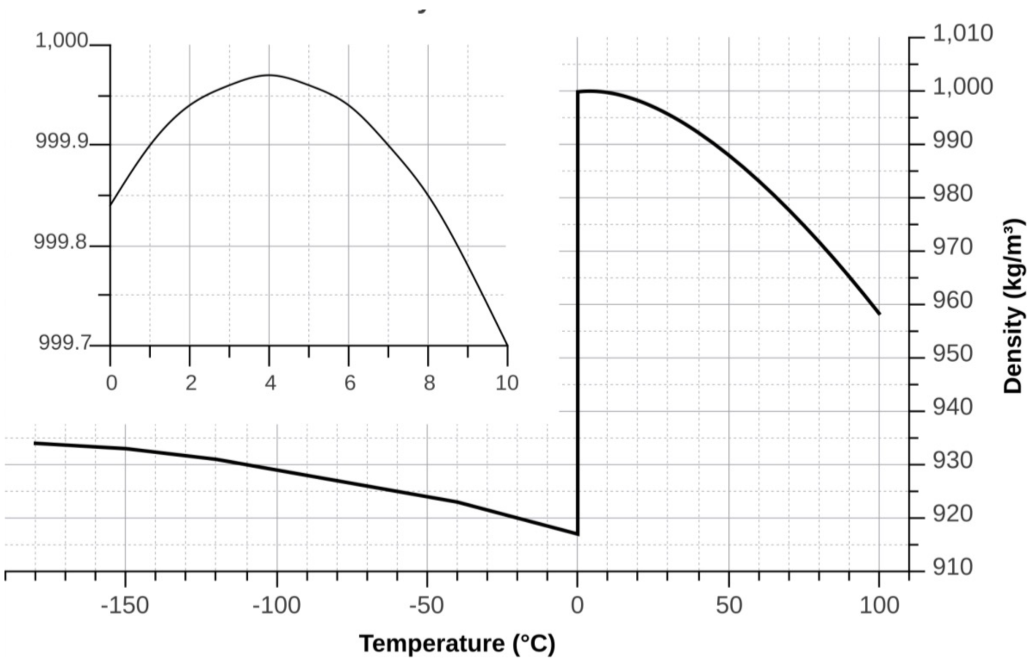
Densità sostanze solide

- Per la maggior parte di sostanze quando si trovano nella fase solida hanno una maggiore densità rispetto a quando si trovano nella fase liquida: nei liquidi la distanza interatomica si espande, per cui a parità di massa il volume aumenta (densità= massa /volume per cui i liquidi hanno densità minore)

Anomalia dell’acqua

- Fa eccezione l’acqua in cui la fase solida (ghiaccio) è meno densa della fase liquida

- Il motivo risiede nella struttura cristallina dei legami idrogeno che crea ampi spazi vuoti nel reticolo

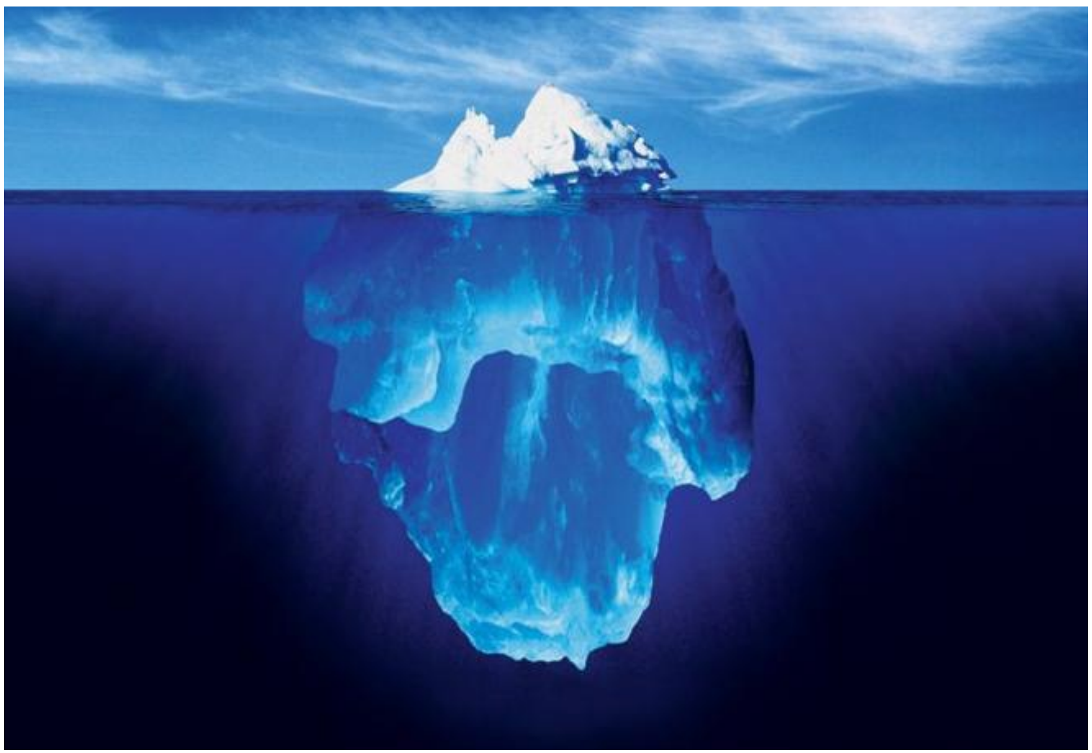


Il ghiaccio galleggia nell’acqua

Iceberg

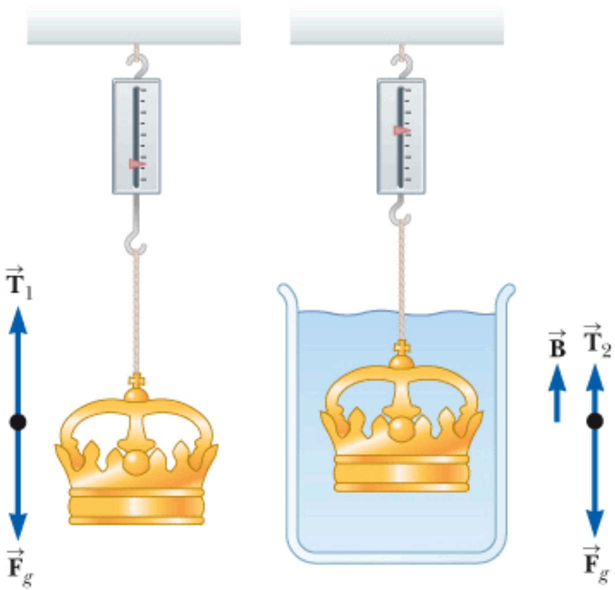
- Come conseguenza è la formazione di giganteschi blocchi di ghiaccio galleggianti nelle regioni polari
- Per gli iceberg si ha

$$\frac{V_{spost}}{V_{ogg}} = \frac{\rho_{ogg}}{\rho_{fluido}} = \frac{\rho_{ghiaccio}}{\rho_{acqua}} = \frac{920 kg/m^3}{1030 kg/m^3} \approx 0.9$$



Il Volume sommerso è il 90% del totale

Esempio: Esperimento di Archimede: determinazione della densità di un materiale



Forza di galleggiamento

$$T_1 = F_g$$ Corona sospesa in aria

$$B + T_2 - F_g = 0$$ Corona immersa in acqua

Supponiamo che la bilancia in aria riporti un valore di 7.84 N e quando l'oggetto sia immerso in acqua riporti 6.84 N

$$F_g = 7.84N$$

$$B = F_g - T_2 = 7.84N - 6.84N = 1.0N$$

$$B = \rho_{acqua} g V_{spost} = \rho_{acqua} g V_{corona} = \rho_{acqua} g \frac{m_{corona}}{\rho_{corona}}$$

$$\rho_{corona} = \frac{\rho_{acqua} g m_{corona}}{B}$$

$$\rho_{corona} = \frac{(1000Kg/m^3)(7.84N)}{(1.0N)} = 7.84 \times 10^3 Kg/m^3$$

$$\rho_{oro} = 19.3 \times 10^3 Kg/m^3$$

Esempio: Esperimento di Archimede

Se la corona fosse fatta di puro oro che peso dovrei leggere in acqua?

$$B = \rho_{acqua} g V_{spost} = \rho_{acqua} g V_{corona} = \rho_{acqua} g \frac{m_{corona}}{\rho_{corona}} = \rho_{acqua} \frac{m_{corona} g}{\rho_{corona}}$$

$$B = (1000 Kg/m^3) \frac{7.84N}{(19.3 \times 10^3 Kg/m^3)} = 0.406N$$

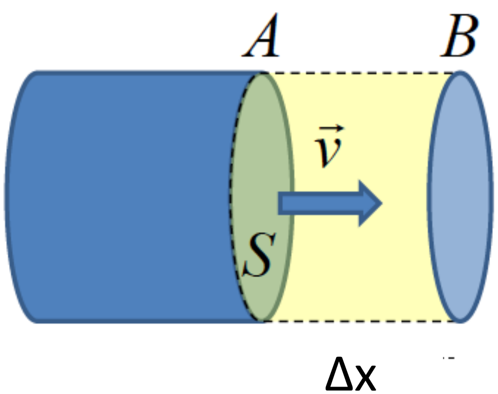
$$T_2 = F_g - B = 7.84N - 0.406N = 7.43N$$

Dinamica dei fluidi ideali

- Moto laminare: la velocità del fluido in ogni suo punto non cambia nel tempo, nè in direzione nè in intensità. Il flusso di acqua al centro di un ruscello può essere considerato laminare, non lo è quello delle rapide di una cascata
- Fluido incomprimibile: la sua densità resta costante ed uniforme
- Flusso non viscoso: la viscosità è la misura di quanto un fluido si oppone allo scorrimento. La viscosità è l'analogo dell'attrito ed è associato alla resistenza di due strati adiacenti del fluido

Portata

- Data una conduttura in cui scorre un fluido una caratteristica fondamentale è la portata
- La portata descrive l’intensità della corrente nella conduttura
- È definita come il rapporto tra il volume di fluido che in un intervallo di tempo attraversa una sezione trasversale della conduttura



$$R_V = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{S\Delta x}{\Delta t} = Sv$$

Definizioni di portata

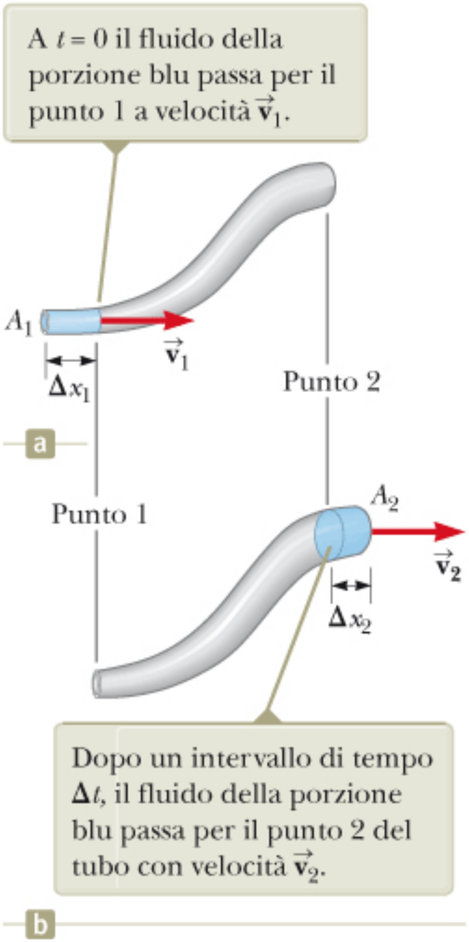
- Portata volumica (m^3/s)

$$R_V = Sv$$

- Portata massica (kg/s)

$$R_m = \rho S v$$

Equazione di continuità



- Si consideri un segmento fluido ad un certo istante attraverso un condotto
- Consideriamo il segmento di fluido Δx_1 attraversa il punto 1 del tubo con sezione A_1
- Il fluido passa nello stesso istante la parte 2 di una quantità Δx_2

Massa della prima porzione di fluido

$$m_1 = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$$

Massa della seconda porzione di fluido

$$m_2 = \rho A_2 \Delta x_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

Essendo il fluido incomprimibile $m_1 = m_2$

$$\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

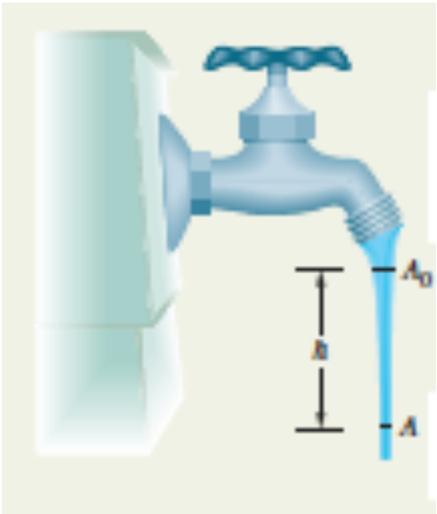
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{costante}$$

Il prodotto dell'area della sezione di passaggio del fluido per la velocità del fluido (La portata) è costante per un fluido incomprimibile

Equazione di continuità

- La velocità del getto emesso da un tubo per innaffiare aumenta occludendo parzialmente l’uscita
- La velocità di un fluido dipende infatti dall’area della sezione del tubo (in direzione normale) attraverso il quale il fluido fluisce

Esempio



Il flusso di acqua che esce da un rubinetto si restringe mentre cade,
La sezione A_0 vale 1.2 cm^2 mentre A vale 0,35 cm^2
I due livelli sono separati da una altezza h=45 mm
Determinare la velocità dell' acqua che esce dal rubinetto

Per l'equazione di continuità si ha: $A_0 v_0 = A v$

Ricordando la relazione tra velocità e spazio percorso

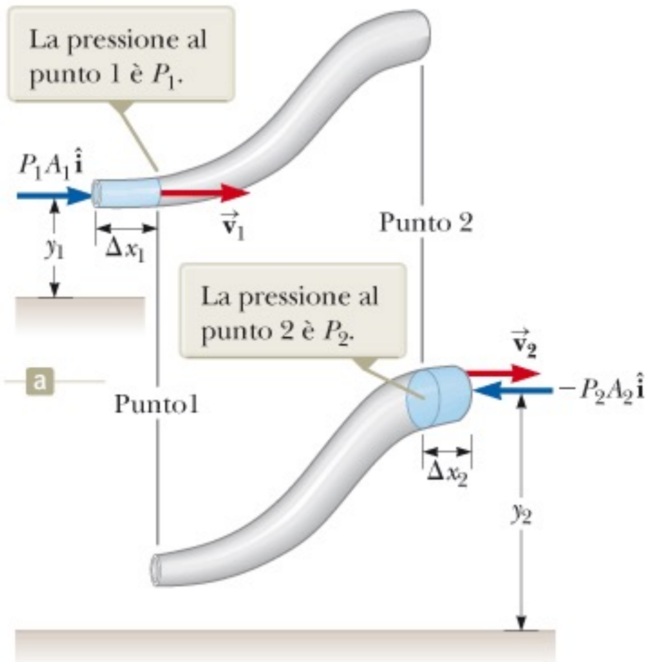
$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a(x - x_0) = v_0^{\,2} + 2gh$$

$$\left(v_0 \frac{A_0}{A}\right)^2 = v_0^{\,2} + 2gh \qquad v_0^{\,2}\left(\frac{A_0^{\,2}}{A^2} - 1\right) = 2gh$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^{\,2} - A^2}} \qquad v_0 = 28.6 cm/s$$

Teorema di Bernoulli

Esprime una relazione tra la velocità del fluido e la sua pressione



Il fluido esercita sul lato sinistro dell'esempio in figura una forza

$$F_1 = P_1 A_1$$

Il lavoro compiuto da questa forza (per spingere il fluido nel condotto) è

$$W_1 = F_1 \Delta x_1 = P_1 A_1 \Delta x_1 = P_1 V$$

Analogamente sul lato desto il fluido esercita un lavoro (la pressione si oppone all'espulsione del fluido dal condotto)

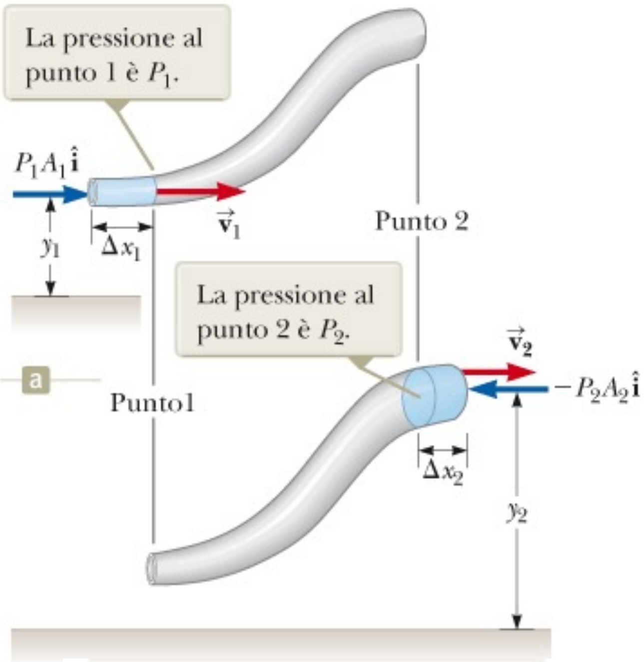
$$W_2 = -F_2 \Delta x_2 = -P_2 A_2 \Delta x_2 = -P_2 V$$

$$W = W_1 + W_2 = (P_1 - P_2)V$$

Ma ci ricordiamo che il lavoro è dato dalla variazione di energia cinetica e di energia potenziale

$$W = \Delta K + \Delta U$$

Teorema di Bernoulli



Differenza in energia cinetica

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_1^{\ 2}$$

Essendo il flusso laminare l'energia cinetica della porzione in grigio è identica tra stato iniziale e finale

Differenza in energia potenziale

$$\Delta U = mgy_2 - mgy_1$$

$$W = (P_1 - P_2)V = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2} - \frac{1}{2}mv_1^{\ 2} + mgy_2 - mgy_1$$

$$(P_1 - P_2)V = \frac{1}{2}\rho V v_2^{\ 2} - \frac{1}{2}\rho V v_1^{\ 2} + \rho V g y_2 - \rho V g y_1$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^{\ 2} - \frac{1}{2}\rho v_1^{\ 2} + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^{\ 2} + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^{\ 2} + \rho g y_2$$

Equazione di Bernoulli

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \cos\tan te$$

Per un fluido stazionario (v=0)

$$P_1 = P_2 + \rho g(y_2 - y_1)$$

Legge di Stevino

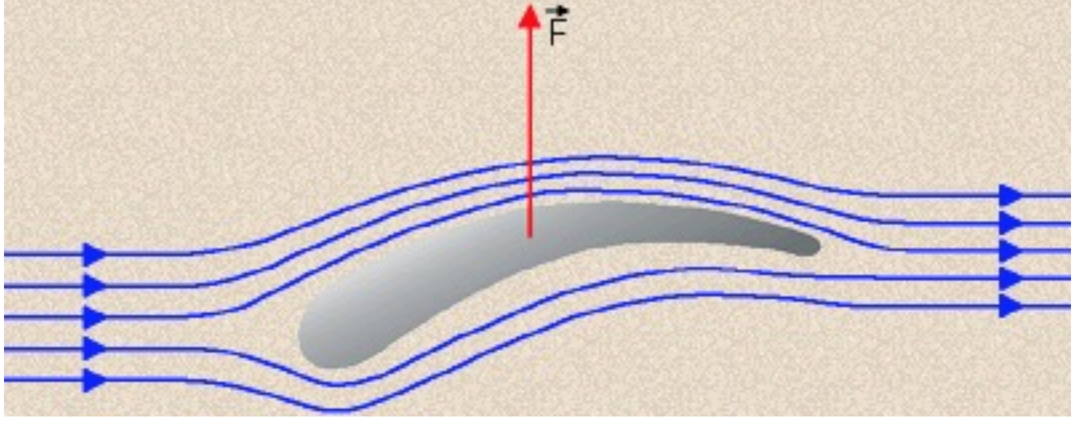
Lungo una linea di flusso orizzontale (y=0)

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \cos\tan te$$

Ad un'aumento della velocità del fluido corrisponde una diminuzione della pressione

Portanza delle ali di un aereo

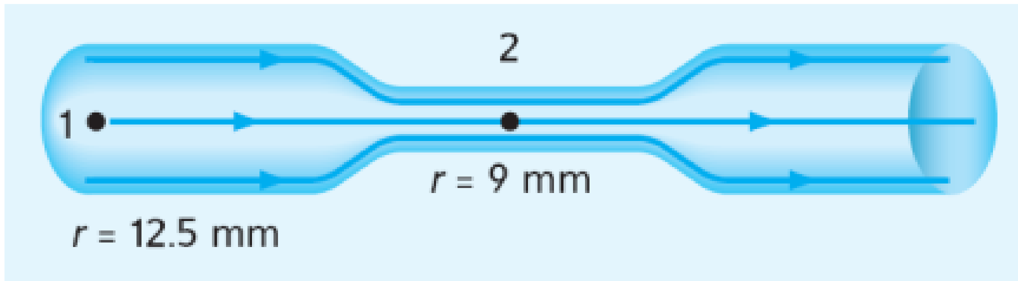
- Con una particolare struttura geometrica dell’ala si crea una corrente d’aria con maggiore velocità sopra l’ala
- Questo significa che la pressione è minore dalla parte superiore dell’ala
- La maggiore pressione dal basso crea un forza verso l’alto



Evidenza della formula di Bernoulli

- Per un auto in movimento l’aria ha una identica pressione ai suoi lati
- Quando l’auto viene superata da un camion si crea un canale stretto in cui l’aria aumenta la sua velocità (diminuisce la sezione, quindi aumenta la velocità per l’equazione di continuità)
- Dall’equazione di Bernulli l’aumento della velocità comporta una diminuizione di pressione dal lato in cui avviene il sorpasso del camion
- Complessivamente si crea una forza netta che spinge l’auto verso il camion

Esempio appl. Eq. Bernoulli



- L'acqua scorre nel tubo in figura, nel punto 1 si ha una pressione P_1=51 kPa e la velocità del fluido è v1=1.8 m/s. Determinare velocità e pressione nel punto 2

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = (1.8 m/s) \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = 3.5 m/s$$

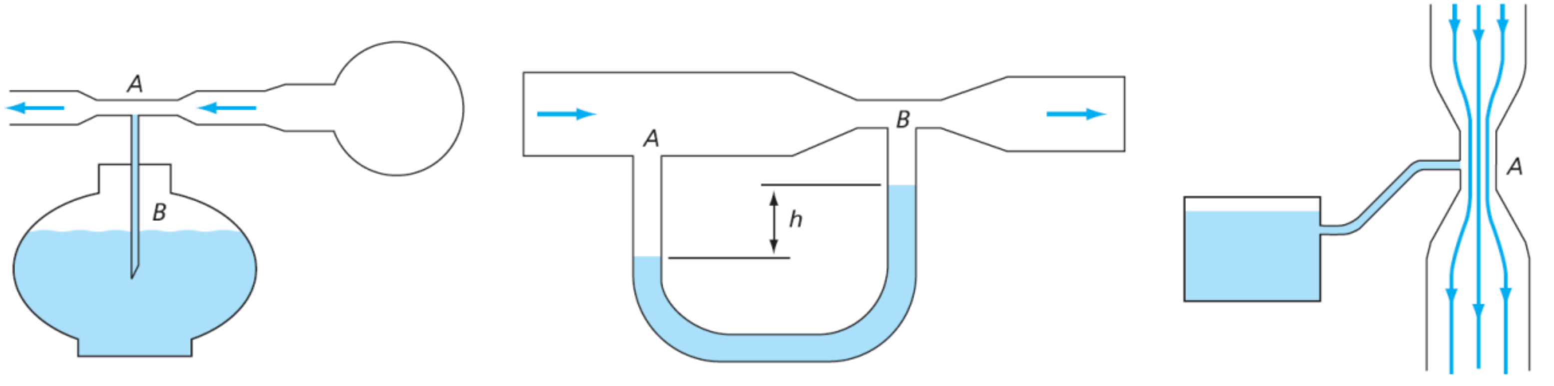
$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho [v_1^2 - v_2^2]$$

$$p_2 = (5.1 \times 10^4 Pa) + \frac{1}{2}(10^3 kg/m^3)[(1.8 m/s)^2 - (3.5 m/s)^2] = 4.7 \times 10^3 Pa$$

Equazione di Bernoulli

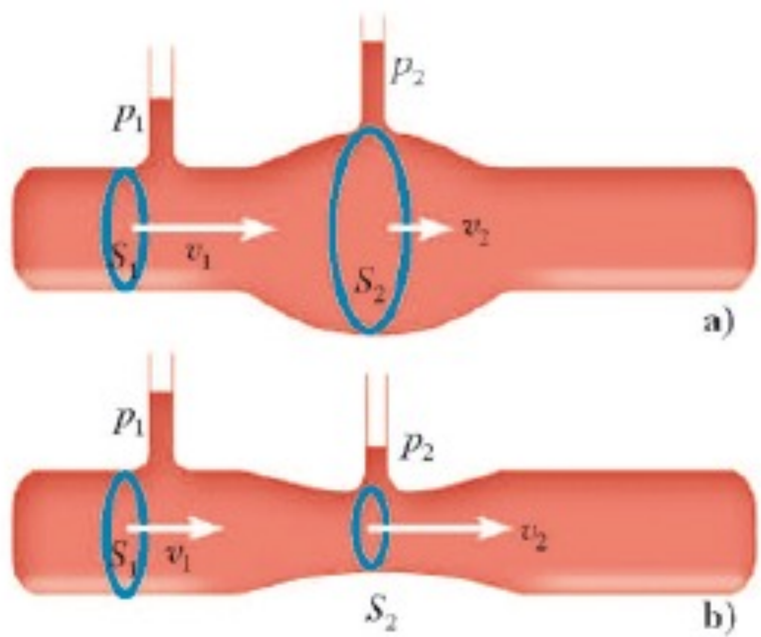
$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{costante}$$



- In un nebulizzatore viene spinta aria a grande velocità in una strozzatura, questo comporta una riduzione della pressione dell'aria nel punto A, tale riduzione è sufficiente a far risalire il liquido ed a fuoriuscire dal contenitore
- Il venturimetro misura la velocità di un fluido utilizzando la differenza di pressione che comporta la differenza tra velocità del fluido nei punti A e B
- I carburatori contengono un tubo di venturi che abbassando la pressione in A consente di risucchiare la benzina dal serbatoio

Aneurisma/Stenosi ed equaz. Bernoulli

- La dilatazione (aneurisma) e restringimento (stenosi) di un vaso sanguigno sono patologie vascolari comuni



Aneurisma

Teorema di Bernoulli per un condotto orizzontale ($\Delta h=0$):

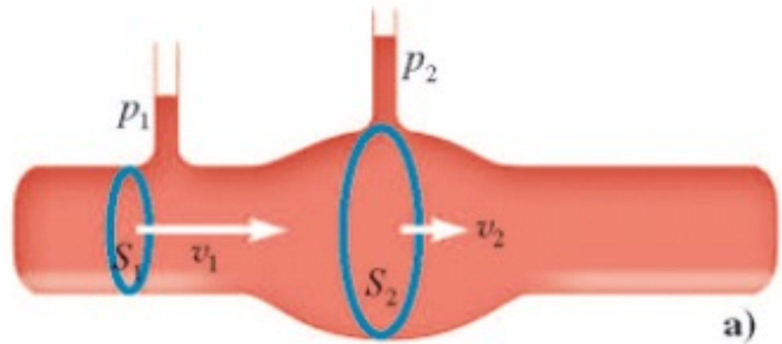
$p_1 + ½ \rho v_1^2 = p_2 + ½ \rho v_2^2$

$p_1 - p_2 = ½ \rho (v_2^2 - v_1^2)$

$S_1 v_1 = v_2 S_2$

da cui $v_1 = v_2 S_2 / S_1$

$p_1 - p_2 = ½ \rho v_2^2 (1 - S_2^2/S_1^2)$



Nel caso di dilatazione $S_2>S_1$ da cui $p_1 - p_2 < 0 \rightarrow \mathbf{p_2>p_1}$

Se in un condotto c'è un allargamento, la velocità del fluido che vi scorre diminuisce e la pressione aumenta. Pertanto un **aneurisma**, che costituisce una dilatazione patologica di un'arteria, è sempre destinato a peggiorare, se non curato tempestivamente, perché quanto più il segmento vascolare si allarga, tanto più aumenta la pressione del sangue che, premendo le pareti del vaso verso l'esterno, ne incrementa la dilatazione che può degenerare in una rottura (con conseguente emorragia, a volte letale)

Stenosi

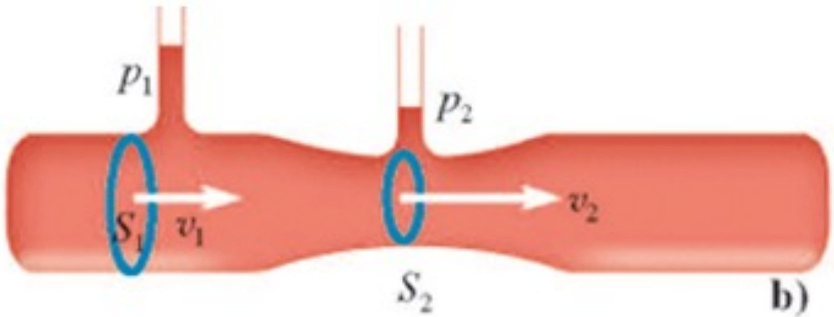
Teorema di Bernoulli per un condotto orizzontale ($\Delta h=0$):

$p_1 + ½ \rho v_1^2 = p_2 + ½ \rho v_2^2$

$p_1 - p_2 = ½ \rho (v_2^2 - v_1^2)$

$S_1 v_1 = v_2 S_2$

da cui $v_1 = v_2 S_2 / S_1$

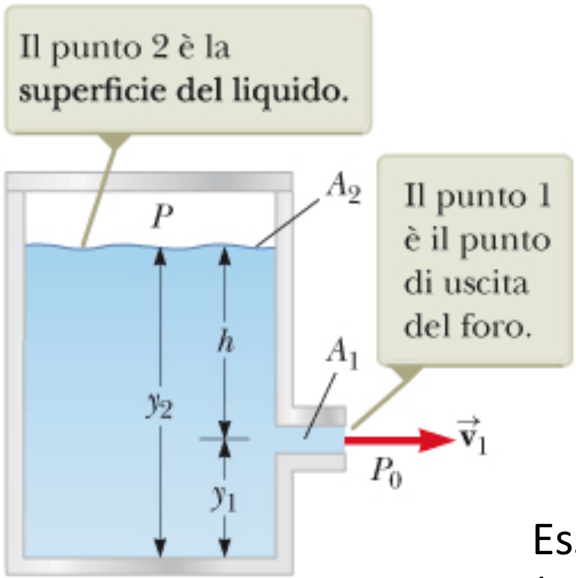


$p_1 - p_2 = ½ \rho v_2^2(1 - S_2^2/S_1^2)$

Nel caso di restringimento $S_2<S_1 \rightarrow p_1 - p_2 > 0 \rightarrow \mathbf{p_2<p_1}$

Vi è una tendenza ad un'ulteriore restringimento!!!

Esempio appl. Eq. Bernoulli



Un serbatoio chiuso avente un liquido con una certa densità ha un foro da un lato alla quota y_1 rispetto al fondo. L’aria al di sopra del livello del fluido è mantenuta alla pressione P.
Determinare la velocità con cui il fluido esce dal foro quando il livello del fluido è al di sopra del foro di una altezza h

Essendo il recipiente molto piu’ largo del foro (A_2>>A_1) si puo’ assumere che la velocità del fluido nella parte superiore sia nulla

$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p + \rho g y_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_{atm})}{\rho} + 2g(y_2 - y_1)}$$

$$y_2 - y_1 = h$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_{atm})}{\rho} + 2gh}$$

Se P >>P_{atm} in maniera da trascurare il termine 2gh allora la velocità in uscita dal foro dipende principalmente da P e si può trascurare il secondo termine

Se il serbatoio è aperto allora $P = P_{atm}$

$$v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} = \sqrt{2gh}$$

v1 è diretta in direzione orizzontale

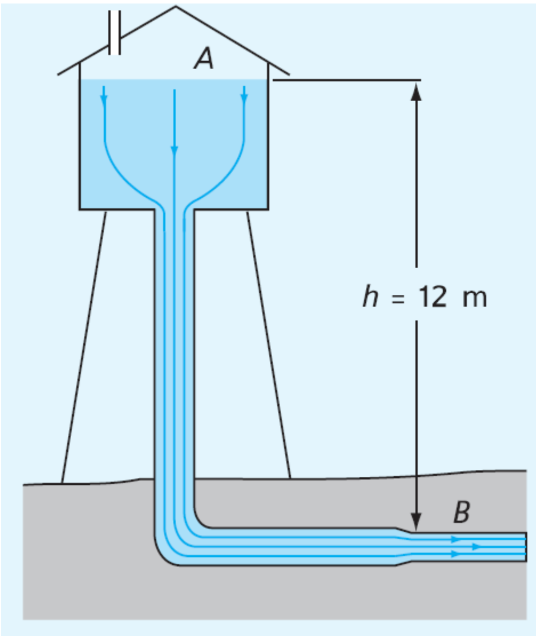
L'acqua arriva al suolo in un tempo t

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad 0 = y_1 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad t = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

Alla distanza orizzontale:

$$x_f = x_i + v_{xi}t = 0 + \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

Esempio appl. Eq. Bernoulli



- Un serbatoio d'acqua è posto 12 m sopra la conduttura e la velocità in B è 16 m/s
- Determinare la pressione relativa nei punti A e B

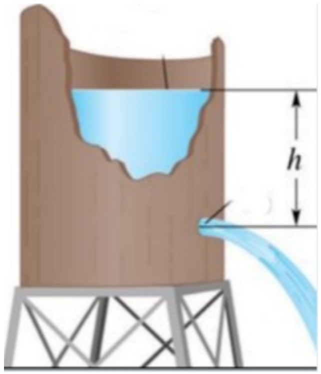
$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A{}^2 + \rho g y_A = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B{}^2 + \rho g y_B$$

$v_A \approx 0$ essendo la supeficie A molto grande

$$p_B - p_A = \rho g(y_A - y_B) - \frac{1}{2}\rho v_B{}^2$$

$$p_B - p_A = (10^3 kg/m^3)[(9.8m/s^2)(12m) - \frac{1}{2}(16m/s)^2] = -1 \times 10^4 Pa$$

Esempio



- Trovare il volume d'acqua che esce in 55s da un serbatoio attraverso un'apertura di d=1,9 cm di diametro posta a h= 6,3 m sotto la superficie dell'acqua, trascurando effetti di turbolenza e viscosità.

$$P_{atm} + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + \rho g h = Patm + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

$v_1 \ll v_2$ $\quad$ $\rho g h = \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$ $\quad$ $v_2 = \sqrt{2gh}$

$$V_{acqua} = A \cdot v_2 \cdot \Delta t = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot v_2 \cdot \Delta t$$