

Capitolo 2

Gruppo fondamentale

2.1 Cammini e connessione per cammini

Sia X uno spazio topologico, I l'intervallo reale $[0, 1]$ con la topologia indotta dalla topologia naturale di \mathbb{R} .

Una funzione $\alpha: I \rightarrow X$ continua dicesi *cammino* di X di origine $\alpha(0) = x_0$ e fine $\alpha(1) = x_1$. Se $x_0 = x_1$ si dice *cappio*.

NOTA BENE Un cammino è una funzione. Non va confuso con l'immagine $\alpha(I)$ che è un sottoinsieme di X . Cammini diversi possono avere la stessa immagine, ma sono diversi.

Definizione 2.1.1. Siano α un cammino di X da x_0 a x_1 , β un cammino di X da x_1 a x_2 . Si dice *cammino prodotto* di α e β il cammino definito da

$$\alpha\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Si dice *cammino inverso* di α il cammino definito da $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$ che va da x_1 a x_0 .

La definizione precedente è ben posta, in quanto sia $\alpha\beta$ che α^{-1} sono funzioni continue di I in X . Lo studente è invitato a provarlo tenendo conto del fatto che la composta di funzioni continue è continua e (per quanto riguarda $\alpha\beta$) del teorema di incollamento.

Un sottoinsieme Y di X si dice *connesso per cammini* se per ogni coppia di punti y_0, y_1 di Y esiste un cammino α di X di origine y_0 e fine y_1 tale che $\alpha(I) \subseteq Y$.

Poiché l'immagine di un connesso mediante una funzione continua è connessa, si ha che ogni spazio connesso per cammini è connesso. Al contrario, non è vero che un

connesso sia connesso per cammini; il controesempio classico è dato dalla chiusura del seno del topologo (grafico della funzione $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}: f(x) = \sin 1/x$).

Osserviamo ora che se l'ambiente è uno spazio euclideo, per cui possiamo parlare di poligonalità, una poligonale è un particolare cammino (è un cammino "lineare a pezzi", PL). Dunque in \mathbb{R}^n ogni connesso per poligonalità è anche connesso per cammini. Il contrario non è vero: una circonferenza Γ , ad esempio, è connessa per cammini, ma non per poligonalità, e la stessa cosa si può dire per un ellissoide o per un paraboloide ellittico.

Ricordiamo che in \mathbb{R}^n vale il teorema: "Un aperto di \mathbb{R}^n è connesso se, e solo se, è connesso per poligonalità."

Tale risultato è dovuto al fatto che in \mathbb{R}^n ogni punto ha un intorno disco, e un disco è convesso, e quindi connesso per poligonalità.

In altre parole lo spazio euclideo è localmente connesso per poligonalità.

Per quanto riguarda i cammini si ha un risultato analogo a quello del teorema citato per gli spazi che siano localmente connessi per cammini (definizione ovvia). Precisamente si ha

Teorema 2.1.1. *Un aperto di uno spazio topologico localmente connesso per cammini (l.c.c.) è connesso se, e solo se, è connesso per cammini.*

Dim. Lasciata allo studente. □

2.2 Omotopia di cammini

I cammini di uno spazio topologico X sono funzioni continue di I in X , e quindi per essi si può definire la relazione di omotopia così come fatto per le funzioni continue tra due spazi topologici in generale. Ma, in questo caso, la relazione di omotopia senza ulteriori restrizioni diventa banale.

Sia $\alpha: I \rightarrow X$ un cammino di origine $\alpha(0) = x_0$ e consideriamo la funzione $F: I \times I \rightarrow X$ definita ponendo

$$\forall (s, t) \in I \times I \quad F(s, t) = \alpha(ts)$$

Per risultati noti F è continua e si ha

$$\forall s \in I \quad \begin{cases} F(s, 0) = \alpha(0) = x_0 = C_{x_0}(s) \\ F(s, 1) = \alpha(s) \end{cases}$$

dove C_{x_0} indica la funzione $I \rightarrow X$ costante al punto x_0 , detta *cappio costante* uscente dal punto x_0 . Dunque F è un'omotopia dal cappio costante C_{x_0} al cammino α .

Si consideri poi la funzione $G: I \times I \rightarrow X$ definita ponendo

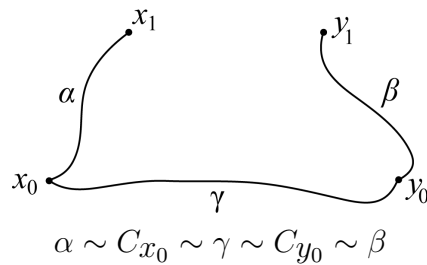
$$\forall (s, t) \in I \times I \quad G(s, t) = \alpha((1 - t)s + t)$$

G è continua e si ha

$$\forall s \in I \quad \begin{cases} G(s, 0) = \alpha(s) \\ G(s, 1) = \alpha(1) = x_1 = C_{x_1}(s) \end{cases}$$

Dunque G è un'omotopia da α al coppia costante uscente da x_1 .

Se allora lo spazio X è connesso per cammini si ha la situazione schematizzata nel modo seguente

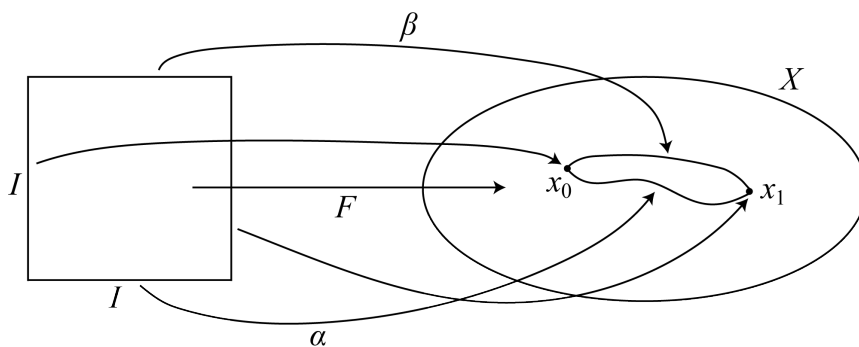


ossia ogni cammino α è omotopo ad ogni altro cammino β . Ciò rende banale la relazione di omotopia.

Allora per i cammini si usa la relazione di omotopia relativa agli estremi. Precisamente: siano α e β due cammini di X entrambi di origine x_0 ed entrambi con fine in x_1 , diremo che α è omotopo a β se esiste una funzione continua $F: I \times I \rightarrow X$ tale che

$$\begin{aligned} \forall s \in I \quad F(s, 0) &= \alpha(s) \\ \forall s \in I \quad F(s, 1) &= \beta(s) \\ \forall t \in I \quad F(0, t) &= x_0 \\ \forall t \in I \quad F(1, t) &= x_1 \end{aligned}$$

In altre parole F è definita sul quadrato $I \times I$ e sono fissate condizioni sul suo completo bordo



2.3 Il gruppo fondamentale relativo ad un punto

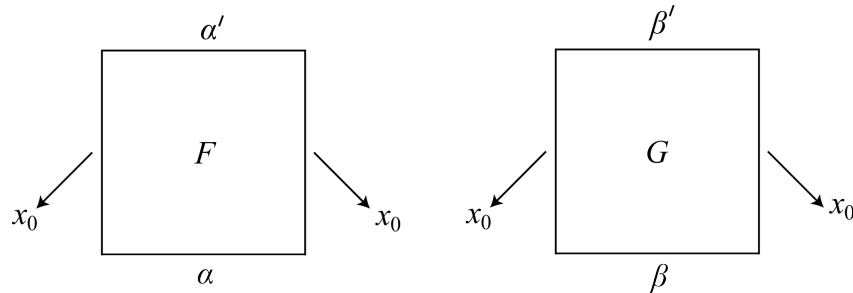
Sia (X, x_0) uno spazio puntato. Indichiamo con $\Omega(X, x_0)$ l'insieme dei cappi uscenti dal punto x_0 e consideriamo l'insieme quoziente di esso rispetto alla relazione di omotopia con estremi fissi $\Omega(X, x_0) / \sim$. In tale insieme definiamo un prodotto ponendo

$$[\alpha] [\beta] = [\alpha \beta]$$

Ciò è lecito in quanto

$$\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta' \implies \alpha \beta \sim \alpha' \beta'$$

Dimostriamolo. Detta F l'omotopia da α a α' e G quella da β a β'



si consideri la funzione $H: I \times I \rightarrow X$ definita ponendo

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ G(2s - 1, t) & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

H è continua per il teorema di incollamento e si ha

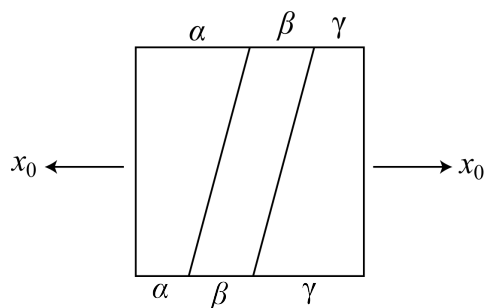
$$\begin{aligned} H(s, 0) &= \alpha\beta(s) \\ H(s, 1) &= \alpha'\beta'(s) \\ H(0, t) &= H(1, t) = x_0 \end{aligned}$$

Dunque H è un'omotopia (relativa agli estremi) da $\alpha\beta$ a $\alpha'\beta'$.

L'operazione di prodotto introdotta nel quoziente $\Omega(X, x_0) / \sim$ è associativa, ovvero

$$\alpha(\beta\gamma) \sim (\alpha\beta)\gamma$$

Si riportano di seguito uno schizzo e la formula dell'omotopia:

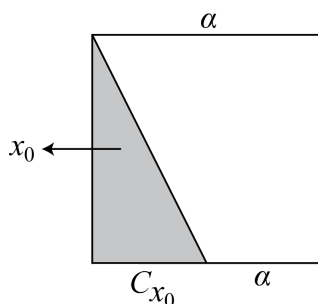


$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha(4s/(1+t)) & 0 \leq s \leq (1+t)/4 \\ \beta(4s-1-t) & (1+t)/4 \leq s \leq (t+2)/4 \\ \gamma((4s-2-t)/(2-t)) & (t+2)/4 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Proviamo che la classe del cappio costante a x_0 è neutra per il prodotto, ossia che

$$C_{x_0}\alpha \sim \alpha$$

Si riportano di seguito uno schizzo e la formula dell'omotopia:



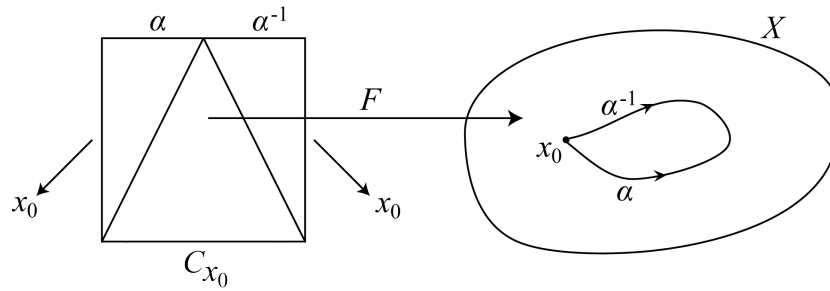
$$F(s, t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq s \leq (1-t)/2 \\ \alpha((2s+t-1)/(1+t)) & (1-t)/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ovviamente si prova anche che

$$\alpha C_{x_0} \sim \alpha$$

Proviamo infine che la classe del cappio inverso α^{-1} è l'inverso della classe del cappio α , ovvero che $C_{x_0} \sim \alpha\alpha^{-1}$ (e analogamente si prova che $C_{x_0} \sim \alpha^{-1}\alpha$).

Si riportano di seguito uno schizzo e la formula dell'omotopia:



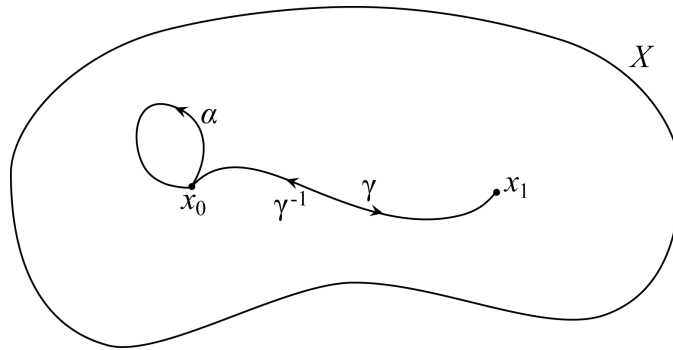
$$F(s, t) = \begin{cases} \alpha(2s) & 0 \leq s \leq t/2 \\ \alpha(t) & t/2 \leq s \leq (2-t)/2 \\ \alpha^{-1}(2s-1) & (2-t)/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

In conclusione $(\Omega(X, x_0) / \sim, \bullet)$ è un gruppo che dicesi *gruppo fondamentale* di X relativo al punto x_0 o anche *primo gruppo di omotopia* dello spazio puntato (X, x_0) e si indica con il simbolo $\Pi_1(X, x_0)$.

Per i gruppi fondamentali di X relativi a due punti distinti x_0 e x_1 vale il seguente, importante risultato:

Teorema 2.3.1. *Se x_0 e x_1 sono punti di X ogni cammino γ da x_0 a x_1 induce un isomorfismo $\gamma_{\#}$ di $\Pi_1(X, x_0)$ su $\Pi_1(X, x_1)$.*

Dim. Sia γ un cammino da x_0 a x_1 .



Per ogni coppia α uscente da x_0 il cammino $\gamma^{-1}\alpha\gamma$ è un cappio uscente da x_1 e, per la compatibilità del prodotto rispetto alla relazione di omotopia, si ha:

$$\alpha \sim \alpha' \implies \gamma^{-1}\alpha\gamma \sim \gamma^{-1}\alpha'\gamma$$

Pertanto è lecito definire l'applicazione

$$\gamma_{\#}: [\alpha] \in \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow [\gamma^{-1}\alpha\gamma] \in \Pi_1(X, x_1)$$

$\gamma_{\#}$ è un omomorfismo. Infatti si ha:

$$\begin{aligned}\gamma_{\#}([\alpha][\beta]) &= \gamma_{\#}([\alpha\beta]) = [\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma] = [\gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}\beta\gamma] = \\ &= [\gamma^{-1}\alpha\gamma][\gamma^{-1}\beta\gamma] = \gamma_{\#}([\alpha])\gamma_{\#}([\beta])\end{aligned}$$

$\gamma_{\#}$ è biettiva, e la sua inversa è $\gamma_{\#}^{-1} = (\gamma^{-1})_{\#}$.

Lo studente è invitato a chiarire il precedente passaggio.

In conclusione $\gamma_{\#}$ è un isomorfismo. \square

Corollario 2.3.1. *Se X è uno spazio topologico connesso per cammini i gruppi fondamentali relativi ai vari punti di X sono tutti isomorfi. Si parla allora di gruppo fondamentale di X : $\Pi_1(X)$.*

Osservazione 2.3.1. L'isomorfismo $\gamma_{\#}$ di cui al precedente teorema non cambia se a γ si sostituisce un cammino γ' omotopo. Provare.

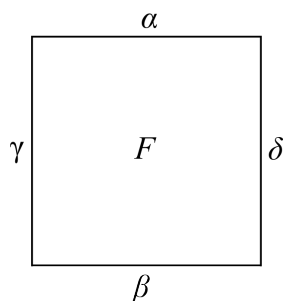
Uno spazio topologico X si dice *semplicemente connesso* (o anche *1-connesso*) se è connesso per cammini e il suo gruppo fondamentale è nullo:

$$X \text{ s.c.} \iff X \text{ c.c.} \wedge \Pi_1(X) = 0$$

Sappiamo che tutte le funzioni a valori in uno spazio contraibile sono omotope. Anche i cammini di uno spazio contraibile sono quindi tutti omotopi, ed anche i cappi. Ma per i cammini abbiamo considerato l'omotopia con estremi fissi ed allora il risultato generale non basta ad assicurare che il gruppo fondamentale di uno spazio contraibile sia nullo. Occorre qualcosa che ci consenta di correggere una generica omotopia con una omotopia relativa. Ciò è reso possibile dal successivo Lemma. Prima però lo studente è invitato a rendersi conto che uno spazio contraibile X è connesso per cammini. Infatti l'omotopia F dall'identità di X alla funzione costante ad un suo punto x_0 fornisce una famiglia di cammini $\{F_x\}_{x \in X}$ da ogni punto x al punto x_0 .

Lemma 2.3.1. *Siano α e β due cammini di X dal punto x_0 al punto x_1 e sia F una omotopia da β ad α non relativa agli estremi. Detti γ il cappio percorso da x_0 e δ quello percorso da x_1 durante l'omotopia F , si ha che α è omotopo a $\gamma^{-1}\beta\delta$ con un'omotopia relativa agli estremi.*

Dim. Dimostrazione per disegni e formule

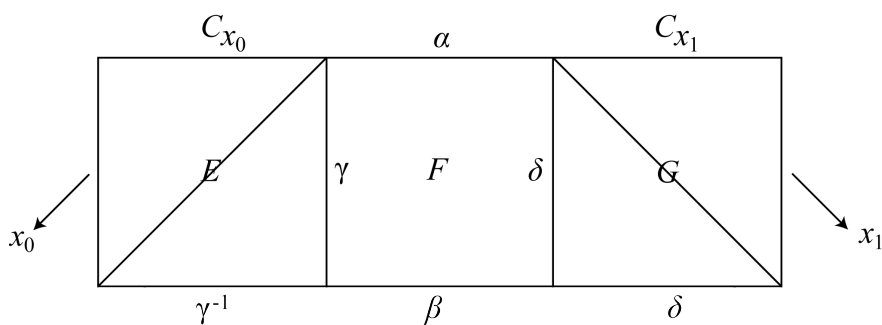


$$F(s, 0) = \beta(s)$$

$$F(s, 1) = \alpha(s)$$

$$F(0, t) = \gamma(t)$$

$$F(1, t) = \delta(t)$$



$$E(s, t) = \begin{cases} x_0 & s \leq t \\ \gamma(1 + t - s) & s \geq t \end{cases}$$

$$E(s, 0) = \gamma(1 - s) = \gamma^{-1}(s) \quad E(s, 1) = x_0 = C_{x_0}(s)$$

$$E(0, t) = x_0 \quad E(1, t) = \gamma(t)$$

$$G(s, t) = \begin{cases} \delta(s + t) & t \leq 1 - s \\ x_1 & t \geq 1 - s \end{cases}$$

$$G(s, 0) = \delta(s) \quad G(s, 1) = x_1 = C_{x_1}(s)$$

$$G(0, t) = \delta(t) \quad G(1, t) = x_1$$

Incollando i tre quadrati si ottiene un'omotopia relativa agli estremi H da $\gamma^{-1}\beta\delta$ ad α . \square

Come caso particolare, se α è un cappio uscente da x_0 e β è il cappio C_{x_0} , si ha $\gamma = \delta$ e quindi H è un'omotopia relativa agli estremi da C_{x_0} ad α .

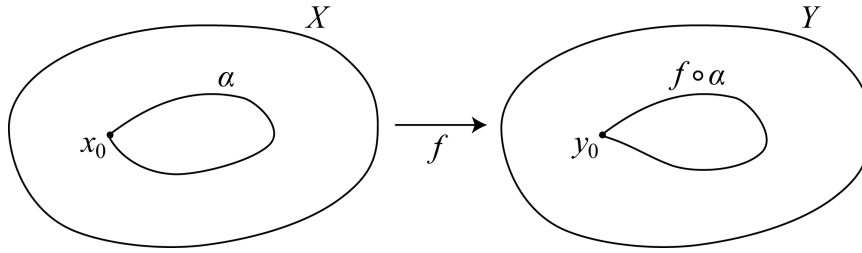
NOTA BENE L'omotopia H partirebbe da $3I \times I$, ma lo studente sa come riparametrizzare in modo che $I \times I$ vada in $3I \times I$.

2.4 Il funtore gruppo fondamentale

Siano (X, x_0) e (Y, y_0) spazi puntati e sia $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una funzione continua di X in Y tale che $f(x_0) = y_0$, ovvero una funzione continua di spazi puntati.

Consideriamo la funzione $f_{\#}: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ definita ponendo

$$\forall [\alpha] \in \Pi_1(X, x_0) \quad f_{\#}([\alpha]) = [f \circ \alpha] \in \Pi_1(Y, y_0)$$



$f_{\#}$ è ben posta in quanto

$$\alpha \sim \alpha' \implies f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$$

(Ricordiamo che si tratta sempre di omotopie relative agli estremi 0 e 1 di I).
 $f_{\#}$ è un omomorfismo di gruppi. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} f_{\#}([\alpha][\beta]) &= f_{\#}[\alpha\beta] = [f \circ \alpha\beta] = [(f \circ \alpha)(f \circ \beta)] = \\ &= [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_{\#}([\alpha])f_{\#}([\beta]) \end{aligned}$$

Chiariamo meglio i passaggi precedenti osservando che

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad f \circ \alpha\beta(t) &= f(\alpha\beta(t)) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ f(\beta(2t-1)) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} = \\ &= (f \circ \alpha)(f \circ \beta)(t) \end{aligned}$$

Sia ora (Z, z_0) un terzo spazio puntato e $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ una funzione continua di spazi puntati. Si ha:

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{\#}([\alpha]) &= [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = \\ &= g_{\#}[f \circ \alpha] = g_{\#} \circ f_{\#}([\alpha]) \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà di $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$ si conclude che $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$.

Quanto esposto sopra si riassume elegantemente dicendo che la legge che ad ogni spazio puntato (X, x_0) associa il gruppo fondamentale relativo a quel punto $\Pi_1(X, x_0)$ e ad ogni funzione continua $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ l'omomorfismo $f_{\#}: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ è un funtore dalla categoria degli spazi topologici puntati \mathcal{Top} alla categoria \mathcal{G} dei gruppi.

L'omomorfismo $f_{\#}$ associato ad f dipende in effetti dalla classe di omotopia di f , nel senso precisato dal seguente

Teorema 2.4.1. *Siano f e g funzioni continue dallo spazio puntato (X, x_0) allo spazio puntato (Y, y_0) . Se f è omotopa a g con un'omotopia relativa al punto x_0 , allora risulta $f_{\#} = g_{\#}$.*

Dim. Sia F l'omotopia relativa al punto x_0 dalla funzione f alla funzione g . Dunque per ogni $(x, t) \in X \times I$ si avrà:

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f(x) \\ F(x, 1) &= g(x) \\ F(x_0, t) &= y_0 \end{aligned}$$

Per ogni coppia α uscente dal punto x_0 sia G la funzione di $I \times I$ in $X \times I$ definita ponendo

$$\forall (s, t) \in I \times I \quad G(s, t) = (\alpha(s), t)$$

Si consideri la funzione composta

$$H = F \circ G: I \times I \longrightarrow Y$$

H è continua e verifica le condizioni

$$\begin{aligned} \forall s \in I \quad H(s, 0) &= f \circ \alpha(s) \\ H(s, 1) &= g \circ \alpha(s) \\ H(0, t) = H(1, t) &= F(x_0, t) = y_0 \end{aligned}$$

Dunque H è un'omotopia relativa agli estremi dal coppia $f \circ \alpha$ al coppia $g \circ \alpha$, entrambi uscenti da y_0 .

In conclusione si ha $f_{\#}([\alpha]) = g_{\#}([\alpha])$ e, per l'arbitrarietà di $[\alpha]$, $f_{\#} = g_{\#}$. \square

Corollario 2.4.1. *Un'equivalenza di omotopia $f: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ con inversa omotopica g induce un isomorfismo $f_{\#}$ tra i gruppi fondamentali con inverso $g_{\#}$.*

Dim. Dimostrazione schematica

$$\begin{aligned} g_{\#} \circ f_{\#} &= (g \circ f)_{\#} = (1_{(X, x_0)})_{\#} = 1_{\Pi_1(X, x_0)} \\ f_{\#} \circ g_{\#} &= (f \circ g)_{\#} = (1_{(Y, y_0)})_{\#} = 1_{\Pi_1(Y, y_0)} \end{aligned} \quad \square$$