

1 – Premessa

La reometria, ossia la misura delle proprietà viscosse ed eventualmente di quelle elastiche, di materiali complessi si è considerevolmente sviluppata negli ultimi trenta anni soprattutto in relazione al parallelo sviluppo dei materiali polimerici. Anche per altri materiali, specialmente allo stato liquido, e nei più svariati settori della tecnica si è però da tempo affermato il concetto che le proprietà reologiche, tipicamente la viscosità, possono dipendere, talvolta in misura rilevante, dallo stato di moto del liquido e, nei casi più complessi, anche dalla sua “storia”.

Man mano che la fenomenologia non-Newtoniana veniva individuata e ne venivano riconosciute le possibili influenze sui processi tecnologici e sulle proprietà dei prodotti, si è presentato il problema di un’adeguata caratterizzazione reologica dei materiali e sono state corrispondentemente tentate possibili soluzioni.

Questo processo, tutt’ora in corso, è iniziato, com’era naturale, sulla base di una affermata tradizione secolare: quella della viscosimetria Newtoniana. Strumenti e tecniche per la misura della viscosità erano stati sviluppati in gran numero con riguardo alle specifiche esigenze. Diversi viscosimetri venivano e vengono usati a seconda che la viscosità sia molto alta o bassa, se è disponibile una quantità molto piccola di campione, se è richiesta elevata precisione, se la misura è da fare in situ in una parte dell’impianto ecc. Molti metodi classici sono stati usati tal quale nel caso di liquidi non Newtoniani, oppure con opportune modifiche di uso o di analisi. Altri metodi e strumenti di uso specifico sono stati più recentemente sviluppati.

Ciò che brevemente verrà illustrato nel seguito è rivolto a chiarire i principi sui quali è fondata la reometria non-Newtoniana ed a mettere in risalto le differenze fondamentali rispetto alla classica viscosimetria Newtoniana. A questo scopo è necessario premettere una breve analisi di questa ultima ed una classificazione dei viscosimetri in opportune “categorie”.

2 – Liquidi Newtoniani

Come è noto un liquido Newtoniano è caratterizzato dal fatto che gli sforzi interni (pressione a parte) che si generano quando è posto in movimento sono determinati soltanto dal gradiente di velocità che esiste in quel momento. Sono cioè esclusi effetti di tempo o di memoria.

Inoltre la relazione fra sforzo e gradiente di velocità è lineare e pertanto è individuata dal valore di una sola costante: la viscosità.

Questa semplice relazione costitutiva, tenuto conto che lo sforzo è un tensore simmetrico mentre il gradiente di velocità è in genere un tensore asimmetrico, si scrive

$$\underline{\tau} = \eta (\text{grad } v + \text{grad } v^T) \quad (1)$$

dove η è la viscosità e $\text{grad } v^T$ è il trasporto del gradiente di velocità.

Per che non ha familiarità con i tensori, si aggiunge che la (1) in componenti Cartesiane diventa

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \eta \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right\} \quad (2)$$

cioè corrisponde al sistema di equazioni

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

Di solito è molto più nota una forma particolare della seconda Eq.3 e cioè

$$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (4)$$

Quest'ultima, però, vale soltanto in casi particolari come ad esempio nel classico esperimento ideale di scorrimento di due piatti paralleli.

3 – Flusso di scorrimento (shear flow) e flusso viscometrico

Un flusso è uno scorrimento (shear) se è possibile individuare una famiglia di superfici materiali (cioè "fatte" di particelle del fluido) le quali si mantengano inalterate durante il moto.

Queste superfici sono in moto relativo l'una rispetto all'altra, cioè "scorrono" l'una sull'altra, ma il moto di ciascuna di esse è rigido cioè si compone istantaneamente solo di una traslazione e/o di una rotazione. In altre parole, scelti due punti materiali appartenenti alla stessa superficie di scorrimento, la loro sostanza si conserva inalterata durante il moto, mentre la distanza di due punti appartenenti a superfici diverse cambia per effetto dello scorrimento.

Frequentemente un moto è descritto facendo uso di opportuno sistema di coordinate ortogonali (tipicamente: Cartesiane o cilindriche o sferiche). Nei casi più comuni, le superfici di scorrimento coincidono con le superfici per le quali una delle coordinate è costante. Ad es., nel flusso di un tubo circolare, le superfici di scorrimento sono dei cilindri coassiali al tubo e coincidono con le superfici $r = \text{cost}$ di un sistema di coordinate cilindrico.

La velocità di scorrimento (shear rate) in corrispondenza di un punto materiale P ad un certo istante di tempo può essere definita al modo seguente. Si consideri la superficie di scorrimento che passa per P ed un'altra ad essa infinitamente vicina. La normale alla superficie per P interseca l'altra superficie in un punto Q e la distanza (infinitesima) fra P e Q è indicata con dn . Si sovrapponga ora al moto assegnato un moto rigido in modo che nel moto risultante la superficie di scorrimento che passa per P sia ferma. Il punto Q risulta ora dotato di una velocità (infinitesima) il cui modulo indichiamo con dv e la cui direzione è indicata dal versore \vec{t} . La velocità di scorrimento, $\dot{\gamma}$, è lo scalare dato da:

$$\dot{\gamma} = \frac{dv}{dn} \quad (5)$$

Il fattore di $\dot{\gamma}$ è anche ricavabile direttamente dal gradiente di velocità del moto assegnato. La relazione può però risultare di complessa applicazione. Essa è:

$$\dot{\gamma} = \frac{|\text{grad}v + \text{grad}v^T|}{\sqrt{2}} \quad (6)$$

in cui il simbolo $|\underline{A}|$ indica la grandezza del tensore (la grandezza di un tensore \underline{A} è lo scalare $|\underline{A}| = \sqrt{\underline{A} : \underline{A}^T}$).

Per effetto dello scorrimento si genera nel fluido uno sforzo tangenziale τ nella direzione del versore \vec{t}
Se il fluido è Newtoniano, τ è proporzionale a $\dot{\gamma}$ secondo la relazione

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (7)$$

che rappresenta la generalizzazione dell'Eq.4. Per i fluidi non-Newtoniani, la proporzionalità fra τ e $\dot{\gamma}$ non è valida in generale. In tal caso, l'Eq.7 viene ancora usata come definizione della variabile η . Va ancora detto che, nel caso Newtoniano, lo sforzo tangenziale τ è l'unico presente oltre alla pressione P. nel caso non-Newtoniano, invece, possono generarsi anche degli sforzi normali di cui si dirà più avanti.

In generali, la velocità di scorrimento $\dot{\gamma}$ varia da un punto all'altro (anche su una stessa superficie di scorrimento) e nel tempo. Nel caso in cui $\dot{\gamma}$, seguendo la particella, non vari nel tempo, il flusso di scorrimento è un flusso viscometrico.

In pratica, i flussi di scorrimento stazionari sono viscometrici e quindi lungo le linee di flusso, che sono le traiettorie delle particelle, $\dot{\gamma}$ è costante. Come conseguenza, lungo ciascuna traiettoria è costante anche τ , a meno di eventuali effetti tempo (transitori) di cui si discuterà più avanti.

4 – L'equazione di un viscosimetro

Tutte le equazioni scritte finora sono equazioni locali, valgono cioè punto per punto. Come tali, le grandezze in esse coinvolte non sono di solito accessibili alla misura. Le grandezze misurabili sono solitamente degli integrali di grandezze locali effettuati al contorno della zona che contiene il campione. Un esperimento reometrico consiste tipicamente nella misura simultanea di 2 grandezze: una grandezza cinematica (una velocità lineare o angolare di un pezzo dell'apparecchiatura oppure una portata di liquido, etc.) ed una grandezza dinamica (una forza o una coppia applicate ad un pezzo dell'apparecchiatura oppure una differenza di pressione fra due sezioni di un condotto, etc.).

L'equazione di un particolare viscosimetro lega tra loro la grandezza cinematica e quella dinamica che sono misurabili con esso. Nella relazione, insieme con alcune grandezze geometriche ed eventualmente con altre grandezze fisiche (ad es. la densità), entra ovviamente la viscosità, il cui valore viene pertanto ricavato dai risultati della misura.

L'equazione di un viscosimetro si ricava sempre con il seguente procedimento

- 1) Si scrive un bilancio di forze, oppure di momenti, per un elemento di fluido (talvolta di volume infinitesimo).
- 2) Poiché almeno un termine di tale bilancio contiene lo sforzo viscoso (ed eventualmente elastico), si sostituisce per esso la sua espressione costitutiva che lo lega alle grandezze cinematiche (al gradiente di velocità locale nel caso Newtoniano).
- 3) La risultante equazione differenziale viene integrata con le opportune condizioni al contorno.
- 4) La risultante equazione si traduce in una relazione (spesso algebrica) fra le grandezze misurabili.

Il procedimento su indicato è assolutamente generale ed infatti non è limitato ai viscosimetri. Esso risulta di minore o maggiore difficoltà a seconda dei casi ed è appunto sulla base di tali difficoltà che possono classificarsi i viscosimetri, soprattutto in vista di un loro impiego per liquidi non-Newtoniani.

Ve detto subito però che nel caso Newtoniano, indipendentemente dalle difficoltà dell'analisi, un risultato può anticiparsi a priori. Poiché la relazione costitutiva è lineare ed il procedimento su indicato conserva tale linearità (se le forze di inerzia sono trascurabili), la relazione fra le due grandezze di misura (cinematica e dinamica) è un semplice proporzionalità. Ciò è vero anche se il flusso non è shear, se cioè si deve far riferimento all'equazione costitutiva completa, Eq.1. La grande semplicità della viscosimetria Newtoniana è dovuta a tale proporzionalità. Essa consente infatti perfino l'uso di strumenti dei quali l'equazione non sia stata ricavata, potendosi "tarare" lo strumento con un liquido di viscosità nota. In questo caso sono tuttavia

necessarie alcune cautele di cui si dirà in seguito. Sfortunatamente la “semplicità” Newtoniana non si conserva nel caso non-Newtoniano.

5 – Classificazione dei viscosimetri

Possiamo suddividere i viscosimetri sulla base del tipo di flusso che in essi si genera e dalle conseguenti difficoltà di analisi. Indichiamo così le seguenti categorie.

- A) Flusso viscometrico uniforme. Con l’aggettivo uniforme si vuole intendere che la shear rate, $\dot{\gamma}$ è la stessa non solo lungo ciascuna traiettoria ma anche da una traiettoria all’altra, cioè è costante in tutto il campo.
- B) Flusso viscometrico non uniforme. $\dot{\gamma}$ è costante solo lungo ciascuna traiettoria.
- C) Flusso non viscometrico analizzabile. Rientra in questa categoria ad es. il viscosimetro a caduta di sfera.
- D) Flusso non viscometrico non analizzabile. Nulla esclude ovviamente che viscosimetri appartenenti a questa categoria passino a quella precedente con il progresso delle tecniche (almeno numeriche) di analisi.

Per quanto riguarda le prime due categorie ed eventualmente la terza, le definizioni valgono prescindendo da zone di estremità dove, come già accennato, possono aversi deviazioni della situazione schematicamente assunta dall’analisi. Tali deviazioni possono diventare più rilevanti nel caso non-Newtoniano.

6 – Analisi Newtoniana dei viscosimetri

Categoria A

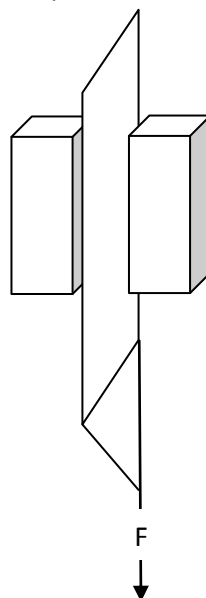
Con riferimento alla procedura indicata al paragrafo 4, il bilancio di forze (punto 1) fornisce in questo caso l’informazione:

$\tau = \text{costante ovunque}$. Usando quindi l’Eq.7 (punto 2) si ricava $\dot{\gamma} = \text{cost}$. Ciò assicura l’appartenenza alla categoria in esame e consente la rapida esecuzione dei punti 3 e 4 rimanenti.

Appartengono a questa categoria i viscosimetri che approssimano l’esperimento ideale dei piatti paralleli e gli strumenti a piatto e cono.

Viscosimetro a banda – Nelle sue parti essenziali, è costituito da un nastro, generalmente di plastica, che si muove in una fessura a sezione rettangolare allungata (vedi figura 1). Fra il nastro e le pareti della fessura è presente il liquido di prova che è alimentato dall’alto via via che il nastro scorre. È adatto per liquidi di media viscosità (ordine delle decine di poises). Se si trascurano i bordi e l’influenza della gravità, la situazione è quella idealizzata dei piatti piani paralleli. Si ha perciò

FIGURA 1



$$\dot{\gamma} = \frac{v}{\delta} \quad (8)$$

$$\tau = \frac{F}{2S} \quad (9)$$

dove S è la superficie (di una faccia) del nastro “immersa” nella fessura e δ lo spessore del liquido (da ciascuna parte). L’equazione del viscosimetro (cioè la relazione tra la forza F che muove il nastro e la sua velocità v) è pertanto

$$F = \frac{2S}{\delta} \eta v \quad (10)$$

Viscosimetro a cilindro in moto assiale – È costituito da un cilindro che si sposta assialmente in una fessura cilindrica coassiale. È simile al precedente nell’uso e nell’analisi, purché l’intercapedine sia di piccolo spessore rispetto al raggio del cilindro. In tal caso infatti la curvatura delle superfici parallele può ignorarsi e l’equazione diventa

$$F = \frac{\pi DL}{\delta} \eta v \quad (11)$$

dove D è il diametro e L la lunghezza della fessura.

Viscosimetro rotazionale a cilindri coassiali (Conette) – È costituito da una tazza cilindrica contenente un secondo cilindro coassiale. Uno dei due cilindri è posto in rotazione mentre il liquido di prova riempie l’intercapedine. È adatto per viscosità basse. Anche questo viscosimetro come il precedente appartiene alla categoria A solo se lo spessore dell’intercapedine è piccolo rispetto al raggio dei cilindri nel qual caso corrisponde ancora ai piani paralleli. Si misura la coppia M e la velocità angolare Ω . Poiché si ha evidentemente

$$M = \tau R (2\pi RL) \quad (12)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega R}{\delta} \quad (13)$$

dove R e L sono il raggio e l’altezza dei cilindri, l’equazione del viscosimetro risulta

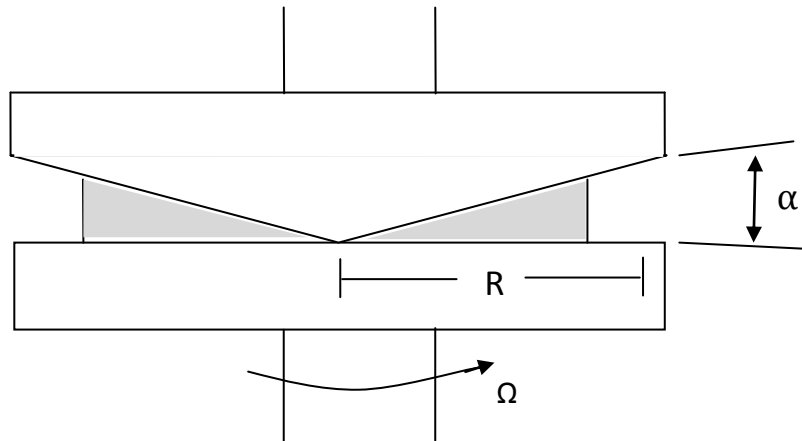
$$M = \frac{2\pi R^3 L}{\delta} \eta \Omega \quad (14)$$

Reometro a cono e piatto – È schematizzato in figura 2. L’analisi risulta semplice se l’angolo α è piccolo così che si possa assumere $\sin \alpha \approx \text{tg} \alpha \approx \alpha$. In tal caso, inoltre, poiché la velocità del piatto alla distanza r dal centro è data da $r \Omega$ e lo spessore da $r \alpha$, la shear rate $\dot{\gamma}$ è data da

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\alpha} \quad (15)$$

Ed è quindi indipendente da r. Ne consegue che lo sforzo τ è anch’esso costante ovunque.

FIGURA 2



La coppia M si ricava integrando i contributi τr ($2\pi r dr$) da 0 a R (raggio della zona occupata dal liquido)

$$M = \frac{2\pi R^3}{3} \tau \quad (16)$$

e l'equazione del viscosimetro diventa

$$M = \frac{2\pi R^3}{3\alpha} \eta \Omega \quad (17)$$

Categoria B

In questo caso la procedura di analisi (al punto 1) informa che la τ non è costante ovunque. È pertanto necessaria una esplicita integrazione per ricavare il campo di velocità.

Viscosimetro a capillare – Prescindendo dalle zone di estremità si può ritenere che le particelle di liquido all'interno del capillare percorrano traiettorie rettilinee con moto uniforme. Scelto pertanto un sistema di coordinate cilindrico (r, θ, z) coassiale al capillare, l'Eq.5 è soddisfatta con

$$\dot{\gamma} = - \frac{dv_z}{dr} \quad (18)$$

e $\dot{\gamma}$ (e quindi τ) è costante lungo le traiettorie, cioè il flusso è viscometrico. Per simmetria possiamo inoltre aspettarci che tutto sia costante con θ mentre, poiché ancora per simmetria $dv_z/dr = 0$ all'asse del tubo, possiamo prevedere che $\dot{\gamma}$ non può essere costante con r .

Considerato un elemento di volume di raggio r e lunghezza L possiamo scrivere il bilancio di forze

$$\pi r^2 \Delta P = 2 \pi r L \tau \quad (19)$$

dove ΔP è la differenza di quota piezometrica (in unità di pressione) a distanza assiale L . Da cui

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{\Delta P}{L} \quad (20)$$

Lo sforzo viscoso risulta linearmente variabile con r , da zero all'asse fino al valore massimo

$$\tau_w = \frac{R \Delta P}{2 L} \quad (21)$$

alla parete capillare.

Sostituendo la (7) e la (18) nell' Eq.20 si ricava l'equazione differenziale per v_z

$$-\eta \frac{dv_z}{dr} = \frac{r \Delta P}{2 L} \quad (22)$$

che, integrata con la condizione al contorno

$$\text{per } r = R \quad v_z = 0 \quad (23)$$

fornisce la ben nota distribuzione parabolica

$$v_z = \frac{1}{4} \frac{\Delta P}{L} \frac{R^2}{\eta} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (24)$$

Infine, calcolando la portata volumetrica Q

$$Q = \int_0^R v_z 2 \pi r dr \quad (25)$$

si ricava l'equazione del viscosimetro, cioè la relazione fra Q e $\Delta P/L$ (Hagen – Poiseuille)

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8 \eta L} \quad (26)$$

Per viscosità molto alte ΔP è applicato con un sistema a pistone nel serbatoio cilindrico del liquido di prova o con una pressione di gas. Per viscosità più basse, con opportuna scelta del diametro del capillare, ΔP può essere realizzato con un battente del liquido stesso. In tal caso (viscosimetri Cannon – Fenske, Ubbelohde etc.) il battente varia da un valore iniziale h_1 ad uno finale h_2 corrispondentemente all'efflusso di un volume prefissato. La grandezza misurata è il tempo di efflusso che si ricava dalla (26) sostituendovi $\Delta P = \rho gh$ e $Q = dv/dt$ e integrando.

Si noti che in questo caso la variabile misurata, il tempo di efflusso dipende, a geometria fissata, dal rapporto η/ρ anziché soltanto da η . si noti ancora che $\dot{\gamma}$ risulterà variabile nel tempo oltre che nello spazio (con la coordinata r).

Viscosimetro di Couette – Se la distanza fra i cilindri non è piccola rispetto al raggio, il viscosimetro appartiene alla categoria B.

Prescindendo da effetti di estremità, possiamo prevedere che le particelle di fluido percorrano delle traiettorie circolari con moto circolare uniforme e che tutto di ripeta identicamente nelle sezioni normali all'asse. Scelto pertanto un sistema di coordinate cilindrico, l'Eq.5 è soddisfatta con

$$\dot{\gamma} = \pm r \frac{d\omega}{dr} \quad (27)$$

dove ω è la velocità angolare al raggio r ed il segno dipende da quale dei cilindri sia in rotazione (positivo se ruota l'esterno). $\dot{\gamma}$ è costante lungo le traiettorie ma varia con r . Scelto infatti un elemento cilindrico di raggio r e altezza L , possiamo scrivere il bilancio dei momenti

$$M = \tau 2 \pi r^2 L \quad (28)$$

Poiché la coppia M è indipendente da r , τ risulta inversamente proporzionale a r^2 . Sostituendo la (7) e la (27) nella (28) si ottiene l'equazione differenziale per ω

$$\pm 2\pi r^3 \frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{\eta} \frac{M}{L} \quad (29)$$

Integrando con la condizione

$$\text{per } r = R_f \quad \omega = 0 \quad (30)$$

dove R_f è il raggio del cilindro fermo, si ricava la distribuzione di ω

$$\omega = \pm \frac{1}{4\pi\eta} \frac{M}{L} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_f^2} \right) \quad (31)$$

dove il segno positivo vale se ruota il cilindro interno.

Infine, indicando con Ω la velocità angolare del cilindro rotante, l'equazione del viscosimetro risulta

$$\frac{M}{L} = 4\pi\eta \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^4 - R_1^4} \Omega \quad (32)$$

dove R_1 e R_2 sono i raggi dei due cilindri ($R_1 > R_2$).

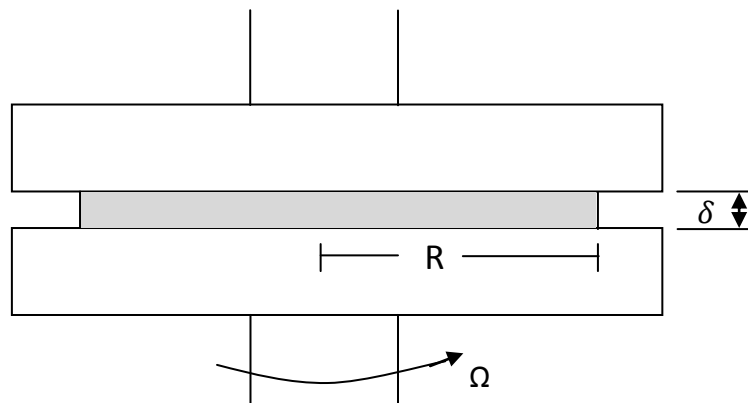
Si noti che se $\delta = R_1 - R_2$ è piccolo rispetto a R_1 , l'Eq.32 si deduce all'Eq.14. Se invece il raggio esterno è molto grande, se cioè il viscosimetro è costituito solo dal cilindro interno che ruota in un largo volume di campione (viscosimetro di Brookfield con $L \gg R$), si ottiene ($R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 = R$)

$$\frac{M}{L} = 4\pi R^2 \eta \Omega \quad (33)$$

Viscosimetro rotazionale a disco – È una variante del sistema a cono e piatto con un disco piano al posto del cono (vedi Fig.3). Poiché la velocità del piatto rotante al raggio r è Ωr e lo spessore δ è costante, la shear rate $\dot{\gamma}$ è variabile con r

$$\dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\delta} r \quad (34)$$

FIGURA 3



Sostituendo nella (7) e integrando i contributi al momento si ricava per la coppia M

$$M = \frac{\pi}{2} \frac{R^4}{\delta} \eta \Omega \quad (35)$$

Viscosimetro di Brookfield – È costituito da un solido di rivoluzione rotante attorno al proprio asse ed immerso in un largo volume di campione. Il solido di rivoluzione può essere un disco, una sfera o un cilindro. In quest'ultimo caso, se l'altezza è sufficientemente maggiore del diametro così da poter trascurare il contributo dei fondi, l'equazione è la (33) su riportata. Negli altri casi, invece, la distribuzione di velocità e la forma esatta dell'equazione del viscosimetro sono molto difficili da ricavare. Rimane vero tuttavia che, il solido essendo di rivoluzione, le traiettorie sono comunque circolari e percorse con velocità uniforme (sempre che le forze di inerzia, centrifughe, siano trascurabili) ed il flusso è viscometrico. La shear rate è però variabile da un cerchio all'altro, diminuendo sia sul contorno dell'oggetto rotante avvicinandosi all'asse di rotazione sia nel seno del liquido allontanandosi all'oggetto.

Sfruttando la linearità possiamo però affermare che, nel caso Newtoniano, l'equazione del viscosimetro deve essere della forma

$$M = K \eta \Omega \quad (36)$$

dove K può determinarsi per taratura. Deve aversi cura che la geometria del sistema sia ben fissata cioè che le pareti del recipiente e il pelo libero siano o sufficientemente lontani o a distanze standardizzate dall'oggetto rotante.

Categoria C

In questo caso, poiché il flusso non è a shear, l'analisi deve far uso dell'equazione costitutiva completa, Eq.1

Viscosimetro elongazionale – È utilizzabile soltanto per liquidi ad altissima viscosità quali peci o polimeri fusi. È tuttavia istruttivo qui quale esempio molto semplice di moto non a shear. Consiste ne sottoporre a trazione assiale un provino cilindrico o prismatico del liquido (la viscosità è tale per cui l'apparenza è quella di un solido molle) esaminando quindi la relazione fra forza e velocità di allungamento.

Se l è la lunghezza del provino ad un certo istante, dl/dt è la velocità di allungamento, mentre la grandezza specifica

$$\dot{\Gamma} = \frac{1}{l} \frac{dl}{dt} \quad (37)$$

viene chiamate "stretching rate".

Se la deformazione è omogenea è facile verificare che vale la relazione

$$\frac{dv_x}{dx} = \dot{\Gamma} \quad (38)$$

dove x è la coordinata nella direzione del tiro. Nelle altre due direzioni, se il volume rimane costante, si ha

$$\frac{dv_y}{dy} = \frac{dv_z}{dz} = -\frac{\dot{\Gamma}}{2} \quad (39)$$

Applicando l'Eq.3 si ricava

$$\tau_{xx} = 2 \eta \dot{\Gamma} + \beta \quad (40)$$

$$\tau_{yy} = \tau_{zz} = -\eta\dot{\Gamma} + \beta \quad (41)$$

dove β è un contributo isotropo agli sforzi normali (una pressione) che è reologicamente indeterminato a causa della incompressibilità del materiale, ma che è facilmente individuato dalle condizioni al contorno. Sapendo infatti che nelle direzioni y e z non ci sono sforzi applicati ($\tau_{yy} = \tau_{zz} = 0$) si ricava

$$\beta = \eta\dot{\Gamma} \quad (42)$$

e quindi

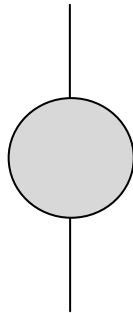
$$\tau_{xx} = \frac{F}{A} = 3\eta\dot{\Gamma} \quad (43)$$

Il coefficiente 3 nell' Eq.43 è chiamata fattore di Trouton. Paragonando formalmente l'Eq.43 con l'Eq.7 si usa dire che la viscosità elongazionale è, per un liquido Newtoniano, il triplo della viscosità in shear.

Viscosimetro a caduta di sfera – Come è ben noto, si misura il tempo di caduta (fra due traguardi) di una sfera nel liquido di prova, contenuto in un recipiente cilindrico.

Per meglio visualizzare il flusso, osservandolo “dalla sfera” ovvero in altre parole consideriamo la sfera ferma investita da una corrente di liquido. Nella figura 4 sono schematizzate alcune traiettorie.

FIGURA 4



Risulta evidente che il flusso, oltre a risentire dell'attrito “tangenziale” cioè dello shear con la sfera, ha anche caratteristiche elongazionali. Fino alla zona dell'equatore le traiettorie si accostano, e quindi gli elementi di fluido vengono allungati, per poi riallargarsi a valle. Lungo il percorso sia la stretching rate $\dot{\Gamma}$ che la shearing rate $\dot{\gamma}$ (ammesso che se ne possa parlare separatamente) subiscono variazioni notevoli.

Malgrado l'apparente complessità, l'analisi basata sull'Eq.1 è (trascurando l'inerzia) possibile. Per integrazione della distribuzione di sforzi tangenziali e pressioni sul contorno della sfera si ottiene quindi la forza, F , che ha la forma molto semplice (e molto antica) ricavata da Stokes

$$F = 6\pi R\eta v \quad (44)$$

Uguagliando tale forza a quella applicata

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_s - \rho) g \quad (45)$$

si ricava la velocità di caduta della sfera

$$v = \frac{2}{9} \frac{R^2(\rho_s - \rho)g}{\eta} \quad (46)$$

L'Eq.46 richiede una correzione per l'effetto delle pareti del recipiente, ignorate nel calcolo della (44). Anche tale correzione può effettuarsi per via teorica.

Categoria D

Un'analisi esatta è assente in questo caso. Non si riferisce qui dei tentativi, talvolta anche eccellenti, di analisi approssimate.

Viscosimetro a palette – È un viscosimetro rotazionale in cui l'elemento rotante è, come per un agitatore, fornito di pale. A differenza del Brookfield il solido non è di rivoluzione e pertanto anche trascurando l'azione centrifuga le traiettorie non sono circolari. Il moto relativo fluido-paletta è in certa misura simile al caso della sfera cadente cioè è un moto "attorno" ad un oggetto sommerso e come tale partecipa del flusso a shear e di quello elongazionale.

Se l'azione di inerzia e centrifuga è assente si può tuttavia ritenere ancora valida un'equazione complessiva lineare uguale alla (36)

Viscosimetro a orifizio – Può considerarsi come un "degenerazione" del viscosimetro a capillare per valori bassi del rapporto L/D (lunghezza a diametro). In questo caso il moto nel capillare (breve) o orifizio non è "ben sviluppato" cioè le traiettorie non sono rettilinee e la velocità lungo di esse non è costante. Inoltre ha notevole influenza la zona di imbocco nella quale il flusso è convergente e quindi prevalentemente elongazionale. Malgrado ciò, nel caso Newtoniano e se l'inerzia è trascurabile, possiamo scrivere

$$\Delta P = K\eta Q \quad (47)$$

dove K è una costante di taratura.

Se l'efflusso è per gravità, il tempo di efflusso di un volume prefissato risulterà dato da

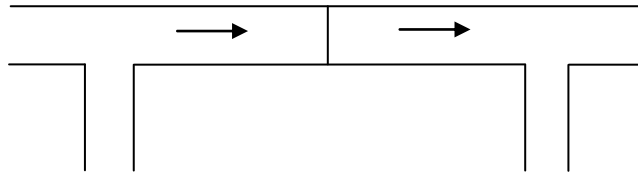
$$t = K' \frac{\eta}{\rho} \quad (48)$$

Con K' costante da determinare.

Considerazioni simili si applicano al caso di orifizi multipli.

Viscosimetro a rotametro – È usato talvolta per il controllo in continuo della viscosità di un prodotto. Con riferimento alla figura 5, una portata di liquido viene deviata nel ramo laterale nel quale è inserito un rotametro il cui galleggiante si pone ad un'altezza che dipende dalla portata e dalla viscosità del liquido. Se la portata è fissata (ad es. mediante il controllo di un secondo galleggiante di forma opportuna che lo rende insensibile a variazioni di viscosità), la scala del rotametro può essere tarata direttamente in unità di viscosità. Come è noto, la canna di un rotametro è lievemente conica ed il funzionamento dello strumento è basato sul flusso attraverso un orifizio anulare di sezione variabile. Possono farsi considerazioni analoghe a quelle fatte per il viscosimetro a orifizio e per quello a caduta di sfera dei quali il viscosimetro a rotametro rappresenta una sorta di combinazione. La determinazione della scala è empirica e, anche nel caso Newtoniano, la posizione del galleggiante è funzione della densità oltreché della viscosità.

FIGURA 5



Viscosimetro a bolla di gas – È di uso semplicissimo (per liquidi trasparenti) ma è anche fra i più incerti per quanto riguarda l'analisi. Consiste in un recipiente cilindrico di vetro riempito parzialmente del liquido di prova e tappato. Capovolgendo il cilindro la bolla di aria sale lentamente nel liquido. La velocità o il tempo di salita vengono correlati alla viscosità.

Per quanto somiglia al viscosimetro a caduta di sfera, la situazione è resa incerta dalla geometria del sistema. Si può osservare che in tutti i casi nei quali l'equazione di un viscosimetro è stata derivata esplicitamente, le caratteristiche geometriche vi giocano un ruolo importante. In questo caso la geometria è ignota a priori ed è presumibilmente variabile con la viscosità stessa oltre che, forse, con la densità e la tensione interfacciale. Per quanto sia ovviamente prevedibile che il tempo di salita è crescente con la viscosità, formule esplicite di proporzionalità,

$$t = K \eta \quad (49)$$

usate nella pratica, non hanno base teorica.

7 – Fluidi non-Newtoniani

La fenomenologia non-Newtoniana è molto ampia e variata ma certamente uno dei suoi aspetti fondamentali e a tutti noto è, con riferimento all'Eq.7, il fatto che η non sia una costante. Si ricorda tuttavia che l'Eq.7 non è generale ma si riferisce soltanto al moto a shear e a quello viscometrico. Limitatamente al flusso viscometrico (cioè ad uno shear stazionario) η risulta funzione soltanto di $\dot{\gamma}$ ed è su questa funzione che si è concentrata gran parte dell'attenzione nei primi anni di ricerca dei fluidi non-Newtoniani. Si deve però ricordare che:

- i) La determinazione della viscosità non-Newtoniana, cioè della funzione $\eta(\dot{\gamma})$, è per definizione possibile e significativa limitatamente al moto viscometrico.
- ii) Altro e più difficile problema è quello della determinazione dell'equazione costitutiva completa di un fluido non-Newtoniano, cioè dell'analogo dell'Eq.1.
- iii) Fino a quando il problema di cui al punto ii) non ha trovato soluzione, non ha significato l'uso di $\eta(\dot{\gamma})$ in flussi non viscometrici oppure l'impiego di flussi non viscometrici per ricavare $\eta(\dot{\gamma})$. l'estensione almeno qualitativa che talvolta si effettua riposa, implicitamente o esplicitamente, su una intuitiva soluzione del problema ii) non scevra di pericoli.

Limitando per ora la discussione alla funzione $\eta(\dot{\gamma})$ è ancora necessario inquadrare il fenomeno degli effetti di memoria o effetti di tempo (ad es. la tissootropia o la reopettività). Da un punto di vista ristretto e aderente formalmente alla definizione di flusso viscometrico questi effetti non devono preoccuparci. Infatti, per definizione di flusso viscometrico, ogni particella di fluido è sottoposta ad un valore $\dot{\gamma}$ costante nel tempo (in quanto costante lungo la sua traiettoria) e per un tempo infinitamente lungo, per cui il valore

di τ che si stabilisce e si misura è funzione soltanto di $\dot{\gamma}$ e corrisponde al valore asintotico (per $t \rightarrow \infty$) di una funzione $\tau(\dot{\gamma}, t)$ che dà lo sforzo dopo che un valore fissato di $\dot{\gamma}$ è stato applicato per un tempo t . Nella pratica, se il materiale presenta effetti tempo, dovremo ancora distinguere i viscosimetri a shear (categorie A e B) a seconda che:

- 1) Le traiettorie sono chiuse (si incontra solo il caso di traiettorie circolari nei viscosimetri rotazionali)
- 2) Le traiettorie sono aperte (nella zona di misura le traiettorie sono, almeno teoricamente, rettilinee in tutti i viscosimetri di interesse).

Nel primo caso il materiale può essere sottoposto allo stesso valore di $\dot{\gamma}$ per un tempo arbitrario ciò che consente sia di aspettare un tempo sufficiente per una determinazione a regime sia, se lo si desidera, di determinare gli effetti tempo cioè la funzione $\eta = (\dot{\gamma}, t)$.

Nel secondo caso gli effetti tempo rappresentano una complicazione.

Infatti, essendo il tempo di permanenza, t_p , del liquido nella zona di misura del viscosimetro (e quindi ad un certo valore di $\dot{\gamma}$) necessariamente limitato, è necessario paragonare tale tempo con la durata della memoria, t_M , del materiale. Se $t_p \gg t_M$ si può assumere che il materiale è a regime e la misura fornisce $\tau(\dot{\gamma})$. Altrimenti la misura fornisce un complesso integrale su dei valori di $\tau(\dot{\gamma}, t)$. Inoltre, in quest'ultimo caso, poiché gli sforzi vanno cambiando lungo ciascuna traiettoria, non c'è nemmeno certezza che il moto conservi le caratteristiche supposte e verificate nel caso Newtoniano. In generale tenderanno ad esaltarsi gli effetti di imbocco, con deviazioni più prolungate dalle traiettorie rettilinee e dal moto uniforme.

8 – Viscosimetria non-Newtoniana

Indicando col nome di viscosimetria non-Newtoniana la determinazione della funzione $\eta(\dot{\gamma})$, ed eventualmente di $\eta(\dot{\gamma}, t)$, risulta chiaro da quanto già detto che essa potrà effettuarsi soltanto da alcuni dei viscosimetri elencati per il caso Newtoniano.

Sono subito da escludere tutti i viscosimetri appartenenti alle categorie C e D per il fatto di non basarsi sul moto a shear. Qualche viscosimetro della categoria B, pur essendo a shear, per il quale l'analisi Newtoniana è già molto complessa o impossibile, diventa impraticabile nel caso non-Newtoniano (ad es. il Brookfield con rotori diversi dal cilindro sottile).

Con questo non si vuole dire che l'uso di tali viscosimetri sia completamente da escludere nel caso non-Newtoniano. Se non è disponibile di meglio essi possono comunque fornire una indicazione di ordine di grandezza della "viscosità". Inoltre essi possono usarsi eccellentemente per scopi limitati di controllo di qualità. Se ad es. si deve controllare una miscela di due costituenti dalle caratteristiche fissate, l'uso di uno di tali strumenti, purché in condizioni standardizzate, può ben indicare deviazioni dalle condizioni desiderate e determinare il corretto intervento. Quello che deve essere chiaro è che non si può spremere sangue dai sassi cioè che è impossibile con essi una determinazione quantitativa della funzione $\eta(\dot{\gamma})$.

I viscosimetri della categoria A sono i migliori per l'uso non-Newtoniano. Infatti, se effetti di memoria sono assenti, il loro funzionamento è identico al caso Newtoniano e valgono esattamente le stesse relazioni.

Poiché $\dot{\gamma}$ e τ sono costanti dappertutto, il viscosimetro non "sa" di aver a che fare con un liquido non-Newtoniano. Ovviamente il valore della viscosità che si ricava deve essere riferito al valore di $\dot{\gamma}$ al quale il viscosimetro lavora. L'unica differenza quindi rispetto al caso Newtoniano è che la prova dovrà essere ripetuta per diversi valori di $\dot{\gamma}$ dovendosi determinare una funzione $\eta(\dot{\gamma})$ anziché un valore unico η .

Se gli effetti tempo esistono, valgono le considerazioni già fatte al paragrafo precedente. Si userà quindi il cono e piatto oppure il Couette a intercapedine sottile piuttosto che il viscosimetro a banda o a cilindro in moto assiale, a meno che per questi ultimi la condizione $t_p > t_M$ non sia ampiamente soddisfatta.

I viscosimetri della categoria B richiedono un discorso più lungo poiché per essi $\dot{\gamma}$, e quindi η , è variabile con una delle coordinate. Si ricorderà che, nel corso dell'analisi Newtoniana, veniva integrata una equazione differenziale lungo tale coordinata al fine di trovare la distribuzione di velocità e quindi la grandezza complessiva di misura, oppure (viscosimetro rotazionale a disco) veniva integrata da τ variabile sul contorno. Il risultato di tali integrazioni chiaramente dipendeva dalla condizione $\eta = \text{costante}$.

Il caso non-Newtoniano si presenta ben più difficile non tanto o non solo perché η diventa variabile ma soprattutto perché, in generale, della funzione $\eta(\dot{\gamma})$ non è nota nemmeno a priori la "forma".

Se infatti la forma è assegnata, l'analisi segue la stessa falsariga del caso Newtoniano con soltanto qualche maggiore complicazione algebrica. Altrimenti un approccio completamente diverso risulta necessario.

Nel seguito discutiamo in qualche dettaglio il caso del viscosimetro a capillare. Considerazioni simili possono farsi per gli altri viscosimetri della categoria B e sono reperibili nella letteratura specialistica. Esaminiamo prima alcuni esempi di forma preassegnata e poi il metodo Mooney-Rabinowitsch per il caso generale.

Supponiamo che la forma assegnata sia una legge di potenza, cioè

$$\eta = K\dot{\gamma}^{n-1} \quad \tau = K\dot{\gamma}^n \quad (50)$$

dove K è chiamata consistenza e n indice di flusso. Il problema viscosimetrico è in questo caso quello della determinazione di 2 parametri, K e n , invece della sola η nel caso Newtoniano.

L'Eq.20 del paragrafo 6 rimane valida, sostituendo in essa la (50) e la (18), si ricava per integrazione il nuovo profilo di velocità

$$v_z = \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{2K} \frac{P}{L} \right)^{\frac{1}{n}} \left(R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right) \quad (51)$$

Una ulteriore integrazione ci conduce alla seguente relazione fra ΔP e portata volumetrica Q .

$$\frac{\Delta P}{L} = 2K \left(\frac{3n+1}{n\pi} \right)^n \frac{1}{R^{3n+1}} Q^n \quad (52)$$

Basterà quindi diagrammare i dati $\left(\frac{\Delta P}{L}, Q \right)$ carta logaritmica per ricavare una retta la cui pendenza dà n e la cui posizione (noti n e R) dà K . Se ci si fida, bastano soli 2 punti sperimentali, tanti quante le incognite. Se con molti dati si osserva che una retta non è interpolabile, ciò significa (ammesso che effetti di imbocco e effetti tempo siano esclusi) che la forma scelta è sbagliata. Supponiamo ancora che la forma scelta sia invece di un fluido di Bingham

$$\begin{aligned} \text{per } \tau > \tau_0 & \quad \tau = \tau_0 + \mu\dot{\gamma} \\ \text{per } \tau \leq \tau_0 & \quad \dot{\gamma} = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

dove τ_0 , la yield stress, e μ sono costanti. Il problema viscosimetrico consiste nella determinazione di τ_0 e μ .

sostituendo al (53) e la (18) nella (20) ed integrando si ricava il profilo di velocità

$$\begin{aligned} \text{per } r > r_0 & \quad v_z = \frac{1}{4} \frac{\Delta P}{L} \frac{R^2}{\mu} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \\ \text{per } r \leq r_0 & \quad v_z = \frac{1}{4} \frac{\Delta P}{L} \frac{R^2}{\mu} \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) - \frac{\tau_0 R}{\mu} \left(1 - \frac{r_0}{R} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

$$\text{dove} \quad r_0 = \frac{2\tau_0}{\Delta P/L} \quad (55)$$

è il raggio della zona centrale nella quale $\dot{\gamma} = 0$ e la velocità è costante.

La relazione fra $\Delta P/L$ e Q diventa

$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{R^4}{\mu} \frac{\Delta P}{L} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{r_0}{R} + \frac{1}{3} \frac{r_0^4}{R^4}\right) \quad (56)$$

Che non è lineare perché $\Delta P/L$ (insieme con τ_0) è incluso anche in r_0 . il procedimento per ricavare μ e τ_0 dai dati $\Delta P/L$ e Q è per tentativi. Una stima di τ_0 può ottenersi estrapolando la curva $(\Delta P/L, Q)$ a portata zero. Poiché in tale limite è $r_0 = R$, dal valore di $\Delta P/L$ così ottenuto si ricava

$$\tau_0 = \frac{\Delta P}{L} \frac{R}{2} \quad (57)$$

Il metodo di Mooney – Rabinowitsch, come abbiamo detto, non assume nessuna forma a priori. La logica del procedimento può essere così inquadrata. Per ogni valore di $\Delta P/L$, il valore della τ alla parete del capillare, τ_w , è noto immediatamente. Infatti l'Eq.21, che esprime un bilancio di forze, resta valida anche nel caso non-Newtoniano. Se riusciamo a calcolare il valore di $\dot{\gamma}$ alla parete, $\dot{\gamma}_w$, il gioco è fatto perché il rapporto $\tau_w/\dot{\gamma}_w$ sarà il valore di η che corrisponde a quel valore di $\dot{\gamma}$. Vediamo come questo sia possibile senza conoscere la forma della funzione.

L'Eq.25 che lega la portata alla distribuzione di velocità (qualunque essa sia) può essere integrata formalmente per parti ottenendosi

$$Q = - \int_0^R \frac{dv_z}{dr} \pi r^2 dr = \int_0^R \dot{\gamma} \pi r^2 dr \quad (58)$$

Il rapporto delle (20) e (21) fornisce

$$r = \frac{R}{\tau_w} \tau \quad (59)$$

che sostituito nella (58) permette di scriverla nella forma

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \dot{\gamma} \tau^2 d\tau \quad (60)$$

Si consideri ora la grandezza

$$\dot{\gamma}_\alpha = \frac{4Q}{\pi R^3} \quad (61)$$

che è ovviamente subito calcolabile dal dato sperimentale di portata. Tale grandezza prende il nome di shear rate apparente in quanto è il valore che $\dot{\gamma}$ avrebbe alla parete se il fluido fosse Newtoniano. (Ciò si verifica derivando la (24) rispetto a r , ponendo $r = R$ e sostituendovi la (26)).

La (60) esprime un primo importante risultato. Poiché τ è una funzione univoca (anche se ancora ignota) di $\dot{\gamma}$ e quindi, supponendo la invertibilità, $\dot{\gamma}$ è funzione univoca di τ , il secondo membro dell'Eq.60 (e quindi anche il primo, cioè $\dot{\gamma}_\alpha$) dipende soltanto dal valore di τ_w .

L'Eq.60 prevede che quindi tutte le coppie di valori $\tau_w, \dot{\gamma}_\alpha$ ottenuti sperimentalmente per un dato fluido anche con capillari diversi (e ricavati dalle semplici equazioni 21 e 61) danno luogo ad un'unica funzione. Cioè, se riportati in diagramma, devono potersi interpolare con una unica curva. Se ciò non si verificasse significa che qualcuna delle poche ipotesi fatte non vale e cioè

- 1) La zona di imbocco è importante cioè i capillari usati sono corti. Ciò sarà vero particolarmente se ci sono effetti tempo che infrangono la corrispondenza biunivoca $\tau, \dot{\gamma}$
- 2) C'è scorrimento alla parete. L'ipotesi di aderenza è stata usata nella integrazione per parti che conduce alla (58)
- 3) La funzione $(\tau, \dot{\gamma})$ non è invertibile.

La curva unica (se lo è) $\tau_w(\dot{\gamma}_\alpha)$ non è ancora la soluzione del nostro problema in quanto $\dot{\gamma}_\alpha$ non è il valore vero di $\dot{\gamma}$ alla parete.

Riscriviamo allora l'Eq.60 al moto seguente

$$\dot{\gamma}_\alpha \tau_w^3 = 4 \int_0^{\tau_w} \dot{\gamma} \tau^2 d\tau \quad (62)$$

e deriviamo rispetto a τ_w

$$3\dot{\gamma}_\alpha \tau_w^2 + \tau_w^3 \frac{d\dot{\gamma}_\alpha}{d\tau_w} = 4\dot{\gamma}_w \tau_w^2 \quad (63)$$

Nella (63) $\dot{\gamma}_w$ è l'incognita cioè il valore vero di $\dot{\gamma}$ alla parete e, come si vede, il suo calcolo coinvolge la derivata della funzione già trovata $d\dot{\gamma}_\alpha/d\tau_w$. Definendo anzi

$$n' = \frac{d \ln \tau_w}{d \ln \dot{\gamma}_\alpha} \quad (64)$$

cioè la pendenza in un diagramma logaritmico della funzione $\tau_w(\dot{\gamma}_\alpha)$ già trovata, l'Eq.63 si riscrive nella forma

$$\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_\alpha \frac{3n'+1}{4n'} \quad (65)$$

L'Eq.65 permette, punto per punto lungo il diagramma, di passare da $\dot{\gamma}_\alpha$ a $\dot{\gamma}_w$. Si noti che n' in generale varierà, cioè il diagramma non è una retta. Se (e solo se) il diagramma è rettilineo, il fluido è a legge di potenza $n = n'$.

9 – Altri aspetti della reometria

Rimanendo nel flusso a shear, mentre finora abbiamo parlato soltanto di uno sforzo tangenziale τ , nel caso non-Newtoniano c'è da considerare anche la presenza eventuale di sforzi normali. Con riferimento alla definizione di flusso a shear data nel paragrafo 2, consideriamo in un punto P la terna di vettori unitari mutuamente ortogonali (base ortonormale) di cui il primo (indice 1) coincida col versore \vec{t} e il secondo (indice 2) sia diretto normalmente alla superficie di scorrimento. Rispetto a tale terna, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi $\underline{\tau}$ nel punto P è data da

$$[\underline{\tau}] = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{vmatrix} \quad (66)$$

Nell'Eq.66, $\tau_{12} = \tau_{21}$ è la componente che finora abbiamo sinteticamente indicato con τ mentre τ_{11} , τ_{22} , e τ_{33} sono gli sforzi normali. In un fluido Newtoniano essi sono uguali tra loro (pressione) mentre in un fluido non-Newtoniano possono risultare diversi. Poiché la condizione di incomprimibilità rende costitutivamente indeterminata la somma $\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}$, ciò che in effetti caratterizza gli sforzi normali sono le differenze fra essi. (la somma serve a definire la pressione attraverso la relazione $\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = -3P$. La pressione risulta poi fissata dalle condizioni al contorno). Di solito si fa riferimento alla prima differenza $\tau_{11} - \tau_{22}$ e alla seconda differenza $\tau_{22} - \tau_{33}$. La risposta reologica di un fluido non-Newtoniano in moto a shear è quindi completamente individuata quando sono note le 3 funzioni

$$\tau_{12} = \tau(\dot{\gamma}) = \dot{\gamma} \eta(\dot{\gamma})$$

$$\tau_{11} - \tau_{22} = \sigma_1(\dot{\gamma})$$

$$\tau_{22} - \tau_{33} = \sigma_2(\dot{\gamma}) \tag{67}$$

Delle due differenze di sforzi normali, la maggiore e la più importante è la prima, σ_1 , che viene in qualche modo collegata alla "elasticità" del materiale. Il valore σ_1 è sempre positivo e il suo effetto si rivela in vario modo nei diversi flussi viscometrici. Nel flusso di Couette si ha il ben noto effetto Weissenberg che consiste nell'"arrampicarsi" del fluido attorno al cilindro interno in rotazione. Nel flusso entro capillari, l'effetto degli sforzi normali si rivela in uscita dando luogo al "die swell" cioè all'ingrossamento della vena. Nell'apparecchio a cono e piatto si crea una forza F normale al piatto che tende a separarlo dal cono. Tale effetto permette la misura della funzione $\sigma_1(\dot{\gamma})$ che risulta legata ad F dalla relazione

$$F = \frac{\pi}{2} R^2 \sigma_1 \tag{68}$$

La misura di $\sigma_1(\dot{\gamma})$ richiede invece apparecchiature e procedure più complesse. In alcuni casi, gli sforzi normali indicano a loro volta un flusso, detto secondario, che si sovrappone a quello primario a shear. Ciò avviene ad esempio nei condotti a sezione non circolare oppure nei viscosimetri rotazionali tipo Brookfield. In questi ultimi si creano delle circolazioni radiali di verso opposto a quelle indotte dall'effetto centrifugo.

Un altro ampio capitolo della reometria non-Newtoniana è quello della viscoelasticità lineare. Essa riguarda la risposta non stazionaria per piccoli valori dello sforzo e quindi o per piccole deformazioni o per piccole velocità di deformazione (cioè che garantisce la linearità). Possono farsi misure di risposta a sollecitazioni periodiche (sinusoidali), dette misure dinamiche, in funzione della frequenza di oscillazione. Per ogni frequenza si misura la parte di sforzo in fase con la deformazione (parte elastica) e quella fuori fase con la deformazione e quindi in fase con la velocità di deformazione (parte viscosa). Possono ancora farsi misure di rilassamento degli sforzi e misure di creep. Tutte tali misure sono generalmente effettuate, per materiali liquidi, con apparecchiature a cono piatto o tipo Couette opportunamente equipaggiate.

Recentemente è diventato di interesse lo studio della viscoelasticità non lineare cioè l'estensione delle precedenti misure al campo delle alte deformazioni e velocità di deformazione. Così pure è stato affrontato il vasto e incerto campo dei flussi non a shear, in particolare quello dei flussi estensionali.