Giuseppe Quaremba

Appunti di Analisi Matematica

DISPENSA N.2

I NUMERI NATURALI

CENNI SULLE STRUTTURE ALGEBRICHE: GRUPPO, ANELLO, CORPO, CAMPO

I NUMERI INTERI

IL CAMPO RAZIONALE

INSIEMI DENSI. DENSITÀ DEL CAMPO RAZIONALE

POTENZE E RADICI NEL CAMPO RAZIONALE

IL CAMPO REALE

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI REALI

INTERVALLI NUMERICI

MASSIMO E MINIMO, ESTREMO INFERIORE ED ESTREMO SUPERIORE DI UN SOTTOINSIEME DI *R*

CORRISPONDENZE TRA INSIEMI: FUNZIONI, APPLICAZIONI, TRASFORMAZIONI

ESERCIZI

SOLUZIONI E COMMENTI

I NUMERI NATURALI

Circa le proprietà dei **numeri Naturali** N_0 le riteniamo acquisite dalle Matematiche elementari. L'insieme dei numeri naturali N_0 è un esempio di **insieme infinto**. La sua definizione è dovuta a Giuseppe Peano[1] con i seguenti postulati:

1) *Esiste un'applicazione s di N_0 su una sua parte propria, che ad ogni elemento $n \in N_0$ ne associa un altro, $s(n)$ che si chiama il successivo di n.*
2) *Esiste in N_0 un elemento, lo zero, che non è il successivo di alcun elemento di N_0.*
3) *Due elementi di N_0 che abbiano lo stesso successivo coincidono.*
4) *Un sottoinsieme di N_0, che contenga lo zero, ed il successivo di ogni suo elemento, coincide con tutti i numeri naturali (postulato di induzione o principio di induzione completa).*

I numeri naturali diversi da zero si chiamano **interi naturali**: $N = N_0 - \{0\} = s(N_0)$.

Nell'insieme N_0 si definiscono le operazioni di **addizione** e di **moltiplicazione**. L'elemento 0 si assume come **elemento indifferente per l'addizione**. Ad es., la somma di n col successivo di 0 è data da:

$$n + s(n) = s(n + 0) = s(n).$$

L'elemento 1 si comporta come **elemento indifferente per la moltiplicazione**:

$$n1 = n0 + n = 0 + n = n.$$

L'addizione e la moltiplicazione godono delle proprietà commutativa e associativa:

$$n + m = m + n, (n + m) + p = n + (m + p), nm = mn, n(mp) = (nm)p.$$

[1] Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo, 27 agosto 1858 – Cavoretto, 20 aprile 1932) è stato un matematico, logico e glottoteta italiano.

Ed inoltre vale la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$(m+n)p = mp + np$$

Quando si verifica che n è maggiore [minore] di m si scrive $n > m$ $[n < m]$. La relazione di disuguaglianza fra numeri naturali introduce in N_0 un ordinamento totale, detto l'**ordinamento naturale**, od **ordinamento per valori crescenti**.

La **somma** di n addendi e il **prodotto** di n fattori $m_1, m_2 \dots m_n$ si definiscono rispettivamente ponendo:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ , \quad \prod_{k=1}^{n} m_k \, , n \in N$$

Osserviamo che le operazioni di addizione e moltiplicazione fra numeri naturali, nonché l'elevazione a potenza sono sempre eseguibili, le loro operazioni inverse (sottrazione, divisione ed estrazione di radice) sono eseguibili con limitazioni.

CENNI SULLE STRUTTURE ALGEBRICHE

Un insieme X in cui siano definite una o più operazioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ dicesi una **struttura algebrica**. La struttura algebrica S costituita dall'insieme X, dotato delle operazioni $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ si indica col simbolo:

$$S = (X, \varphi_1, \varphi_2, \dots)$$

L'insieme X si chiama **sostegno** della struttura algebrica S.

Si chiama **gruppo** una struttura $\mathcal{G} = (X, \varphi)$ formata da un insieme X munito di una operazione interna ovunque definita in X, per la quale siano soddisfatte le seguenti proprietà (assiomi di gruppo o proprietà gruppali):

i. L'operazione φ è ovunque definita

ii. L'operazione φ è associativa: $(m\ \varphi\ n)\varphi\ p = m\ \varphi(m\ \varphi\ p), \forall m, n, p \in X$

iii. L'operazione φ è dotata di elemento indifferente u: $m\ \varphi\ u = m, \forall m \in X$

iv. Ogni elemento $x \in X$ è simmetrizzabile[2] rispetto a φ

Qualora φ sia commutativa il gruppo $\mathcal{G}$ si dice **commutativo** o **abeliano**.

Sovente per l'operazione φ si adopera la notazione $+$, od anche la notazione $\cdot$, l'operazione stessa si chiama allora addizione o, rispettivamente, moltiplicazione ed il gruppo si dice additivo o, rispettivamente, moltiplicativo.

Si chiama **anello** la struttura algebrica $\mathcal{A} = (X, \varphi, \tau\ )$ formata da un insieme X munito di due operazioni interne $\varphi\ e\ \tau$ ovunque definite in X per le quali siano verificate le seguenti proprietà:

v. La struttura (X, φ) è un gruppo commutativo

vi. L'operazione τ è associativa ed è distributiva rispetto a φ

Di solito per le operazioni φ e τ si adoperano rispettivamente le notazioni additiva e moltiplicativa.

Un anello nel quale la moltiplicazione sia commutativa si dice **anello commutativo**.

Un **corpo numerico** è una struttura $(X, +, \cdot)$ dotata di due operazioni interne, l'addizione e la moltiplicazione, nella quale esistono due elementi, 0 ed 1, detti lo zero e l'unità del corpo, il primo dei quali è indifferente per l'addizione, il secondo per la moltiplicazione. Inoltre, il simmetrico di un elemento *x* rispetto all'addizione si chiama l'**opposto** di *x* e si indica con -*x*. Il simmetrico di un elemento $x \neq 0$ rispetto alla moltiplicazione si chiama **reciproco** di *x* e si indica con $\frac{1}{x}$ od anche x^{-1}.

[2] Se φ è una operazione interna definita in *X* e dotata di elemento indifferente u, si dice che un elemento $x \in X$ è simmetrizzabile rispetto a φ, od anche che x è dotato di elemento simmetrico rispetto a φ se esiste un elemento x' detto appunto il simmetrico di *x* rispetto a φ per il quale si ha $x'\varphi x = u$.

Un corpo numerico nel quale la moltiplicazione sia anche commutativa si dice un **corpo commutativo** o più semplicemente **campo**.

I NUMERI INTERI

La struttura $(Z,+,\cdot)$ dove l'addizione e la moltiplicazione sono commutative ed associative, e la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione, ed, inoltre, tali operazioni sono entrambe dotate di elemento indifferente, e ogni elemento di *Z*[3] è simmetrizzabile rispetto all'addizione, si chiama **anello commutativo unitario** privo di divisori dello zero (o più brevemente **anello dei numeri interi**). Gli interi che precedono lo zero si chiamano **interi negativi**, quelli che lo seguono si chiamano **interi positivi**. Ogni intero negativo è minore di ogni intero positivo. Nell'anello degli interi l'equazione $m = nx$ non sempre ammette soluzioni (divisibilità). Gli interi +1 e -1 si chiamano rispettivamente l'**unità positiva** e l'**unità negativa**. Di essi il primo è indifferente per la moltiplicazione, il secondo è caratterizzato dalla proprietà:

$$(-1)\cdot(+a) = -a, (-1)\cdot(-a) = +a$$

Si chiama **opposto** di un intero *x* il suo simmetrico rispetto all'addizione.

Diciamo Z^+ $[Z^-]$ l'insieme degli **interi positivi** [**negativi**] e poniamo $Z^+ \cup \{0\} = Z_0^+,\ Z^- \cup \{0\} = Z_0^-$. Z_0^+ $[Z_0^-]$ è detto l'**insieme degli interi non negativi** [**non positivi**].

Si chiama **valore assoluto** del numero intero x, e si indica $|x|$, l'intero non negativo definito ponendo:

$$|x| = \begin{cases} +x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

[3] Questo insieme è indicato con la lettera *Z*, la lettera iniziale di Zahl, che in tedesco significa "far di conto", originariamente, infatti, l'espressione implica l'utilizzo dei numeri negativi.

IL CAMPO RAZIONALE

La struttura algebrica $(Q, +, \cdot)$ si chiama **campo dei numeri razionali** o, più brevemente, il **campo razionale**.

Poiché $\forall \frac{m}{n} \in Q$ si ha $\frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m}{n}, \frac{m}{n}\frac{1}{1} = \frac{m}{n}$, l'addizione e la moltiplicazione in Q sono dotate ciascuna di elemento indifferente. L'elemento indifferente per l'addizione è il numero razionale $\frac{0}{1}$, l'elemento indifferente per la moltiplicazione è il numero razionale $\frac{1}{1}$, indicheremo d'ora in poi tali elementi semplicemente con i simboli 0 ed 1, **zero** e **unità del campo razionale**.

Inoltre, poiché $\forall \frac{m}{n} \in Q$ si ha $\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = 0$, ogni numero razionale è simmetrizzabile rispetto all'addizione, cioè è dotato di opposto $\left(-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n}\right)$.

Ogni numero razionale diverso dallo 0 è simmetrizzabile rispetto alla moltiplicazione, cioè è dotato di reciproco: $\frac{m}{n}\frac{-n}{-m} = \frac{1}{1} = 1$.

Conveniamo di indicare con x^{-1} o con $\frac{1}{x}$ il reciproco del numero razionale x. Non esistono in Q divisori dello zero, pertanto la struttura $(Q, +, \cdot)$ è un corpo commutativo, cioè un campo. Nel campo razionale si definiscono la sottrazione e la divisione. In particolare, dividere il numero razionale b per il numero razionale a significa trovare un $x \in Q$ che verifichi l'equazione:

$$ax = b$$

che ammette una e una sola soluzione se $a \neq 0$. Se il divisore è nullo nel campo razionale non è possibile la divisione per lo zero. Se $a = 0$ e $b = 0$, l'equazione è ancora risolvibile, ma non univocamente, in quanto ammette per soluzione qualunque numero razionale.

Il sostegno Q del campo razionale è un insieme ordinato, pertanto il campo razionale è un **campo ordinato**. Infatti, è sempre possibile stabilire una relazione d'ordine del tipo $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$. Chiameremo **numeri razionali negativi** [**positivi**] quelli che precedono [seguono] lo 0 nell'ordinamento.

Indicheremo con Q^+ $[Q^-]$ l'insieme dei numeri razionali positivi [negativi] e porremo, inoltre, $Q^+ \cup \{0\} = Q_0^+$, $Q^- \cup \{0\} = Q_0^-$.

INSIEMI DENSI. DENSITÀ DEL CAMPO RAZIONALE

DEFINIZIONE: Un insieme X totalmente ordinato si dice **denso** (od anche **denso in sé**) quando qualunque siano gli elementi $x \in X$ e $y \in X$, se è $x \neq y$ esiste un elemento $z \in X$ che è compreso fra x ed y. La stessa definizione con notazione simbolica diventa: l'insieme X, totalmente ordinato, è denso $\leftrightarrow$ $\forall x \in X \; e \; \forall y \in X, con \; x \neq y, \exists z \in X: x < z < y$. Poiché fra due qualunque elementi distinti di un insieme denso X cadono infiniti elementi di X, ne consegue che un insieme denso è necessariamente infinito. Inversamente un insieme infinito non è necessariamente denso. Ad esempio, l'insieme Z è infinito ma non è denso, perché fra due interi, ad esempio, 0 ed 1, non è compreso alcun numero intero.

TEOREMA (1): L'insieme Q dei numeri razionali è denso.

□Dim.: Se x ed y sono due numeri razionali e se $x<y$, allora il numero razionale $\frac{1}{2}(x+y)$è compreso fra x ed y, avendosi $x < \frac{1}{2}(x+y) < y$.■

Dal teorema (1) si deduce che, dato che Q è numerabile (e ricordando un Teorema che ci assicura che un sottoinsieme di un insieme numerabile o è finito o è numerabile), fra due qualunque numeri razionali distinti cade una infinità di numeri razionali.

POTENZE E RADICI NEL CAMPO RAZIONALE

Nel campo razionale la potenza di esponente intero (relativo) n è definita come segue:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \ (n \text{ fattori})$$

e la potenza a^n ha significato $\forall a \in Q$. Si pone per $a \neq 0, a^0 = 1$.

Se n è intero positivo si definisce l'operazione di estrazione di radice n^{ma} come operazione inversa dell'elevazione a potenza. Per radice n^{ma} $(n \in N)$ del numero razionale a si intende un numero razionale x che sia soluzione dell'equazione:

$$x^n = a \qquad (1)$$

Se n è pari ed a<0 l'equazione è priva di soluzioni, perché $\forall x \in Q$ risulta $x^n > 0$. Escluso questo caso l'operazione di estrazione di radice è possibile se il numero razionale a è potenza n^{ma} di un numero razionale; in tal caso esiste una sola soluzione se n è dispari e tale soluzione ha lo stesso segno di a, ne ha due fra loro opposte se n è pari.

Ad esempio:

$$\sqrt[3]{8} = 2, \sqrt[3]{-8} = -2, \sqrt{4} = \begin{cases} -2 \\ +2 \end{cases}$$

Non sempre la (1) ammette soluzioni nel campo razionale.

Ad esempio, non esiste alcun numero razionale x che sia soluzione dell'equazione:

$$x^2 = 2, \qquad (2)$$

cioè nel campo razionale non esiste la radice quadrata del numero razionale 2.

☐TEOR.: Supposto che la (2) ammetta per soluzione un numero razionale x, anche il numero razionale $-x$ è soluzione, e pertanto è lecito supporre x>0.

La soluzione positiva x si può allora rappresentare nella forma $x = \frac{h}{k}$, con h e k interi positivi primi[4] fra loro, e si ha $\left(\frac{h}{k}\right)^2 = \frac{h^2}{k^2} = 2$, cioè $h^2 = 2k^2$. Il numero intero h^2 essendo primo con k^2 risulta allora divisibile per 2, cioè pari, e perché ciò sia possibile h deve essere a sua volta un numero pari, perché il quadrato di un intero dispari è dispari. Si ha allora $h = 2m$, con m intero positivo, e quindi $h^2 = 4m^2$, da cui $4m^2 = 2k^2$, cioè $k^2 = 2m^2$. Da questa uguaglianza si trae che k è a sua volta divisibile per 2. Gli interi h e k hanno allora in comune il fattore primo 2, e ciò è in contrasto con l'ipotesi che h e k siano primi fra loro. L'assurdo cui siamo prevenuti dimostra che la (2) non ammette soluzioni nel campo razionale. ■

IL CAMPO REALE

Assumiamo come postulato che esiste il sistema dei numeri reali che indichiamo con R, su cui è possibile eseguire le quattro operazioni elementari e che sia possibile stabilire quale è il maggiore tra i due numeri. Per quanto riguarda le operazioni richiamiamo i seguenti assiomi:

i. Proprietà associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
ii. Proprietà commutativa: $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$
iii. Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:
   $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
iv. Esistenza degli elementi indifferenti (o neutri) 0,1: $a+0 = a$, $a \cdot 1 = a$
v. Esistenza degli opposti: $\forall a \in R, \exists -a \in R: a+(-a) = 0$
vi. Esistenza degli inversi: $\forall a \neq 0 \in R, \exists a^{-1}: a \cdot (a^{-1}) = 1$

[4] Un numero è primo se è divisibile soltanto per 1 e per sé stesso.

È definita la relazione di minore ($\leq$) o maggiore ($\geq$) tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

i. Dicotomia: $\forall a, b \in R \rightarrow a \leq b \ \vee a \geq b$
ii. Proprietà asimmetrica: Se $a \leq b \wedge a \geq b \rightarrow a = b$
iii. Se $a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$
iv. Se $0 \leq a \wedge 0 \leq b \rightarrow 0 \leq a + b, 0 \leq a \cdot b$

Infine, vale l'**Assioma di completezza**:

Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano $a \in A$ e $b \in B$, esiste un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI REALI

Quando su una retta si sia fissato un sistema di ascisse (assegnandone l'origine O ed il punto unità U), si dice che si sono rappresentati i numeri reali sulla retta, e la retta stessa si presenta come un modello sull'insieme R. Lo stesso insieme R si chiama perciò lo **spazio numerico reale ad una dimensione** ovvero la **retta reale**.

Di due punti $x' \in R$ ed $x'' \in R$ si chiama **distanza**[5] la quantità reale non negativa $|x' - x''|$ che nell'interpretazione geometrica è la misura del segmento di retta avente per estremi i punti x' e x''.

[5] In tal caso di dice che lo spazio numerico è dotato di una **metrica** per la quale valgono gli assiomi della coincidenza, di simmetria e del triangolo o triangolare.

INTERVALLI NUMERICI

Dati due numeri reali a e b, con $a \leq b$, l'insieme dei numeri reali x che verificano la limitazione:

$$a \leq x \leq b \qquad (3)$$

si chiama **intervallo chiuso di estremi *a* e *b*** e si indica con $[a, b]$.

Si chiama invece **intervallo aperto di estremi *a* e *b***, e si denota con $]a, b[$, l'insieme dei numeri reali x che verificano la limitazione:

$$a < x < b.$$

L'**intervallo semiaperto a sinistra, o inferiormente, di estremi *a* e *b*** è definito dalla limitazione:

$$a < x \leq b$$

e si indica $]a, b]$. L'**intervallo semiaperto a destra, o superiormente, di estremi *a* e *b***, è definito dalla limitazione:

$$a \leq x < b$$

e si indica con $[a, b[$.

Dei due estremi a e b dell'intervallo, sia esso chiuso, aperto o semiaperto, a si chiama l'**estremo inferiore** o **estremo sinistro**, b si chiama l'**estremo superiore** o **estremo destro**. La loro differenza b-a si chiama **ampiezza** dell'intervallo, e la quantità $\delta = \frac{b-a}{2}$ è detta **semiampiezza**, o **semidimensione**, o **raggio**.

Il numero $x_0 = \frac{a+b}{2}$ si chiama **centro**, o **punto medio** degli intervalli $[a, b],]a, b[,]a, b], [a, b[$. Pertanto si ha $a = x_0 - \delta, b = x_0 + \delta$, ne consegue che la (3) può scriversi in una forma che risulterà molto utile nel prosieguo:

$$x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta \Leftrightarrow |x - x_0| \leq \delta \qquad (4)$$

Analogamente per l'intervallo aperto può scriversi:

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Leftrightarrow |x - x_0| < \delta.$$

Dato un punto x di un intervallo, che sia distinto dagli estremi si dice **interno** all'intervallo, se l'intervallo è aperto e ogni suo punto è interno.

Dato un punto x_0, un qualunque intervallo aperto che contenga x_0 si chiama **intorno completo**, o un **intorno** di x_0. Un intervallo semiaperto a destra e di cui x_0 sia l'estremo sinistro si chiama **intorno destro** di x_0 , un intervallo semiaperto a sinistra e di cui x_0 sia l'estremo destro si chiama **intorno sinistro** di x_0 .

Gli intervalli sinora menzionati si chiamano **intervalli limitati**. Si possono, però, considerare anche **intervalli non limitati**.

Dato un numero reale a, l'insieme dei numeri reali non inferiori ad a si chiama **intervallo chiuso illimitato superiormente di estremo inferiore *a*** e si indica $[a, +\infty)$.

Con notazione simbolica: $[a, +\infty) = \{x: x \in R, x \geq a\}$.

Intervallo aperto illimitato superiormente di estremo inferiore a: $(a, +\infty)= \{x: x \in R, x > a \}$

Intervallo chiuso illimitato inferiormente di estremo superiore b: $(-\infty, b] = \{x: x \in R, x \leq b\}$

Intervallo aperto illimitato inferiormente di estremo superiore b: $(-\infty, b) = \{x: x \in R, x < b\}$

Si indica poi con $(-\infty, +\infty)$ l'insieme R di tutti i numeri reali, unico intervallo illimitato sia inferiormente che superiormente.

L'insieme ottenuto da R aggregandogli gli elementi simbolici $-\infty$ e $+\infty$ si chiama l'insieme dei numeri reali **ampliato** e si indica con $\bar{R}$Osserviamo che un qualunque intervallo aperto illimitato superiormente si chiama **intorno di** $+\infty$, ed un qualunque intervallo aperto illimitato inferiormente si chiama **intorno di** $-\infty$.

MASSIMO E MINIMO, ESTREMO INFERIORE ED ESTREMO SUPERIORE DI UN SOTTOINSIEME DI *R*

Sia *X* un insieme non vuoto di numeri reali. Si dice che *X* è **limitato superiormente** se esiste un numero b tale che $\forall x \in X \Rightarrow x \leq b$, e il numero b si chiama **maggiorante** dell'insieme *X*. Si dice che *X* è **limitato inferiormente** se esiste un numero a tale che $\forall x \in X \Rightarrow x \geq a$, il numero a si chiama **minorante** dell'insieme *X*.

Ovviamente se b è un numero maggiorante dell'insieme *X*, ogni numero b'>b è a sua volta un numero maggiorante dell'insieme. L'insieme dei maggioranti di un insieme *X* è infinito. Analogamente si può ragionare per i numeri minoranti di *X*.

Sia *A* un insieme di numeri reali. Il **massimo** di ***A***, se esiste, è un numero *M* dell'insieme *A* che è maggiore od uguale ad ogni altro elemento dell'insieme:

$$M \text{ max di } A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A \\ \forall a \in A, M \geq a \end{cases}$$

Analogamente per il **minimo** di un insieme di numeri reali *A*, se esiste:

$$m \min A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ \forall a \in A, m \leq a \end{cases}$$

Non è scontato che un insieme di numeri reali abbia un massimo o un minimo. Ad esempio, l'insieme dei numeri reali positivi R^+ non ha né massimo (è illimitato superiormente), né il minimo perché non esiste il più piccolo numero reale positivo, lo zero non appartiene a R^+.

Sulla base di quanto sinora detto, possiamo esplicitare le proprietà che deve possedere un estremo superiore di un insieme di numeri reali *A* (Fig.1).

$$\text{Sup.}\,A \Leftrightarrow \begin{cases} Sup.A \notin A \\ \forall a \in A, Sup.A \geq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: Sup.A - \varepsilon < a \end{cases}$$

Analogamente possiamo esplicitare le proprietà che deve possedere un estremo inferiore di un insieme di numeri reali A.

$$\text{Inf.}\,A \Leftrightarrow \begin{cases} Inf.A \notin A \\ \forall a \in A, Inf.A \leq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A: Inf.A + \varepsilon > a \end{cases}$$

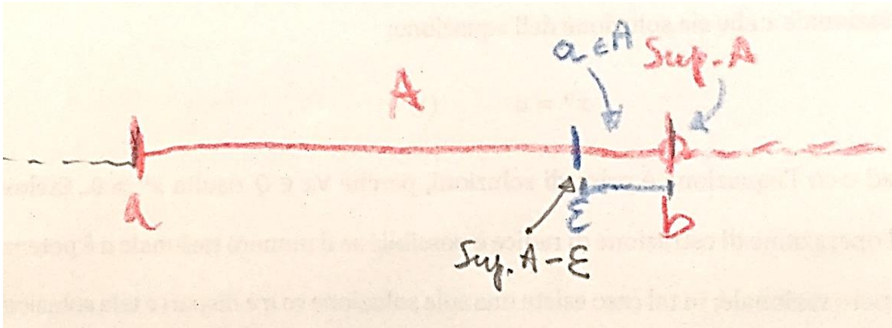

Figura 1

Importante il seguente Teorema: Sia A un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di A.

☐DIM.: Sia B l'insieme non vuoto dei maggioranti di A. L'assioma della completezza ci assicura che:

$$\exists c: a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Osserviamo che c è un maggiorante di A perché è maggiore o uguale a ogni elemento di A. Ne consegue che $c \in B$. Inoltre c è minore o uguale a ogni elemento di B. Quindi è il minimo di B (v. definizione di minimo). ■

Dal suddetto Teorema ricaviamo la seguente definizione:

DEF.: Sia A un insieme di numeri reali non vuoto limitato superiormente. Allora $c \in R$ è l'estremo superiore di A se c è il minimo dei maggioranti di A.

Se A non è limitato superiormente [inferiormente] allora l'estremo superiore [inferiore] è $+\infty$ $[-\infty]$:

$$Sup.A = +\infty \Leftrightarrow \forall L, \exists a \in A: a > L, \quad Inf.A = -\infty \Leftrightarrow \forall l, \exists a \in A: a < l.$$

Ad esempio, sia $A = \{x \in R: x > 0\}$, il massimo e il minimo di A non esistono. Esistono, invece, il $Sup.A = +\infty$ e l'$Inf.A = 0$.

CORRISPONDENZE TRA INSIEMI: FUNZIONI, APPLICAZIONI, TRASFORMAZIONI

Dati due insiemi *X* ed *Y*, non vuoti, una **corrispondenza univoca** fra *X* ed *Y* è una legge in base alla quale ad ogni elemento $x \in X$ si associa <u>uno ed un solo</u> elemento $y \in Y$. Una tale corrispondenza si chiama **funzione** (univoca o uniforme) definita in *X* ed a valori in *Y*.

La corrispondenza si interpreta come una operazione che trasformi ogni elemento di *X* in un elemento di *Y*, od anche che applichi ogni elemento di *X* sul corrispondente elemento di *Y*. Per tale motivo essa si chiama anche una trasformazione univoca di *X* in *Y*, ovvero un'applicazione di *X* in *Y*.

L'elemento $y \in Y$ che corrisponde all'elemento $x \in X$ mediante la legge f, si chiama il valore della funzione f in *x*, od anche il trasformato di *x* mediante la trasformazione univoca f o l'immagine di x secondo f. Tale elemento si indica con $f(x)$, sicchè per definire la corrispondenza si può adoperare la seguente notazione: $y = f(x)$. In tale notazione la lettera *x* non rappresenta un elemento particolare, bensì l'elemento generico dell'insieme *X*, in tal senso si suol dire che *x* è la variabile dell'insieme *X*, o la variabile che descrive, o percorre, l'insieme *X*.

L'insieme X si chiama il **campo di definizione**, o di **esistenza**, della funzione o dell'applicazione f, od anche il **dominio** della trasformazione f. L'insieme Y si chiama l'**insieme dei valori**, o il **campo di variabilità** della funzione o applicazione f.

In ogni caso l'insieme $f(X)$, formato dai valori assunti da f in tutto il suo campo di esistenza, si chiama il **codominio** della funzione, o applicazione, o trasformazione.

Osserviamo, infine, che si deve ben distinguere fra i simboli f ed $f(x)$ perché, come si è detto, il primo di essi denota l'applicazione o funzione, cioè la legge di corrispondenza, il secondo rappresenta il valore della funzione f in x, cioè l'elemento che f fa corrispondere all'elemento x.

ESERCIZI

Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

1. Un sottoinsieme di R illimitato superiormente è privo di maggioranti. **V** **F**
2. L'insieme Z^{-}dei numeri interi negativi è limitato superiormente e illimitato inferiormente. **V F**
3. L'insieme A formato dai numeri reali dell'intervallo $[1,5)$ ha per estremo superiore 5. **V** **F**
4. L'estremo superiore e inferiore di un insieme I appartengono sempre ad I. **V** **F**
5. L'estremo inferiore e superiore di un insieme I coincidono sempre, rispettivamente, con il minimo e il massimo dell'insieme. **V** **F**
6. L'insieme formato dai numeri reali dell'intervallo $[0,7)$ ammette minimo ma non massimo. **V** **F**
7. L'intervallo $[-2,8]$ ha come raggio il numero 3. **V** **F**
8. L'intervallo $[-1,5]$ ha come centro il numero 2. **V** **F**

SOLUZIONI E COMMENTI

1. Il maggiorante di un insieme I è, per definizione, quel numero reale k che, non è inferiore ad alcun numero di I. Se l'insieme è superiormente illimitato non ha senso parlare di maggiorante, perché non esiste un numero reale che sia maggiore di tutti i numeri dell'insieme: [**V**].
2. L'insieme Z^- inizia con il numero -1, che costituisce il limite superiore ed è anche il massimo dell'insieme, infatti, nessun numero dell'insieme è maggiore di -1. Inoltre l'insieme Z^- procede senza limite con valori interi negativi sempre più piccoli: [**V**].
3. Un numero L si dice estremo superiore di un insieme A se soddisfa le tre seguenti condizioni:

$$L\text{=Sup}.\,A \Leftrightarrow \begin{cases} Sup.\,A \notin A \\ \forall a \in A, Sup.\,A \geq a \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A\colon Sup.\,A - \varepsilon < a \end{cases}$$

   La prima condizione è banalmente verificata in quanto il numero 5 non appartiene all'intervallo. La seconda condizione è verificata in quanto ogni numero dell'insieme è minore o al massimo uguale ad L. Nel nostro caso ciò è senz'altro verificato perché non esiste alcun numero maggiore di 5. La terza condizione è anch'essa verificata. Infatti, comunque scelto un numero $\varepsilon > 0$, esiste sempre un numero a maggiore di $L - \varepsilon$. Nel nostro caso, fissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, tutti i numeri compresi fra $5 - \varepsilon$ e 5 appartengono all'insieme A e sono tutti maggiori del numero $5 - \varepsilon$: [**V**].
4. I punti estremanti di un insieme I possono appartenere o anche non appartenere all'insieme. Nel caso del quesito n.3, ad esempio, il numero 5 costituisce l'estremo superiore perché non appartiene all'insieme A (si tratta, infatti, di un intervallo aperto a destra): [**F**].
5. L'estremo superiore (o l'estremo inferiore) coincide con il massimo (o il minimo) soltanto se tale estremo appartiene all'insieme I: [**F**].

6. Poiché lo zero appartiene all'insieme, al contrario del numero 7 che non vi appartiene, l'insieme ammette minimo ma non massimo: [**V**].
7. Il raggio di un intervallo $[a, b]$ è dato dalla semilunghezza dell'intervallo stesso, cioè $\frac{b-a}{2}$. Nel nostro caso si ha: $\frac{8-(-2)}{2} = 5$: [F].
8. Il centro di un intervallo $[a, b]$ è dato dalla relazione $\frac{a+b}{2}$. Nel nostro caso si ha: $\frac{-1+5}{2} = 2$: [**V**].