Giuseppe Quaremba

Appunti di Analisi Matematica

DISPENSA N.1

CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

I DIAGRAMMI DI VENN

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI: INTERSEZIONE, UNIONE, DIFFERENZA, COMPLEMENTARE

PARTIZIONI DI UN INSIEME

ESERCIZI

CENNI DI TEORIA DEGLI INSIEMI

Il concetto di **insieme**[1], così come quello di **elemento di un insieme**, si assume in matematica come primitivo o intuitivo, cioè come non riconducibile ad altri concetti noti.

Un insieme è costituito di elementi, che si dicono appartenere ad esso. Ad esempio, l'insieme I i cui elementi siano a, b, c, ... lo indicheremo con: $I = \{a, b, c, \dots\}$.

Per indicare che a è [non è] un elemento dell'insieme I si usa la notazione: $a \in I$, $[a \notin I]$ che si legge a appartiene [non appartiene] ad I.

L'**insieme vuoto** si indica con il simbolo: $\emptyset$. Per indicare che A è un **sottoinsieme** di I si usa la notazione: $A \subseteq I$, che si legge A è contenuto (incluso) in I. La notazione $I \supseteq A$, indica che I contiene A. Le notazioni $A \nsubseteq I$, $I \nsupseteq A$, indicano che A non è un sottoinsieme di I, e si leggono A non è contenuto (o incluso) in I, I non contiene (o include) A.

Le notazioni $A \subset I$, $I \supset A$, si usano per indicare che A è **sottoinsieme proprio** di I, e si leggono rispettivamente A è contenuto (o incluso) propriamente (o strettamente) in I, I contiene (o include) propriamente (o strettamente) A.

Le notazioni $A \not\subset I$, $I \not\supset A$, indicano che A non è un sottoinsieme proprio di I, e si leggono: A non è contenuto (o incluso) propriamente (o strettamente) I, ecc.

Se gli insiemi A ed I hanno gli stessi elementi si dice che coincidono o sono uguali: $A = I$.

Un sottoinsieme A di un insieme I è costituito, di norma, da tutti e soli gli elementi x di I che hanno una medesima **proprietà** θ, e si scrive: $A = \{x : x \in I, \theta\}$, che pone in risalto la proprietà θ.

[1] La parola insieme si adopera come sinonimo di classe, aggregato, famiglia, collezione, ecc.

Ad esempio, $A = \{x : x \in N, x \text{ è } divisibile\ per\ 2\}$, è il sottoinsieme dei numeri naturali $N = \{1,2,3, \dots\}$, degli interi naturali pari.

Si indica con $\mathcal{P}(I)$ l'**insieme delle parti di *I***, i cui elementi sono i sottoinsiemi di un assegnato insieme I. Ad esempio, se l'insieme $I = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(I)$ è l'insieme i cui elementi sono:

a) Insieme vuoto $\emptyset$
b) Gli insiemi $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
c) Gli insiemi $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$
d) L'insieme $I = \{a, b, c\}$

In totale $\mathcal{P}(I)$ consta di $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ elementi.

I DIAGRAMMI DI VENN[2]

Per illustrare in modo intuitivo le operazioni sugli insiemi e le relazioni di inclusione, si suole fare ricorso ad uno schema grafico, detto **diagrammi di Venn**, secondo il quale un insieme è rappresentato da una regione di piano (ad esempio, una circonferenza, una spezzata chiusa, ecc.) e gli elementi dell'insieme sono rappresentati da punti del piano appartenenti a tale regione.

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI: INTERSEZIONE, UNIONE, DIFFERENZA, COMPLEMENTARE

Se A e B sono due sottoinsiemi di uno stesso insieme I, si chiama **intersezione** dei due insiemi A e B l'insieme formato dagli elementi comuni ad A ed a B (Fig.1). Tale insieme si indica col simbolo: $A \cap B$, e si legge A intersezione B.

[2] John Venn, matematico e statistico inglese, noto per i suoi contributi nel campo della logica, della teoria della probabilità.

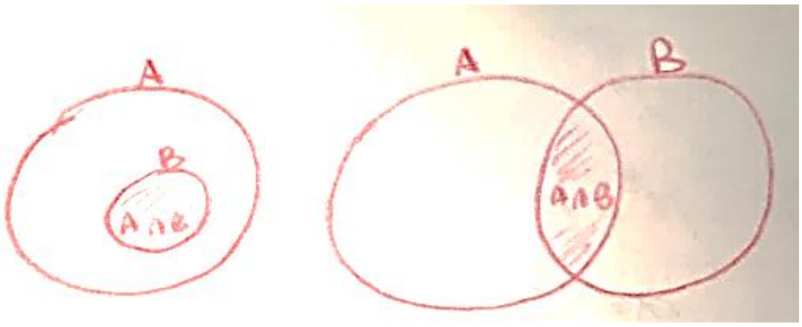


Figura 1- Esempi di intersezioni tra due insiemi

Se A e B non hanno elementi in comune si ha $A \cap B = \emptyset$, e i due insiemi si dicono **disgiunti** (Fig.2).

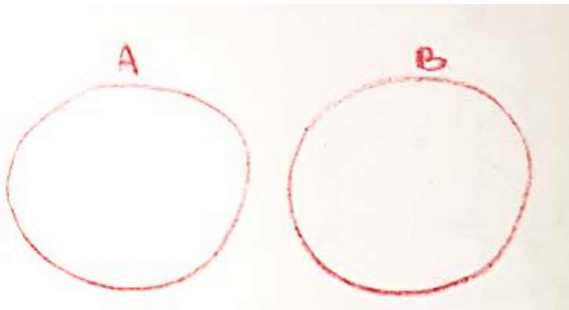


Figura 2- Esempio di intersezione vuota

Si chiama **unione** dei due insiemi A e B l'insieme formato dagli elementi di entrambi, ossia elementi che appartengono ad almeno uno dei due (Fig.3). Tale insieme si indica $A \cup B$, che si legge A unione B.

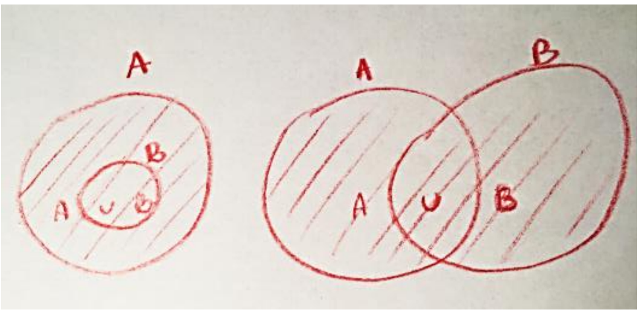


Figura 3- Esempi di unione tra due insiemi

Osserviamo che $A \cap \emptyset = \emptyset$ e $A \cup \emptyset = A$. Notiamo ancora che $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Vale la seguente **legge di assorbimento** relativa alle operazioni di intersezione e di unione (Fig.4):

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$$

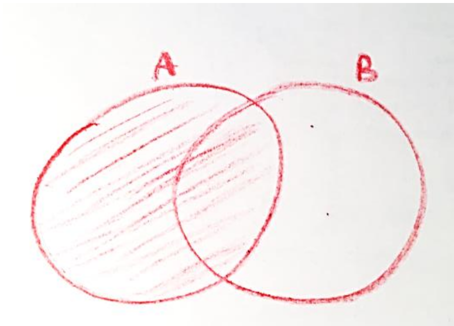


Figura 4- Legge di assorbimento

Per l'intersezione e l'unione valgono le seguenti proprietà:

i. Proprietà iterativa: $A \cup A = A, \; A \cap A = A$
ii. Proprietà commutativa: $A \cap B = B \cap A, \; A \cup B = B \cup A$
iii. Proprietà associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
iv. Proprietà distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

L'intersezione e l'unione di qualsivoglia sottoinsiemi di I si indicano rispettivamente con:

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k, \qquad \bigcup_{k=1}^{n} A_k\,, n \in N$$

Si chiama **differenza** dei due sottoinsiemi A e B di I, e si indica con $A - B$, l'insieme formato dagli elementi di A che non appartengono a B (Fig.5).

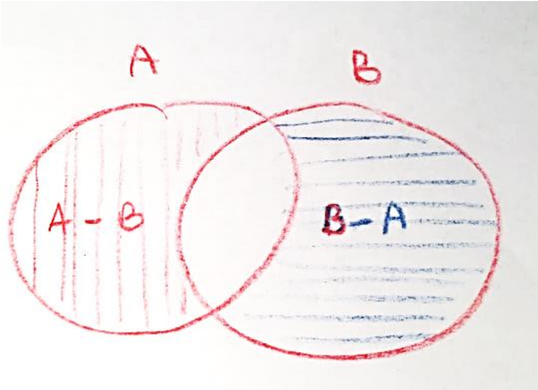


Figura 5- Insiemi differenza

Se $B \subseteq A$ l'insieme differenza $A - B$, si chiama insieme **complementare** (Fig.6), o complementare di B rispetto ad A, e si indica con: $\mathcal{C}_A B$.

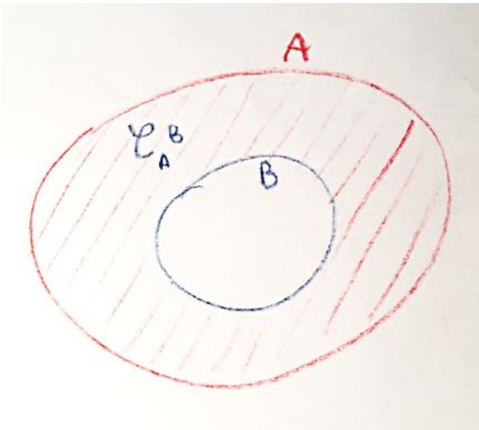


Figura 6 - Insieme complementare

Ad esempio, nell'insieme degli interi naturali N, il complementare dell'insieme N_1 degli interi dispari è l'insieme N_2 degli interi pari.

PARTIZIONI DI UN INSIEME

Si dice che certi sottoinsiemi A, B, C, ... di I, non vuoti, realizzano una **partizione** dell'insieme I (Fig.7), se essi sono a due a due disgiunti e se si ha: $I = A \cup B \cup C \cup \dots, \dots$

I sottoinsiemi A, B, C, ... si chiamano le **classi della partizione**.

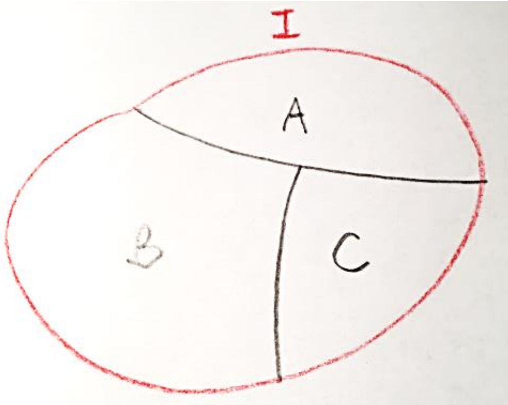
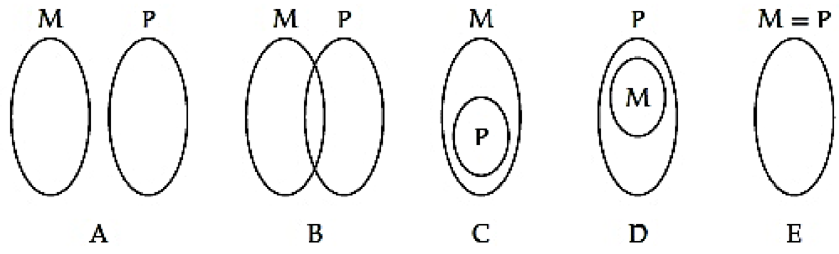


Figura 7- Esempio di partizione di un insieme I

ESERCIZI

. ***Associa a ogni diagramma la corretta rappresentazione grafica (ci può essere più di una risposta corretta).***

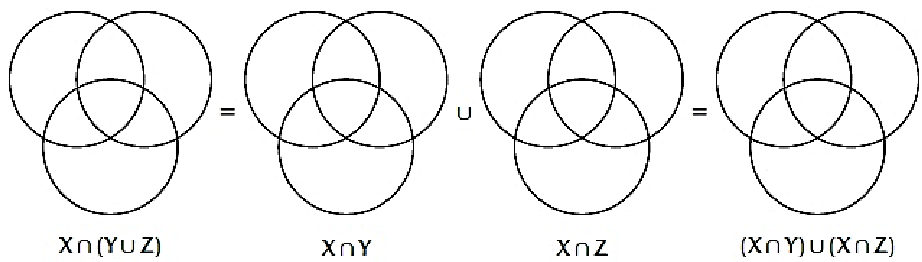
a) $M \subset P$	A	B	C	D	E
b) $P \supseteq M$	A	B	C	D	E
c) $M \subseteq (M \cup P)$	A	B	C	D	E
d) $M \not\subset P$	A	B	C	D	E
e) $P \subset (P \cup M)$	A	B	C	D	E
f) $M \neq P$	A	B	C	D	E



. ***Completa la seguente tabella:***

Simbologia	Significato
$A = \{a, b, c, d\}$	A è formato dagli .... a, b, c, d.
$a \in A$	L'elemento a .... all'insieme A.
....	L'elemento f non appartiene all'insieme A.
$B \subset A$	L'insieme B è ...... nell'insieme A, ovvero B è un ...... di A.
....	L'insieme vuoto è un sottoinsieme di A.
....	L'insieme C è l'unione degli insiemi A e B.
$D = A \cap B$	L'insieme D è .... degli insiemi A e B.
$A \cap F = \emptyset$	A e F sono insiemi .... cioè non hanno ....
$L = \complement_A B$	L'insieme L è ....
....	L'insieme M è la differenza tra A e B.

Dimostra la proprietà distributiva dell'intersezione rispetto l'unione annerendo gli spazi opportuni.

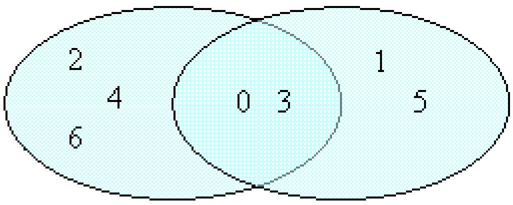


Esercizi svolti

Determinare l'unione e l'intersezione dei seguenti insiemi rappresentandoli graficamente:
A = {0, 2, 3, 4, 6} e B = {0, 1, 3, 5}

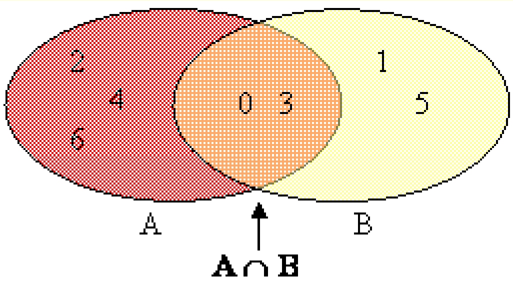
L'unione fornisce l'insieme formato da tutti gli elementi di A e da tutti gli elementi di B ripetuti una volta sola. Si ha perciò: $A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
L'intersezione fornisce l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A, sia a B: $A \cap B = \{ 0, 3 \}$

<u>Graficamente si ha:</u>



A B

A ∪ B



Determinare l'unione e l'intersezione dei seguenti insiemi rappresentando il risultato per elencazione:
$A = \{x \mid x \in N \text{ e } x < 10 \}$ e $B = \{ x \mid x \in N \text{ e } 5 < x < 15 \}$ con N : insieme dei numeri naturali.

L'unione fornisce l'insieme formato da tutti gli elementi di A e da tutti gli elementi di B ripetuti una volta sola. Si ha perciò:
$A \cup B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \} \cup \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 \} =$
$= \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 \}$

L'intersezione fornisce l'insieme formato dagli elementi che appartengono sia ad A, sia a B:
$A \cap B = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \} \cap \{ 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 \} = \{ 6, 7, 8, 9 \}$

Dato l'insieme A = { x | x $\in$ N e x < 15} indica quali fra gli insiemi:

B = { 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 }
C = { 10, 11, 12, 13, 14}
D = {1, 2, 3, 4, 5 }
E = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 }

costituiscono una partizione di A.

Innanzitutto scriviamo l'insieme A per elencazione:
A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 }

Ricordando che una partizione è caratterizzata da insiemi che:

- sono disgiunti fra loro;
- uniti formano l'insieme A considerato,

possiamo concludere che **gli insiemi che soddisfano tali condizioni sono B ed E**.

Infatti si ha:
$B \cap E = \varnothing$
$B \cup E$ = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 } = A

D'altra parte B e C non possono far parte di una partizione di A poiché non sono disgiunti fra loro: $B \cap C$ = {10, 12, 14}.
B e D non possono costituire una partizione di A poiché la loro unione non dà l'insieme A.
D ed E non possono far parte di una partizione di A poiché non sono disgiunti fra loro: $D \cap E$ = {1, 3, 5}.

Dati gli insiemi:

A = { x | x $\in$ N e x < 8 }
B = { x | x $\in$ N e 15 < x < 20 }
C = { 2, 4, 6, 9 }

D = {15, 16, 17 }

Provare che vale la seguente uguaglianza:

$(A \cup B) - (C \cup D) = (A - C) \cup (B - D)$

Rappresentiamo per elencazione gli insiemi A e B :

A = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 }

B = {16, 17, 18, 19 }

Determiniamo:

$A \cup B$ = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 16, 17, 18, 19 }

$C \cup D$ = { 2, 4, 6, 15, 16, 17 }

Otteniamo:

$(A \cup B) - (C \cup D)$ = **{ 0, 1, 3, 5, 7, 18, 19 }**

Determiniamo:

A – C = { 0, 1, 3, 5, 7 }

B – D = { 18, 19 }

Otteniamo:

$(A - C) \cup (B - D)$ = **{ 0, 1, 3, 5, 7, 18, 19 }** = $(A \cup B) - (C \cup D)$

Trova tutti i possibili insiemi che si possono aggiungere a B ={a, i, u} in modo da avere una partizione dell'insieme A = { a, e, i, o, u }

La prima possibilità è data dal complementare di B rispetto ad A: C = { e, o }
La partizione è allora la seguente:
B = { a, i, u } ; **C = { e, o }**

La seconda possibilità consiste nel considerare la partizione di C (in questo caso unica) determinata da D = { e } e E = { o }.
La partizione, in questo caso, è la seguente:
B = { a, i, u } ; **D = { e } ; E = { o }**

Dati gli insiemi:
A= { x | $x \in N$ e x è un multiplo di 2 minore di 20 }
B = { x | $x \in N$ e x è un multiplo di 3 minore di 30 }

C = { x | x $\in$ N e x è un multiplo di 4 minore di 40 }
D = { x | x $\in$ N e x è un multiplo di 5 minore di 50 }
Determinare l'insieme E = (A $\cap$ B) $\cup$ (C $\cap$ D)

Rappresentiamo per elencazione gli insiemi considerati:
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 }
B = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27 }
C = { 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 }
D = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 }
Determiniamo:
A $\cap$ B = { 6, 12, 18 }
C $\cap$ D = { 20 }
Otteniamo così:
E = (A $\cap$ B) $\cup$ (C $\cap$ D) = { 6, 12, 18, 20 }

Dati gli insiemi:
A = { x | x $\in$ N e x è un divisore di 24 }
B = { x | x $\in$ N e 4 < x < 9 }
C = { 0, 2, 4, 8, 16 }
Determinare l'insieme:
D = (A $\cup$ B) $\cap$ (C – A)

Rappresentiamo per elencazione gli insiemi A e B
A = { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 }
B = { 5, 6, 7, 8 }

Determiniamo:
A $\cup$ B = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 24 }
C – A = { 0, 16 }
D = (A $\cup$ B) $\cap$ (C – A) = $\varnothing$