Viscosità e resistenza idraulica

LIQUIDI REALI: VISCOSITÀ

Per far scorrere un liquido reale in un condotto orizzontale con v = cost occorre applicare agli estremi del condotto un gradiente di pressione necessario a vincere le forze di attrito.

RESISTENZA DEL CONDOTTO:

$$\boxed{R = \frac{\Delta p}{Q}}$$

Δp = gradiente di pressione (dovuto ad una pompa)
Q = portata del condotto

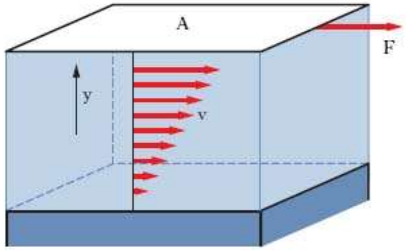
Regimi del moto di un fluido reale:
Laminare: moto per strati che non si mescolano, la velocità resta uguale in uno stesso punto allo scorrere del tempo.
Vorticoso o turbolento: si mescola tutto

Viscosità

Nel caso laminare la **FORZA DI ATTRITO TRA LAMINE A CONTATTO** è:

$$\boxed{F_A = -\eta\, A\, \frac{v}{d}}$$

$$\left(-\eta\, A\, \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\right) \leftrightarrow -\eta\, A\, grad\, \vec{v}$$



η = viscosità, nonché coefficiente, dipende dalla temperatura
A = area della lamina a contatto
v = velocità relativa delle due lamine
d = distanza tra le due lamine

Viscosità di fluidi comuni

materiale	Viscosità (Pa*s)
Acqua (20°C)	$1*10^{-3}$
Aria (20°C)	$1.8*10^{-5}$
Sangue (37°C)	$4*10^{-3}$
Mercurio	$1.5*10^{-3}$
Olio lubrificante	0.065-0.32
Nutella	0.3
Miele	10
Ketchup	50-100
Dentifricio	70
Burro di arachidi	250
Polimero fuso (150-200°C)	$2*10^{3}$
Bitume	$2*10^{8}$
Vetro fuso (600°C)	$1*10^{12}$

Tale forza risulterà ovviamente opposta alla velocità relativa di una lamina rispetto ad un'altra, opposta cioè al moto relativo come tutte le forze d'attrito. La forza sarà tanto maggiore quanto più è elevata la velocità di scorrimento laminare.

$\eta = [F]\,[L]^{-2}[t] = 1 \text{ poise} = 10^{-1}\ Pa \cdot s$

Legge di Poiseuille

In regime laminare si trova che per un condotto cilindrico di raggio *r* e di lunghezza *l*

$$R = \frac{8\,\eta\,l}{\pi r^4}$$

R = resistenza idraulica
l = lunghezza del condotto
r = raggio del condotto

Il fattore 8/π dipende strettamente dalla forma del condotto. Ciò unito a

$R = \frac{\Delta P}{Q}$ ci dà la **LEGGE DI POISEUILLE**:

$$\boxed{Q = \frac{\pi r^4}{8\,\eta l}\,\Delta p}$$

Q = portata del flusso
Q è proporzionale a *Δp*. Inoltre *Q* = cost = $\pi r^2 v_m$, v_m = velocità media.
Si trova, inoltre, per le forze di pressione:

$$F_p = \Delta p\, S = \Delta p\, \pi r^2 = (8\,\pi\,\eta\, l)v_m \qquad F_p \propto v_m$$

Quindi: $\left[Q(r) = \frac{\pi r^4}{8\,\eta l}\Delta p = \pi r^2 v_m\right]$

Condizioni al contorno:

$v\,(r = r_{max}) = 0$

$v\,(r = 0) = V_{max}$

$v\,(r = r_{max}) = 0$: velocità nulla della lamina a contatto con il bordo del materiale del contenitore (r_{max} raggio del tubo cilindrico).

$v\,(r = 0) = V_{max}$: velocità al centro, sull'asse del cilindro è massima.

$$v\,(r) = \frac{\Delta p}{4\,\eta l}\cdot(r_{max}^2 - r^2)$$

-> $v(r)$ Si ricava risolvendo un'equazione differenziale del I ordine. Andando a rappresentare il profilo della velocità in funzione di r, si otterrà una raffigurazione parabolica, data la dipendenza da r^2 nella lunghezza del vettore velocità.

Si trova per il profilo parabolico che

$$v_m = \frac{1}{2}v_{max}$$

fluido con viscosità maggiore

fluido con viscosità minore

Velocità critica e numero di Reynolds

Incrementando la velocità del fluido, aumentando Δp, si arriva ad una velocità di v al di là della quale la legge di Poiseuille non è più valida.

VELOCITÀ CRITICA:

$$\boxed{v_{critica} = v_c = \frac{Re \cdot \eta}{dD}}$$

Re = numero di Reynolds (adimensionale), dipendente anch'esso dalla geometria del condotto.
η = viscosità
d = densità del fluido
D = diametro del condotto

Re ≅ 1000:1200 per condotti rettilinei e uniformi.

Per $v > v_c$ **Moto turbolento o vorticoso**
In corrispondenza di gomiti, anse, strozzature e irregolarità varie del condotto *Re* scende ed è più facile raggiungere il regime turbolento. <u>In regime turbolento aumenta la resistenza R del condotto</u>.

Regime turbolento

RESISTENZA REGIME TURBOLENTO:

$$\boxed{R = K\,Q}$$

$$R = \frac{\Delta p}{Q} = KQ$$

$$\Delta p = K\,Q^2$$

Q $\propto \sqrt{\Delta p}$ **Turbolento**

Q $\propto \Delta p$ **Laminare**

In regime laminare R non dipende da Q ma sarà assegnata per un dato condotto con parametri geometrici stabiliti. Invece in regime turbolento R è proporzionale a Q, quindi aumento all'aumentare di Q!

In definitiva, per il numero di Reynolds si ha l'espressione $Re = \dfrac{2rdv_m}{\eta}$

- ***η*** = viscosità
- ***d*** = densità del fluido
- ***r*** = raggio del condotto
- v_m = velocità media del fluido

Meccanica dei fluidi nei sistemi biologici

La fluidodinamica nei sistemi biologici richiede la risoluzione delle equazioni integro - differenziali di Navier – Stokes per il caso del moto pulsatile di un liquido reale non omogeneo in condotti distensibili dalla struttura geometrica complicata. Si tratta di soluzioni piuttosto instabili anche quando vi si arriva per via numerica. Una soluzione si dice stabile se variando di poco le condizioni iniziali, non si altererà la stessa.
Il problema si approccia basandosi su alcune approssimazioni: si assume il moto come stazionario di un liquido reale e omogeneo in condotti dalle pareti rigide.

MOTO STAZIONARIO LIQUIDO REALE

Bisognerà anche tenere conto dei seguenti parametri:

a) Effetti di disomogeneità del sangue
- accumulo assiale dei globuli rossi
- condotti capillari

b) Effetti di distensibilità dei condotti
- forze di coesione nei liquidi e nei solidi

c) Pulsatilità del moto

Applicazioni del teorema di Bernoulli: stenosi e aneurisma

Possiamo trascurare in questo caso viscosità e attriti e metterci nel caso ideale di Bernoulli.

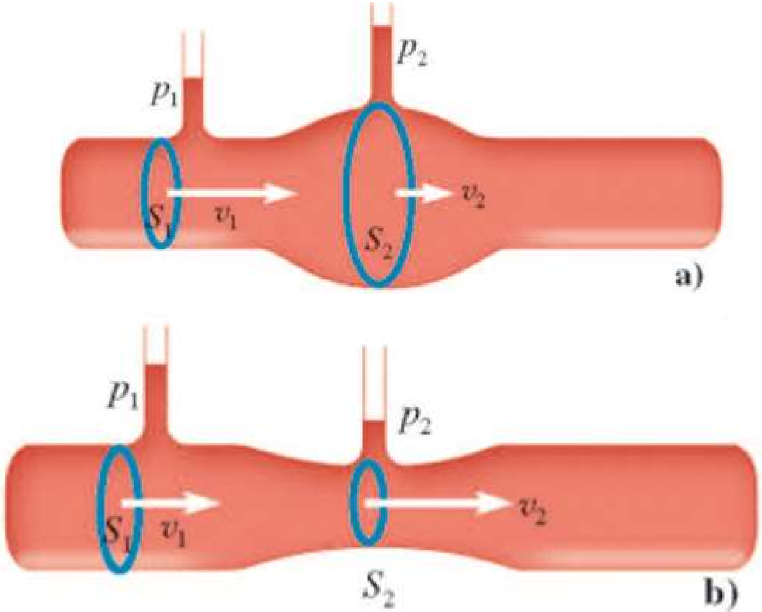
$$h_1 = h_2$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + \frac{P_1}{d} = \frac{1}{2} v_2^2 + \frac{P_2}{d}$$

$$S_2 > S_1 \rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2} < v_1$$

a) aneurisma

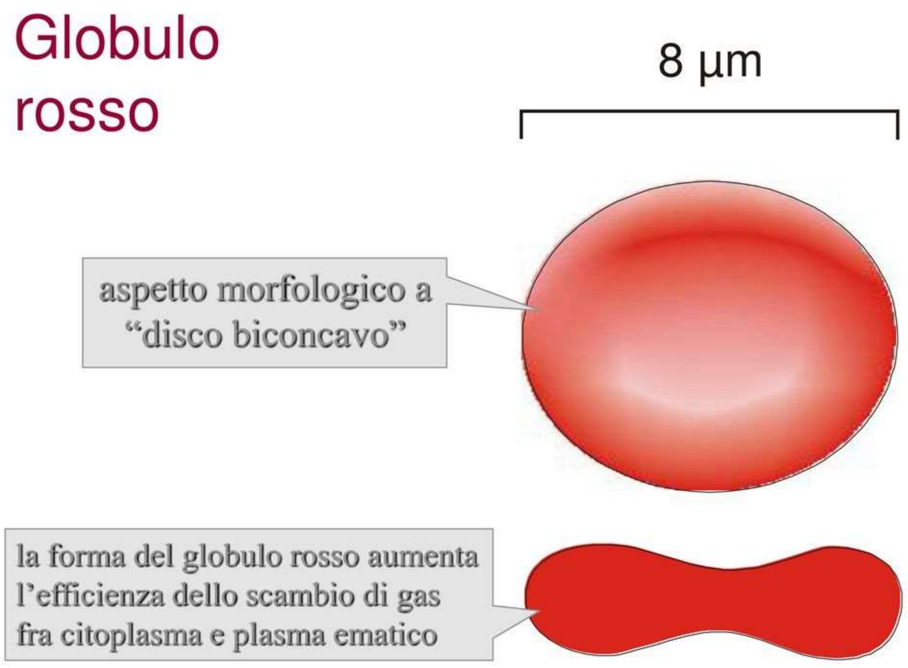
b) stenosi



ANEURISMA: il vaso sia orizzontale (viene trascurata la pressione altimetrica); la somma delle pressioni idrostatica e cinetica è uguale per le due sezioni. Vale ovviamente la legge di Leonardo $v_1S_1 = v_2S_2$. Si ha da Leonardo $v_2 < v_1$, e quindi da Bernoulli $p_2 > p_1$.

STENOSI: In questo caso (b) $S_2 < S_1$. Avremo $v_2 > v_1$, da cui $p_2 < p_1$. Si entra in un meccanismo di loop per il qual e sia aneurisma che stenosi tendono a peggiorare.

Viscosità del sangue



Cosa c'è nel plasma sanguigno?

- **Globuli rossi**: $5 \cdot 10^6$/ mm^3 di sangue
- **Globuli bianchi** (leucociti), $5{:}8 \cdot 10^3$/ mm^3
- **piastrine**, $2{,}5 : 5 \cdot 10^5$/ mm^3.

I leucociti sono pochi, le piastrine sono lo piccole, quindi la viscosità è determinata dai globuli rossi.

$$\text{Cost} \approx \eta_{plasma} \approx 1{,}5\ \eta_{acqua}$$

La velocità non è troppo alta e r ≥ 100 pm, pertanto il sangue obbedisce alla legge di Poiseuille tranne che nei capillari (dove r < 100 pm). La viscosità è influenzata molto dalla concentrazione dei globuli rossi.

η_{sangue} dipende fortemente da T

PECULIARITA' e DISOMOGENEITA' DELLA VISCOSITÀ DEL SANGUE

Quando il sangue è in quiete costituisce una massa plastica strutturata dovuta all'aggregazione degli eritrociti. Quando il sangue fluisce si rompe questa struttura interna e le grosse molecole si orientano nel flusso. I globuli rossi si ammassano lungo l'asse, lasciando uno strato di plasma vicino alle pareti del vaso (accumulo assiale globuli rossi).

Resistenza idraulica dei vasi

Si è visto che:

$$R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8\,\eta\,l}{\pi r^4}$$

Resistenza idrodinamica (analoga alla resistenza elettrica – legge di Ohm)

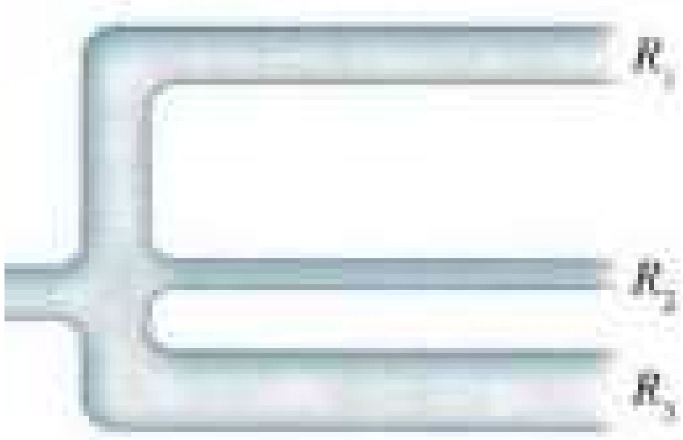
Analogia: Δp <-> ΔV differenza di potenziale
Q <-> I intensità di corrente elettrica

$$R\,I = \Delta V <-> \quad \mathrm{R\,Q = \Delta p}$$

RESISTENZA DEI VASI IN PARALLELO

Analogamente al caso elettrico per vasi in parallelo si ha:

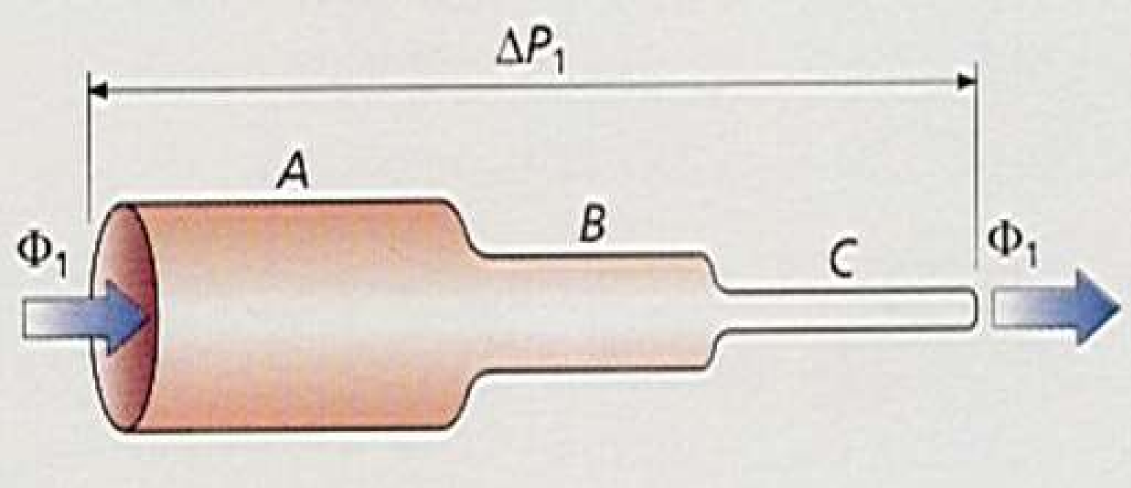
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$



In generale:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

Lavoro cardiaco



Per la connessione dei vasi in serie

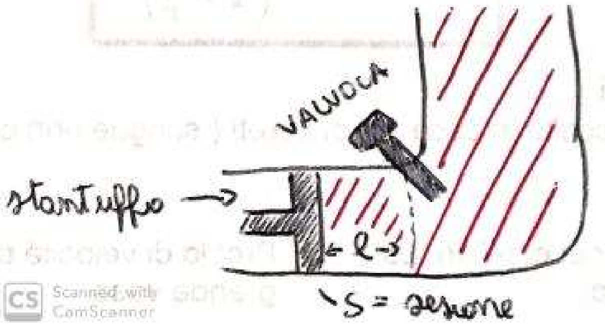
$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

generale:

$$R_{eq} = \sum_i R_i$$

LAVORO CARDIACO

Schema che descrive il lavoro cardiaco



$$\boxed{L = F \cdot l = P \cdot S \cdot l = P \cdot V}$$

V = volume di liquido (sangue) che viene iniettato nel cilindro (ingresso dell'aorta)

La pressione p è uguale a quella esterna da vincere, ossia quella aortica. Applichiamo Bernoulli nella regione della valvola aortica all'apertura.

$$P = P_a + \frac{1}{2} d\, v^2$$

P_a = pressione aortica (idrostatica nell'aorta)
d = densità del sangue nell'aorta
v = velocità media del sangue nell'aorta

$$L = P_a \cdot V + \frac{1}{2} d \cdot v^2 \cdot V$$

$\boldsymbol{v^2}$ = fattore cinetico del lavoro cardiaco

NOTA: In condizioni normali il fattore cinetico è trascurabile. Quando la velocità di eiezione del sangue nell'aorta (fisiologiche o patologiche) diventa elevata il fattore cinetico non è più trascurabile.

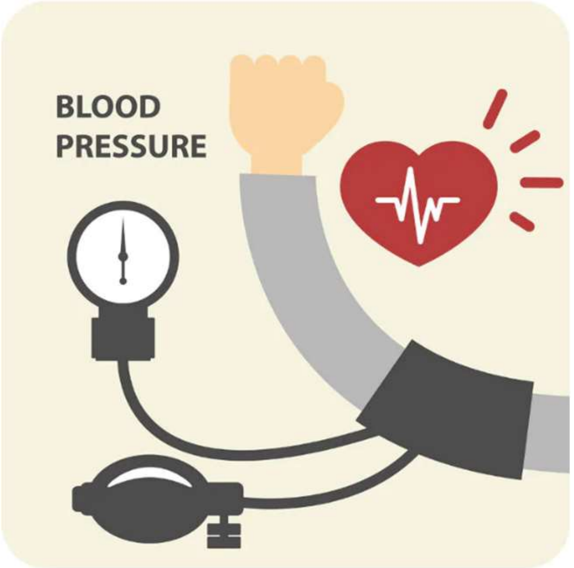
Notare che il termine cinetico del lavoro può essere visto come l'energia cinetica del volume di sangue pompato nell'aorta. Infatti $\frac{1}{2} dV \cdot v^2 = \frac{1}{2} m_{sangue} \cdot v^2$

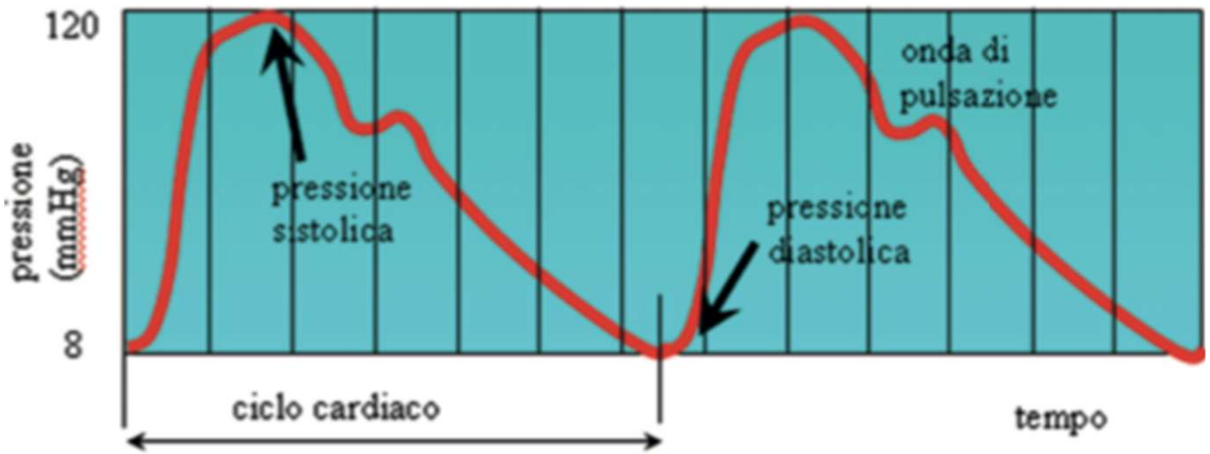
In condizioni normali (a riposo) il termine del lavoro cinetico, $\frac{1}{2} m_{sangue} \cdot v^2$, si può trascurare perché contribuisce solo per il 1-2% del totale, per cui $L \approx P_a \cdot V$. Ma durante intensa attività muscolare il termine cinetico può raggiungere il 25% del lavoro totale.

Misura della pressione cardiaca: lo sfigmomanometro

TECNICA NON INVASIVA

Si pompa aria nella fascia elastica fino a bloccare il flusso sanguigno nelle arterie. La pressione letta dal manometro nel tempo è:





Si legge la massima (pressione sistolica) via via svuotando la fascia elastica a poco a poco. Poi si legge la minima (pressione diastolica), l'ultima che si sente finchè l'arteria non è completamente aperta e il sangue scorre in flusso laminare (che è silenzioso).

Il braccio è circa alla stessa altezza del cuore, quindi si misura la pressione cardiaca (dissipazione per viscosità nelle grandi arterie è trascurabile).

Risoluzione del metodo: 1:5 mmHg

NOTA: bisogna operare abbastanza velocemente. Il sistema circolatorio si adatta al blocco → misura falsata.

Esercizio dal Bajardi-Altucci-Capozziello

8. **Un fluido di viscosità $\eta = 0.5Pl$ e densità $\rho = 400Kg/m^3$, scorre in un tubo cilindrico di raggio $r = 3dm$ e lunghezza $h = 1m$, disposto orizzontalmente. Calcolare la potenza che è necessario sviluppare per mantenere una portata costante $Q = 2m^3/s$ all'interno del tubo. Calcolare nuovamente la potenza nel caso in cui il tubo sia disposto verticalmente.**

   Ricaviamo prima un'espressione per la potenza fluidodinamica nei fluidi viscosi. A tal fine, consideriamo la resistenza idraulica

$$R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8\eta h}{\pi r^4} \tag{2.210}$$

   Moltiplicando per il quadrato della portata ed esplicitando la definizione di Q, si ha

$$RQ^2 = \Delta p \frac{dV}{dt} = \frac{F}{S}\frac{dV}{dt} = F\frac{ds}{dt} = Fv = P \tag{2.211}$$

   La quantità RQ^2, dunque, è proprio la potenza cercata; essa è altresì esprimibile come

$$RQ^2 = Q\Delta p = \frac{\Delta p^2}{R} \tag{2.212}$$

   Nel capitolo 4, studieremo le leggi dell'elettromagnetismo; in particolare, nello studio delle cariche elettriche in moto, mostreremo che la differenza di potenziale erogata da una batteria, genera una corrente elettrica I inversamente proporzionale alla resistenza elettrica R. Tra queste tre grandezze, come vedremo, sussiste la *legge di Ohm*, che è esattamente analoga alla relazione che lega la portata alla differenza di pressione, tramite la resistenza idraulica:

$$\Delta V = IR \quad \rightarrow \quad \Delta p = QR \tag{2.213}$$

Lo scopo dell'esercizio è quello di calcolare la potenza erogata, corrispondente a una determinata portata. Calcoliamo quindi la resistenza idraulica:

$$R = \frac{8\eta h}{\pi r^4} \tag{2.214}$$

Dunque, la potenza sarà

$$P = Q^2 R = \frac{8Q^2\eta h}{\pi r^4} \sim 630W \tag{2.215}$$

Nel caso in cui il tubo è disposto verticalmente, la potenza erogata dal generatore deve equilibrare anche la potenza data dalla forza di gravità. La potenza media può essere calcolata come

$$P = Q^2 R + mgv_m \tag{2.216}$$

dove v_m è la velocità media del fluido trattata nell'equazione (2.166):

$$v_m = \frac{\Delta p r^2}{8\eta h} \tag{2.217}$$

Essa deriva dal rapporto tra la portata e l'area di base dunque, esplicitandola nell'equazione (2.216) otteniamo

$$P = Q^2 R + mg\frac{Q}{\pi r^2} = Q^2 R + \rho g h Q \sim 8470W \tag{2.218}$$