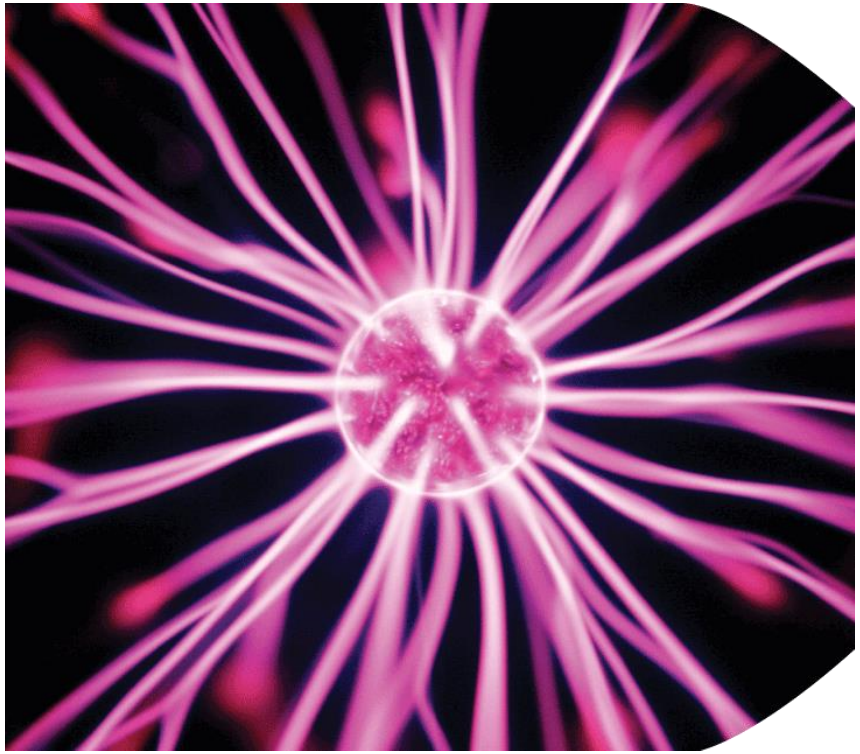
FISICA II



Lez. 3 – Legge di Gauss

Prof. Giovanni Mettivier

Prof. Giovanni Mettivier, PhD

Dipartimento Scienze Fisiche

Università di Napoli “Federico II”

Compl. Univ. Monte S.Angelo

Via Cintia, I-80126, Napoli

mettivier@na.infn.it

+39-081-676137

Riassunto

- Disegnare, per una particella carica di segno noto, il vettore campo elettrico E in un certo punto, con la sua direzione e il suo verso.
- Identificare, in un certo punto del campo elettrico creato da una particella carica, il verso del vettore ***E*** nel caso che la carica sia positiva oppure negativa.
- Applicare, per un certo punto del campo elettrico creato da una particella carica, la relazione che intercorre tra l'intensità del campo ***E***, il valore della carica *q* e la distanza *r* che separa il punto dalla particella.
- Quando in un punto è presente più di un campo elettrico, disegnare il vettore di ciascun campo e poi trovare il campo netto risultante sommando vettorialmente (e non scalarmente) i vari contributi dei singoli campi elettrici.

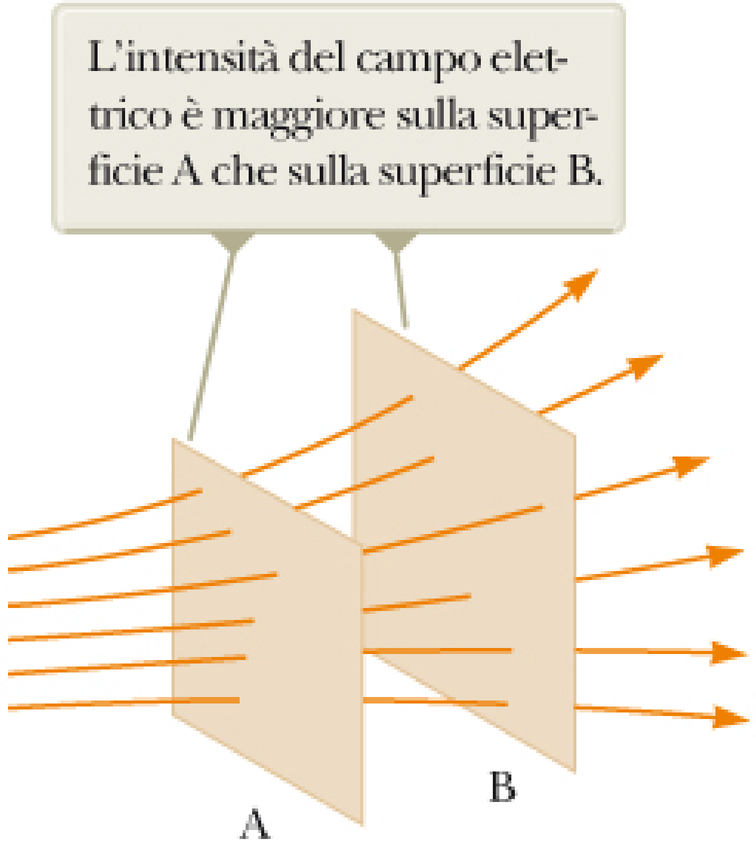
Obiettivi di apprendimento

- Illustrare che cosa sono le linee di campo elettrico, dove si originano e dove terminano, nonché il significato della loro densità.
- Sapere che la legge di Gauss lega il campo elettrico in tutti i punti all'interno di una superficie chiusa, reale o immaginaria, detta superficie gaussiana, alla carica netta complessiva racchiusa dalla superficie.
- Capire che il flusso di campo elettrico Φ è la quantità di campo elettrico che intercetta una superficie attraversandola.
- Sapere che un vettore ***A*** reale riferito ad una superficie piana è un vettore perpendicolare alla superficie avente modulo pari all'area della superficie.
- Rendervi conto che qualunque superficie può suddividersi in aree elementari sufficientemente piccole da poter essere assimilate a superfici piane, a cui si può attribuire un vettore di area infinitesimale *dA*, normale all'area elementare e di modulo uguale all'area elementare.

Un rappresentazione grafica conveniente per la visualizzazione della configurazione campo elettrico consiste nel tracciare delle linee che hanno in ogni punto la direzione orientata del vettore campo elettrico. Queste linee, chiamate **linee di campo elettrico**, sono legate al campo elettrico in qualunque regione dello spazio nel seguente modo:

-Il vettore campo elettrico ***E*** è tangente alle linee di forza in ogni punto

- Il numero di linee di forza per unità di area che attraversano una superficie perpendicolare alle linee stesse è proporzionale all'intensità del campo elettrico in quella regione. Quindi E è intenso dove le linee di forze sono fitte ed e debole dove esse si diradano.



Le regole per disegnare le linee di forza per una distribuzione di carica qualsiasi sono le seguenti:

- Le linee di forza per un insieme di cariche puntiformi devono avere origine dalle cariche positive e terminare sulle cariche negative. Nel caso di un eccesso di carica di un tipo, alcune linee inizieranno e termineranno all’infinito.
- il numero di linee di forza che escono da una carica positiva o che entrano in una carica negativa è proporzionale alla carica.
- due linee di forza non si possono intersecare.

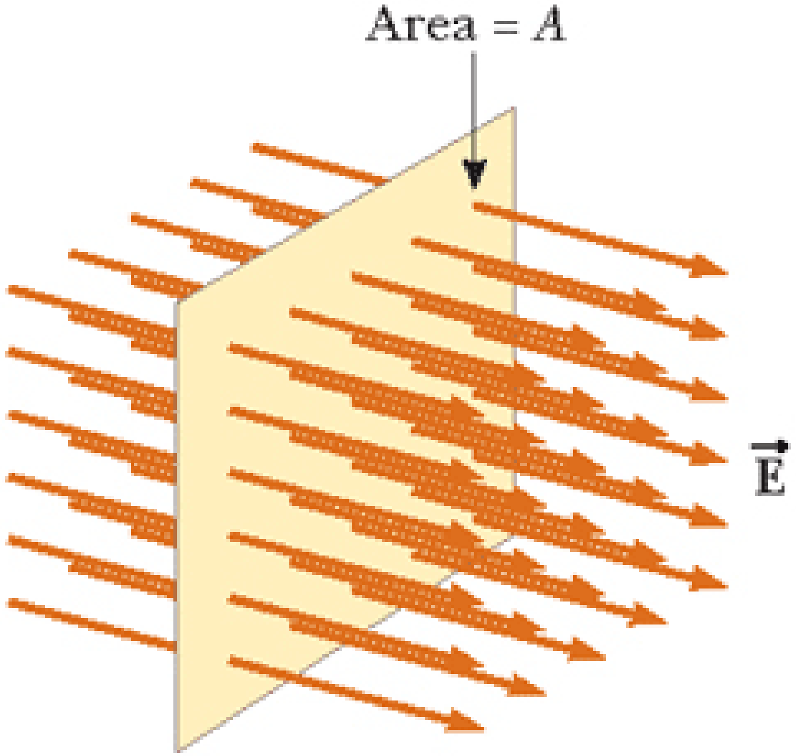
Flusso elettrico

Il **flusso elettrico** è una grandezza proporzionale al numero di linee di campo elettrico che attraversano una data superficie.

Il prodotto dell'intensità del campo elettrico ***E*** per l'area perpendicolare alla direzione del campo è chiamato flusso elettrico, Φ_E:

$$\Phi_E = EA$$

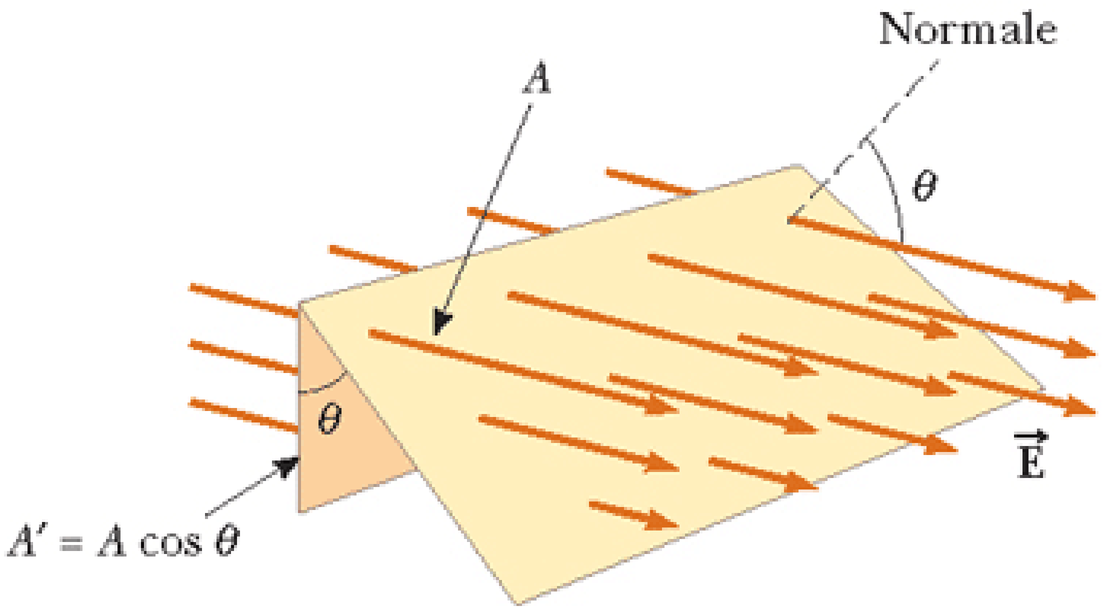
dalle unità SI di *E* e *A*, vediamo che il flusso ha come unità Nm^2/C.



Se la superficie considerata non è perpendicolare al campo, il numero di linee cha la attraversano deve essere minore di quanto dato. Ciò può essere facilmente compreso considerando la fig, dove la normale alla superficie di area *A* forma un angolo θ con la direzione del campo elettrico uniforme. Si noti che il numero di linee che attraversano quest'area è uguale al numero di linee che attraversano l'area proiettata A', perpendicolare al campo.

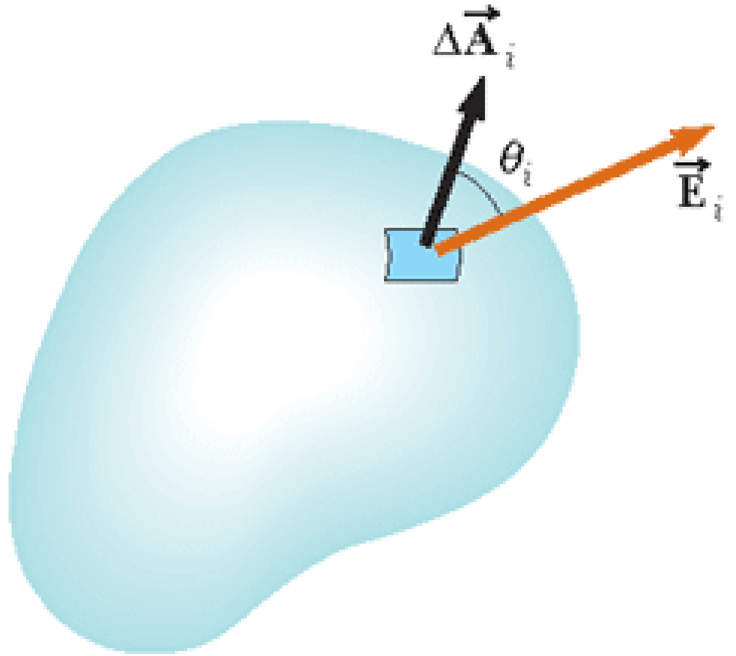
Le due aree sono legate dalla relazione $A' = A\cos\theta$. Poiché il flusso attraverso l'area *A* è uguale al flusso attraverso *A'*, si può concludere che il flusso desiderato è dato da

$$\Phi_E = EA\cos\theta$$



Nel caso più generale, il campo elettrico può variare sia in modulo che in direzione e verso sulla superficie in questione. Quindi, a meno che il campo non sia uniforme, la nostra definizione di flusso data ha significato soltanto su un piccolo elemento di area. Consideriamo una generica superficie, suddivisa in un gran numero di piccoli elementi, ciascuno di area $\Delta \mathbf{A}_i$ il cui modulo rappresenta l'area dell'*i*-esimo elemento e la cui direzione è per definizione perpendicolare alla superficie, come in fig.. Il flusso elettrico $\Delta\Phi_E$ attraverso questo piccolo elemento è dato da

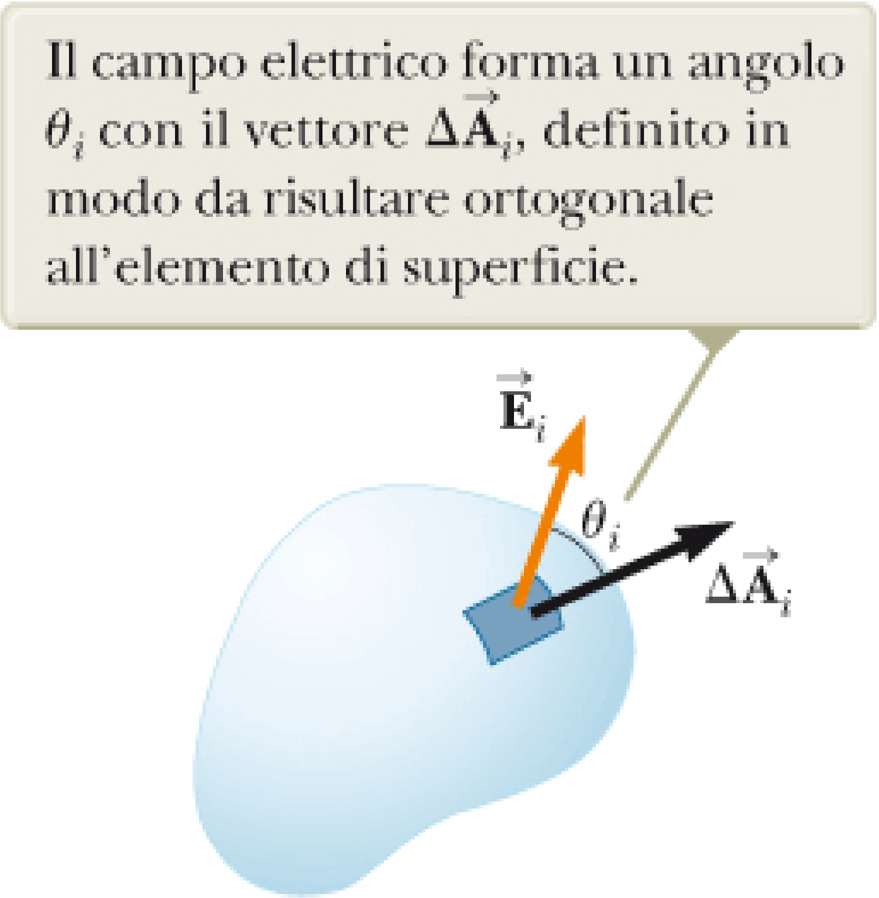
$$\Delta\Phi_E = E_i \Delta A_i \cos\theta_i = \vec{E}_i \Delta\vec{A}_i$$



Flusso elettrico

$$\Phi_E \approx \sum \vec{E}_i \Delta\vec{A}_i$$

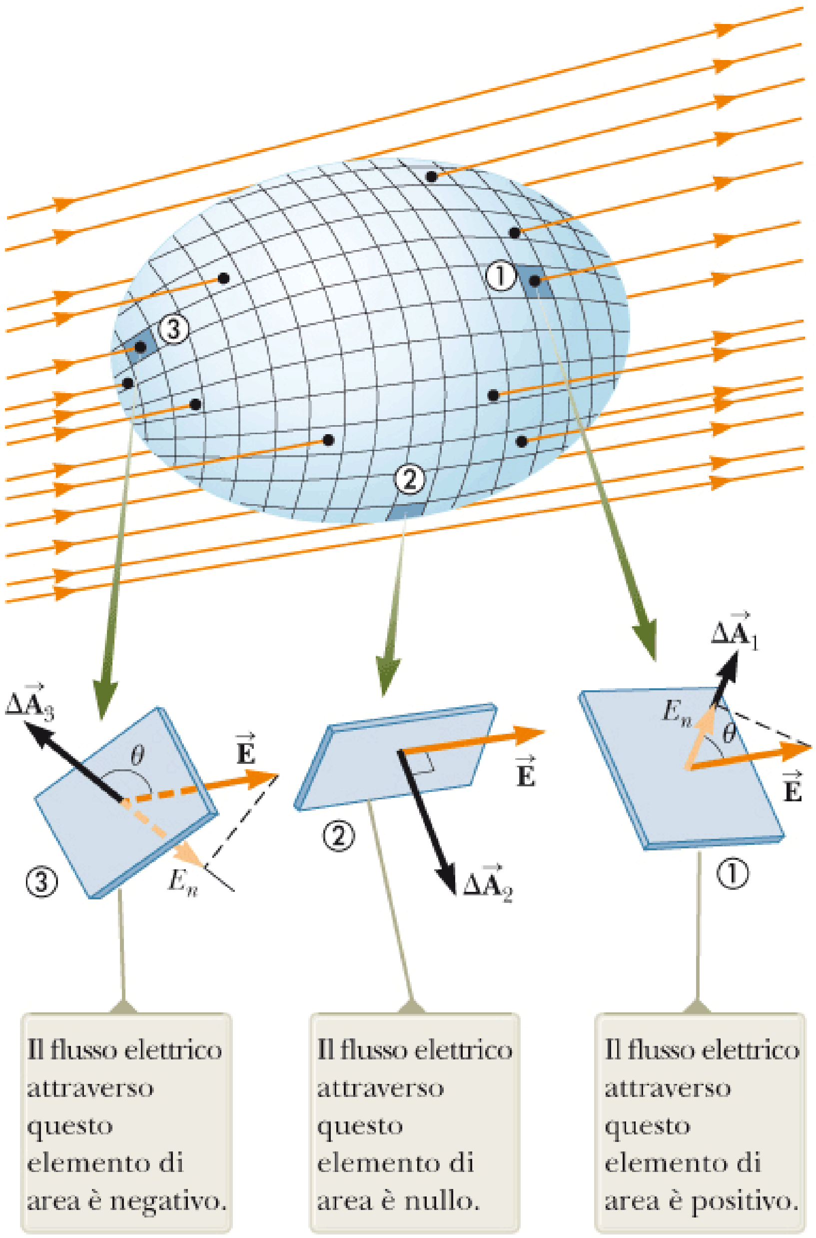
$$\Phi_E \equiv \lim_{\Delta A_i \to 0} \sum \vec{E}_i \Delta\vec{A}_i = \int_{superficie} \vec{E} d\vec{A}$$



Siamo spesso interessati a calcolare il flusso attraverso una superficie chiusa.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \oint E_n dA$$

in cui E_n rappresenta la componente del campo elettrico normale alla superficie.



Idee chiave

- Le ***linee di campo elettrico*** ci aiutano a visualizzare la direzione e il verso dei campi elettrici. In ogni punto il vettore campo elettrico è tangente alla linea di campo passante per quel punto. La densità di linee di campo in una cera regione è proporzionale al modulo del campo elettrico in quella regione. Di conseguenza, quanto più le linee sono assiepate, tanto più è intenso il campo.
- Le linee di campo elettrico sono uscenti dalle cariche positive ed entranti nelle cariche negative.
- Il flusso elettrico Φ attraverso una superficie è la quantità di campo elettrico che intercetta la superficie
- Il vettore area ***dA*** di un elemento di superficie è definito come un vettore perpendicolare all'elemento di superficie avente modulo pari all'area *dA* della superficie stessa
- Il flusso elettrico differenziale $d\Phi$ attraverso un elemento di superficie individuato dal vettore area ***dA*** è dato dal prodotto

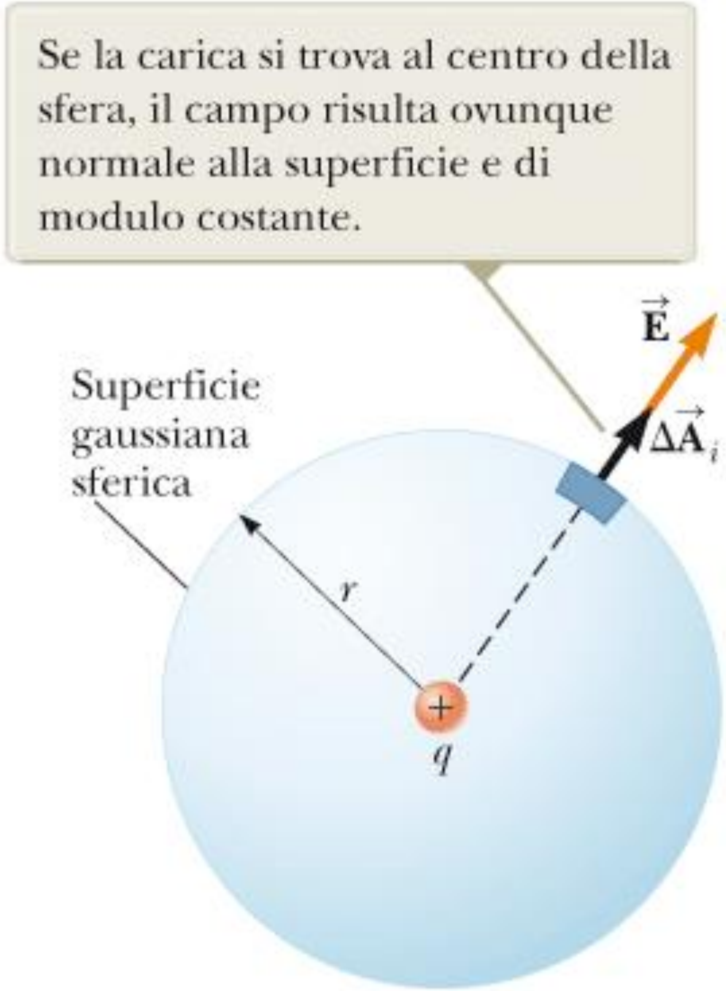
$$d\Phi = E\, dA$$

- Il flusso totale attraverso una superficie si ricava mediante un'integrazione estesa a tutta la superficie.
- Il flusso totale attraverso una superficie chiusa, utile nella formulazione della legge di gauss, si ricava mediante un'integrazione estesa a tutta la superficie.

Obiettivi di apprendimento

- Applicare la legge di Gauss nelle relazioni tra il flusso netto Φ attraverso una superficie chiusa e la carica netta q_{int} racchiusa.
- Capire come il segno algebrico della carica netta racchiusa sia legata al verso (uscente o entrante) del flusso netto attraverso la superficie gaussiana.
- Rendervi conto che le cariche esterne alla superficie gaussiana non contribuiscono al flusso netto attraverso la superficie chiusa.
- Ricavare l'espressione per il modulo del campo elettrico generato da una particella carica mediante la legge di Gauss.
- Sapere che per un corpo puntiforme carico e per una sfera uniformemente carica la legge di Gauss si applica facilmente a una superficie sferica concentrica.

Innanzitutto consideriamo una carica puntiforme positiva *q* posta al centro di una sfera di raggio *r* come in fig. Le linee di campo sono radiali e hanno verso uscente, per cui sono perpendicolari (o normali) alla superficie in ogni punto. Cioè, in ogni punto, ***E*** è parallelo al vettore $\Delta \mathbf{A}_i$ che rappresenta l'elemento locale di area $\Delta \mathbf{A}_i$. Quindi, per tutti i punti della superficie



$$\vec{E}\Delta\vec{A}_i = E_n \Delta A_i = E \Delta A_i$$

dall'eq. troviamo che il flusso totale attraverso la superficie è data da

$$\Phi_E = \oint E_n dA = \oint E dA = E \oint dA = EA$$

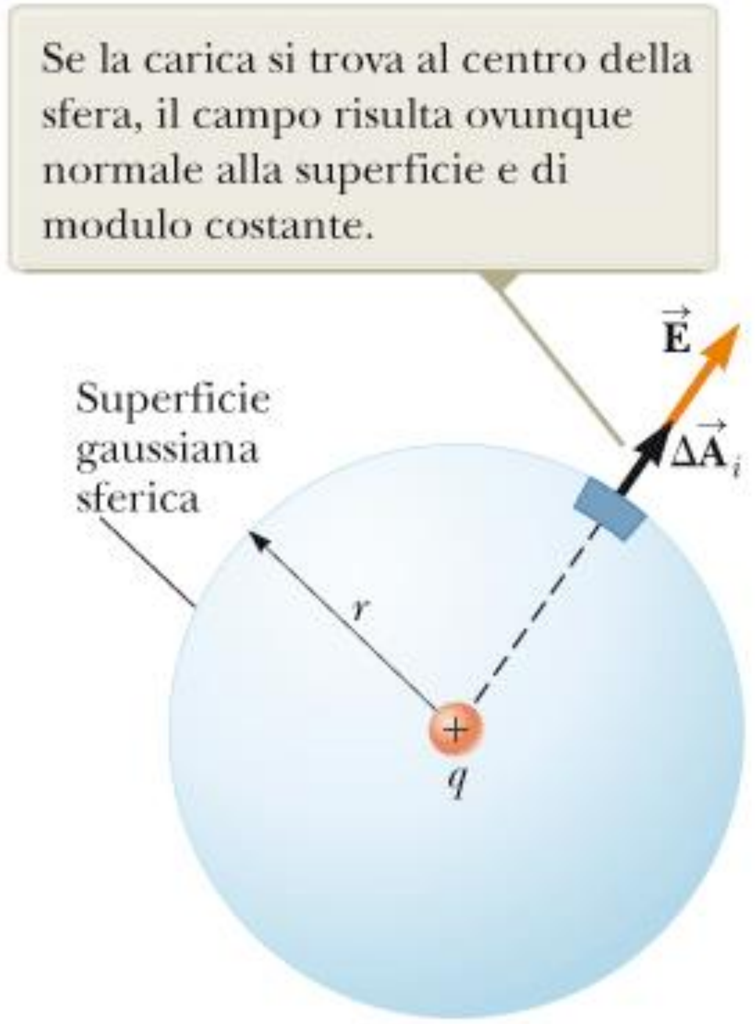
Legge di Gauss

Poiché **E** è costante sull'intera superficie. Dall'eq, sappiamo che l'intensità del campo elettrico ovunque sulla superficie della sfera è $E = k_e q/r^2$. inoltre, per una superficie sferica, $A = 4\pi r^2$. Quindi, il flusso totale attraverso la superficie è

$$\Phi_E = EA = \left(\frac{k_e q}{r^2}\right)\left(4\pi r^2\right) = 4\pi k_e q$$

Ricordando che $k_e = 1/4\pi\varepsilon_0$, possiamo scrivere questa relazione nella forma

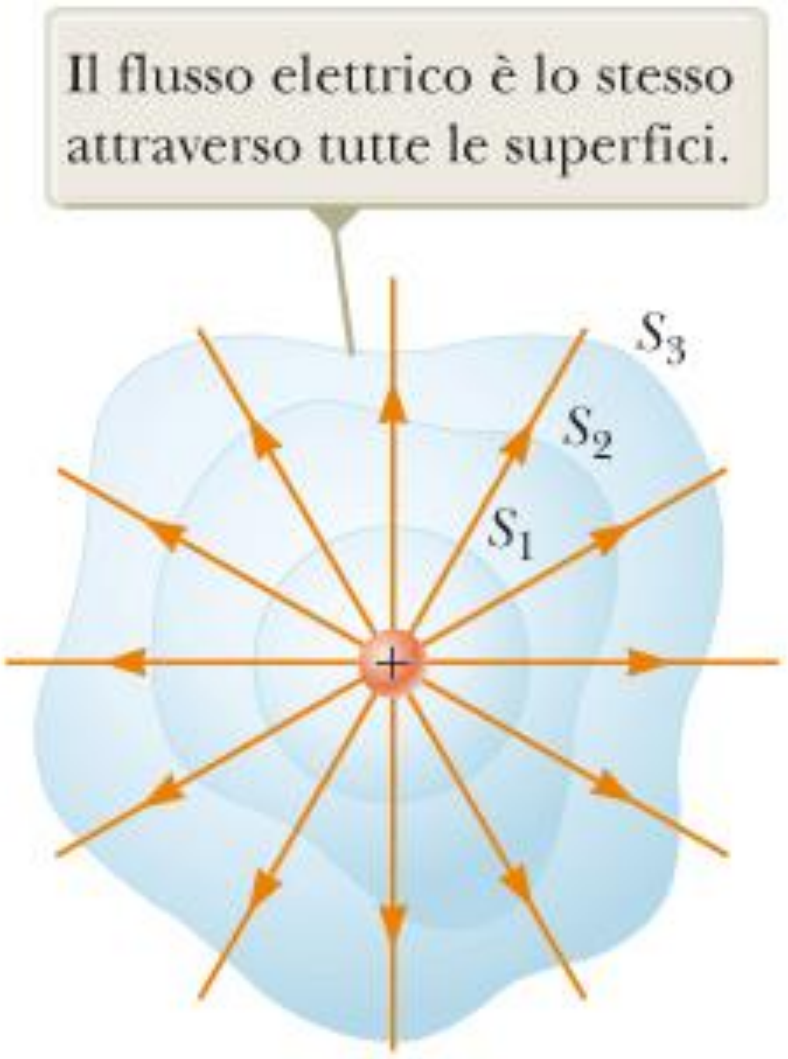
$$\Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Legge di Gauss

Questo risultato, che è indipendente da *r,* dice che il flusso totale attraverso una superficie sferica è proporzionale alla carica *q all'interno* della superficie.

Consideriamo, ora, diverse superfici chiuse che circondano una carica *q*, come in fig.. La superficie S_1 è sferica, mentre le superfici S_2 ed S_3 non sono sferiche.

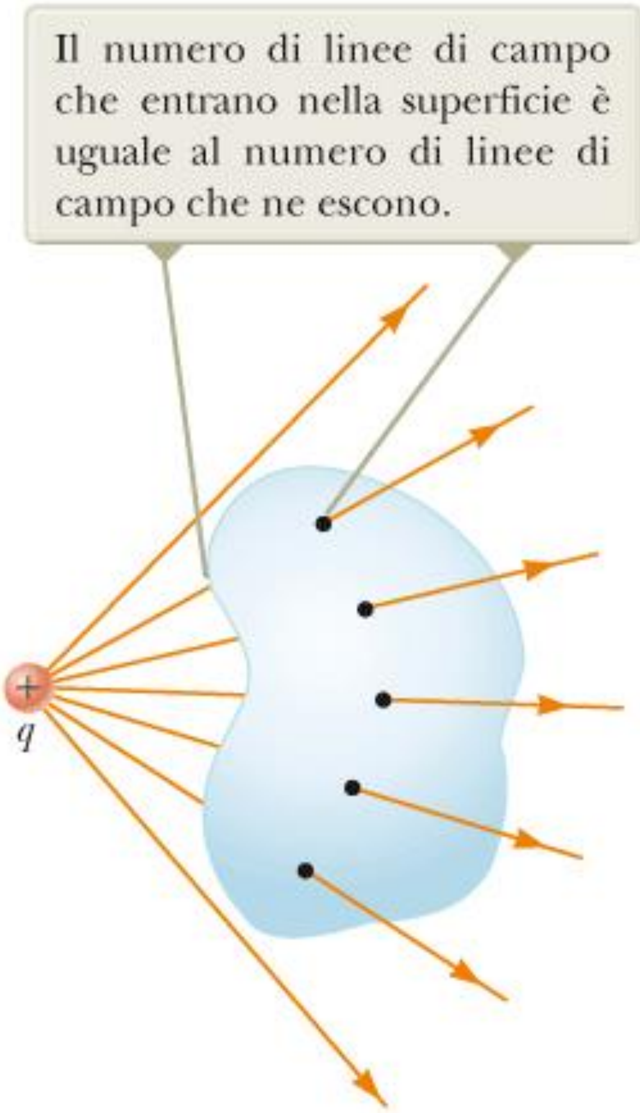


Il flusso che attraversa la superficie S_1 ha il valore q/ε_o. Come abbiamo discusso nel precedente paragrafo, il flusso è proporzionale al numero di linee di forza che attraversano quella superficie. La costruzione in fig. mostra che il numero di linee di forza che attraversano la superficie S_1 è uguale al numero di linee di forza che attraversano le superfici non sferiche S_2 ed S_3.

Legge di Gauss

Quindi, è ragionevole concludere che il flusso totale attraverso una qualunque superficie chiusa è indipendente dalla forma di questa superficie. (Si può provare che ciò avviene se E è proporzionale a $1/r^2$). In effetti, **il flusso totale che attraversa una qualunque superficie chiusa che circonda una carica puntiforme q è dato da q/ε_o**. Poiché potremmo scegliere una superficie sferica che circonda una carica che *non* è posta al centro della sfera, possiamo concludere che **il flusso attraverso la superficie è indipendente dalla posizione della carica all'interno della superficie**.

Consideriamo, ora, una carica puntiforme posta *al di fuori* di una superficie chiusa di forma arbitraria, come in fig.. Come si può vedere da questa costruzione, alcune linee di forza entrano nella superficie, altre invece escono dalla superficie. Però, il numero di linee di forza che entrano è uguale al numero di linee di forza che escono dalla superficie. Quindi, possiamo concludere che **il flusso elettrico totale che attraversa una superficie chiusa che non circonda alcuna carica è nullo.**



Estendiamo questi stessi argomenti al caso generale di più cariche puntiformi, o a una distribuzione continua di carica.

Il flusso totale che attraversa una qualunque superficie chiusa che circonda una carica puntiforme q è dato da q/ε_0

Il flusso attraverso la superficie è indipendente dalla posizione della carica all'interno della superficie.

La **legge di Gauss**, che è una generalizzazione della discussione precedente, afferma che *il flusso totale attraverso una qualunque superficie chiusa è dato da*

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

dove q_{in} rappresenta la *carica totale interna alla superficie* ed **E** rappresenta il campo elettrico in ogni punto della superficie.

Esercizio

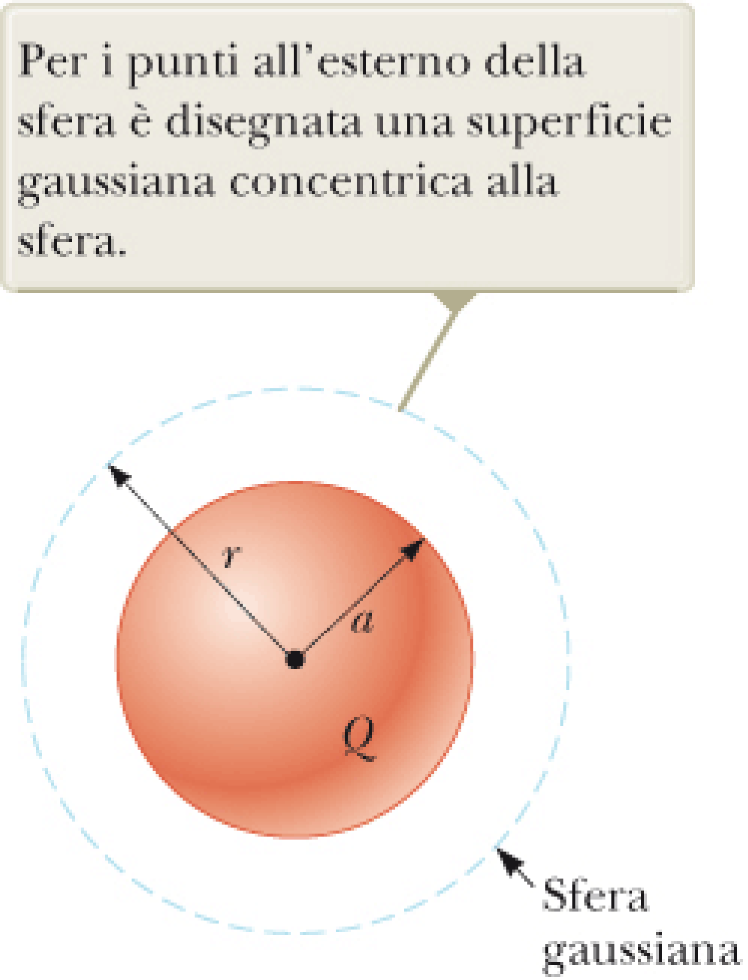
Una sfera isolante di raggio *a* possiede una densità volumetrica di carica uniforme ρ e la carica positiva totale è *Q.*

a) Si calcoli l'intensità del campo elettrico in un punto all'esterno della sfera

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \oint E dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint E dA = E \oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k_e \frac{Q}{r^2} \quad (per\ r > a)$$



Esercizio

Una sfera isolante di raggio *a* possiede una densità volumetrica di carica uniforme ρ e la carica positiva totale è *Q.*

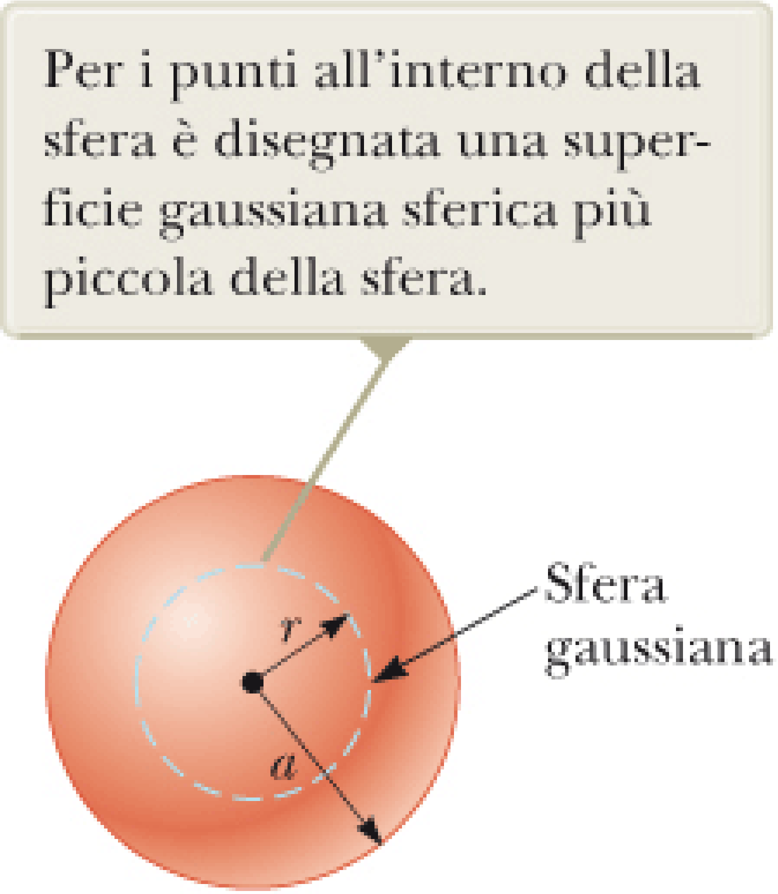
b) Si calcoli l’intensità del campo elettrico in un punto all’interno della sfera

$$q_{in} = \rho V' = \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

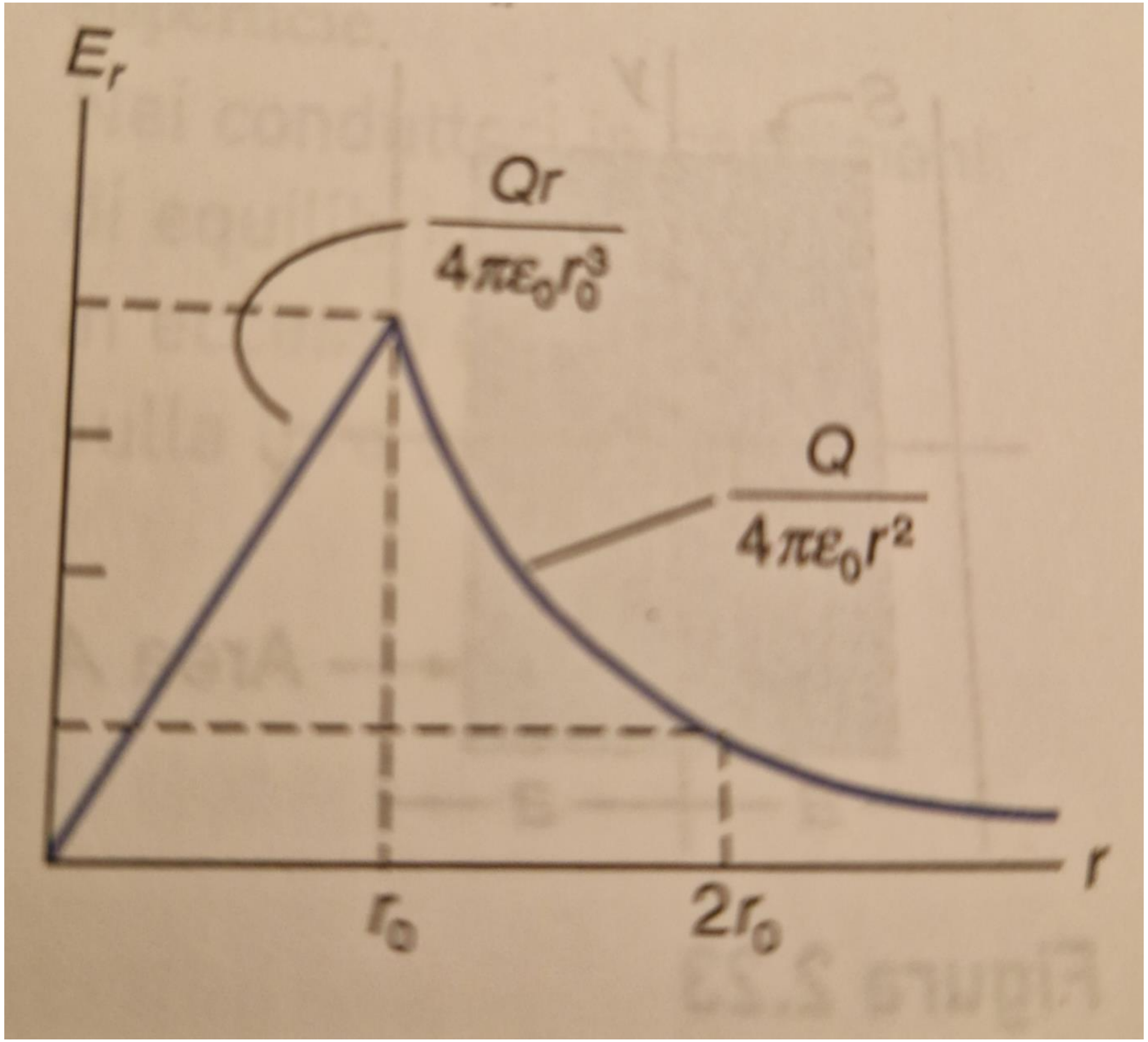
$$\oint E dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

$$E = \frac{\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}}{3\left(\frac{1}{4\pi k_e}\right)} r = k_e \frac{Q}{a^3} r \qquad (per\, r < a)$$



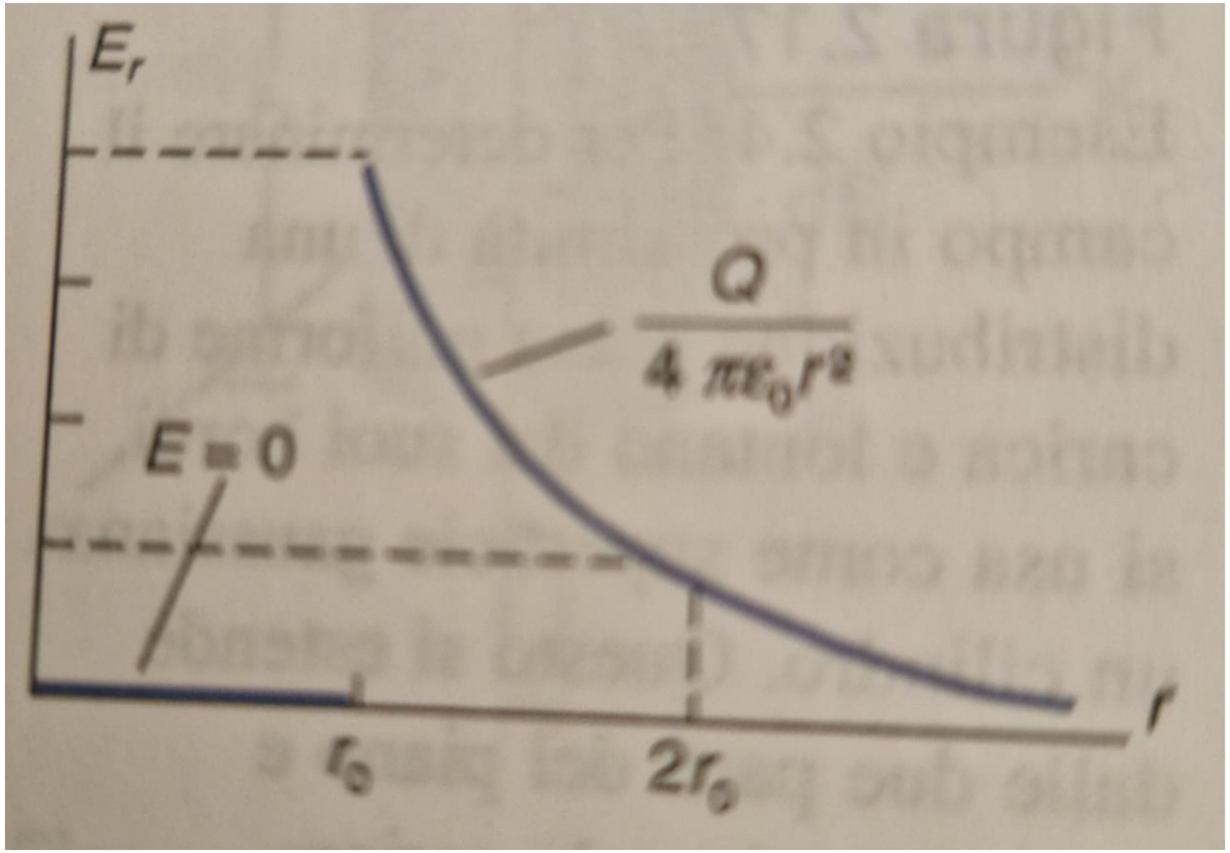
Idee chiave



Considera $r_0 = a$

Idee chiave

Calcolare nel caso la carica sia presente solo sull'esterno della sfera



Idee chiave

- La legge di Gauss lega il flusso elettrico netto Φ che attraversa una superficie chiusa alla carica netta q_{int} contenuta entro la superficie:

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{int}$$

- Si può scrivere la legge di Gauss anche introducendo il campo elettrico che attraversa la superficie gaussiana chiusa:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Divergenza di un campo vettoriale

Consideriamo un volumetto ΔV intorno ad un punto *P* e la superficie (chiusa) ΔS che lo racchiude e calcoliamo il rapporto tra il flusso $\Delta\Phi$ del campo elettrico attraverso ΔS e il volume ΔV. Considerando volumi sempre più piccoli, che contengano il punto *P*, si ottiene la ***divergenza*** del campo ***E*** del punto ***P***:

$$div\,\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V} = \frac{d\Phi}{dV}$$

Consideriamo un volumetto cubico di spigoli *dx*, *dy* e *dz*. Il flusso attraverso la faccia ABCD è $d\Phi_{ABCD} = E_x dydz$, mentre il flusso attraverso la faccia A'B'C'D' è $d\Phi_{A'B'C'D'} = - E'_x dydz$. Poiché le due facce del cubo sono molto vicine possiamo scrivere

$$E'_x = E_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} dx$$

Cosicché, essendo $dV = dxdydz$,

$$d\Phi_{ABCD} + d\Phi_{A'B'C'D'} = (E_x - E'_x) dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x} d\mathrm{V}$$

Tenendo conto anche delle altre due coppie di facce del cubo

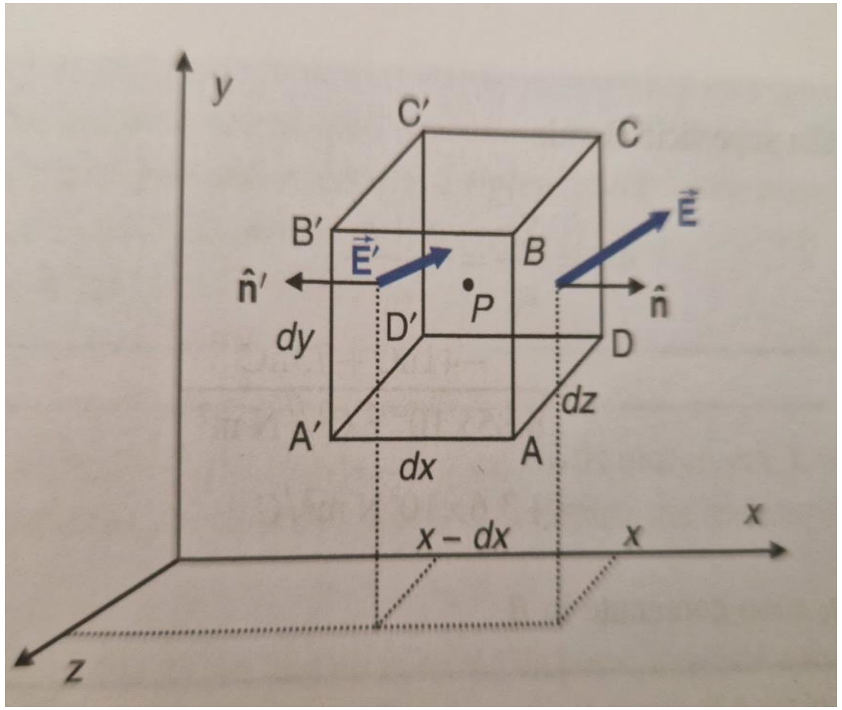
$$d\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \mathrm{d}V$$

E in definitiva

$$div\, \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Nel caso del campo elettrico è immediato ricavare, utilizzando la legge di Gauss, che $d\Phi = \frac{dQ_{int}}{\varepsilon_0}$ e quindi, dato che $\frac{dQ_{int}}{dv} = \rho$ rappresenta la densità di carica di volume in P, possiamo scrivere

$$div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$



Obiettivi di apprendimento

- Spiegare come la legge di Gauss torni utile a ricavare il modulo del campo elettrico all’esterno di una carica lineare o di una superficiale cilindrica (come una bacchetta di plastica) dotata di densità di carica lineare uniforme λ.
- Applicare la relazione tra la densità di carica lineare λ su una superficie cilindrica e il modulo E del campo elettrico a distanza radiale r del suo asse.
- Applicare la legge di Gauss per ricavare il modulo E del campo elettrico in prossimità di una grande superficie piana non conduttrice dotata di densità di carica superficiale uniforme σ.
- Applicare, per i punti prossimi a una grande superficie piana non conduttrice dotata di carica superficiale σ, la relazione tra la densità di carica e il modulo E del campo elettrico, specificando la direzione e il verso del campo.

Esercizio

Si calcoli il campo elettrico ad una distanza *r* generato da un filo di lunghezza infinita uniformemente carico con densità lineare di carica positiva λ costante.

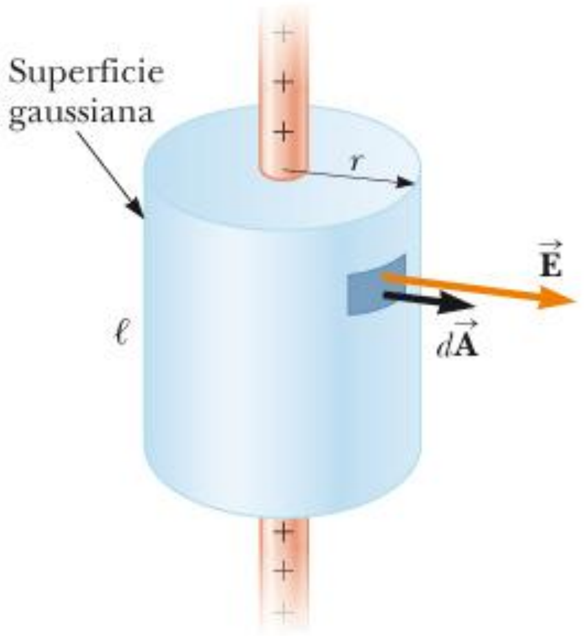
Per calcolare il campo alla distanza r racchiudiamo un tratto della barretta in una superficie gaussiana cilindrica coassiale di raggio *r* e lunghezza *l*.

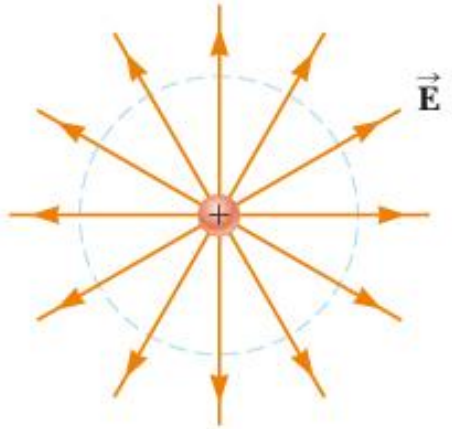
Applichiamo ora la legge di Gauss.

$$\Phi_E = \oint \vec{E} d\vec{A} = E \oint dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

In una tal situazione simmetrica il campo elettrico in ogni punto deve essere radiale e orientato verso l'esterno. Ciò significa che sulle due basi circolai del cilindro il campo è sempre parallelo e non le attraversa, determinando un contributo nullo al flusso.

Quanto alla superficie laterale del cilindro, osserviamo che per ogni elemento di superficie il vettore di area infinitesima *dA* è radiale e orientato verso l'esterno.





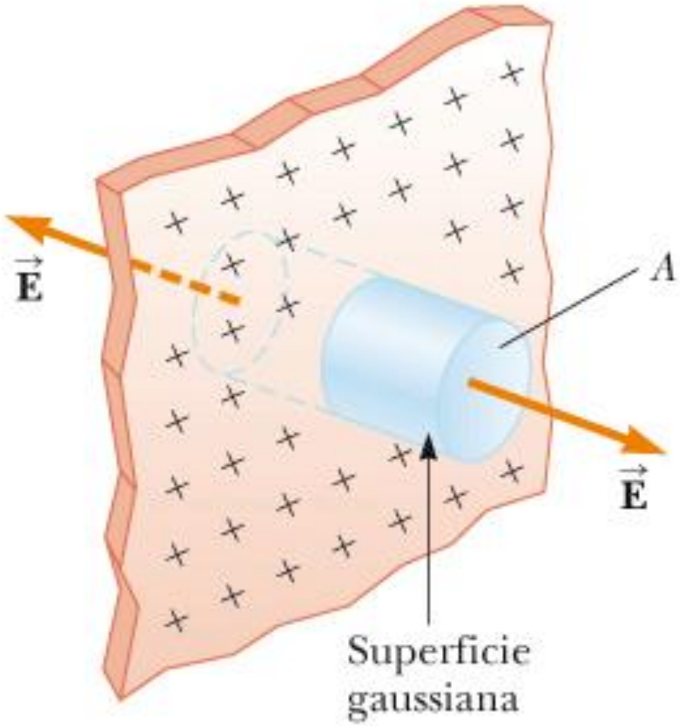
$$E(2\pi r l) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} = 2k_e\frac{\lambda}{r}$$

Esercizio

Si trovi il campo elettrico generato da un piano infinito isolante carico con una densità superficiale di carica uniforme e positiva σ. Un’opportuna superfice gaussiana è un cilindro retto chiuso avente basi di area A, posto in modo tale da intersecare il piano carico come mostrato nella figura. Per ragioni di simmetria si può dedurre che il campo elettrico E è orientato perpendicolarmente alla lamina e alle basi del cilindro. Dato che le linee di forza non intersecano le pareti del cilindro, il flusso che passa attraverso questa porzione di superficie gaussiana è nullo.

$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$



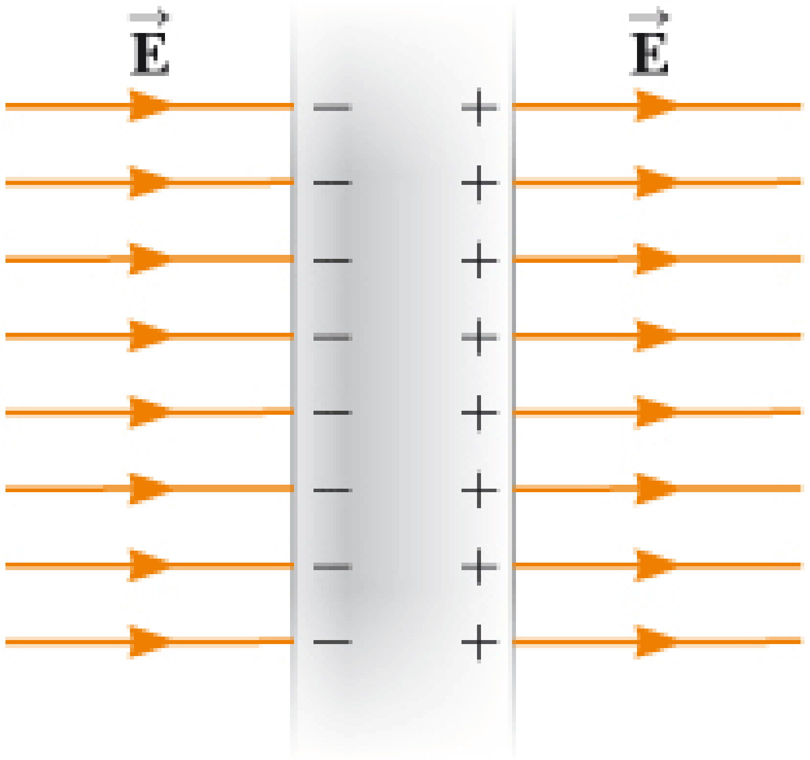
Obiettivi di apprendimento

- Applicare la relazione che intercorre tra la densità di carica superficiale σ e l'area su cui è uniformemente distribuita.
- Capire come mai una carica in eccesso (positiva e negativa) somministrata a un conduttore isolato si dispone interamente sulla sua superficie esterna e per nulla all'interno.
- Valutare il campo elettrico all'interno di un conduttore isolato.
- Applicare, per la superficie di un conduttore uniformemente carico, la relazione tra la densità di carica σ e il modulo E del campo elettrico in punti prossimi al conduttore, individuando la direzione e il verso dei vettori di campo.

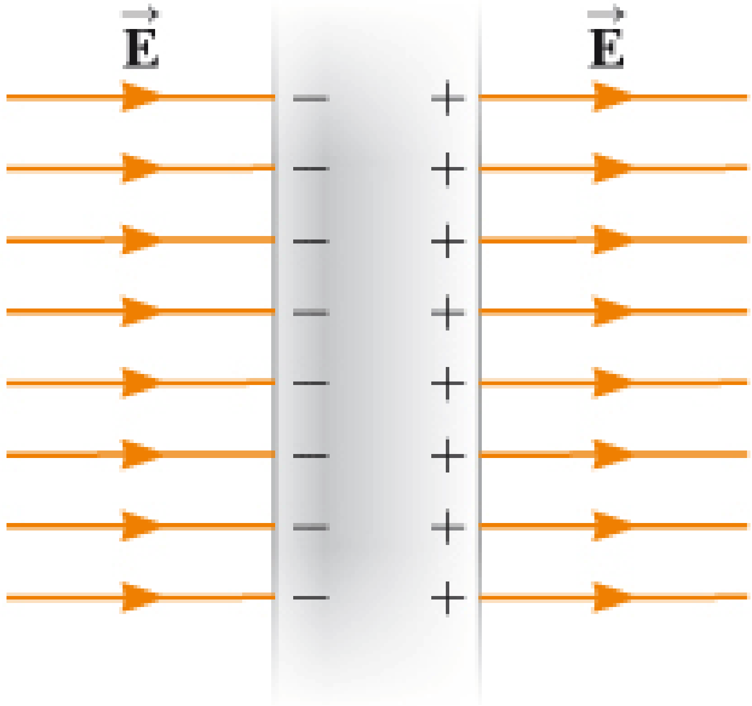
Quando nel conduttore **non c'è moto di cariche in nessuna direzione**, il conduttore è in **equilibrio elettrostatico.** Un conduttore in equilibrio elettrostatico possiede le seguenti proprietà:

- Il campo elettrico all'interno del conduttore è ovunque nullo, sia che il conduttore sia cavo sia che sia pieno.
- Se il conduttore è isolato, cariche in eccesso si possono trovare solo sulla sua superficie.
- In un punto appena al di fuori di un conduttore carico il campo elettrico è perpendicolare alla superficie del conduttore ed ha intensità σ/ε_0, dove σ è la densità superficiale di carica in quel punto.
- Se un conduttore di forma irregolare la carica tende ad accumularsi nei punti in cui il raggio di curvatura della superficie è più piccolo.

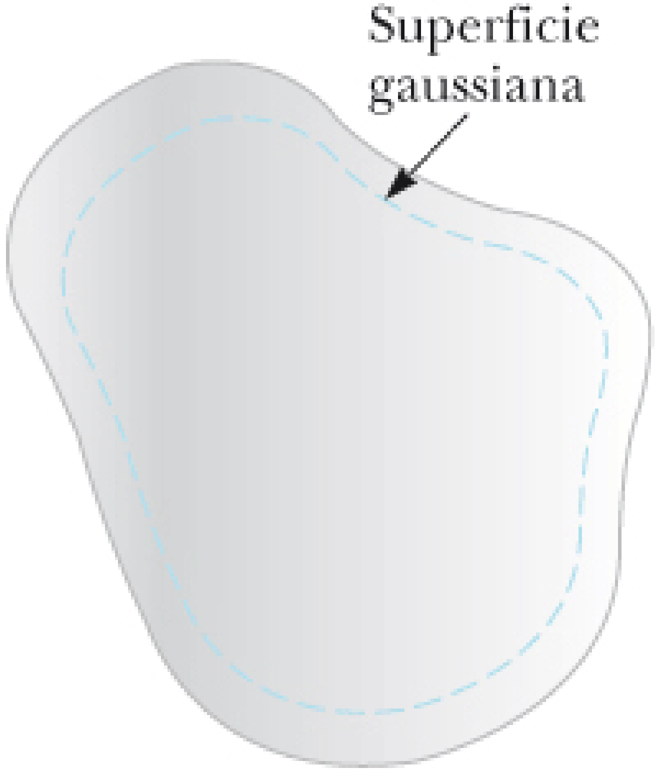
La prima proprietà può essere compresa analizzando il comportamento di una lastra conduttrice immersa in un campo esterno ***E***. **Nelle condizioni di equilibrio elettrostatico il campo elettrico all'interno del conduttore *deve* essere zero**. Se il campo non fosse nullo gli elettroni nel conduttore risentirebbero della forza elettrica (***F***=*q****E***) e ne verrebbero accelerati; il moto degli elettroni indicherebbe che il conduttore non è in equilibrio elettrostatico. L'esistenza dell'equilibrio elettrostatico è possibile solo se il campo all'interno del conduttore è nullo.



Prima dell'applicazione del campo elettrico, gli elettroni liberi sono uniformemente distribuiti dentro il conduttore. Quando il campo elettrico viene applicato, gli elettroni liberi sono accelerati verso sinistra in fig., producendo un accumulo di cariche negative sulla faccia di sinistra; lo spostamento degli elettroni determina inoltre un eccesso di cariche positive sulla faccia di destra. Queste distribuzioni di carica creano un campo elettrico addizionale che si somma al campo esterno. Mentre gli elettroni si muovono, la densità superficiale di carica cresce finché l'intensità del campo elettrico creato da queste cariche sarà uguale a quella del campo esterno ed il campo totale all'interno del conduttore alla fine dello spostamento delle cariche sarà nullo. In un buon conduttore, l'intervallo di tempo impiegato per raggiungere l'equilibrio è dell'ordine di 10^{-16}s ed il processo, per la maggior parte degli scopi pratici, può essere considerato istantaneo.

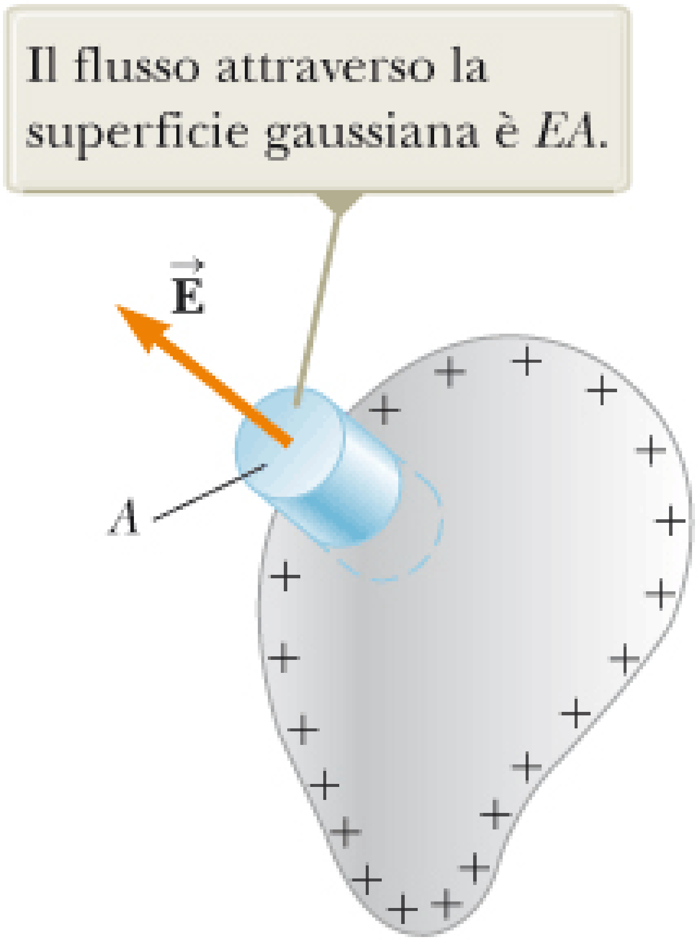


Per verificare la seconda proprietà di un conduttore in equilibrio elettrostatico possiamo utilizzare la legge di Gauss. La fig. mostra un conduttore isolato di forma arbitraria. All'interno del conduttore è disegnata una superficie gaussiana, vicina quanto si vuole alla superficie del conduttore. Come abbiamo appena mostrato il campo elettrico all'interno del conduttore in equilibrio elettrostatico è ovunque nullo.



Pertanto, il campo elettrico deve essere nullo in ogni punto della superficie gaussiana. Di conseguenza, il flusso totale attraverso la superficie gaussiana è nullo. Dalla legge di Gauss concludiamo che la carica totale all'interno della superficie gaussiana è nulla. Poiché non ci può essere nessuna carica all'interno della superficie gaussiana (che è arbitrariamente vicina alla superficie del conduttore), qualunque carica del conduttore deve trovarsi sulla sua superficie.

Per determinare il modulo del campo elettrico, usiamo la legge di Gauss e scegliamo una piccola superficie gaussiana a forma di cilindro con le superfici di base parallele alla superficie del conduttore (fig). Parte del cilindro è appena fuori del conduttore e parte è all'interno. A causa della condizione di equilibrio elettrostatico il campo è normale alla superficie. Pertanto, per la superficie laterale del non c'è flusso poiché ***E*** è parallelo a questa superficie. Non esiste, inoltre, flusso attraverso la base del cilindro interna al conduttore, perché qui ***E*** = *0*. Quindi il flusso totale attraverso la superficie gaussiana è costituito dal solo flusso attraverso la faccia piana esterna al conduttore, dove il campo è perpendicolare alla superficie gaussiana.

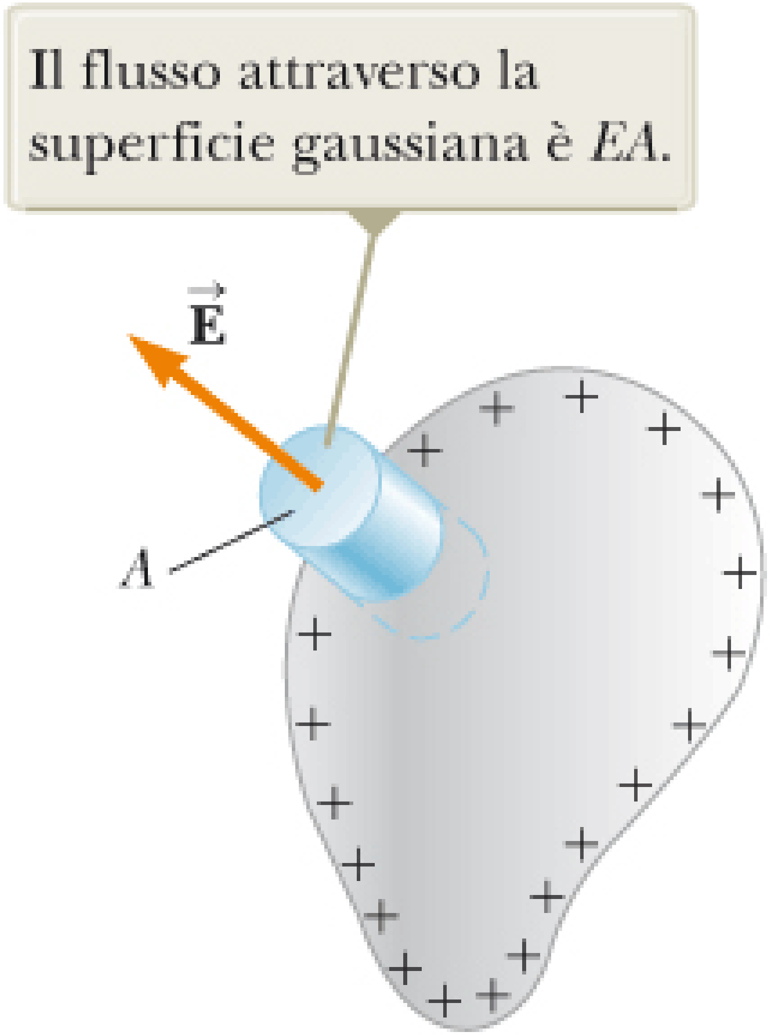


Per questa faccia il flusso è *EA*, dove *E* il campo elettrico in un punto nelle immediate vicinanze della superficie esterna del conduttore e *A* è l'area di base del cilindro. Applicando la legge di Gauss a questa superficie otteniamo

$$\Phi_E = \oint E dA = EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

dove si è utilizzato $q_{in} = \sigma A$. Risolvendo, si ottiene il campo *E* nelle immediate vicinanze di un conduttore carico:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$



Idee chiave

- Una carica in eccesso posta su un conduttore isolato si localizza interamente sulla superficie esterna
- Il campo elettrico esterno in prossimità della superficie è perpendicolare alla superficie stessa e il suo modulo dipende dalla densità di carica superficiale σ:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$