Geometria Analitica

La Geometria Analitica permette di tradurre un problema algebrico in un problema geometrico e viceversa.

La sua origine si fa risalire a **Cartesio**, il quale aveva elevato critiche ai matematici greci per non aver saputo indicare una via generale per l'impostazione dei problemi di geometria: infatti, i greci risolvevano i problemi analizzandoli caso per caso e, molte volte, solo per tentativi.

L'introduzione dell'uso sistematico degli assi cartesiani permette di rappresentare enti dello spazio geometrico con coppie o terne di numeri reali; in tal modo, la Geometria diviene una scienza principalmente analitica nella quale ogni problema bel formulato diventa (se di grado non superiore al 4°) risolubile.

Cartesio era talmente sicuro dell'efficacia del proprio metodo che affermava:

Non mi soffermo a spiegare minutamente tutte le questioni, solo per lasciare ai posteri la soddisfazione di apprendere da se stessi. Ed io spero che i nostri nipoti mi saranno grati non solo delle cose che io ho spiegato ma anche di quelle che ho volontariamente omesso allo scopo di lasciar loro il piacere di inventarle.

Contemporaneamente, aveva strutturato la geometria analitica un altro matematico francese, **Pierre de Fermat** (1601–1675) che, però, non riteneva che fosse una nuova branca della matematica totalmente in rottura col passato, in quanto già gli antichi greci avevano compiuto molti passi verso la nuova disciplina. Inoltre, il Fermat dava di essa una trattazione meno filosofica ma più concreta dal punto di vista operativo. Egli affermava:

La validità di questi principi non si può stabilire a priori ma risulta provata soltanto dagli effettivi successi conseguiti in relazione a problemi particolari, che i vecchi metodi non erano riusciti a risolvere.

In realtà, il Fermat non aveva torto in quanto si hanno tracce dell'uso del metodo delle coordinate fin dalla più remota antichità. L'astronomo greco **Ipparco** (II sec. A.C.) aveva introdotto coordinate geografiche per determinare la posizione di un punto sulla superficie terrestre. **Archimede** (III sec. a.C.) utilizzava coordinate per lo studio delle coniche. **Keplero**, per l'esposizione delle sue leggi, si riferiva a coordinate.

Geometria Proiettiva

Nello stesso periodo il matematico francese Girard **Desargues** (1591–1661), contemporaneo di Fermat e Cartesio, in un lavoro del 1639 aveva inaugurato il metodo delle proiezioni centrali introducendo per la prima volta il concetto di punto all'infinito.

Nel secolo successivo, prima con Gaspard **Monge** (1746–1818) e quindi con un suo allievo Jean-Victor **Poncelet** (1788–1867) si sviluppò la geometria proiettiva; quella disciplina cioè, che studia le proprietà delle figure che non si alterano per proiezioni e sezioni.

Alla Geometria Proiettiva, nel nostro corso, dedicheremo un capitolo che è essenziale nella formazione degli Architetti.

INTRODUZIONE ALLE COORDINATE CARTESIANE

Riferimento cartesiano della retta.

Data una retta r e fissato su di essa un punto O, una unità di misura e un orientamento, possiamo dire:

Dopo aver fissato un'unità di misura u, facciamo corrispondere a un generico punto P di r quel numero reale relativo x che è la misura algebrica, rispetto ad u, del segmento OP.

Il numero x si dice ascissa del punto P ed è un numero positivo, se P appartiene alla semiretta positiva, un numero negativo, se P appartiene alla semiretta negativa, è zero se P coincide con O.

Ad ogni punto di r viene associato un numero reale.
Reciprocamente,

- dato un numero reale relativo qualsiasi x ,
- fissata un'origine O su r e una unità di misura,

resta individuato uno e un solo punto P su r di ascissa x, tale che la misura algebrica di OP sia x

Il punto P appartiene alla semiretta positiva o negativa secondo che x sia positivo o negativo

Data una retta r e fissato su di essa un punto O, una unità di misura e un orientamento, possiamo dire:

1)Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta ***r*** *e l'insieme* **x** *dei numeri reali che – fissato un punto* ***O*** *(origine) e un punto* ***U*** *(unità) – associa ad ogni punto* ***P*** *un numero reale* ***x****;*
viceversa, ad ogni numero reale **x** *corrisponde un solo punto della retta* ***r***

Il riferimento della retta è caratterizzato dalla distanza tra due punti, dal punto medio.

Sul riferimento della retta definiamo la distanza tra due punti, punto medio.

in geometria elementare AB indica un segmento di estremi A e B senza alcuna orientazione.

- Se A e B, sono punti di una retta orientata, AB indica il segmento orientato $\underset{AB}{\longrightarrow}$,
- cioè l’insieme dei punti ordinati nel verso da A e B.
- Un segmento orientato sopra una retta orientata è positivo se il segmento ha la stessa orientazione della retta, è negativo se il segmento e la retta hanno orientazioni discordi.
- Segmento nullo se A coincide con B.

Al segmento orientato AB viene associata una

misura algebrica a rispetto a un segmento u assunto come

unità di misura; se AB è un segmento positivo la sua

misura è un numero positivo, se AB è negativo la sua

misura è un numero negativo.

AB è la distanza algebrica o relativa tra A e B

Il punto P appartiene alla semiretta positiva o negativa secondo che x sia positivo o negativo, la distanza di P da O è $x_2 - x_1|$Fissiamo M punto medio di un segmento AB sulla retta orientata r . AM≅MB, passando alle distanze $x_M - x_1 = x_2 - x_M$

$$X_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Questa è la media aritmetica , cioè semisomma di queste coordinate.
Si dimostra che la media geometrica è minore della media aritmetica

Passiamo al riferimento cartesiano nel piano,

2)Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta **r** *e l'insieme delle coppie* (***x, y***) *di numeri reali soluzioni di un'equazione di I grado a due incognite tale che ad ogni punto corrisponde una coppia; viceversa, ogni coppia è corrispondente di un unico punto della retta* ***r***

Osserviamo che la prima affermazione individua la retta ***r*** con l'insieme ***R*** dei numeri reali (*fig. 1.1*), mentre la seconda individua la retta ***r*** come sottoinsieme di R^2 (*fig. 1.2*).

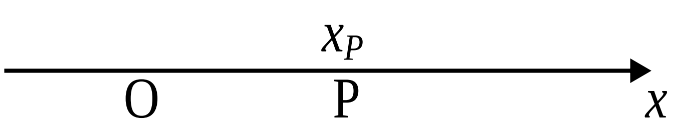


fig. 1.1

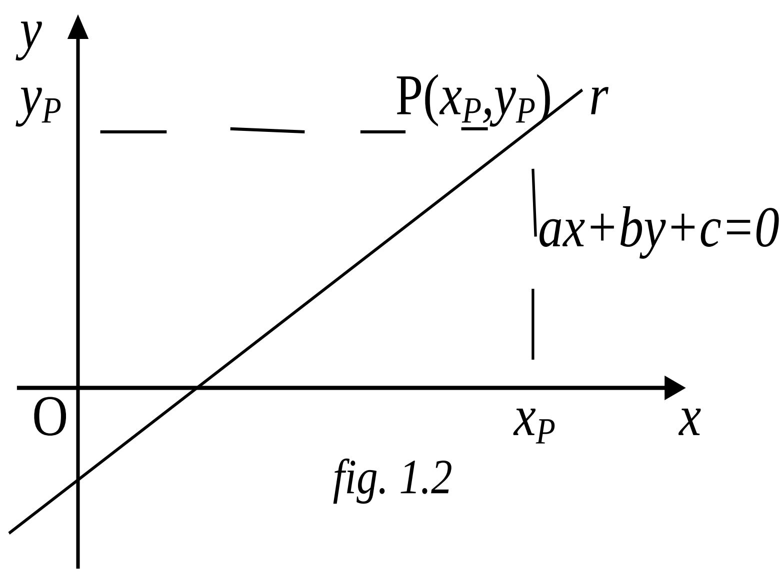


fig. 1.2

Passiamo al riferimento cartesiano nel piano,

2) Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta **r** e l'insieme delle coppie **(x,y)** di numeri reali soluzioni di un'equazione di I grado a due incognite tale che ad ogni punto corrisponde una coppia; viceversa, ogni coppia è corrispondente di un unico punto della retta **r**

Nel primo caso la retta ***r*** rappresenta lo spazio **euclideo** unidimensionale S_1 dotato di riferimento cartesiano O*x*; nel secondo caso, invece, la retta ***r*** rappresenta un *iperpiano* di uno spazio bidimensionale (cioè il piano munito di riferimento cartesiano O*xy*.)

Un *iperpiano* di uno spazio S_n ad *n* dimensioni è un suo sottospazio S_{n-1} di dimensione *n-1*. Pertanto, la retta **è un *iperpiano* S_1 di un pia**no S_2, *il piano* S_2 *è un iperpiano di uno spazio* S_3, ecc.

La differenza tra i due modi esposti, si può evidenziare mostrando che non è possibile visualizzare la corrispondenza biunivoca tra i punti di un piano e l’insieme **R** con un procedimento analogo a quello utilizzato per la retta. Infatti si può osservare che, fissato nel piano l’origine **O** e un punto **U (unità),** possiamo associare ad ogni punto **P** un solo numero reale x_P; viceversa però, ogni numero reale è il corrispondente degli infiniti punti di una circonferenza di centro **O** e raggio ***x*** (*fig. 1. 3a*).

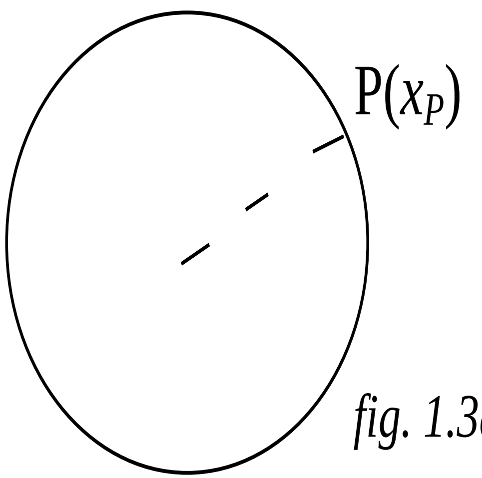


fig. 1.3a

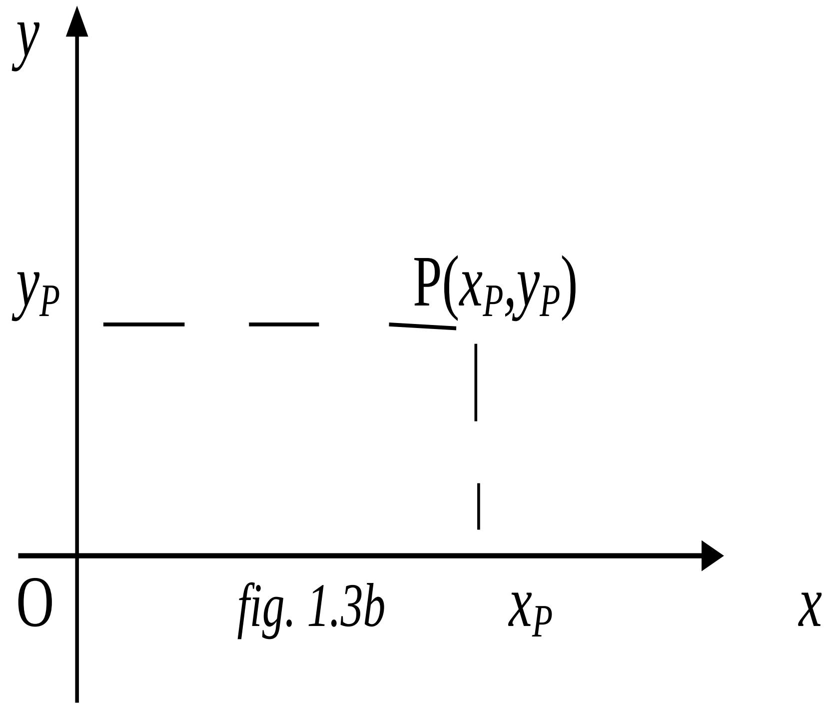


fig. 1.3b

Definiamo la distanza tra due punti nel piano cartesiano, e coordinate del punto medio.

Definiamo la distanza tra due punti nel piano cartesiano, e coordinate del punto medio.

Per la distanza tra due punti distinguiamo il caso in cui i due punti abbiano la stessa ascissa, segmento parallelo all'asse delle ordinate,

caso in cui la stessa ordinata, segmento parallelo all'asse delle ascisse,

caso non parallelo ad alcuno degli assi

$$\boldsymbol{d = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Coordinate del punto medio con il teorema di Talete.

Problema: determinare il perimetro e la lunghezza delle mediane del triangolo di vertici A(-1,0), B(2,-2), C(3,3)

- DAL 2° POSTULATO DI EUCLIDE ALL'EQUAZIONE DI 1° GRADO

2° postulato di Euclide
Esiste una sola retta per due punti assegnati **A** e **B**.

Equazione di 1° grado a due incognite
Data una equazione di 1° grado a due incognite, ricavare le coppie di numeri reali che sono soluzioni di essa.

Dati due punti **A**(x_a, y_a), **B**(x_b, y_b) in un piano munito di riferimento cartesiano, per il secondo postulato di Euclide, sappiamo che *esiste una ed una sola retta passante per essi*.
Vogliamo determinare una condizione a cui deve soddisfare il generico punto **P**(x, y) del piano affinché appartenga alla retta **AB**.
Tale condizione è individuata dalla similitudine tra i triangoli **ABC** e **APT** (*fig. 1.6*):

$$\frac{PT}{BC} = \frac{AT}{AC}$$

cioè:

$$\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \qquad (1.3)$$

(equazione della retta per due punti).

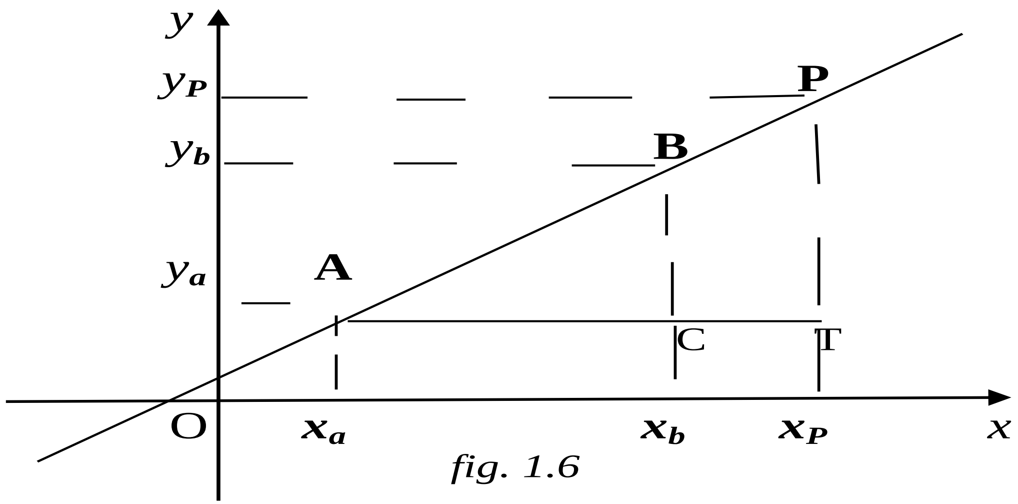


fig. 1.6

Da (*), con

$$y_b - y_a = -a \; ; \qquad x_b - x_a = b$$

si ha:

$$b(y_b - y_a) = -a(x - x_a) \quad \Rightarrow \quad ax + by - by_a - ax_a = 0$$

da cui, con: $-by_a - ax_a = c$, risulta:

$$ax + by + c = 0 \qquad \textit{(equazione lineare della retta)}$$

[1]Se $P \notin \boldsymbol{r}$, i triangoli **ABC** e **APT** non sono simili per cui non sussiste la (*).

Casi particolari

1) **a = 0** $\Rightarrow$ ***by + c=0*** $\Rightarrow$ $y = -\dfrac{c}{b}$ (1.4)

luogo geometrico dei punti del piano di ordinata constante *(retta parallela all'asse delle ascisse; fig. 1.7)*.

2) **b = 0** $\Rightarrow$ ***ax + c = 0*** $\Rightarrow$ $y = -\dfrac{c}{a}$ (1.5)

luogo geometrico dei punti del piano di ascissa constante *(retta parallela all'asse delle ordinate; fig. 1.8)*.

3) **c = 0** $\Rightarrow$ ***ax + by = 0*** $\Rightarrow$ $y = -\dfrac{a}{b}x$ (1.6)

le coordinate di **O(*0, 0*)** soddisfano l'equazione; l'origine degli assi appartiene alla retta (*fig. 1.9*).

4) $c=0$; $a=-b \Rightarrow x-y=0$ [$y=x$] (1.7)

Luogo geometrico dei punti del piano aventi ascisse ed ordinate uguali (bisettrice del primo e terzo quadrante) (fig 1.10)

5) $c=0$; $a=b \Rightarrow x+y=0$ [$y=-x$] (1.8)

Luogo geometrico dei punti del piano aventi ascisse ed ordinate opposte (bisettrice del secondo e quarto quadrante) (fig 1.11)

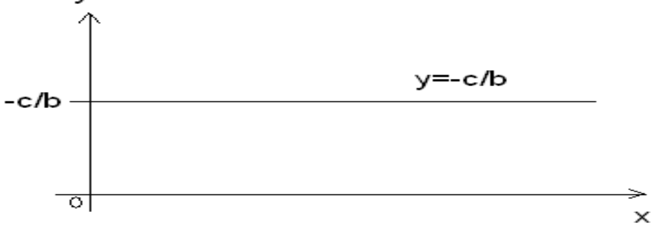


fig. 1.7

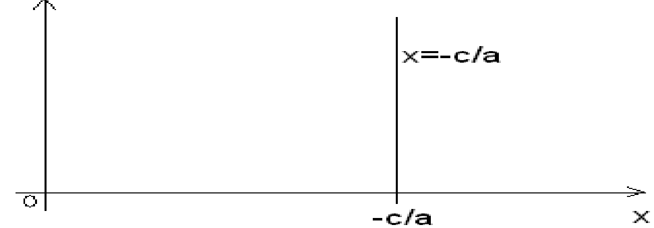


fig. 1.8

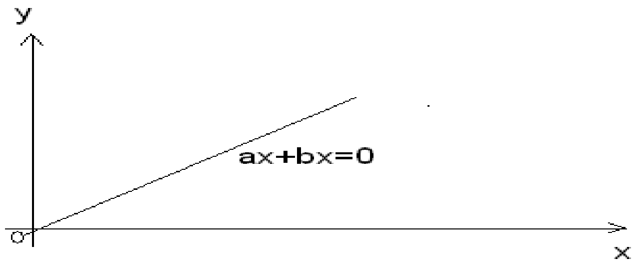


fig. 1.9

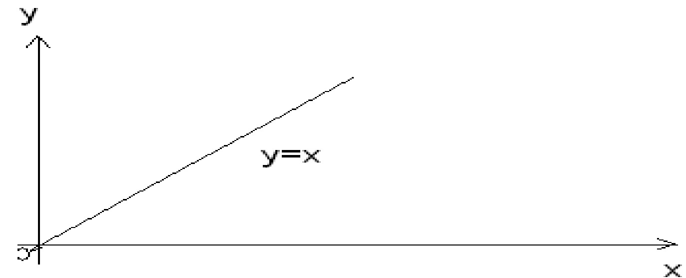


fig. 1.10

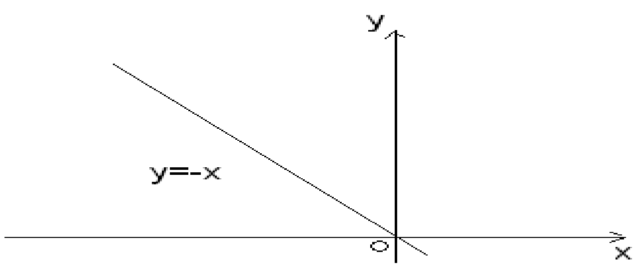


fig. 1.11

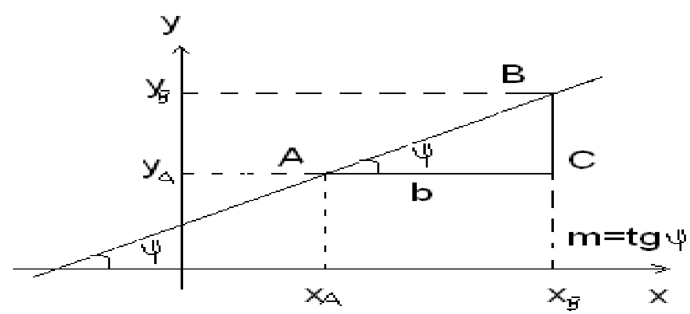


fig. 1.12

Determinare l’equazione della retta per i seguenti punti:

A(1,-2); B(3,1)

S(3,2), T(-1,2)

L(-2,3), M(-2,0)

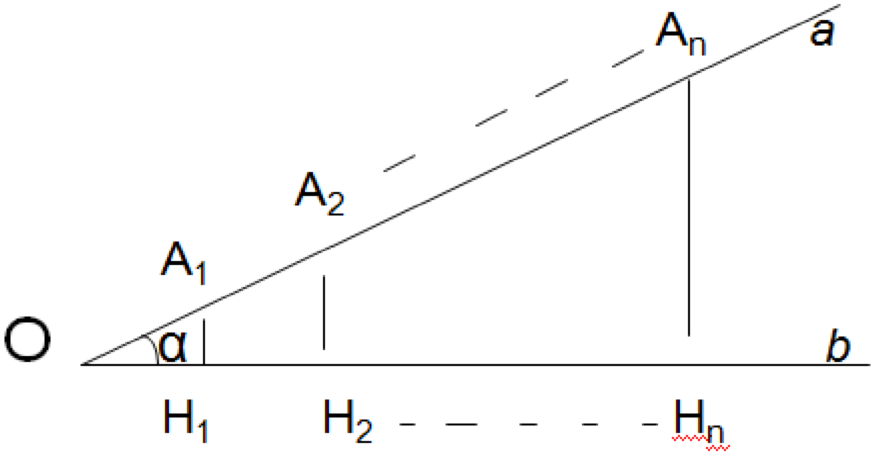
Ovviamente gli angoli sono parti del piano, mentre le funzioni le rappresentiamo come grandezze lineari sul piano cartesiano, per cui si è trovato un sistema per linearizzare queste funzioni utilizzando la corrispondenza biunivoca tra gli angoli al centro di una circonferenza e gli angoli corrispondenti per la quale ad angolo uguali corrispondono archi uguali. In che modo?

Consideriamo una circonferenza, ad angoli uguali corrispondono archi uguali. Disegniamo il diametro e da A riportiamo per 3 volte, sulla circonferenza rettificata, un arco di lunghezza uguale al raggio, arriviamo poco prima del punto B in corrispondenza del diametro. La differenza tra il punto in cui arriviamo dopo 3° B è 0.14r. Pertanto continuando a riportare il raggio arriviamo a 6r e la differenza da A è quindi 0.28r. Pertanto $3.14=\pi$

Quindi possiamo scrivere $180:\pi=\alpha°:l$

In ambito di formazione ad itinere, riteniamo opportuno introdurre le funzioni goniometriche direttamente sull'angolo con il seguente processo sintetico:

Fissato un angolo a$\hat{o}$ b , un'arbitraria successione di punti A_1 A_2 ……A_n sulla semiretta *Oa*, e le proiezioni ortogonali H_1 H_2…..H_n sulla semiretta *Ob*, dalla similitudine dei triangoli (fig. 3.1) si ha:



$$\frac{A_1H_1}{OA_1} = \frac{A_2H_2}{OA_2} = \ldots\ldots = \frac{A_nH_n}{OA_n} = \ldots\ldots sen\,\alpha$$

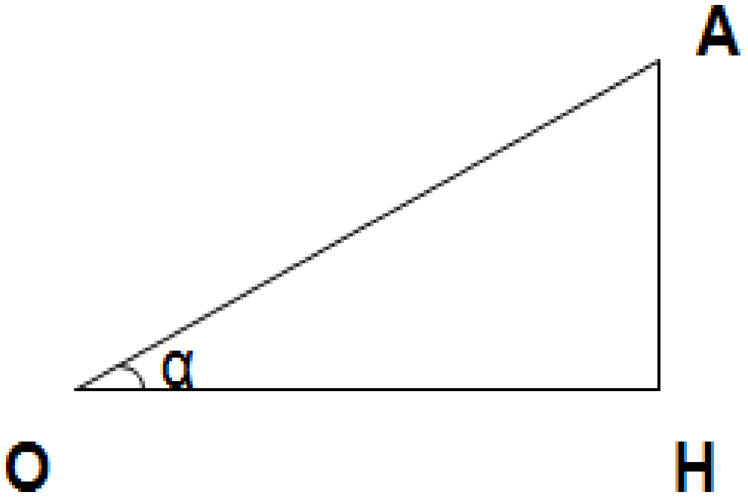
$$\frac{OH_1}{OA_1} = \frac{OH_2}{OA_2} = \ldots\ldots = \frac{OH_n}{OA_n} = \ldots\ldots \cos\alpha$$

$$\frac{A_1H_1}{OH_1} = \frac{A_2H_2}{OH_2} = \ldots\ldots = \frac{A_nH_n}{OH_n} = \ldots\ldots tg\,\alpha$$

$$\frac{AH}{OA} = sen\,\alpha \quad \Rightarrow \quad AH = OA\,sen\,\alpha$$

$$\frac{OH}{OA} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad OH = OA\cos\alpha$$

$$\frac{AH}{OH} = tg\,\alpha \quad \Rightarrow \quad AH = OH\,tg\,\alpha$$



Equazione della retta in forma esplicita: coefficiente angolare e suo significato geometrico

Se nella:

$$ax + by + c = 0 \qquad (1.9)$$

risulta $b \neq 0$ (cioè la retta non è parallela all'asse delle ordinate), dividendo ambo i membri per b si ha:

$$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$$

da cui:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

in cui, posto:

$$-\frac{a}{b} = m \qquad\qquad -\frac{c}{b} = p$$

risulta:

$$y = mx + p \qquad (1.10)$$

(equazione esplicita della retta)

Il numero *m è* detto <u>coefficiente angolare</u> della retta, in quanto individua l'angolo che la retta forma con l'asse delle ascisse; precisamente, *m* rappresenta la tangente goniometrica di tale angolo. Infatti, riferendosi alla fig.1.12, si ha:

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{BC}{AC} = tg\varphi$$

Il punto *p* è detto <u>*intercetta*</u> in quanto rappresenta l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse delle ordinate ; infatti, per x=0 risulta:

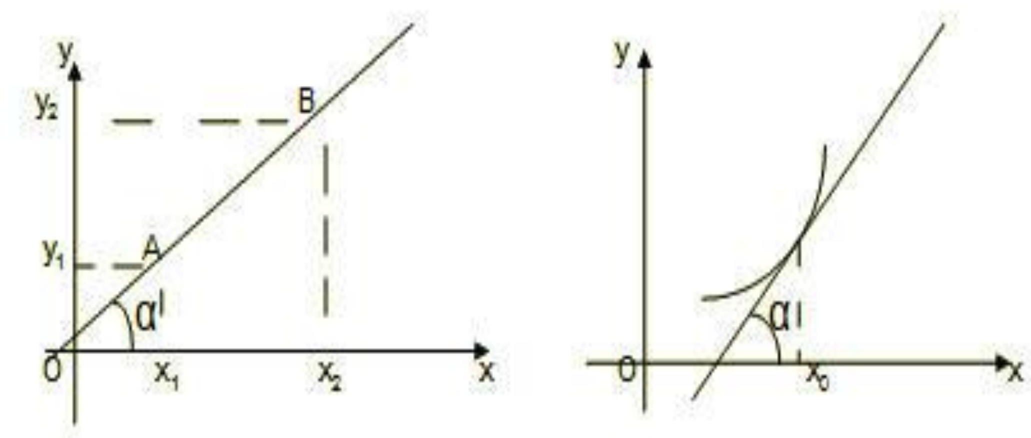
y=m0+p

Cioè:

y(0)=p

Un esempio di carattere geometrico per introdurre la derivata.

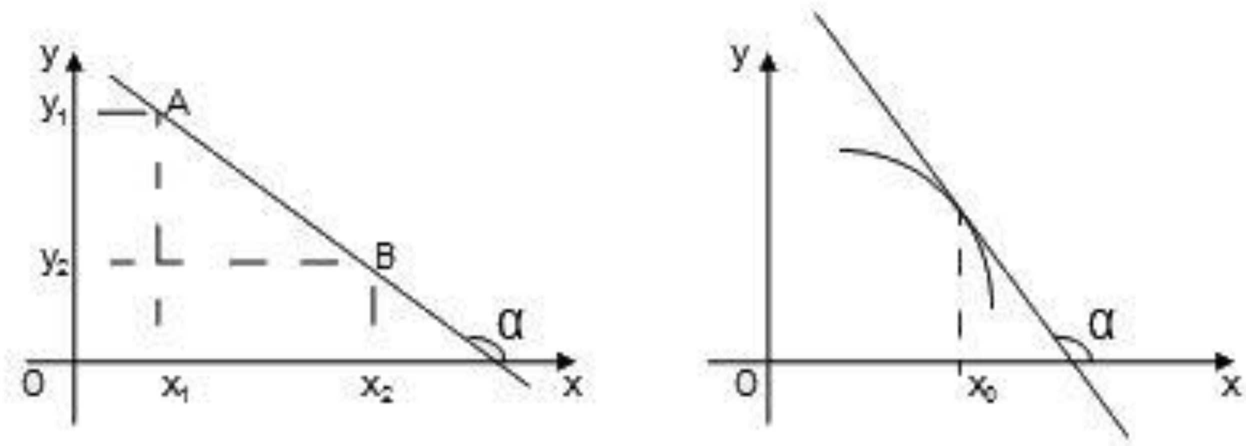
Consideriamo una qualsiasi retta *r* non parallela all'asse delle ordinate, in un sistema di riferimento di assi cartesiani. Osserviamo che se *r* forma un angolo acuto col semiasse positivo delle x, risulta che il coefficiente angolare della retta è positivo:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{+}{+} > 0$$

$$0 < \alpha < 90° \quad \Rightarrow \quad m > 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) > 0$$

Se, invece, *r* forma un angolo ottuso col semiasse positivo delle x, risulta che il coefficiente angolare della retta è negativo:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-}{+} < 0$$

$$90° < \alpha < 180° \quad \Rightarrow \quad m < 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) < 0$$

Riteniamo che si possa dare già ai ragazzi dal secondo/ terzo anno il concetto di derivata indipendentemente dal limite.

- **Condizione di parallelismo e perpendicolarità tra rette.**

Dal significato geometrico del coefficiente angolare di una retta si deduce immediatamente che « Due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare». Pertanto, se

r) ax+by+c=0 e s) $\alpha x+\beta y+\gamma=0$

sono parallele (fig 1.13),deve risultare:

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Cioè:

$$a\beta-b\alpha=0$$

che, in forma matriciale, significa : $\begin{vmatrix} a & \mathrm{b} \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}=0$

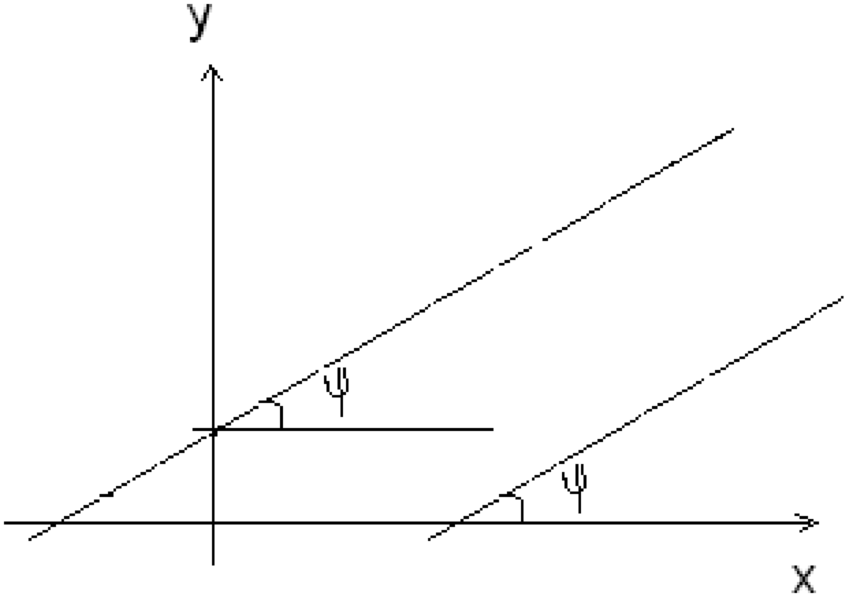


fig. 1.13

Data una retta r) $ax + by + c = 0$ ed un punto $P(x_0, y_0)$

L'equazione della parallela per P ad r è data da:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \qquad (1.11)$$

Oppure tenendo conto che:

$$-\frac{a}{b} = m$$

Nella forma

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (1.12)$$

Infatti, indicando con s) $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ la generica retta per $P(x_0, y_0)$, deve risultare:

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$$

(condizione di appartenenza del punto $P(x_0, y_0)$

Alla retta s).

Sottraendo membro a membro le due relazioni:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0$$

Risulta: $$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$$

Da cui: $$y - y_0 = -\frac{\alpha}{\beta}(x - x_0)$$

Cioè, tenendo conto che:
$$-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{a}{b} = m$$

si ha in definitiva :

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Analogamente si dimostra che la condizione di perpendicolarità tra due rette di coefficienti angolari rispettivamente m_1 e m_2 è:

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$

Per cui l'equazione della perpendicolare ad una retta di coefficiente angolare m per un punto P è:

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0) \qquad (1.13)$$

O in forma lineare:

$$a(y - y_0) - b(x - x_0) = 0 \qquad (1.14)$$

FASCI DI RETTE

Data una retta r nel piano di equazione ax+by+c=0, l'insieme di tutte le retta del piano ad essa parallele è detto fascio improprio di rette. Fissando un punto nel piano $P(x_0, y_o)$, l'insieme di tutte le rette del piano passanti per P prende il nome di fascio proprio, P è detto centro del fascio.

In seguito vedremo che indicheremo anche un centro del fascio improprio che rappresenta la direzione delle rette parallele.

Data una retta r di equazione $y = m_0 x + h$

Con h parametro variabile e m_0 coefficiente angolare fissato, tale equazione rappresenta un fascio improprio di rette di coefficiente angolare m_0 es y=2x+h con h=0, h=-1

- Date due rette r di equazione $ax+by+c=0$ e s $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ esse individuano il fascio $ax+by+c+k(\alpha x+\beta y+\gamma)=0$ di centro $C\equiv r \cap s$
- Assegnate r) $3x-2y+1=0$, s) $x+2y-3=0$ l'equazione $3x-2y+1+k(x+2y-3)=0$ individua il fascio che ha per centro $C\equiv r \cap s$, determinare:
- il centro del fascio
- la parallela all'asse delle x
- la parallela all'asse delle y
- la retta passante per il punto $A(-2,3)$
- la retta parallela alla retta a di equazione…….
- la perpendicolare alla retta di equazione……
- la retta che non si ottiene da alcun valore di k