



FISICA II

Lez. 4 – Potenziale elettrico

Prof. Giovanni Mettivier



Prof. Giovanni Mettivier, PhD

Dipartimento Scienze Fisiche

Università di Napoli "Federico II"

Compl. Univ. Monte S. Angelo

Via Cintia, I-80126, Napoli

mettivier@na.infn.it

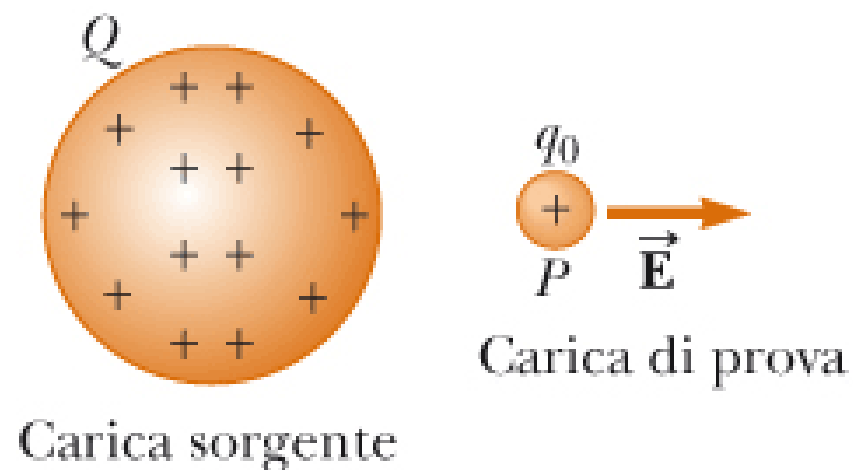
+39-081-676137



- Capire che la forza elettrica è conservativa e quindi è associata a un'energia potenziale.
- Sapere che in ogni punto del campo elettrico generato da un corpo carico quest'ultimo stabilisce un potenziale elettrico V , una grandezza scalare positiva o negativa a seconda del segno della carica.
- Applicare, per una particella carica giacente in un punto del campo elettrico creato da un corpo carico, la relazione che lega il potenziale elettrico V prodotto dal corpo in quel punto, la carica q della particella e l'energia potenziale U del sistema corpo-particella.
- Convertire le unità di energia da joule in elettronvolt e viceversa.
- Applicare, per una particella carica che si sposta da un punto iniziale a uno finale in un campo elettrico, le relazioni tra la variazione energia potenziale ΔU , la carica della particella q , la variazione di energia potenziale ΔU e il lavoro L svolto dalla forza elettrica.
- Capire come mai, quando una particella carica si muove tra due punti di un campo elettrico dovuto a un corpo carico, il lavoro compiuto dalle forze del campo elettrico sia indipendente dal cammino seguito.

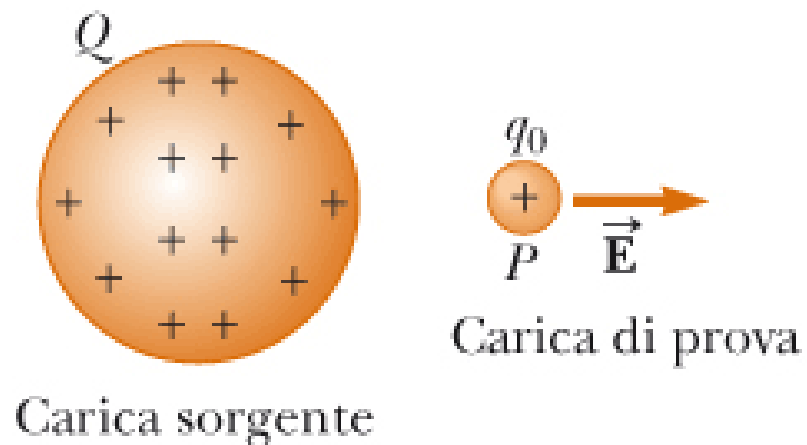


Torniamo alla situazione considerata in figura. La particella 1 dotata di carica positiva q_0 si trova nel punto P vicino alla particella 2 dotata di carica positiva Q . Abbiamo visto come la particella 2 sia in grado di agire, spingendola, sulla particella 1 senza bisogno di contatto. Per rendere conto dell'esistenza della forza F (una grandezza vettoriale) abbiamo definito il campo elettrico $\mathbf{E}$ (anch'esso vettoriale) instaurato nel punto P dalla particella 2. E tale campo sussiste indipendentemente dalla presenza in P della particella 1. Se, in assenza, decidiamo di collocarla lì la forza che agisce su di essa è dovuta all'esistente campo elettrico $\mathbf{E}$ e dipende dalla sua carica q_0 .



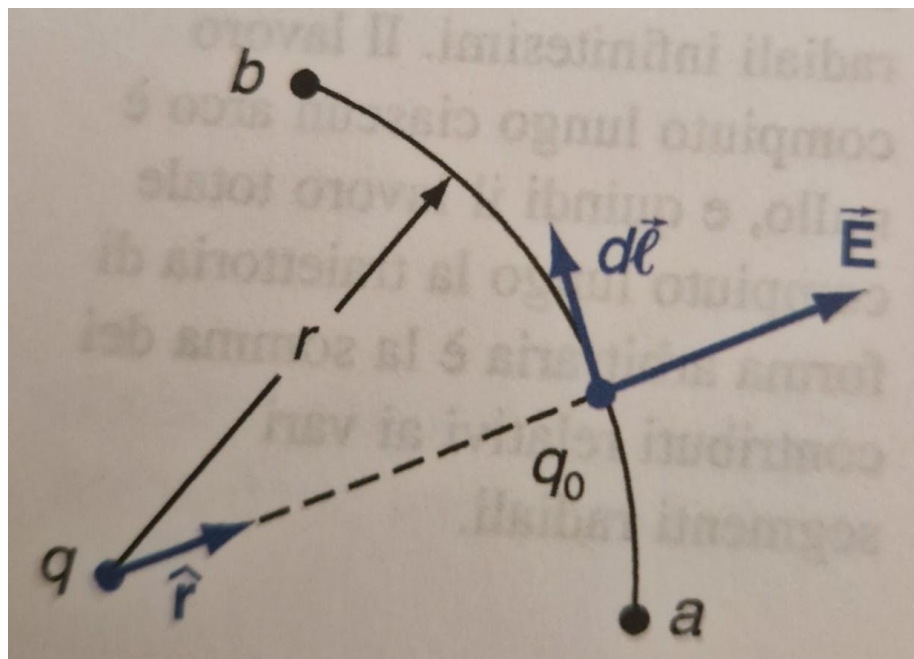


Qui sorge un interrogativo. Se lasciamo la particella libera nel punto P, essa comincia a muoversi ed ad assumere energia cinetica. L'energia non si crea dal nulla, e quindi da dove viene?

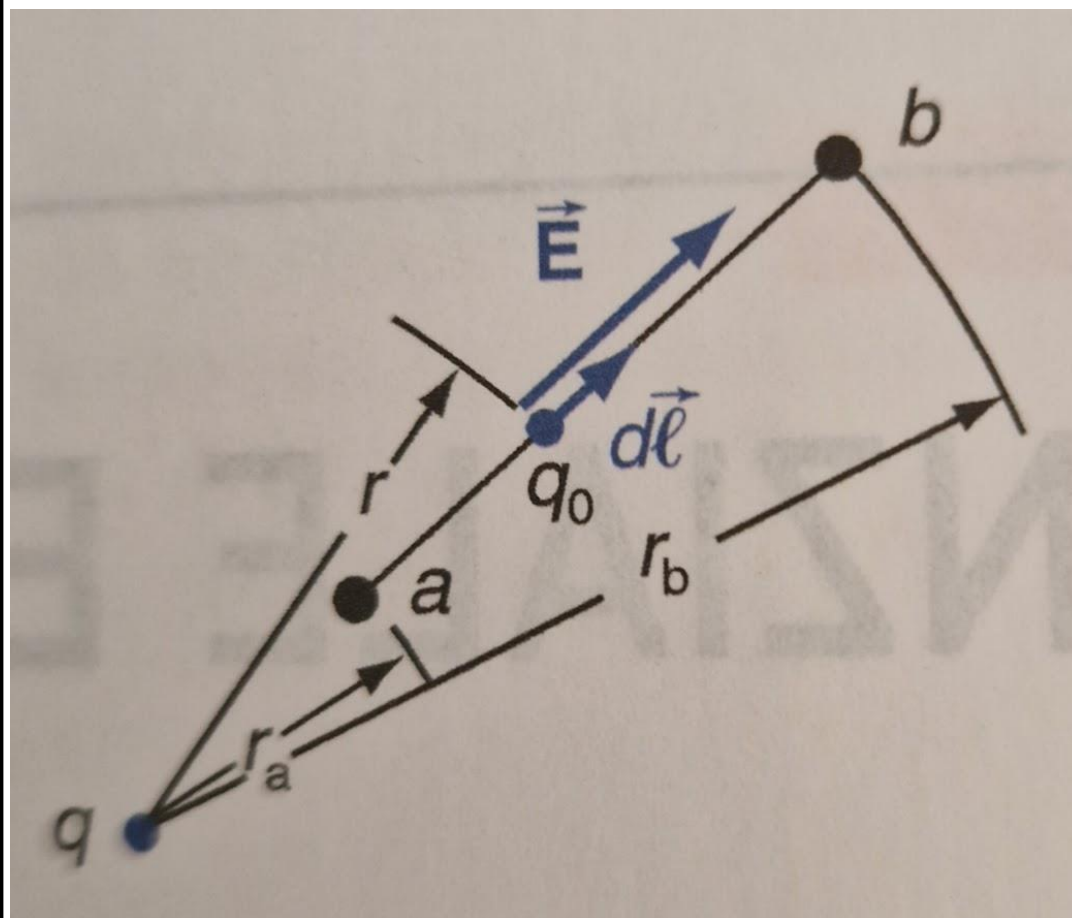




Siccome sulla carica agisce una forza e questa si sposta possiamo calcolarci il lavoro. Prendiamo il caso riportato in figura.



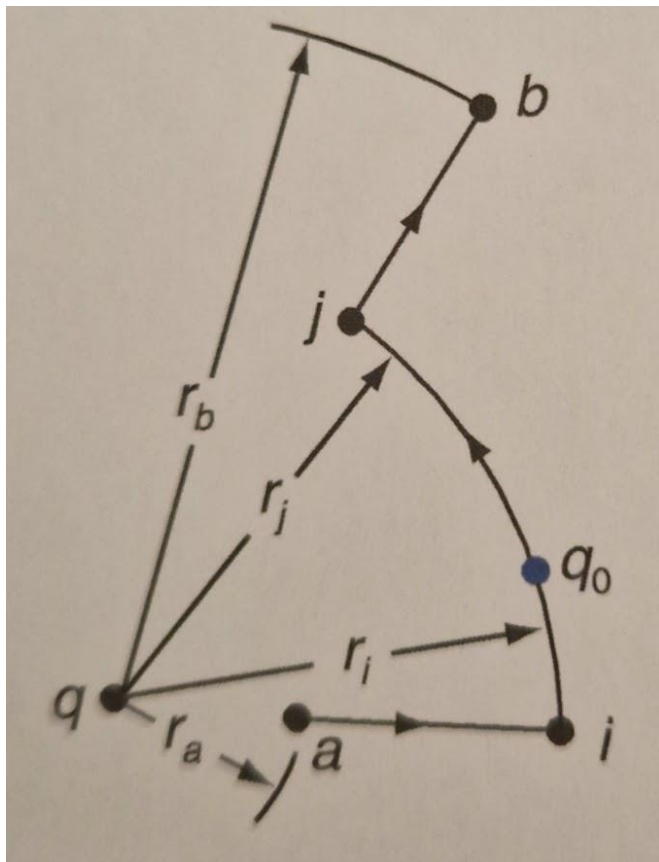
$$\int_a^b \vec{F} d\vec{l} = q_0 \int_a^b \vec{E} d\vec{l} = 0$$



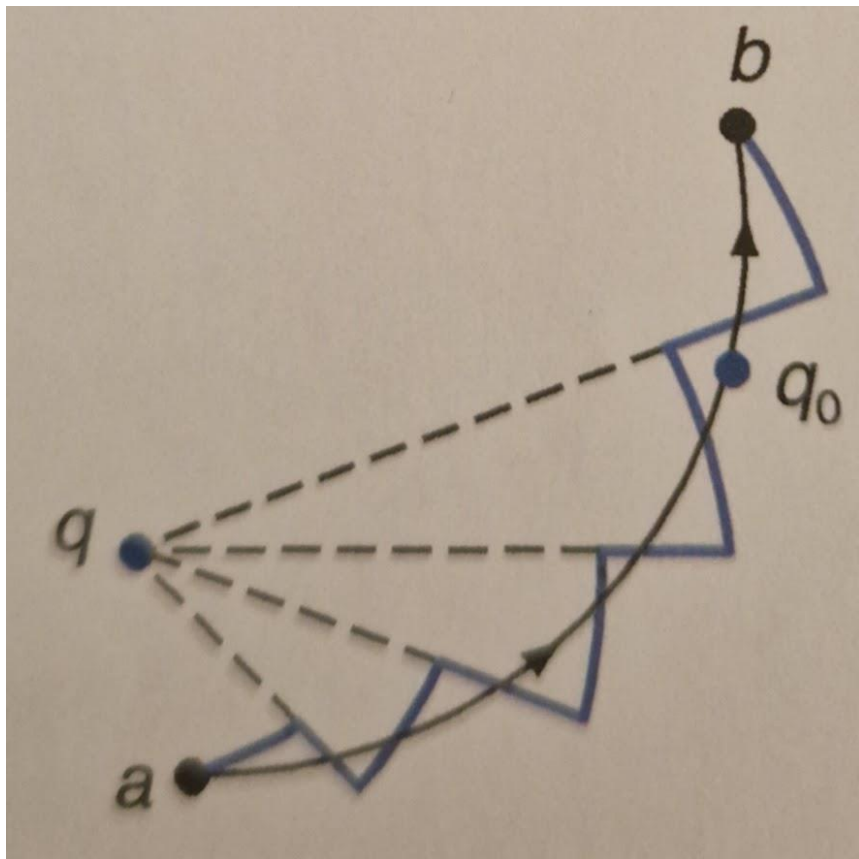
$$\begin{aligned}
 \int_a^b \vec{F} d\vec{l} &= q_0 \int_a^b \vec{E} d\vec{l} \\
 &= q_0 \int_{r_a}^{r_b} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \right) (dr \hat{r}) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} \\
 &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_a}^{r_b} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)
 \end{aligned}$$



$$\int_a^b \vec{F} d\vec{l} = \int_a^i \vec{F} d\vec{l} + \int_i^j \vec{F} d\vec{l} + \int_j^b \vec{F} d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i} \right) + 0 + \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_b} \right)$$



$$\int_a^b \vec{F} d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$



$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$



Il lavoro svolto dal campo sulla carica puntiforme è simile al lavoro svolto dal campo gravitazionale su un oggetto che cade. Abbiamo trovato che l'energia potenziale gravitazionale di un sistema isolato oggetto-campo varia di una quantità uguale al lavoro, cambiato di segno, svolto dal campo sull'oggetto.

Analogamente, il lavoro svolto dal campo elettrico sulla particella carica varia l'energia potenziale del sistema isolato carica-campo di una quantità

$$dU = -W_{int} = -q\vec{E}d\vec{s}$$



Per uno spostamento finito della particella di prova di carica q fra i punti A e B, la **variazione di energia potenziale** del sistema carica-campo è

$$\Delta U = U_B - U_A = -q \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$$

Questo integrale non dipende dal cammino seguito per andare da A e B.

$$U_b - U_a = - \int_a^b \vec{F} d\vec{l} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$



Dobbiamo prima stabilire la configurazione di riferimento in cui vale $U=0$. Una comoda e ragionevole scelta consiste nel fissare come tale la configurazione che vede la carica situata in posizione infinitamente lontana dalla carica sorgente, una situazione che annulla la loro interazione. A questo punto trasportiamo la carica esplorativa da distanza infinita alla posizione in P . E così ricaviamo l'energia potenziale in cui W e il lavoro compiuto dalla forza elettrica.

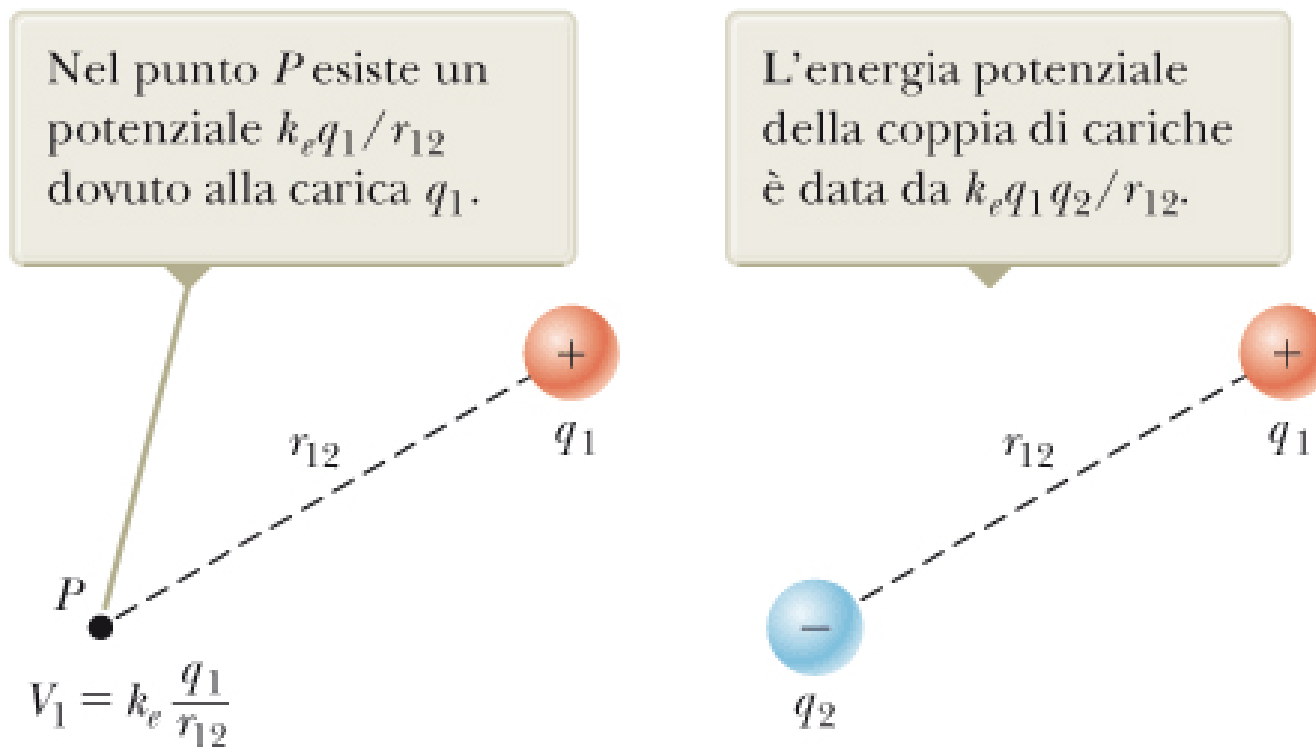
$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r} = - \int_{\infty}^r \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Se V_1 è il potenziale elettrico dovuto alla carica q_1 in un punto P , il lavoro necessario per portare una seconda carica, q_2 , dall'infinito in P , è dato da $q_2 V_1$.

Quindi si può esprimere **l'energia potenziale di una coppia di particelle cariche** come:

$$U = q_2 V_1 = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$





Si noti che se le cariche sono di segno uguale, U è positiva. Ciò è consistente col fatto che cariche simili si respingono e quindi bisogna compiere un lavoro positivo sul sistema per avvicinare le due cariche. Al contrario, se le cariche sono di segno opposto, la forza è attrattiva e U è negativa. Ciò significa che si deve compiere un lavoro negativo per avvicinare due cariche di segno opposto. In questo caso, un lavoro negativo viene compiuto da un agente esterno contro la forza attrattiva che si esercita tra le due cariche di segno opposto, le quali si attraggono l'una all'altra e quindi è necessario applicare una forza per evitare che la carica q_1 acceleri su q_2 .



Abbiamo stabilito che la forza elettrica $\vec{F}$ agente su una particella di prova di carica q_0 in prossimità di una distribuzione di carica è proporzionale a q_0 . Il rapporto $\frac{\vec{F}}{q_0}$ dipende dalla distribuzione di carica, ma è indipendente da q_0 .

Abbiamo definito questo rapporto come il campo elettrico $\vec{E}$. Per l'energia potenziale in modo analogo possiamo dividere per q_0 e la grandezza che si ottiene è indipendente da q_0 . Quindi si definisce il **potenziale elettrico V** come

$$V \equiv \frac{U}{q_0}$$



Poiché il potenziale è una misura dell'energia per unità di carica, l'unità di misura del potenziale nel SI è il joule su coulomb chiamato **volt** (V):

$$1V \equiv 1 \text{ J /C}$$

Un'unità d'energia comunemente usata in fisica è l'elettronvolt (eV):

$$1 \text{ eV} = (1e)(1 \text{ V}) = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(1\text{J/C}) = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Un eV è l'energia cinetica guadagnata da una particella con carica e accelerata attraverso una differenza di potenziale di 1 V.



Poiché l'energia potenziale è uno scalare, il potenziale è pure una grandezza scalare. Si noti che il potenziale non è una proprietà del sistema carica-campo, poiché abbiamo diviso l'energia potenziale del sistema per la carica. **Esso è una proprietà soltanto del campo.** Quindi, in una situazione fisica, possiamo immaginare di togliere la carica di prova dal campo. Il potenziale esiste ancora nel punto occupato dalla carica di prova ed è dovuto alle cariche sorgenti che determinano il campo elettrico.



Se $U_b - U_a$ rappresenta la variazione di energia potenziale elettrica di una particella di prova con carica q_0 quando viene spostata da a al punto b , la differenza di potenziale tra i punti a e b è definita come

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0}$$

La differenza di potenziale tra due punti di una regione può essere determinata a partire dal campo elettrico presente nella regione. Dal momento che la variazione di energia potenziale elettrica di una particella di prova con carica q_0 è l'opposto del lavoro compiuto dalla forza elettrica, si ha

$$U_b - U_a = -q_0 \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$



Dividendo per q_0 si ottiene la differenza di potenziale in funzione del campo elettrico:

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} d\vec{l}$$

Poiché la forza elettrica è conservativa, per calcolare l'integrale di linea dell'eq. si può usare qualunque percorso che connetta i punti a e b .



Abitualmente fisseremo il potenziale dovuto a una o più cariche sorgenti pari a zero in un punto posto all'infinito (cioè, in un punto infinitamente lontano dalle cariche sorgenti che generano il campo). Con questa scelta, diciamo che il potenziale elettrico di un punto arbitrario è uguale al lavoro per unità di carica necessario per portare una particella di prova dall'infinito al punto, diviso per la carica della particella di prova. Così, se prendiamo $V_A=0$ all'infinito, allora il potenziale in ogni punto P sarà:

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{s}$$

dove $\vec{E}$ è il campo elettrico generato dalle cariche sorgenti.



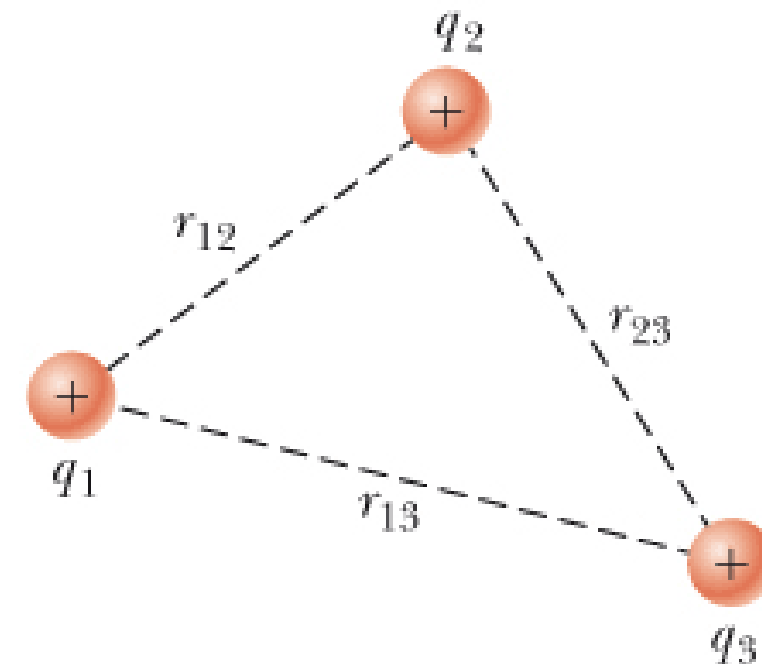
La definizione del **potenziale** si basa sulla scelta che abbiamo fatto della posizione di riferimento per l'energia potenziale: $U = 0$ per $r = \infty$. Pertanto, anche la posizione di riferimento per il potenziale V è in $r = \infty$. In altre, parole si ammette che V sia nullo in punti molto lontani dalla distribuzione di carica ($V_{\infty} = 0$). Tuttavia, la scelta di una posizione di riferimento è semplicemente questione di comodità: quando si ha a che fare con i circuiti elettrici, per esempio, una posizione di riferimento comoda è la Terra. Soltanto una variazione dell'energia potenziale ha significato fisico e, corrispondentemente, soltanto una variazione di potenziale, o **differenza di potenziale**, ha significato fisico. La differenza di potenziale viene spesso chiamata **tensione elettrica**.



Il potenziale elettrico generato da due o più cariche puntiformi si ottiene applicando il principio di sovrapposizione. Ovvero, il potenziale in un certo punto P dovuto a più cariche puntiformi è la somma dei potenziali dovuti alle singole cariche. Per un sistema di cariche, possiamo scrivere il potenziale totale in P nella forma

$$V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

assumendo il potenziale ancora nullo all'infinito e dove r_i è la distanza del punto P dalla carica q_i . Si noti che la somma nell'eq. è una somma *algebrica* di scalari e non una somma *vettoriale*. Quindi, per un insieme di cariche è più facile calcolare V che calcolare $\mathbf{E}$.



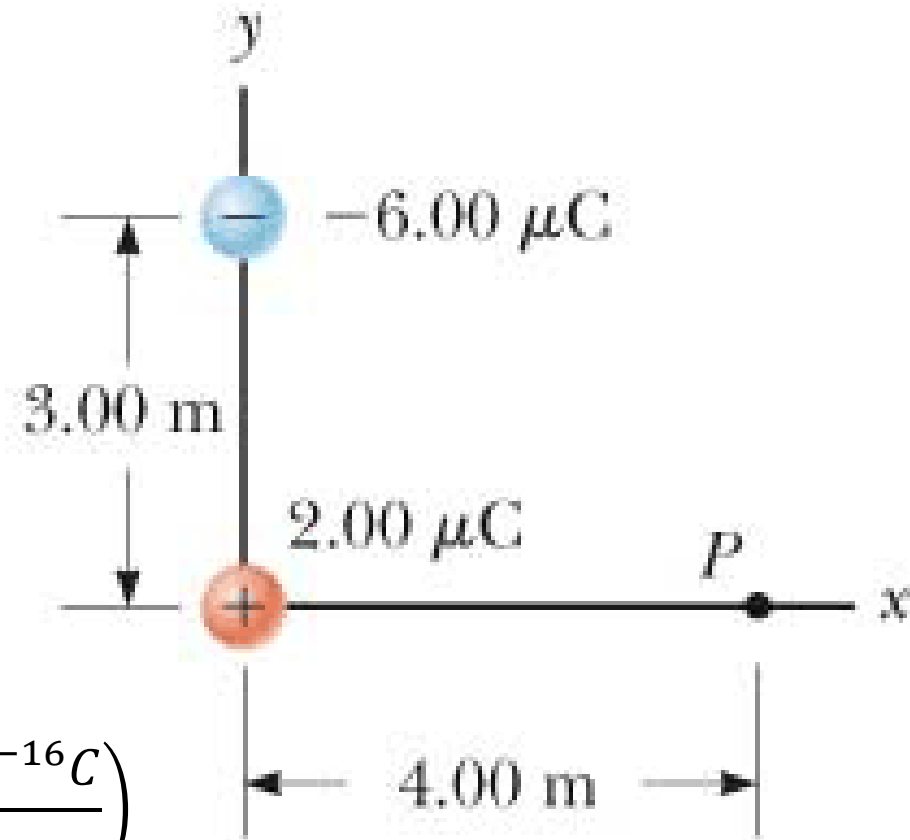
$$U = k_e \left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right)$$



Una carica $q_1 = 2.00 \mu\text{C}$ si trova nell'origine e una carica $q_2 = -6.00 \mu\text{C}$ è posta nel punto $(0, 3.00) \text{ m}$, come in figura.

a) Determinare il potenziale elettrico totale dovuto a queste cariche nel punto P di coordinate $(4.00, 0) \text{ m}$.

$$V_p = k_e \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$



$$V_p = (8.988 \times 10^9 \text{ N m}^2/\text{C}^2) \left(\frac{2.00 \times 10^{-16} \text{ C}}{4.00 \text{ m}} + \frac{-6.00 \times 10^{-16} \text{ C}}{5.00 \text{ m}} \right)$$
$$= -6.29 \times 10^3 \text{ V}$$

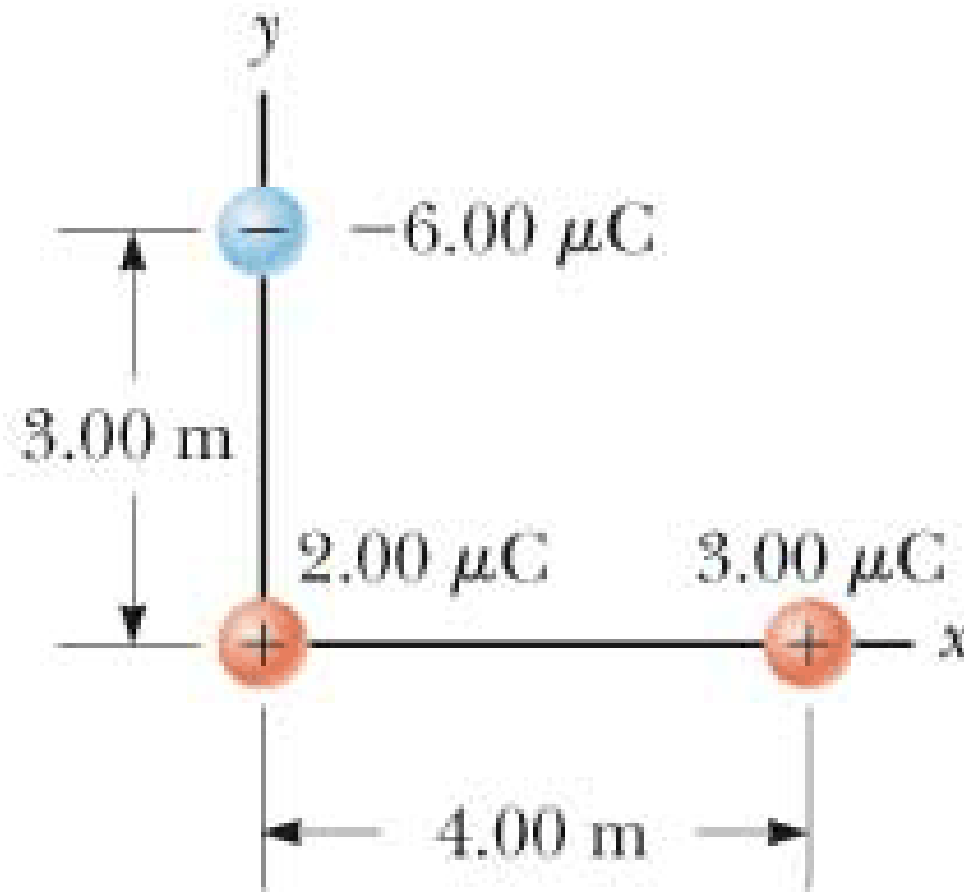


Una carica $q_1 = 2.00 \mu\text{C}$ si trova nell'origine e una carica $q_2 = -6.00 \mu\text{C}$ è posta nel punto $(0, 3.00) \text{ m}$, come in figura.

b) Si calcoli la variazione di energia potenziale del sistema dovuta all'inserimento di una carica $q_3 = 3.00 \mu\text{C}$, che viene portata all'infinito al punto P .

$$U_f = q_3 V_P$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i = q_3 V_P - 0 = \\ &= (3.00 \times 10^{-6} \text{ C})(-6.29 \times 10^3 \text{ V}) = \\ &= -1.89 \times 10^{-2} \text{ J}\end{aligned}$$





Quindi

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$



Nel punto P la carica positiva (alla distanza $r_{(+)}$), genera il potenziale $V_{(+)}$, e la carica negativa (alla distanza $r_{(-)}$), genera il potenziale $V_{(-)}$. Per cui il potenziale nel punto P

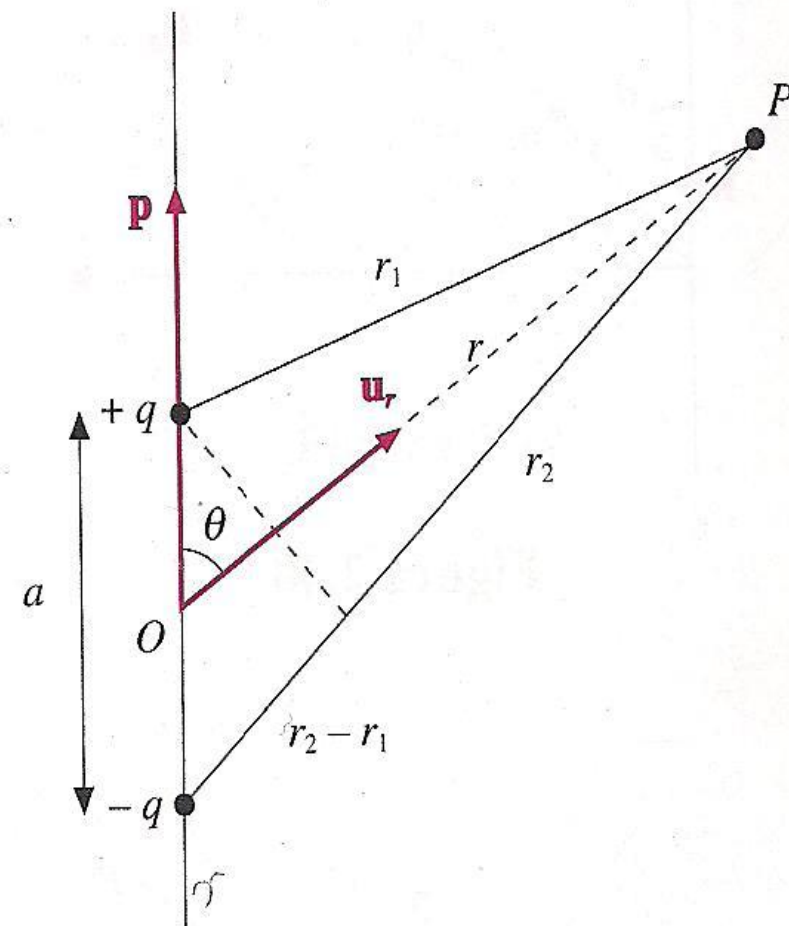
$$V = \sum_{i=1}^2 V_i = V_{(+)} + V_{(-)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_{(+)}} + \frac{-q}{r_{(-)}} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_{(-)} - r_{(+)}}{r_{(-)}r_{(+)}}$$

Siamo normalmente interessati soltanto i punti lontani dal dipolo, laddove $r \gg a$. In queste condizioni possiamo considerare $r_{(+)}$ ed $r_{(-)}$ come parallele e la loro differenza rappresentata dal cateto del triangolo rettangolo avente ipotenusa d . La differenza è così piccola rispetto a r che possiamo approssimare il prodotto di $r_{(+)}$ ed $r_{(-)}$ ad r^2 .

$$r_{(-)} - r_{(+)} \approx a \cos\theta \quad e \quad r_{(-)}r_{(+)} \approx r^2$$

Si può approssimare V come segue:
$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos\theta}{r^2}$$

Possiamo ora scrivere
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{r^2}$$





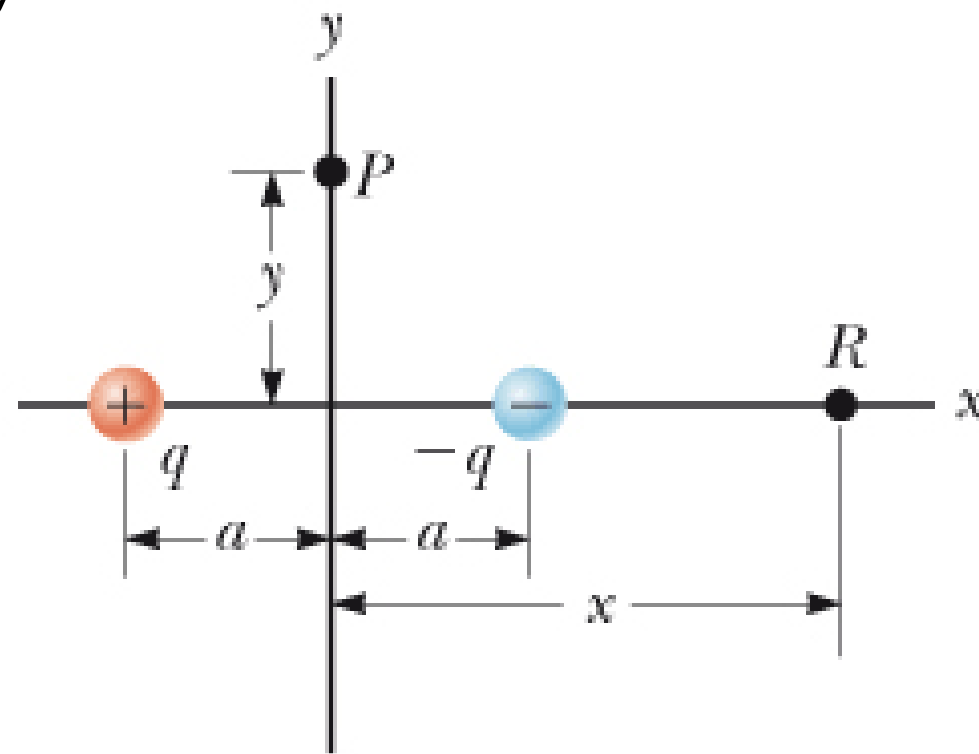
Un dipolo elettrico è costituito da due cariche di uguale valore e di segno opposto separate da una distanza $2a$, come mostrato in figura. Il dipolo giace sull'asse x ed è centrato nell'origine.

a) Si calcoli il potenziale elettrico nel punto P sull'asse y .

$$V_p = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right) = 0$$

b) Si calcoli il potenziale elettrico nel punto R sul semiasse positivo delle x

$$\begin{aligned} V_p &= k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_e \left(\frac{q}{x - a} + \frac{-q}{x + a} \right) \\ &= -\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2} \end{aligned}$$

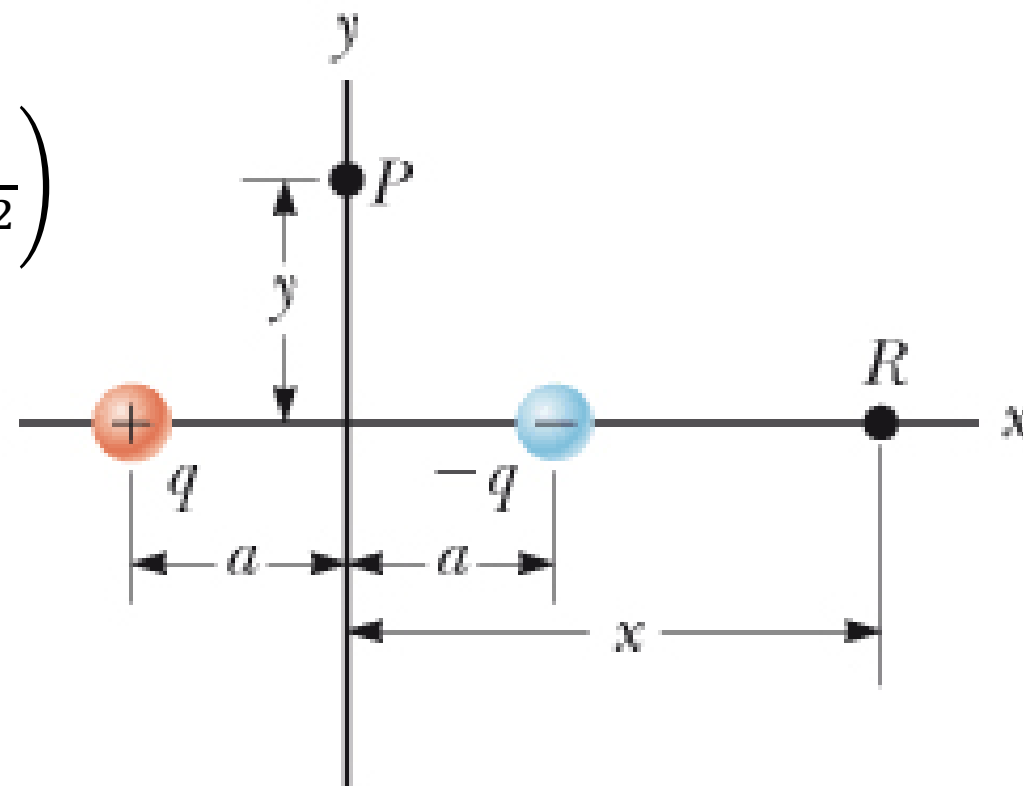




c) Si calcolino il potenziale V e la componente E_x del campo elettrico in un punto dell'asse x lontano dal dipolo.

$$V_R = \lim_{x \gg a} \left(-\frac{2k_e qa}{x^2 - a^2} \right) \approx -\frac{2k_e qa}{x^2} \quad (x \gg a)$$

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(-\frac{2k_e qa}{x^2} \right) = 2k_e qa \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^2} \right) \\ &= -\frac{4k_e qa}{x^3} \quad (x \gg a) \end{aligned}$$



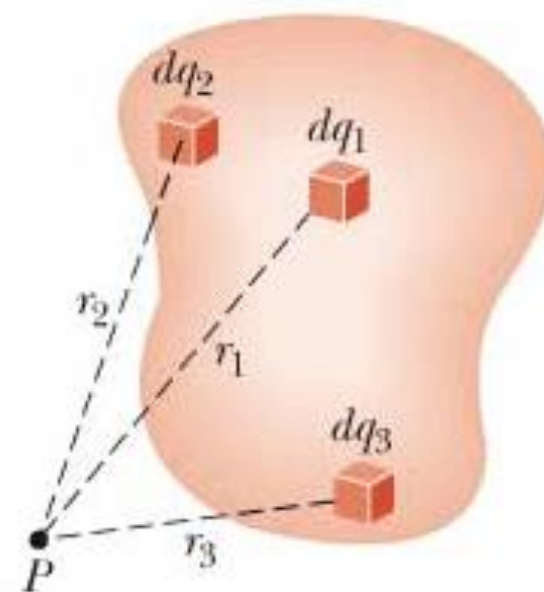


L'equazione può essere trasformata in un'equazione che fornisce il potenziale prodotto da una distribuzione continua di carica.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ q_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Corpo carico}} \frac{dq}{r}$$

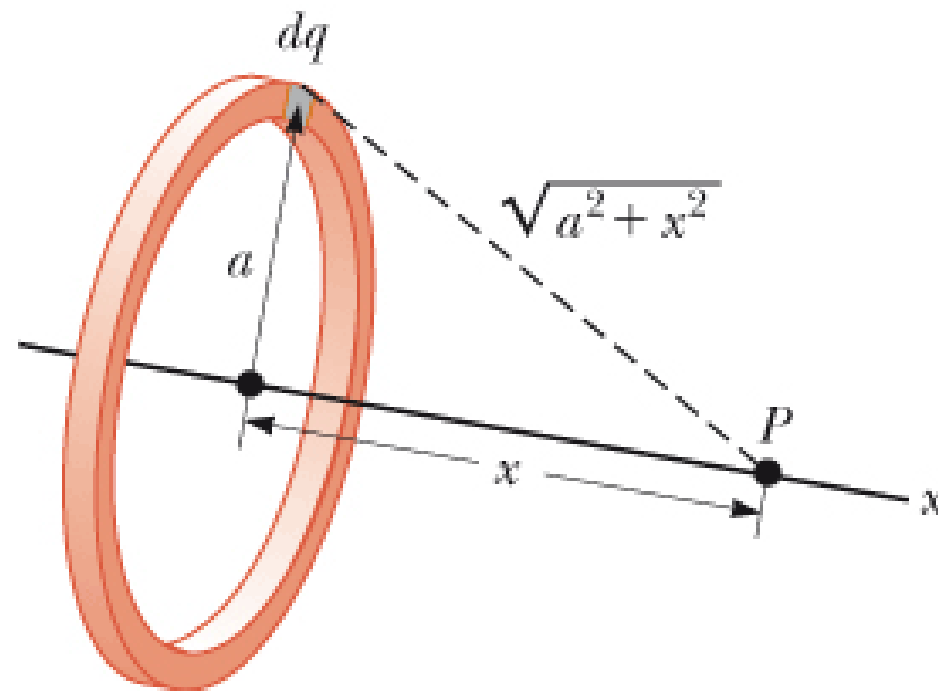




Si determini un'espressione per il potenziale elettrico in un punto P dell'asse di un anello di raggio a e uniformemente carico con carica totale Q .

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{dq}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = \frac{k_e}{\sqrt{a^2 + x^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$



Si determini un'espressione per l'intensità del campo elettrico nel punto P .

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -k_e Q \frac{d}{dx} (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = -k_e Q \left(-\frac{1}{2}\right) (a^2 + x^2)^{-\frac{3}{2}} (2x)$$

$$E_x = \frac{k_e x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} Q$$



Una bacchetta di lunghezza l che giace sull'asse x ha carica totale Q e densità lineare di carica λ . Si determini il potenziale elettrico in un punto P che si trova sull'asse y ad una distanza a dall'origine.

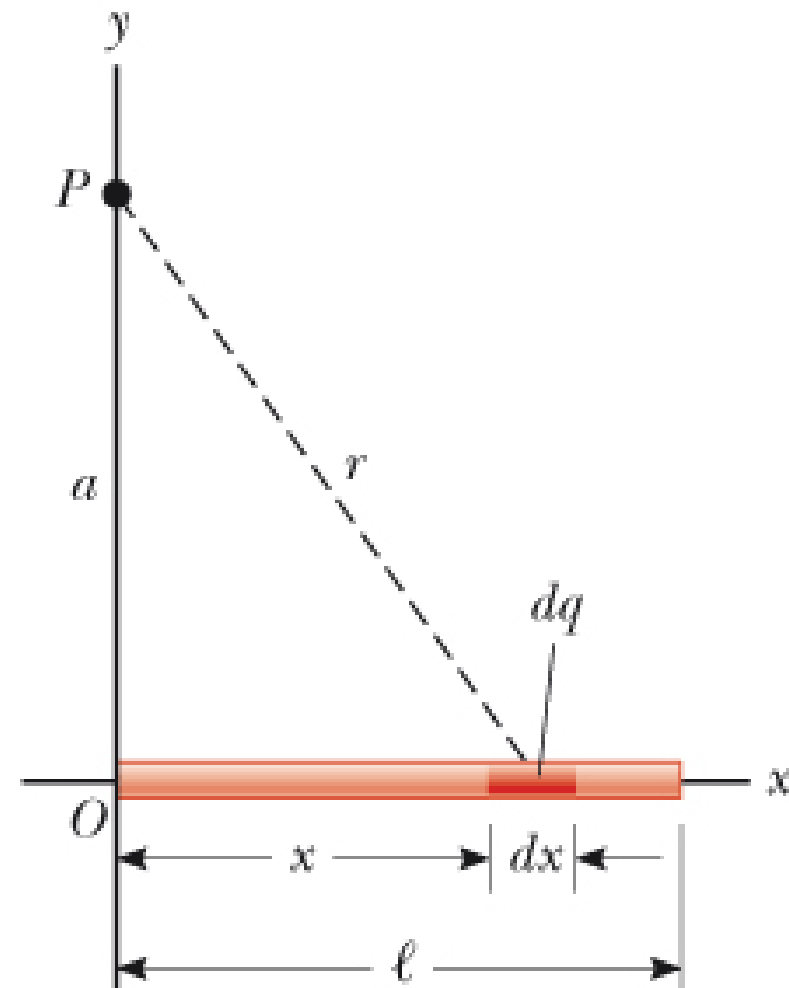
$$dV = k_e \frac{dq}{r} = k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = \int_0^l k_e \frac{\lambda dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$V = k_e \lambda \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = k_e \frac{Q}{l} \left[\ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right]_0^l$$

$$V = k_e \frac{Q}{l} \left[\ln \left(x + \sqrt{a^2 + l^2} \right) - \ln a \right] =$$

$$k_e \frac{Q}{l} \ln \left(\frac{l + \sqrt{a^2 + l^2}}{a} \right)$$





Supponiamo di calcolare la differenza di potenziale tra due punti contigui, $a = (x, y, z)$ e $b = (x + \Delta x, y, z)$. Dal momento che i due punti hanno le stesse coordinate y e z , integriamo lungo una linea parallela all'asse x : $d\vec{l} = dx'\hat{i}$. (Usiamo x' come variabile di integrazione perché x viene usata per gli estremi di integrazione). Quindi

$$\vec{E}d\vec{l} = (E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k})(dx'\hat{i}) = E_x dx'$$

dall'eq.

$$V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) = - \int_x^{x+\Delta x} E_x dx'$$



In vista di ciò, ammettiamo che E_x sia pressoché costante tra x e $x+\Delta x$. Ciò significa che E_x può essere portato fuori dal segno di integrale. Con questa approssimazione, il secondo membro dell'espressione diventa

$$-E_x \int_x^{x+\Delta x} dx' = -E_x [(x + \Delta x) - (x)] = -E_x \Delta x$$

Quindi

$$V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) = -E_x \Delta x$$

$$\Delta V = -E_x \Delta x \Rightarrow E_x = -\frac{\Delta V}{\Delta x}$$

Si noti che l'eq. indica che le dimensioni del campo elettrico sono quelle di un potenziale diviso per una distanza. Pertanto, l'unità SI del campo elettrico può essere scritta come volt/metro (V/m) oltre che come newton/coulomb (N/C). In effetti, il V/m è usato più spesso del N/C.



Dividendo per Δx e prendendo il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ si ha

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z)}{\Delta x} \right) = -E_x$$

Al limite per $\Delta x \rightarrow 0$, l'approssimazione diventa esatta. La grandezza al primo membro di questa equazione è la derivata di V rispetto a x , calcolata mantenendo costanti y e z ; vale a dire che durante il procedimento di passaggio al limite varia soltanto la coordinata x , mentre le coordinate y e z sono fisse. Questa grandezza viene rappresentata con il simbolo $\frac{\partial V}{\partial x}$ ed è chiamata *derivata parziale di V rispetto a x* . Quindi

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$



Variazione infinitesime del potenziale nelle direzioni y e z danno risultati analoghi. Pertanto

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

O in maniera più sintetica

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$$

dove $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$ sono i versori degli assi x, y e z rispettivamente.



Si giunge alla conclusione che le componenti di $\vec{E}$ sono date dalle derivate parziali di V cambiate di segno. Se si conosce un'espressione del potenziale V dovuto a una distribuzione di carica, si può usare questa equazione per determinare $\vec{E}$.

Risultati analoghi possono essere ottenuti per altri tipi di coordinate oltre a quelle cartesiane. In particolare, se una distribuzione di carica ha simmetria sferica, V dipende solo dalla coordinata radiale r ed $\vec{E}$ ha soltanto una componente radiale E_r . In questo caso

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$



A titolo di semplice esempio, calcoliamo il potenziale prodotto da una carica puntiforme per trovare il campo $\vec{E}$ generato da una carica puntiforme:

$$E_r = -\frac{d}{dr} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \frac{1}{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Il potenziale e il campo elettrico sono direttamente correlati tra loro: ciascuno dei due può essere determinato a partire dalla distribuzione di carica e ciascuno può essere determinato a partire dall'altro. Tuttavia, si presti attenzione al fatto che per determinare il campo elettrico in un punto non è sufficiente conoscere il valore del potenziale in quel punto, ma è necessario conoscere la **funzione potenziale** (è, in effetti, necessario conoscere il potenziale in un *intorno* del punto considerato). Analogamente, per determinare il potenziale in un punto non è sufficiente conoscere il valore del campo elettrico in quel punto, ma occorre conoscere la **funzione campo elettrico** (in effetti è necessario conoscere il campo elettrico lungo una linea tra il punto di riferimento e il punto considerato).



Se f è una funzione scalare di una variabile, per esempio il tempo t , la derivata df/dt può essere interpretata come **l'operatore scalare** di derivata rispetto al tempo d/dt applicato alla funzione f :

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt} f$$

In maniera analoga possiamo interpretare come **l'operatore vettoriale**

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$

Applicato alla funzione potenziale V

$$\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) V$$

Questo operatore vettoriale si indica solitamente con il simbolo (nabla)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right)$$



Per cui si può scrivere

$$\vec{E} = -\nabla V = -\text{grad}V$$

Il risultato dell'operatore nabla applicato alla funzione scalare è una funzione vettoriale che si chiama **gradiente** della funzione scalare.

Il gradiente di una funzione scalare indica la direzione in cui la funzione varia più "rapidamente" e il suo modulo è la derivata direzionale.

Per esempio si considera la funzione scalare p che rappresenta la pressione atmosferica, allora il vettore $\text{grad}p$ indica in quale direzione la pressione varia più rapidamente.



Se nell'espressione della legge di Gauss in forma differenziale inseriamo il campo elettrico dato in termini di potenziale, possiamo scrivere

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Che ci porta ad affermare che la funzione potenziale deve verificare ***l'equazione di Poisson***

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

E in particolare, nelle regioni di spazio prive di cariche elettriche, ***l'equazione di Laplace***

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

In effetti queste equazioni differenziali, unite alle condizioni al contorno, possono essere utilizzate per determinare la funzione potenziale $V(\vec{r})$ a partire dalla distribuzione di cariche $\rho(\vec{r})$.



E' bene tener presente che le equazione precedenti sono scritte, di solito, utilizzando gli operatori differenziali divergenza e gradiente oppure l'operatore nabla:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} V &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{oppure} & \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} V &= 0 & \text{oppure} & \quad \nabla^2 V = 0 \end{aligned}$$



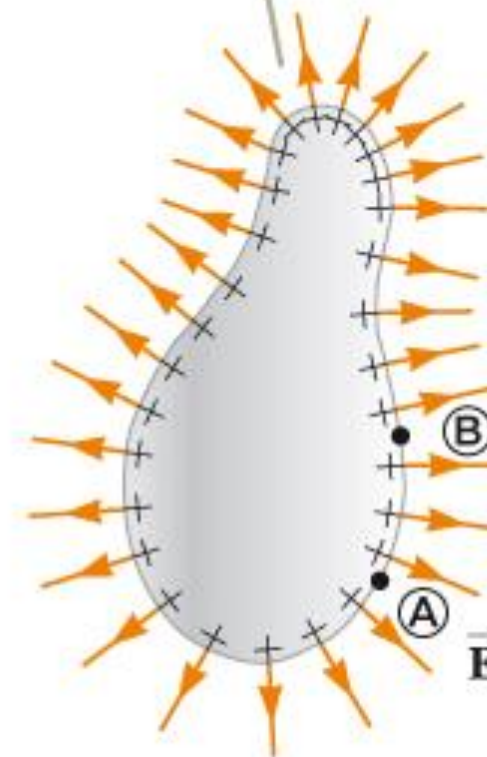
Consideriamo due punti A e B sulla superficie di un conduttore carico. Scelto sulla superficie un percorso che congiunge questi punti, $\vec{E}$ risulta sempre perpendicolare allo spostamento $d\vec{s}$; quindi $\vec{E}d\vec{s}=0$. Usando questo risultato

$$V_b - V_a = - \int_a^b \vec{E} d\vec{s} = 0$$

La superficie di un qualsiasi conduttore carico in equilibrio elettrostatico è una superficie equipotenziale: ogni punto sulla superficie di un conduttore carico all'equilibrio è allo stesso potenziale elettrico. Inoltre, poiché il campo elettrico all'interno del conduttore è nullo, il potenziale elettrico all'interno del conduttore è costante ovunque ed uguale al suo valore sulla superficie.

Da questa proprietà del potenziale elettrico si ricava che non è richiesto lavoro per spostare una carica dall'interno di un conduttore carico alla sua superficie.

Si noti, dalla spaziatura fra i segni positivi, che la densità superficiale di carica non è uniforme.



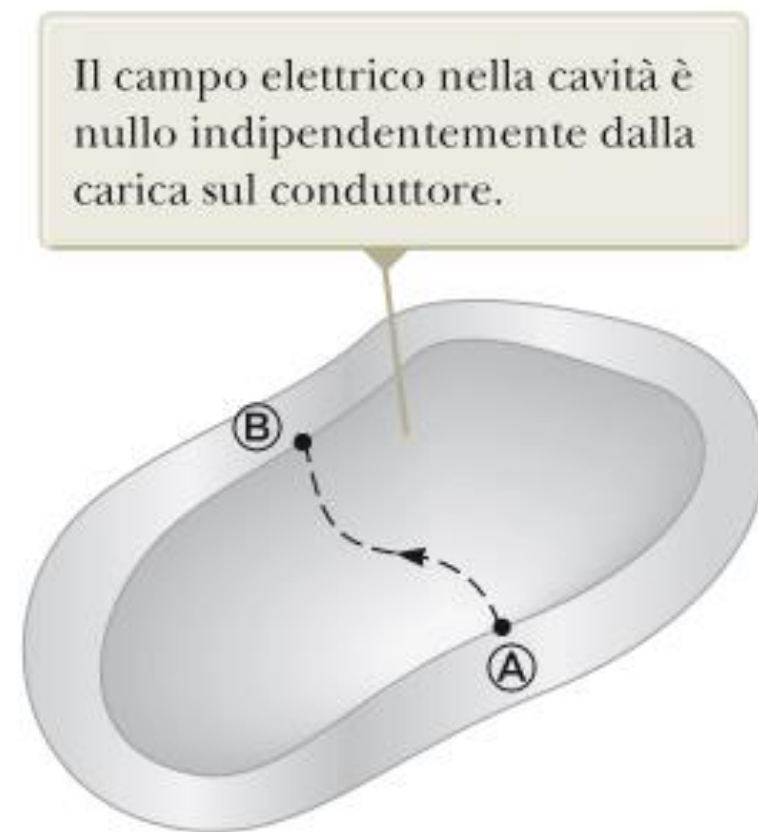


Si consideri ora un conduttore di forma arbitraria contenente una cavità. Si faccia l'ipotesi che non ci siano cariche all'interno della cavità. In questo caso, il campo elettrico all'interno della cavità deve essere *nullo* qualunque sia la distribuzione di carica sulla superficie esterna del conduttore. Inoltre, il campo nella cavità è nullo anche se è presente un campo elettrico al di fuori del conduttore.

Ricordiamo il fatto che ogni punto sul conduttore si trova allo stesso potenziale elettrico e quindi

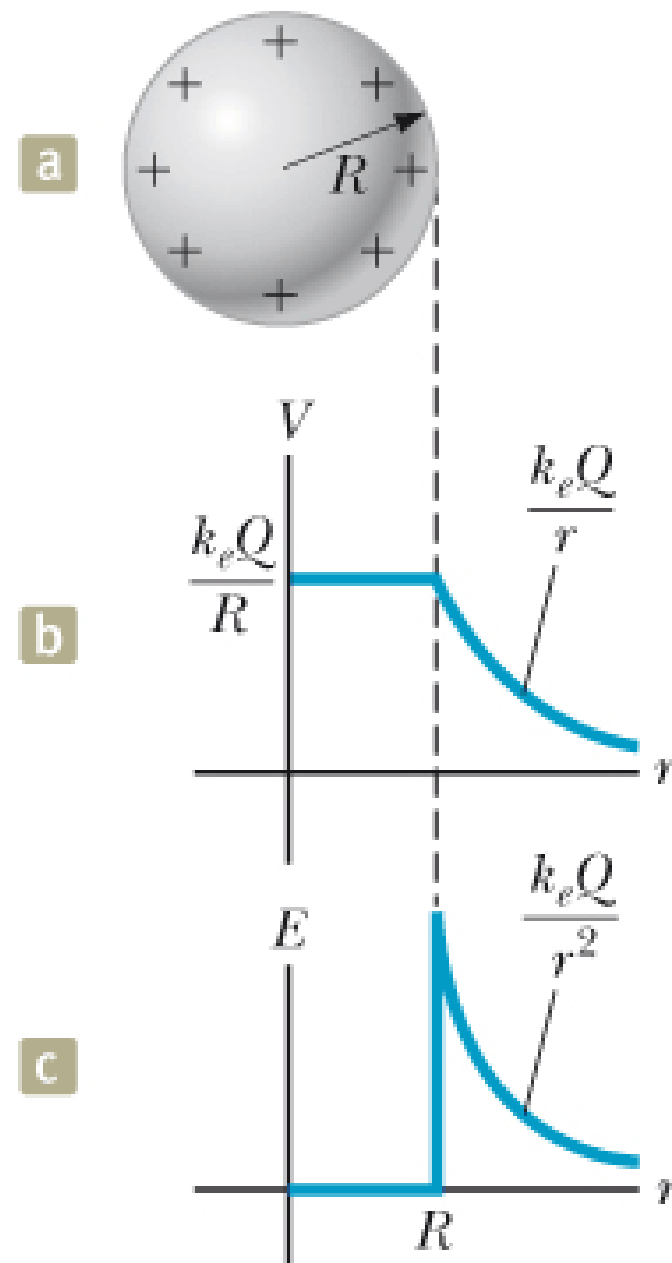
$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = 0$$

Concludiamo quindi che una cavità circondata da pareti conduttrici è una regione libera da campi quando al suo interno non ci sono cariche.





Consideriamo una sfera conduttrice metallica di raggio R e carica totale positiva Q come mostrata in figura. Il campo elettrico al di fuori della sfera è radiale e rivolto verso l'esterno e ha intensità $k_e Q/r^2$. Anche il potenziale elettrico dovrà risultare identico a quello di una carica puntiforme, cioè $k_e Q/r$. Sulla superficie della sfera conduttrice il potenziale deve valere $k_e Q/R$. Poiché tutti i punti della sfera devono trovarsi allo stesso potenziale, in ogni punto all'interno della sfera il potenziale sarà $k_e Q/R$.





Finora abbiamo parlato del potenziale di un punto nello spazio. Dal momento che tutti i punti di un conduttore sono allo stesso potenziale, possiamo assegnare un valore del potenziale a un intero conduttore, a patto che in esso sussistano condizioni elettrostatiche. Ha senso parlare, per esempio, di una "placca metallica a 150 V".

Invece a un isolante non può essere assegnato a un valore definito del potenziale perché il potenziale può essere diverso in differenti punti di un isolante.



A esclusione dei conduttori sferici, la carica superficiale non si distribuiscono uniformemente sulla superficie di un conduttore. Su parti appuntite o su spigoli taglienti, la densità di carica superficiale, e quindi il campo elettrico esterno, proporzionale ad essa, può assumere valori molto alti. L'aria che circonda queste parti appuntite può ionizzarsi, producendo *scariche a effetto corona* che i giocatori di golf o gli escursionisti possono vedere alle estremità dei boschi, dei campi da golf, o delle rocce, quando sono sotto minaccia di un temporale. Questi effetti corona, come i capelli che si sollevano sulla testa, sono spessi segnali precursori di fulmini. In tali circostanze è saggio ripararsi in una cavità all'interno di un guscio conduttore, dove il campo elettrico è sicuramente nullo. Un'automobile costituisce pressoché l'ideale.



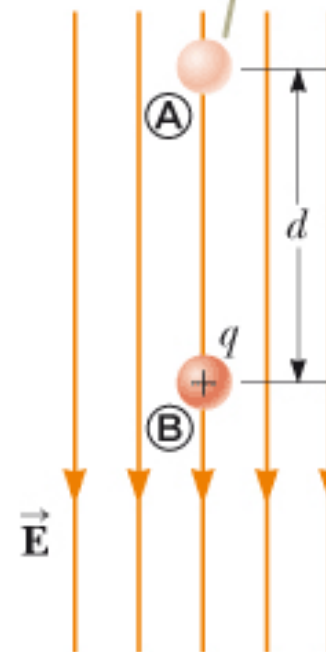
Consideriamo un campo elettrico uniforme diretto lungo l'asse y negativo. Calcoliamo la differenza di potenziale fra due punti, A e B , separati da una distanza d , essendo d misurata parallelamente alle linee di campo.

$$V_B - V_A = \Delta V = - \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = - \int_A^B E \cos 0^\circ ds = - \int_A^B E ds$$

$$\Delta V = -E \int_A^B ds = -Ed$$

Il segno meno deriva dal fatto che il punto B si trova a un potenziale minore del punto A ; cioè, $V_B < V_A$. In generale, **le linee di campo elettrico sono sempre puntate nella direzione di un potenziale elettrico decrescente.**

Quando una carica positiva si sposta dal punto **A** al punto **B**, l'energia potenziale elettrica del sistema carica-campo diminuisce.



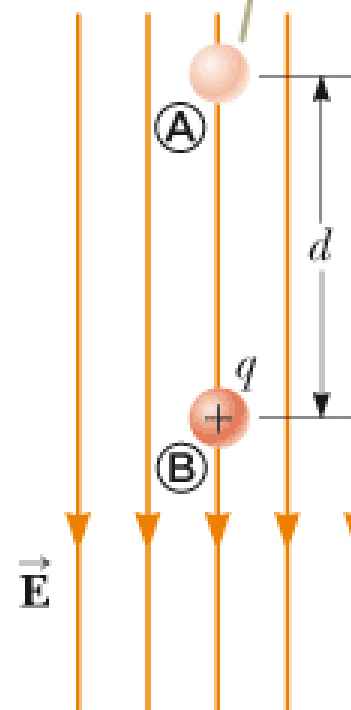


Supponiamo, ora, che una particella di prova con carica q si muova da A a B . La variazione dell'energia potenziale elettrica del sistema carica-tempo si può calcolare

$$\Delta U = q\Delta V = -qEd$$

Da questo risultato vediamo che se q è positiva, ΔU è negativa. Questo significa che *quando una carica positiva si muove nel verso del campo elettrico, l'energia potenziale elettrica del sistema carica-campo diminuisce.*

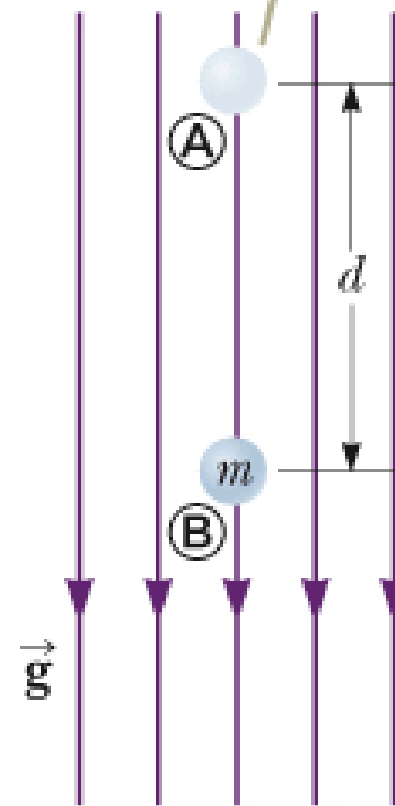
Quando una carica positiva si sposta dal punto $\textcircled{A}$ al punto $\textcircled{B}$, l'energia potenziale elettrica del sistema carica-campo diminuisce.





Questa situazione è analoga alla variazione di energia potenziale gravitazionale $-mgd$ di un sistema campo-oggetto quando un oggetto con massa m cade per una altezza d in un campo gravitazionale uniforme, come mostrato in fig..

Quando un corpo dotato di massa si sposta dal punto **A** al punto **B**, l'energia potenziale gravitazionale del sistema corpo-campo diminuisce.

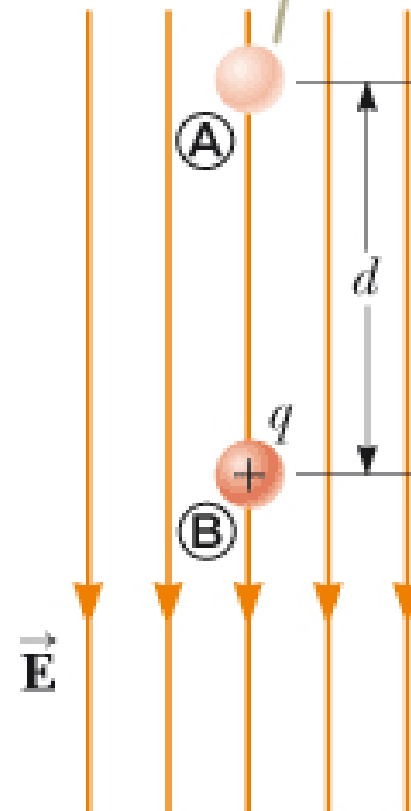




Se una particella di carica positiva q è abbandonata in quiete nel campo elettrico, essa subisce una forza elettrica $q\mathbf{E}$ nella direzione e verso di $\mathbf{E}$ (verso in basso in fig). Perciò, essa accelera verso il basso, guadagnando energia cinetica.

Poiché la particella carica guadagna energia cinetica, il sistema carica-campo perde una uguale quantità di energia potenziale.

Quando una carica positiva si sposta dal punto ① al punto ②, l'energia potenziale elettrica del sistema carica-campo diminuisce.





Se q è negativa, allora ΔU è positiva e la situazione è rovesciata. Se una particella carica negativamente è abbandonata in quiete nel campo $\mathbf{E}$ essa viene accelerata in verso opposto a quello del campo elettrico. **Il sistema carica-campo perde energia potenziale elettrica quando una carica negativa si muove nel verso opposto al campo elettrico.**



- Il potenziale elettrico V associato a un punto P in un campo elettrico generato da un corpo carico è definito come

$$V \equiv \frac{-W_{\infty}}{q_0} = \frac{U}{q_0}$$

In cui W_{∞} rappresenta il lavoro che dovrebbero svolgere le forze di campo elettrico su una carica positiva di prova q_0 trasportata da distanza infinita del punto P , e U è l'energia potenziale elettrica che verrebbe immagazzinata di conseguenza nel sistema carica esplorativa-corpo carico.

- Data una particella con carica q posta in un punto dove il potenziale elettrico stabilito ad un corpo carico è V , l'energia potenziale elettrica U associata al sistema particella-corpo carico vale

$$U=qV$$

- Se la particella carica si muove subendo una differenza di potenziale ΔV , la variazione di energia potenziale è $\Delta U = q\Delta V = q(V_f - V_i)$



- Quando una particella carica si muove subendo una differenza di potenziale ΔV in un campo elettrico senza che su di essa siano applicate forze esterne, il principio di conservazione dell'energia meccanica richiede che la variazione di energia cinetica della particella sia

$$\Delta K = -q\Delta V$$

- Se, al contrario, sulla particella agisce anche una forza applicata esterna che compie il lavoro W_{app} la variazione di energia cinetica è

$$\Delta K = -q\Delta V + W_{app}$$

- Nel caso particolare in cui sia $\Delta K = 0$ il lavoro svolto dalla forza applicata comporta solo il moto della particella attraverso la variazione di potenziale:

$$W_{app} = q\Delta V$$



- Identificare una superficie equipotenziale e descrivere come si confronta rispetto alla direzione del campo elettrico adesso associato.
- Calcolare, dato un campo elettrico funzione della posizione, la variazione di potenziale ΔV da un punto iniziale o un punto finale, scegliendo un percorso tra i due punti e integrando il prodotto scalare del vettore campo E con il vettore spostamento differenziale ds lungo il percorso.
- Mettere in relazione, per un campo elettrico uniforme, il modulo E del campo con la distanza Δx e la differenza di potenziale ΔV tra linee equipotenziali adiacenti.



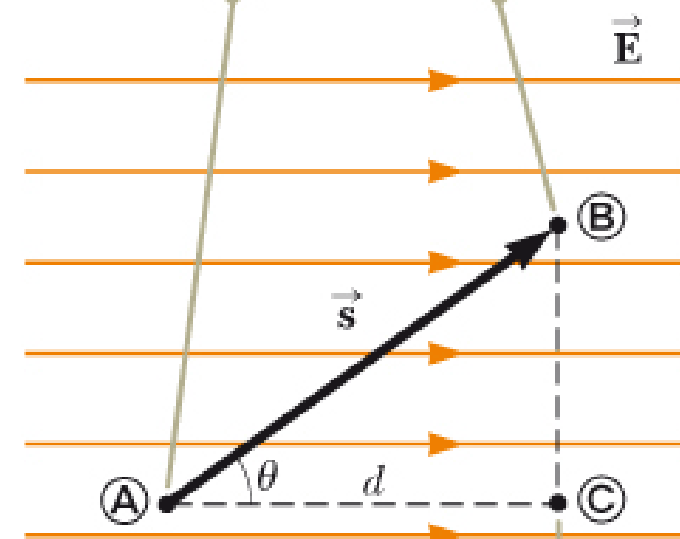
Consideriamo ora il caso più generale di una particella carica che si muove fra due punti qualsiasi in un campo elettrico uniforme, come in fig.. Se $\Delta \mathbf{r}$ rappresenta il vettore spostamento fra i punti A e B , l'eq. dà:

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} d\vec{s} = - \vec{E} \int_A^B d\vec{s} = - \vec{E} \Delta \vec{r}$$

dove ancora $\mathbf{E}$, essendo costante, è stato portato fuori dal segno di integrale. Inoltre, la variazione di energia potenziale del sistema carica-campo sarà

$$\Delta U = q\Delta V = -q\mathbf{E}\Delta \mathbf{r}$$

Il punto $\textcircled{B}$ si trova a un potenziale elettrico inferiore rispetto al punto $\textcircled{A}$.



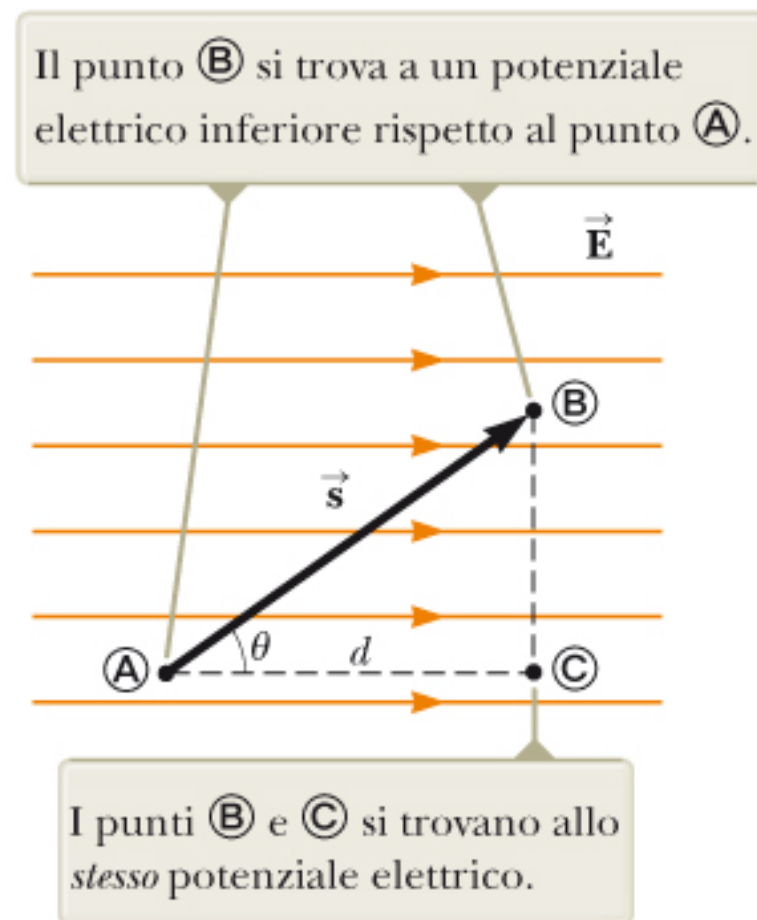
I punti $\textcircled{B}$ e $\textcircled{C}$ si trovano allo stesso potenziale elettrico.



Ciò può essere visto in fig., dove la differenza di potenziale $V_B - V_A = -\mathbf{E}\Delta\mathbf{r} = -E\Delta r \cos\theta = -Ed = V_C - V_A$. Quindi $V_B = V_C$.

Viene dato il nome di **superficie equipotenziale** a una qualunque superficie costituita da un insieme di punti che hanno lo stesso potenziale elettrico.

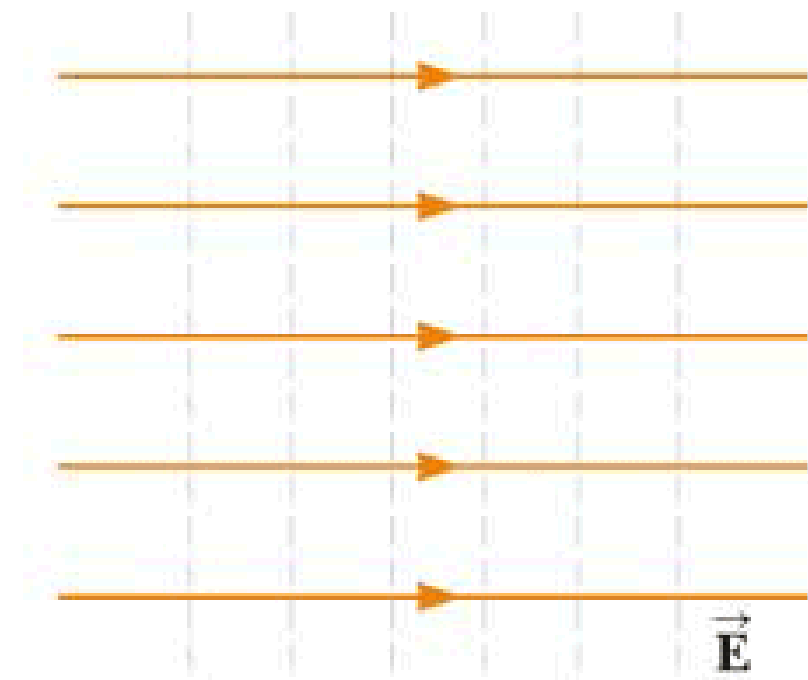
E' da notare che poiché $\Delta U = q\Delta V$, non si compie alcun lavoro quando una particella di prova si muove fra due punti qualsiasi di una superficie equipotenziale. Le superfici equipotenziali di un campo elettrico uniforme sono costituite da una famiglia di piani tutti perpendicolari al campo.





Se immaginiamo di eseguire uno spostamento $d\mathbf{s}$ lungo una superficie equipotenziale, risulta $dV = -\mathbf{E}d\mathbf{s} = 0$; pertanto $\mathbf{E}$ deve essere perpendicolare ad ogni spostamento che avvenga lungo una superficie equipotenziale. Questo risultato mostra che le superfici equipotenziali devono essere perpendicolari alle linee di campo elettrico che le attraversano.

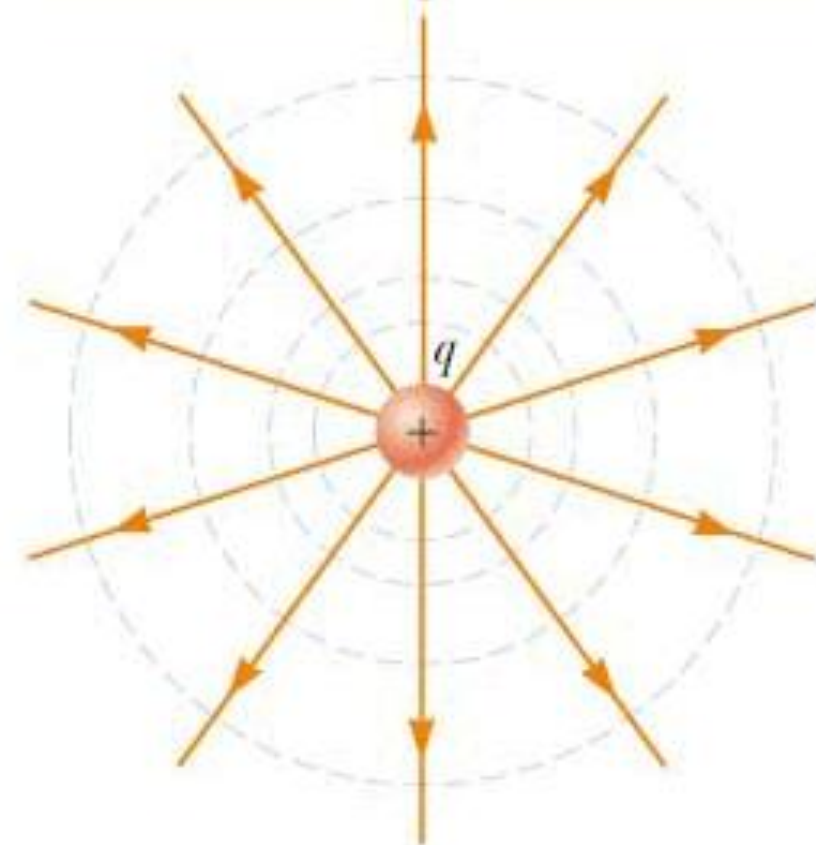
Un campo elettrico uniforme
prodotto da un piano infinito
di cariche





Quindi, concludiamo che **le superfici equipotenziali per una carica puntiforme isolata sono rappresentate da una famiglia di sfere concentriche alla carica**, come mostrato in fig.. Si noti che le superfici equipotenziali sono perpendicolari alle linee di campo elettrico, come nel caso di un campo elettrico uniforme.

Un campo elettrico a
simmetria sferica prodotto da
una carica puntiforme





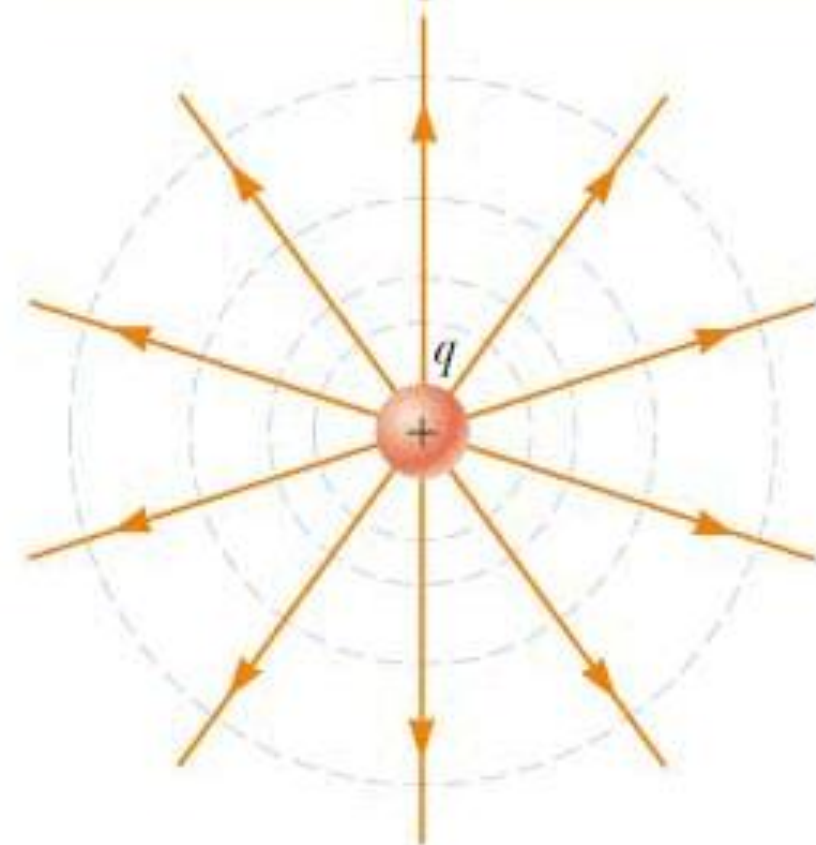
Se la distribuzione di carica che genera il campo ha simmetria sferica, e quindi la densità volumetrica di carica è una funzione della sola coordinata radiale r , il campo elettrico risulta radiale. In questo caso $\mathbf{E}d\mathbf{s} = E_r dr$, per cui dV può essere espresso come $dV = -E_r dr$ e pertanto

$$E_x = -\frac{dV}{dr}$$

Per esempio, il potenziale elettrico di una carica puntiforme è $V = k_e q/r$. Poiché V dipende solo da r , la funzione potenziale ha simmetria sferica. Troviamo che il campo elettrico dovuto alla carica puntiforme è $E_r = k_e q/r^2$.

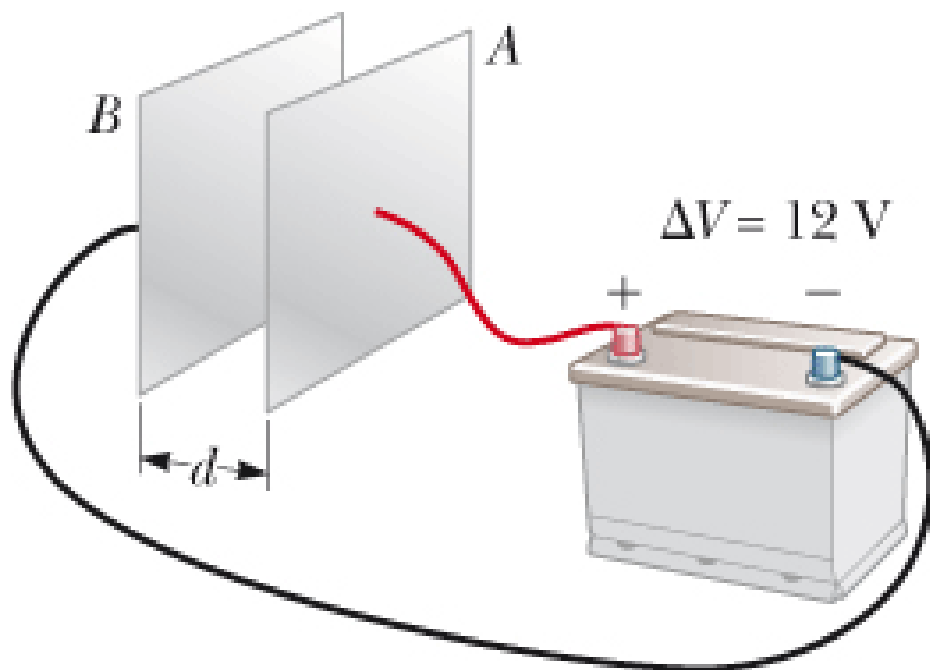
In questo caso le superfici equipotenziali sono una famiglia di sfere concentriche.

Un campo elettrico a
simmetria sferica prodotto da
una carica puntiforme





Una batteria da 12 V è collegata a due piastre parallele come in fig.. La separazione fra le piastre è 0.3 cm e il campo elettrico è supposto uniforme. (Questa ipotesi è ragionevole se la distanza fra le piastre è piccola rispetto alle dimensioni delle piastre e se escludiamo punti vicino ai bordi). Determinare il campo elettrico fra le piastre.



$$E = \frac{|V_b - V_A|}{d} = \frac{12V}{0.30 \times 10^{-2} m} = 4.0 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

Questa configurazione è chiamata **condensatore a facce piane e parallele**



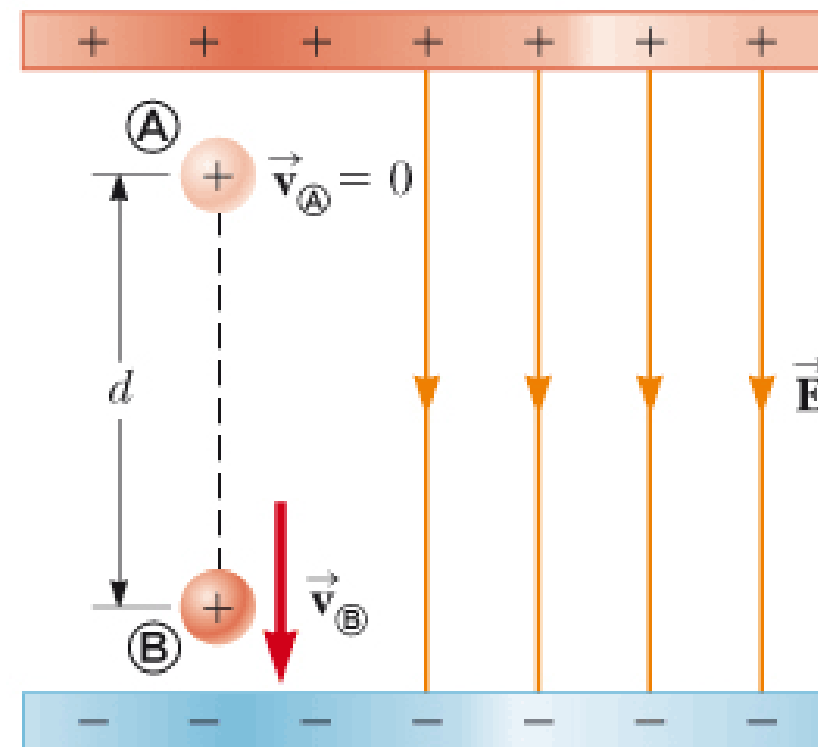
Un protone è abbandonato in quiete in un campo elettrico uniforme di $8.0 \times 10^4 \text{ V/m}$, diretto lungo l'asse y . Il protone subisce uno spostamento di 0.50 m nella direzione di E . Si determini la velocità del protone al termine dello spostamento.

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}mv^2 - 0\right) + e\Delta V = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{-2e\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{-2e(-Ed)}{m}} = \sqrt{\frac{2eEd}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(8.0 \times 10^4 \text{ V})(0.50 \text{ m})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} = 2.8 \times 10^6 \text{ m/s}$$





- Su una superficie equipotenziale tutti i punti hanno lo stesso potenziale elettrico. Il lavoro compiuto su una carica esplorativa per portarla da uno di tali superfici a un'altra è indipendente da quale sia il punto di partenza sulla prima superficie e da quale sia il punto d'arrivo sulla seconda; inoltre non dipende dal cammino percorso. Il campo elettrico E è sempre perpendicolare alle sue superfici equipotenziali.
- La differenza di potenziale elettrico tra due punti A ed B è

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$$

ove l'integrale è esteso alla lunghezza del percorso che unisce i punti. Dato che, ai fini del risultato, i percorsi sono indifferenti, possiamo scegliere quello che c'è più comodo per eseguire l'integrazione .

- Se poniamo $V_i = 0$, Il potenziale in un dato punto è dato da

$$V_P = - \int_{\infty}^P \vec{E} d\vec{s}$$

- In un campo uniforme di modulo E la differenza di potenziale tra due superfici equipotenziali separati da una distanza Δx è data da

$$\Delta V = -E \Delta x$$



- Applicare, per un dato punto nel campo elettrico generato da una particella carica, la relazione tra il potenziale elettrico V , la carica della particella q e la distanza dalla particella.
- Capire il legame esistente tra il segno algebrico del potenziale e la carica del corpo puntiforme che lo stabilisce.
- Calcolare in qualsiasi punto il potenziale netto stabilito da più particelle cariche, rendendosi conto che si tratta di una somma scalare e non vettoriale.
- Disegnare le linee equipotenziali per una particella carica.



FINE