Schema soluzioni equazione di Laplace in coordinate cilindriche mediante separazione variabili

Coordinate cilindriche: ρ , φ , z

Soluzioni fattorizzate: $V(\rho,\varphi,z) = V_1(\rho)V_2(\varphi)V_3(z)$

Equazioni agli autovalori corrispondenti per i diversi fattori della soluzione:

$$\frac{d^2V_2}{d\varphi^2} = \lambda_2 V_2 = -\alpha^2 V_2 = \beta^2 V_2 \quad \text{con} \quad \alpha = \pm\sqrt{-\lambda_2} \quad \text{e} \quad \beta = \pm\sqrt{\lambda_2}$$

$$\frac{d^2V_3}{dz^2} = \lambda_3 V_3 = -k^2 V_3 = \chi^2 V_3 \quad \text{con} \quad k = \pm\sqrt{-\lambda_3} \quad \text{e} \quad \chi = \sqrt{\lambda_3}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV_1}{d\rho}\right) + (\lambda_2 + \lambda_3\rho^2)V_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dV_1}{d\rho}\right) + (\chi^2\rho^2 - \alpha^2)V_1 = 0$$

Nota: per convenzione in quanto segue si sceglie di usare parametri α, k e β che assumono valori positivi o negativi e quindi le due soluzioni con segni opposti corrispondenti allo stesso autovalore sono incluse automaticamente nelle somme su tutti i valori dei parametri, mentre i valori del parametro χ li prendiamo solo positivi ,per cui il segno delle due possibili soluzioni va inserito a mano nelle soluzioni

<table>
<tr>
<th rowspan="2">Simmetrie</th>
<th rowspan="2">Coordinate delle condizioni contorno non omogenee</th>
<th rowspan="2">Segni autovalori</th>
<th colspan="3">Autofunzioni

Con: $\alpha = \pm\sqrt{-\lambda_2}\,, \beta = \pm\sqrt{\lambda_2}\,,$
$k = \pm\sqrt{-\lambda_3}\ \ , \chi = \sqrt{\lambda_3}$

Per $\varphi \in [0,2\pi]$ (angolo giro): $\lambda_2 \le 0$, $\alpha \to m$ con $m \in \mathbb{Z}$ e soluzione $\propto \varphi$ va esclusa</th>
<th rowspan="2">Soluzione generale

Nota 1: le condizioni al contorno omogenee restringono gli insiemi di variazione dei parametri α, β, k, χ rispetto a quanto indicato, spesso rendendoli discreti; inoltre impongono l’annullamento dei coefficienti di alcune soluzioni incompatibili con esse

Nota 2: nelle formule seguenti, le somme vanno sostituite con integrali quando i parametri corrispondenti restano continui</th>
</tr>
<tr>
<th>$V_1(\rho)$</th>
<th>$V_2(\varphi)$</th>
<th>$V_3(z)$</th>
</tr>
<tr>
<td>Rotazione φ & traslazione $\parallel z$</td>
<td>-</td>
<td>$\lambda_2 = 0,$
$\lambda_3 = 0$</td>
<td>$1,$
$\ln\rho$</td>
<td>1</td>
<td>1</td>
<td>$V = A + B\ln\rho$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Traslazione $\parallel z$</td>
<td>ρ</td>
<td>$\lambda_2 \ge 0,$
$\lambda_3 = 0$</td>
<td>$e^{i\beta\ln\rho}$ (5)</td>
<td>$e^{|\beta|\varphi},$
$e^{-|\beta|\varphi}$ (1,3)</td>
<td>1</td>
<td>$V = \sum_{\beta\in\mathbb{R}-\{0\}} \left[e^{i\beta\ln\rho}\left(A_\beta e^{|\beta|\varphi} + B_\beta e^{-|\beta|\varphi}\right)\right] + A_0 + B_0\varphi + C_0\ln\rho + D_0\varphi\ln\rho$ (6)</td>
</tr>
<tr>
<td>φ</td>
<td>$\lambda_2 \le 0,$
$\lambda_3 = 0$</td>
<td>$\rho^{|\alpha|},$
$\rho^{-|\alpha|}$ (5)</td>
<td>$e^{i\alpha\varphi}$ (1,3)</td>
<td>1</td>
<td>$V = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}} \left[\left(A_\alpha\rho^{|\alpha|} + B_\alpha\rho^{-|\alpha|}\right)e^{i\alpha\varphi}\right] + A_0 + B_0\ln\rho + C_0\varphi + D_0\varphi\ln\rho$ (7)</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Rotazione φ</td>
<td>ρ</td>
<td>$\lambda_2 = 0,$
$\lambda_3 \ge 0$</td>
<td>$J_0(\chi\rho),$
$Y_0(\chi\rho)$ (4)</td>
<td>1</td>
<td>$e^{\chi z},$
$e^{-\chi z}$ (2,3)</td>
<td>$V = \sum_{\chi\in\mathbb{R}^+} \left[J_0(\chi\rho)\left(A_\chi e^{\chi z} + B_\chi e^{-\chi z}\right) + Y_0(\chi\rho)\left(C_\chi e^{\chi z} + D_\chi e^{-\chi z}\right)\right] + A_0 + B_0 z + C_0\ln\rho$
$+ D_0 z\ln\rho$ (6)</td>
</tr>
<tr>
<td>z</td>
<td>$\lambda_2 = 0,$
$\lambda_3 \le 0$</td>
<td>$I_0(|k|\rho),$
$K_0(|k|\rho)$ (4)</td>
<td>1</td>
<td>e^{ikz} (2,3)</td>
<td>$V = \sum_{k\in\mathbb{R}-\{0\}} [A_k I_0(|k|\rho) + B_k K_0(|k|\rho)]e^{ikz} + A_0 + B_0\ln\rho + C_0 z + D_0 z\ln\rho$ (8)</td>
</tr>
</table>

No (9)	ρ, φ	$\lambda_2 \le 0$, $\lambda_3 \ge 0$	$J_{\lvert\alpha\rvert}(\chi\rho)$, $Y_{\lvert\alpha\rvert}(\chi\rho)$ (4)	$e^{i\alpha\varphi}$ (1,3)	$e^{\chi z}$, $e^{-\chi z}$ (2,3)	$V = \sum_{\alpha\in\mathbb{R},\chi\in\mathbb{R}^+} \left[J_{\lvert\alpha\rvert}(\chi\rho)\left(A_{\alpha,\chi}e^{\chi z} + B_{\alpha,\chi}e^{-\chi z}\right) + Y_{\lvert\alpha\rvert}(\chi\rho)\left(C_{\alpha,\chi}e^{+\chi z} + D_{\alpha,\chi}e^{-\chi z}\right)\right]e^{i\alpha\varphi} + \sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\left[\left(A_{\alpha,0} + B_{\alpha,0}z\right)e^{i\alpha\varphi}\right]$
	ρ, z	$\lambda_2 \ge 0$, $\lambda_3 \le 0$	$I_{i\lvert\beta\rvert}(\lvert k\rvert\rho)$, $K_{i\lvert\beta\rvert}(\lvert k\rvert\rho)$ (4)	$e^{\lvert\beta\rvert\varphi}$, $e^{-\lvert\beta\rvert\varphi}$ (1,3)	e^{ikz} (2,3)	$V = \sum_{k\in\mathbb{R},\beta\in\mathbb{R}^+} \left[I_{i\beta}(\lvert k\rvert\rho)\left(A_{k,\beta}e^{\beta\varphi} + B_{k,\beta}e^{-\beta\varphi}\right) + K_{i\beta}(\lvert k\rvert\rho)\left(C_{k,\beta}e^{\beta\varphi} + D_{k,\beta}e^{-\beta\varphi}\right)\right]e^{ikz} + \sum_{k\in\mathbb{R}}\left[I_0(\lvert k\rvert\rho)\left(A_{k,0} + B_{k,0}\varphi\right) + K_0(\lvert k\rvert\rho)\left(C_{k,0} + D_{k,0}\varphi\right)\right]e^{ikz}$
	φ, z	$\lambda_2 \le 0$, $\lambda_3 \le 0$	$I_{\lvert\alpha\rvert}(\lvert k\rvert\rho)$, $K_{\lvert\alpha\rvert}(\lvert k\rvert\rho)$ (4)	$e^{i\alpha\varphi}$ (1,3)	e^{ikz} (2,3)	$V = \sum_{\alpha\in\mathbb{R},k\in\mathbb{R}} \left[A_{k,\alpha}I_{\lvert\alpha\rvert}(\lvert k\rvert\rho) + B_{k,\alpha}K_{\lvert\alpha\rvert}(\lvert k\rvert\rho)\right]e^{i\alpha\varphi+ikz} + A'_{0,0}\ln\rho$

NOTE:

(1) Per $\lambda_2 = 0$ oltre alla soluzione $e^{i\alpha\varphi} = e^{\pm|\beta|\varphi} = 1$ c'è anche la soluzione $V_2 = \varphi$

(2) Per $\lambda_3 = 0$ oltre alla soluzione $e^{\pm|\chi|z} = e^{ikz} = 1$ c'è anche la soluzione $V_3 = z$

(3) Per lo stesso λ_2 o λ_3 è possibile anche considerare combinazioni lineari delle due autofunzioni con $\pm|\alpha|, \pm|\beta|, \pm|k|, \pm\chi$. Equivalentemente è possibile usare al posto degli esponenziali con esponente reale o immaginario, rispettivamente seni e coseni o seni e coseni iperbolici. In altre parole, si possono fare le seguenti sostituzioni (e analoghe):

$$e^{i\alpha\varphi} \to \sin(\alpha\varphi), \cos(\alpha\varphi) \qquad e^{|\beta|\varphi}, e^{-|\beta|\varphi} \to \sinh(\alpha\varphi), \cosh(\alpha\varphi)$$
$$e^{ikz} \to \sin(kz), \cos(kz) \qquad e^{\chi z}, e^{-\chi z} \to \sinh(\chi z), \cosh(\chi z)$$

(4) Equivalentemente si possono usare le funzioni di Hankel, che sono le seguenti combinazioni lineari:

$$H_\alpha^{(1)}(\chi\rho) = J_\alpha(\chi\rho) + iY_\alpha(\chi\rho), \qquad H_\alpha^{(2)}(\chi\rho) = J_\alpha(\chi\rho) - iY_\alpha(\chi\rho)$$

Inoltre, quando α non è un intero, al posto di $Y_{|\alpha|}(k\rho)$ si può anche usare $J_{-|\alpha|}(k\rho)$ come seconda autofunzione indipendente. Le due sono legate dalla relazione $Y_\alpha(k\rho) = \cot(\alpha\pi)J_\alpha(k\rho) - \csc(\alpha\pi)J_{-\alpha}(k\rho)$.

Alcuni testi, tra cui lo Zangwill, usano il simbolo $N_\alpha(k\rho)$ al posto di $Y_\alpha(k\rho)$.

(5) Per $\lambda_2 = 0$, oltre alla soluzione $e^{i\beta\ln\rho} = 1$ ovvero $\rho^{|\alpha|} = \rho^{-|\alpha|} = 1$, c'è anche la soluzione $V_1 = \ln\rho$

(6) Gli ultimi due termini di norma sono ridondanti. Possono essere utili nel caso particolare in cui la condizione al contorno non omogenea varia proprio come $\ln\rho$

(7) Gli ultimi due termini di norma sono ridondanti. Possono essere utili nel caso particolare in cui la condizione al contorno non omogenea varia proprio come φ

(8) Gli ultimi due termini di norma sono ridondanti. Possono essere utili nel caso particolare in cui la condizione al contorno non omogenea varia proprio come z

(9) In questi casi senza simmetrie gli eventuali termini corrispondenti a soluzioni ridondanti analoghe a quelle di cui alle note (6-8) non sono stati inclusi per brevità; le soluzioni generali indicate sono comunque sufficienti ad accomodare qualsiasi condizione al contorno non omogenea descritta da funzioni limitate