La Geometria nello Spazio Affine

SPAZI VETTORIALI

Operazioni tra vettori

Dipendenza lineare

Equazione della retta e del piano nello spazio affine

Le Matrici

Operatore associato alle matrici: Determinante

Operazioni tra matrici

Base di uno Spazio Vettoriale

Rango di una matrice

Proprietà dello Spazio vettoriale

Si dice che la struttura (*S*,*R*) è uno **spazio vettoriale** sul campo *R* [*in generale*, ***una struttura (S,K), con K campo reale o complesso***] se in *S* è definita un'operazione binaria interna (nel nostro caso l'ordinaria addizione +) per la quale (S,+) è un ***gruppo commutativo*** ed una legge di composizione esterna (nel nostro caso l'ordinaria moltiplicazione di un vettore per un numero reale), detta ***moltiplicazione per uno scalare***, per le quale valgono le seguenti proprietà:

1) Associativa rispetto al prodotto esterno:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall \vec{v} \in S \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$$

2) Esiste l'elemento neutro 1 rispetto al prodotto esterno:

$$\forall \vec{v} \in S \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

3) Distributiva del prodotto esterno rispetto all'addizione di vettori:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in S \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\,\vec{u} + \vec{v}\alpha$$

4) Distributiva del prodotto esterno rispetto all'addizione di scalari·

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall \vec{v} \in S \quad \Rightarrow \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta\ \vec{v}$$

***Definizione di vettore e concetto di iperpiano*.**

In matematica, un *vettore è definito come classe di equivalenza di segmenti equipollenti*

L'equipollenza tra segmenti è una relazione di equivalenza. Una classe di equivalenza v di segmenti equipollenti prende il nome di *vettore*.

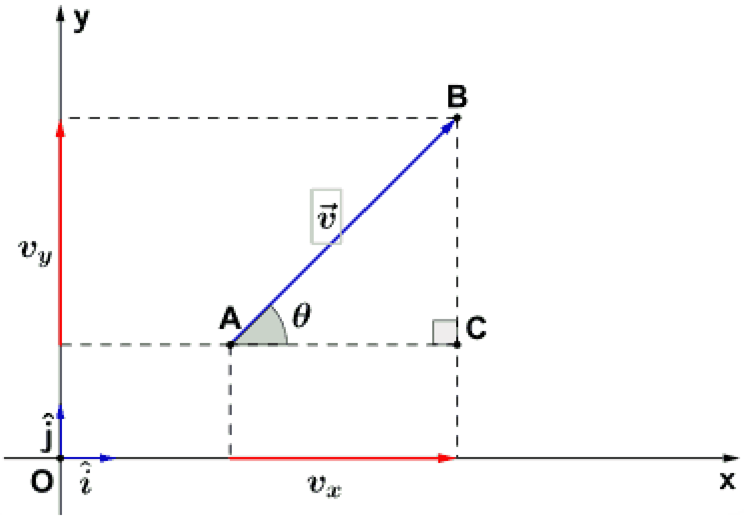
In Fisica, una grandezza si può definire come vettore quando:

1) ***vale la legge del parallelogramma*;**
2) ***è invariante rispetto ai sistemi di riferimento per traslazione*.**
3) ***è individuato da tre elementi: modulo, direzione e verso.***

- Due segmenti del piano si dicono ***equipollenti*** se hanno la stessa lunghezza, se sono paralleli e se hanno lo stesso verso.
- Se operiamo su una retta l’insieme dei segmenti equipollenti della retta che è un vettore, gli architetti e gli ingegneri lo chiamano **cursore.**
- Fissato un punto O e un segmento orientato OA, quindi applicato in O, si dice **vettore orientato**

- # Componenti di un vettore nel piano

Sul piano α fissiamo un riferimento cartesiano che ha origine O e fissata una unità di misura. Sia AB un segmento orientato del piano, ossia un vettore applicato nel punto A. Le proiezioni di AB sugli assi cartesiani sono segmenti orientati , v_x, v_y, che si chiamano ***vettori componenti, o semplicemente componenti del vettore AB.***



- **I vettori componenti individuano il vettore AB**

- Le componenti di un vettore sono numeri reali

- In un riferimento cartesiano do origine O, fissiamo sull'asse delle x un vettore di modulo unitario che indichiamo con $\vec{i}$, sull'asse delle y un vettore di modulo unitario che indichiamo con $\vec{j}$.

- Chiamiamo $\vec{i}$ e $\vec{j}$, versori

- Ricordando l’operazione di moltiplicazione di un numero per un vettore, dato il vettore **a=AB, le componenti $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$** del vettore a si esprimono in funzione dei versori degli assi:

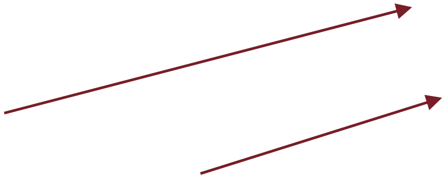
$$\overrightarrow{a_x} = a_x \vec{i} \quad \overrightarrow{a_y} = a_y \vec{j}$$

Da cui:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

Costruzione di uno spazio S_1

Se *u* è un vettore non nullo di uno spazio vettoriale S_1, ogni altro vettore *v* di S_1 si può esprimere come prodotto del vettore u per il numero reale α:



$$v = \alpha \mathbf{u} \qquad (3.1)$$

Costruzione di uno spazio S_2

Definizione: ***Due vettori u e v del piano S_2 si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione (cioè se appartengono ad uno stesso S_1) .***

***In tal caso, sussiste tra essi la (3.1).* Dalla (3.1) si ha:**

$$\alpha \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

cioè:

"se due vettori di S_2 sono linearmente dipendenti, esiste una combinazione lineare di essi con scalari non nulli che dà il vettore nullo".

<<se due vettori nel piano sono linearmente indipendenti esiste una combinazione lineare di essi con scalari non nulli che dà il vettore nullo>>

Allora per ogni coppia di vettori, individuati da segmenti paralleli, posso dire che:

<<Fissato un vettore, l'altro si ottiene da esso moltiplicandolo per un numero reale>>;

E quindi <<due vettori del piano sono linearmente dipendenti se e solo se hanno la stessa direzione>>.

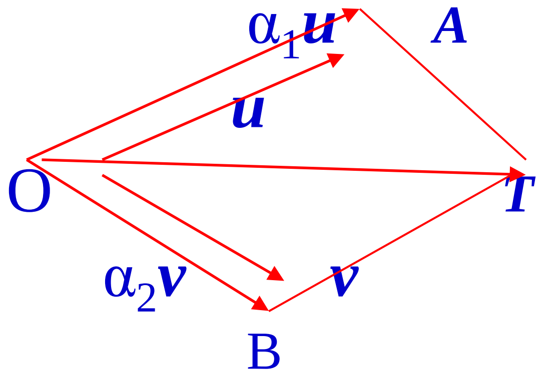
Pertanto il sistema massimo di vettori linearmente indipendenti, di uno spazio S_1 è costituito da un solo vettore $\vec{u}$ è sufficiente per la costruzione dello spazioS_1

Dipendenza lineare tra vettori nello spazio S_3

*Tre vettori **u, v, w** dello spazio $\boldsymbol{S_3}$ si dicono linearmente dipendenti se hanno la stessa giacitura, cioè se esiste un piano che contiene i segmenti orientati che li rappresentano (precisamente, appartengono ad uno stesso $\boldsymbol{S_2}$).*

La giacitura individuata da due vettori ***u*** e ***v*** non paralleli definisce, dunque, tutti e soli i vettori linearmente dipendenti dal sistema {***u***, ***v***}.

Infatti, se ***u*** e ***v*** sono due vettori non paralleli e non nulli del piano, un qualsiasi vettore ***w***, appartenente al piano individuato da ***u*** e ***v***, si può decomporre lungo le direzioni di essi, cioè, si può esprimere come somma di due vettori $\alpha_1\boldsymbol{u}$ *ed* $\alpha_2\boldsymbol{v}$, linearmente dipendenti da ***u*** e *da* ***v.***



$$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{u} + \alpha_2\boldsymbol{v} \Rightarrow \alpha_1\boldsymbol{u}+\alpha_2\boldsymbol{v}+(-1)\boldsymbol{w}=0$$

- In generale, n vettori di uno spazio ad n-1 dimensioni (S_{n-1}) sono sempre linearmente dipendenti. Quindi un sistema massimo di vettori linearmante indipendenti di uno spazio S_{n-1} è costituito da n-1 vettori, tale che non esiste alcun S_{n-2} che li contiene

Primo approccio al concetto di matrice

Siano $\vec{a}, \quad \vec{b}, \quad \vec{c}$, tre vettori dello Spazio Vettoriale S_3, le cui componenti, in un Riferimento Cartesiano *Oxyz* dello spazio, sono individuate dai numeri reali indicati nelle seguenti tabelle che prendono il nome di ***matrice***:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$$

Le linee orizzontali sono dette ***righe***, le linee verticali sono dette ***colonne.***

Pertanto, la prima matrice, che indichiamo con M_{31}, presenta tre righe e una colonna; la seconda, M_{32}, presenta tre righe e due colonne, la terza, M_{33}, presenta tre righe e tre colonne.

Le matrici nel piano

Analogamente, le tabelle:

$$M_{21} \equiv \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \quad M_{22} \equiv \begin{pmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{pmatrix} \quad M_{32} \equiv \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{pmatrix}$$

rappresentano tre matrici che individuano, rispettivamente, un vettore, due vettori, tre vettori nel piano S_2.

Le matrici che presentano il numero di righe uguale al numero di colonne (M_{22} e M_{33} nella rappresentazione che abbiamo indicato) sono dette ***quadrate.***

Ad ogni ***matrice quadrata*** è associato un ***operatore algebrico*** che è detto ***Determinante***.

- **Definizione e calcolo del determinante**

Ad ogni matrice quadrata A è associato un numero reale **determinante di A** e che si denota con uno dei simboli **det(A) o $|A|$** ed è costruito come di seguito indicato:

1) Se A è una matrice quadrata di ordine 1, cioè una matrice con una riga e una colonna, che si riduce quindi al solo numero a_{11}, allora **det(A)=** $|A|=a_{11}$

- 2) se A è una matrice **quadrata di ordine 2**

A=$\begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \end{bmatrix}$ allora il **det(A)**=$a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}$ e cioè il valore del determinante di A è la differenza tra il prodotto delle componenti della diagonale principale e il prodotto delle componenti della diagonale secondaria.

3) Se A è **una matrice quadrata di ordine 3**

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{pmatrix}$$

- Allora il determinante di A si calcola fissando una riga o una colonna qualsiasi, ad esempio la prima riga, e procedendo come segue:

$$\textbf{Det(A)}=\boldsymbol{a_{11}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{22}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{32}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}-\boldsymbol{a_{12}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{23}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{33}} \end{vmatrix}+\boldsymbol{a_{13}}\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{21}} & \boldsymbol{a_{22}} \\ \boldsymbol{a_{31}} & \boldsymbol{a_{32}} \end{vmatrix}$$

- **In altre parole det(A) è uguale ad una combinazione lineare, avente come coefficienti gli elementi della prima riga presi con i segni alterni, dei determinanti di tre matrici del secondo ordine, la prima delle quali si ottiene eliminando da A la prima riga e la prima colonna, la seconda si ottiene da A eliminando la prima riga e la seconda colonna, e la terza eliminando la prima riga e la terza colonna.**

- I determinanti del secondo ordine sono detti **complementi algebrici**,rispettivamentedegli elementi a_{11}, a_{12}, a_{13}

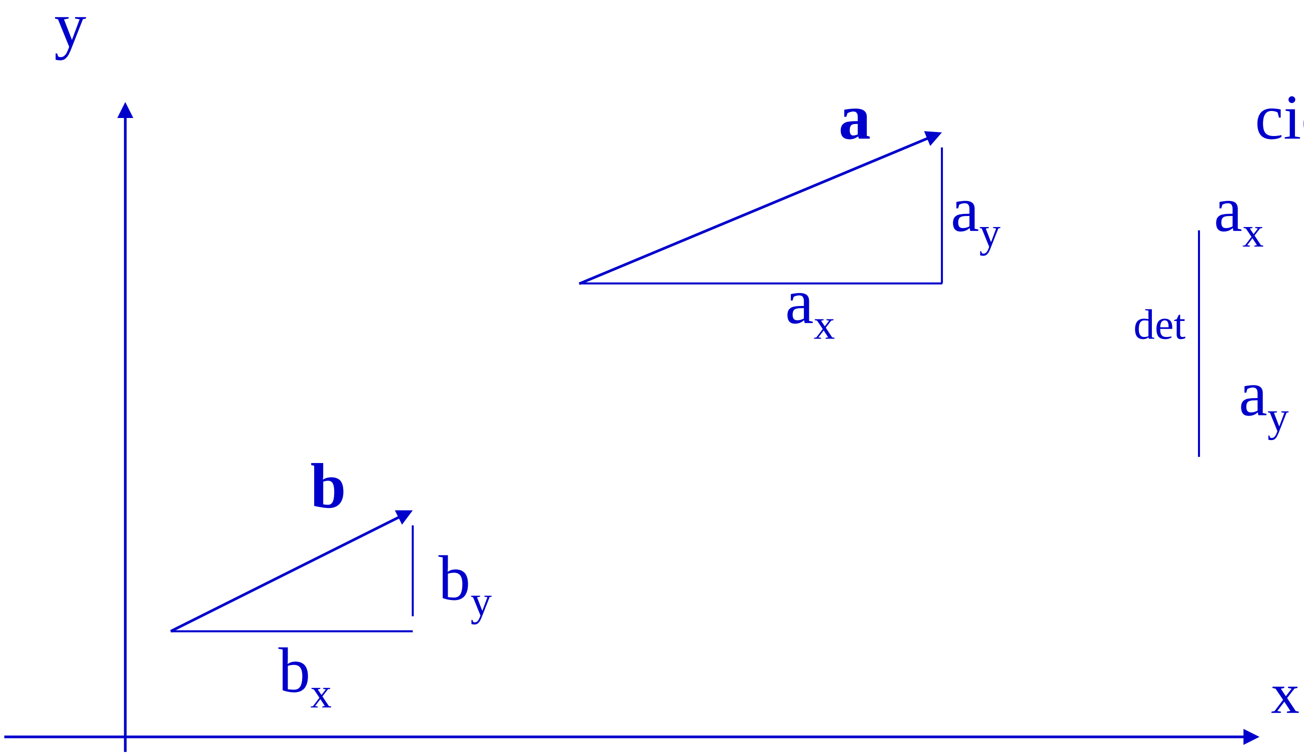
- Osserviamo che sviluppando il determinante rispetto ad un’altra riga o ad un’altra colonna il risultato è lo stesso

- Allo stesso modo si sviluppando i determinanti di ordine superiore al terzo.

Ampliamento della geometria euclidea alla geometria affine con l'introduzione dei vettori

Esempio: *Due vettori del piano sono linearmente dipendenti se hanno la stessa direzione*; in tal caso, dalla rappresentazione cartesiana delle componenti, si deduce che: "*<u>la matrice costituita dalle componenti dei vettori ha determinante nullo</u>*":

$$a_x : b_x = a_y : b_y \qquad\qquad a_x\, b_y - a_y\, b_x = 0$$



cioè:

$$\det \begin{vmatrix} a_x & b_x \\ a_y & b_y \end{vmatrix} = 0$$

• Generalizzazione ad un sistema di n vettori

In generale, se *n vettori di uno spazio* S_n *sono linearmente dipendenti, la matrice delle loro componenti, in un opportuno riferimento dello spazio, ha determinante uguale a zero.*

Pertanto, *n vettori di uno spazio* S_n *sono linearmente indipendenti, se e solo se la matrice dello spazio, ha determinante diverso da zero.*

- **Operazioni tra (e con) le matrici**

- **Somma algebrica tra due matrici**
- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

- **Prodotto di uno scalare per una matrice**
- $h\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ha_{11} & ha_{12} \\ ha_{21} & ha_{22} \end{bmatrix}$

- **Prodotto tra due matrici**

Il prodotto tra due matrici può essere:

- Righe per colonne
- Righe per righe
- Colonne per righe
- Colonne per colonne

- In generale si opera col prodotto **righe per colonne** che caratterizza il prodotto di trasformazioni geometriche

- $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

- **Tale prodotto non è commutativo**

- In generale si opera col prodotto **righe pe** **colonne** che caratterizza il prodotto di trasformazioni geometriche

• BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE

- Un sistema massimo di vettori linearmente indipendenti di uno spazio S_n **è detto *base*** dello spazio

- Il numero di vettori che costituiscono una base di uno spazio vettoriale è uguale alla dimensione dello spazio

- Ad esempio una base di S_1(retta), è costituita da un solo vettore, una base di S_2 (piano) è costituita da due vettori ecc.

- **RANGO DI UNA MATRICE**

- Sia A una matrice $m \times n$,

Chiamo ***matrice estratta*** da A una matrice formata da p righe e da q colonne, con $p<m$ e $q<n$

- Chiamo ***matrice complementare*** la sottomatrice $(m-p) \times (n-q)$ determinata dalle rimanenti m-p righe e dalle n-q colonne

- Si definisce ***minore di ordine p*** della matrice A il determinante di una sottomatrice quadrata di ordine p di A

- Sia A una matrice di tipo (m,n). Si dice che la matrice A ha ***rango p*** se A ha un minore non nullo di ***ordine p*** e tutti i minori di ***ordine maggiore di p*** sono nulli.

- In altre parole il rango della matrice A è il maggiore degli ordini dei minori non nulli di A.

- **Teorema. Le proposizioni che seguono sono equivalenti:**

1. La matrice A ha rango p
2. La matrice A ha un minore non nullo di ordine p e tutti i minori di ordine p+1 sono nulli.

- Tale teorema ci dà un procedimento per il calcolo del rango di una matrice.

CONCETTI ESSENZIALI

- Iperpiano
- Dipendenza lineare
- Calcolo matriciale e determinante di una matrice
- Equazione della retta equazione del piano dal punto di vista affine

PRODOTTO SCALARE

Se : $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad - \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$

risulta:

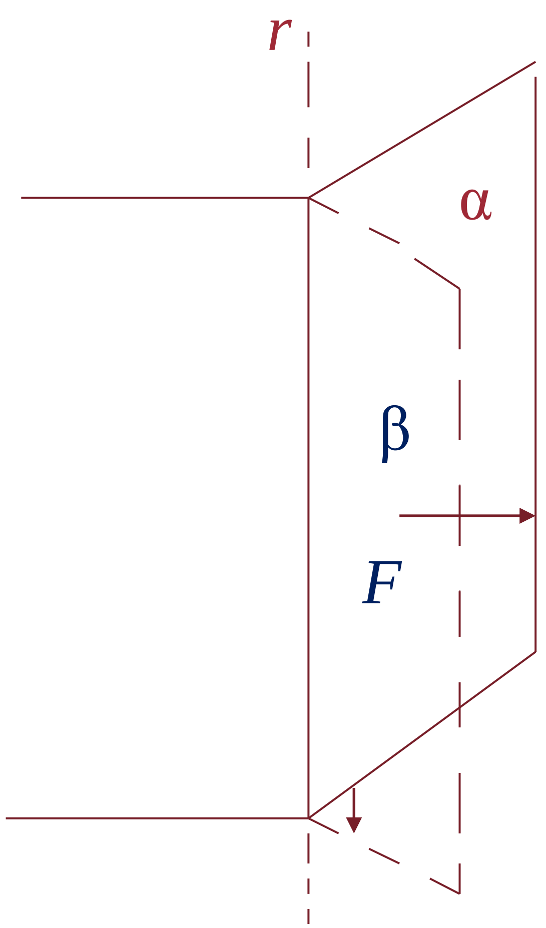
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta =$$

$$\left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j}\right) \times \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j}\right) = a_x b_x \left(\vec{i} \times \vec{i}\right) + a_x b_y \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + a_y b_x \left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + a_y b_y \left(\vec{j} \times \vec{j}\right)$$

da cui:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \vartheta = a_x b_x + a_y b_y$$

Prodotto vettoriale
I vettori nella rotazione



Si applichi una forza *F*, parallela al piano orizzontale, in un punto del piano α in modo da far ruotare il piano α intorno alla retta *r* fino a sovrapporsi al piano β.

C'è una retta nello spazio che non cambia la propria direzione?

Le rette parallele alla retta *r* restano ancora parallele ad *r*?

Osservazione. *Una rotazione nel piano è individuata da una retta che non appartiene al piano, ma è perpendicolare ad esso*.

Prodotto vettoriale

Dall’esempio precedente si definisce una nuova operazione tra vettori, il ***prodotto vettoriale***, che caratterizza fisicamente gli effetti delle rotazioni.

Se : $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} \quad e \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j}$ sono due vettori del piano S_2,

si definisce ***prodotto vettoriale*** $\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, il vettore che ha

- per ***modulo*** l’area del parallelogramma individuato dai segmenti orientati che rappresentano i vettori, cioè l’espressione:

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| sen\,\vartheta$$

avendo indicato con ϑ l’angolo compreso tra i due vettori $\vec{a} \quad e \quad \vec{b}$;

- la ***direzione*** perpendicolare al piano individuato dai due vettori (l’asse di rotazione);

- il verso opportunamente definito.

In un riferimento cartesiano del piano, sia P(x, y) un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x ed y di P.

Se $\vec{OP}\,(x, y)$ *è un vettore ortogonale ad* $\vec{n}(a,b)$, *da:*

$$\vec{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} \qquad \vec{n} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$$

per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times \vec{OP} = \vec{0}$$

cioè: $\boldsymbol{ax + by = 0}$ *(*)*

che rappresenta la retta per l'origine perpendicolare alla direzione del vettore n.

La (*), *equazione della retta OP, individua dunque, il luogo geometrico dei punti P(x, y) del piano tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore* n*(a,b).*

Anche per il piano in S_3, si può fissare un riferimento cartesiano ed un punto *P(x,y,z)* diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $\vec{OP}$ identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate *x,y,z di P.*

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Se $\vec{n}(a,b,c)$ è un vettore ortogonale ad $\vec{OP}(x,y,z)$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times \vec{OP} = 0, \; cio\grave{e} : ax + by + cz = 0$$

che è l'equazione del piano per l'origine, che contiene i punti A, B, C.

Tale equazione individua, dunque,
<u>il luogo geometrico dei punti P(x, y, z) dello spazio tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore</u> $\boxed{\vec{n}(a,b,c)}$