**Università di Napoli Federico II, Corso di Laurea triennale in Matematica**

**Programma del corso (6 CFU) di**

# SISTEMI DINAMICI, 2022-2023

**Docente: Bruno Buonomo**

## Richiami di algebra lineare e sistemi lineari

*[G] Capitolo 1, par. 1-2 e Capitolo 2 par 5.*

Spazi vettoriali. Matrici e applicazioni lineari. Determinante e traccia di una matrice. Somma diretta. Autovalori reali. Diagonalizzazione. Complessificazione di uno spazio vettoriale. Operatori semisemplici. Sistemi lineari. Esponenziale di matrice. Teorema fondamentale dei sistemi lineari.

## Questioni preliminari sui sistemi dinamici

*[W] Capitolo 7 par 4, [G] Capitolo 3 par 10.*

*[APP] Note delle lezioni disponibili su teams (richiedere eventualmente il codice)*

Modelli di Malthus, Verhulst e Gompertz. Richiami sul Teorema di esistenza e unicità di Cauchy. Sistemi autonomi. Proprietà di invarianza rispetto a traslazioni del tempo. Proprietà di non intersezione di traiettorie. Flusso. Definizione di Sistema Dinamico.

## Elementi di teoria della stabilità

*[G] Capitolo 2, par 6, [W] Capitolo 1 (par. 1, 2 e 5) e Capitolo 2;*

*Esercizi: [W] par 1.6, n.1 e par 2.1, n. 5.*

Equilibri di campi vettoriali. Equazioni differenziali lineari planari: classificazione degli equilibri (nodo, sella, fuoco, centro). Definizioni di stabilità alla Lyapunov e stabilità asintotica. Metodo indiretto di Lyapunov (o Teorema di Linearizzazione). Funzione di Lyapunov. Metodo diretto di Lyapunov.

## Varietà invarianti, teoria della varietà centrale e forme normali

*[W] Capitolo 3 par 1,2 e 4, Capitolo 18 par 1, 3 e 5, Capitolo 19, par 2 e 2A.*

*Esercizi, [W] par 3.8, n. 24 e par. 18.7, n.3*

Definizione di insieme e di varietà invariante. Varietà invarianti per campi vettoriali lineari autonomi: sottospazi stabile, instabile e centrale. Dimostrazione dell'invarianza. Esempi di determinazione di varietà invarianti per sistemi lineari. Varietà invarianti di sistemi non lineari autonomi. Varietà centrali di campi vettoriali. Determinazione mediante approssimazione. Forme normali: forma normale per la biforcazione di Poincaré-Andronov-Hopf *(facoltativo)*.

## Criteri notevoli per campi vettoriali autonomi

*[W] Cap. 4, Cap. 7, par. 7.4, Cap. 8, par. da 1 a 3. Cap. 9. Cap. 19, par. 2A e par. 12 fino Teor. 19.12.6.*

*[M] Cap. 7, par 3.*

Criteri di non esistenza di orbite periodiche per sistemi planari autonomi: criterio di Bendixson e di Dulac. Proprietà del flusso di campi vettoriali autonomi. Comportamento asintotico: insieme omega e alfa limite. Proprietà degli insiemi omega limite. Teorema di LaSalle e applicazione alla stabilità per il modello SEIR. Teorema di Poincaré-Bendixson *(dimostrazione facoltativa)*. Coniugio ed equivalenza di campi vettoriali. Teorema di Hartman-Grobman.

## Modelli a tempo discreto

*[SS] Capitolo 3.*

Equazioni alle differenze: espressione generale e ordine. Soluzione generale dell’equazione di Malthus discreta. Equazioni del primo ordine: definizione di stabilità e stabilità per linearizzazione. Orbite periodiche e relativo criterio di stabilità. Teoremi di Singer e di Sharkowsly *(senza dimostrazione)*. Analisi della mappa logistica.

## Elementi di teoria delle biforcazioni

*[W] Capitolo 20, par 1, 2, 3.*

Biforcazioni di punti fissi di campi vettoriali. Caso dell'autovalore nullo singolo con esempi. Condizioni generali di biforcazione: Biforcazione nodo-sella, transcritica, pitchfork. Biforcaz. di Poincaré-Andronov-Hopf.

## Applicazioni

*[M] Cap. 3, par 2 e 4, Cap. 7, par. 1-2-3.*
Modelli epidemici: Modello SIR senza demografia. Modello SIR con demografia: esistenza e stabilità locale degli equilibri. Modello SEIR: analisi locale e stabilità locale dell'equilibrio disease—free mediante la teoria di Lyapunov. Dinamica delle popolazioni*: Modello di Lotka-Volterra. Principio di Volterra. Competizione. Principio di esclusione competitiva.

## Testi consigliati:

[W] S. Wiggins; Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer, 2003

[G] Appunti di Fisica Matematica 3 del Prof. Guido Gentile, disponibili alla pagina web:
http://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2014-2015/FM410/testo.html

[M] M. Martcheva, An Introduction to Mathematical Epidemiology, Texts in Applied Mathematics, Springer, 2015.

[SS] S. Salsa, A. Squellati. Modelli dinamici e controllo ottimo. Egea, 2006

[APP] Per la parte di Dinamica delle Popolazioni consultare gli appunti delle lezioni disponibili su teams (chiedere eventualmente il codice di accesso al docente)

## Per ulteriori approfondimenti

M. W. Hirsch, S. Smale; Differential equations, dynamical systems and linear algebra. Academic Press, 1974.
J. Guckenheimer, P. Holmes; Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer, 1990