

Capitolo 1

Spazi quoziente

1.1 Spazi quoziente

Siano $(S, \mathcal{A})$ uno spazio topologico, Σ una relazione di equivalenza definita in S e p la proiezione canonica di S su S/Σ .

Posto $\tilde{S} = S/\Sigma$ definiamo *topologia quoziente* di $\mathcal{A}$ rispetto a Σ la topologia $\tilde{\mathcal{A}}$ di $\tilde{S}$ *immagine diretta* di $\mathcal{A}$ mediante p . Dunque

$$\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} \iff p^{-1}(\tilde{A}) \in \mathcal{A}$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ è dunque (sappiamo) la topologia più fine che rende continua la proiezione p .

Lo spazio topologico $(\tilde{S}, \tilde{\mathcal{A}})$ viene detto *spazio quoziente* di $(S, \mathcal{A})$ rispetto a Σ .

Esempio 1

$S = I = [0, 1]$ con la topologia indotta dalla topologia naturale di $\mathbb{R}$, Σ è la relazione di equivalenza per cui un punto $t \in I$ è equivalente solo a se stesso se $t \neq 0, 1$, mentre 0 e 1 sono anche equivalenti tra loro. In maniera non rigorosa, Σ identifica 0 e 1 e lascia inalterati gli altri punti di I . In I l'intervallo $[0, 1/3[$ è aperto (ricordiamo la topologia indotta) ma $p[0, 1/3[$ non è aperto in I/Σ .

Infatti $p^{-1}(p[0, 1/3[) = [0, 1/3[\cup \{1\}$ che non è un aperto di I .

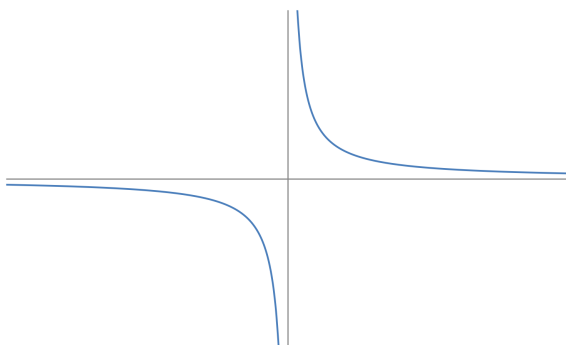
Questo esempio prova che la proiezione p in generale non è aperta.

Esempio 2

$S = \mathbb{R}^2$ con la topologia naturale, Σ la relazione di equivalenza

$$(x, y) \Sigma (x', y') \iff y = y'$$

Si consideri lo spazio quoziente $\tilde{S} = \mathbb{R}^2/\Sigma$. In $\mathbb{R}^2$ l'iperbole Γ di equazione $xy = 1$ è un chiuso



ma $p(\Gamma)$ non è un chiuso di $\tilde{S}$ in quanto il suo complementare X è la classe di equivalenza di $(0, 0)$, e si ha $p^{-1}(X) = \text{asse delle ascisse}$ che non è un aperto di $\mathbb{R}^2$.

L'esempio 2 mostra che p in generale non è chiusa.

1.2 Altro modo di definire la topologia quoziente

Sia S un insieme dotato di una relazione di equivalenza Σ . Per ogni sottoinsieme X di S si dice *saturato* di X , e si indica con $\text{sat } X$, il sottoinsieme

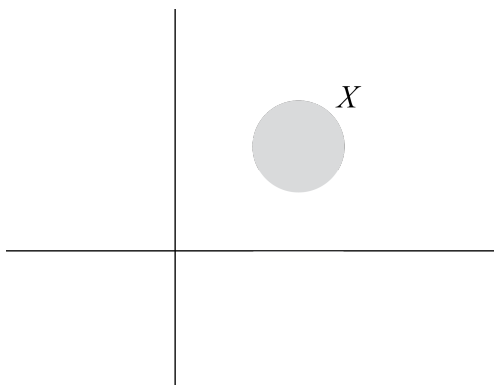
$$\text{sat } X = p^{-1}(p(X))$$

In altre parole $\text{sat } X$ contiene tutti gli elementi di S che sono equivalenti a qualche elemento di X . $\text{sat } X$ è una unione di classi di equivalenza (intese come sottoinsiemi di S): quelle degli elementi di X .

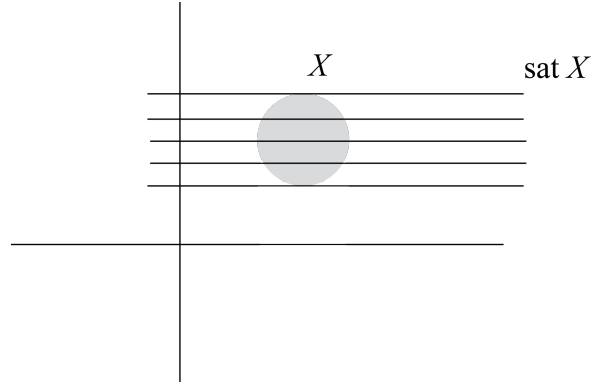
Un sottoinsieme di S si dice poi *saturo* rispetto a Σ se coincide con il suo saturato:

$$X \text{ saturo} \iff p^{-1}(p(X)) = X$$

Nell'esempio 2 il sottoinsieme in figura



non è saturo, e il suo saturato è



Esercizio 1

Provare che $\forall X \subset S$: $\text{sat } X$ è saturo.

Supponiamo ora che S sia dotato anche di una topologia $\mathcal{A}$, e il suo quoziente $\tilde{S}$ della topologia quoziente $\tilde{\mathcal{A}}$.

Abbiamo visto che la proiezione canonica p in generale non è aperta. Dunque l'immagine di un aperto A di S può non essere un aperto di $\tilde{\mathcal{A}}$. Ciò però è vero se A è saturo. Infatti si ha

$$A \text{ saturo} \implies A = p^{-1}(p(A)) \implies p(A) \in \tilde{\mathcal{A}}$$

(riflettere bene sul passaggio precedente).

Ma si ha di più: gli aperti di $\tilde{\mathcal{A}}$ sono tutti e soli le immagini degli aperti saturi rispetto a Σ mediante p .

Ci si dilungherà di più a lezione.

1.3 Alcuni teoremi importanti

Teorema 1.3.1. *Siano $S, \tilde{S}$ uno spazio topologico e un suo quoziente, e sia T un terzo spazio topologico. Una funzione $f: \tilde{S} \rightarrow T$ è continua se, e solo se, è continua la funzione composta $f \circ p$ di S in T*

$$S \xrightarrow{p} \tilde{S} \xrightarrow{f} T$$

Dim. f continua $\implies f \circ p$ continua: banale.

Viceversa, sia $f \circ p$ continua, e sia A' un aperto di T . Si ha:

$$p^{-1}(f^{-1}(A')) = (f \circ p)^{-1}(A') \text{ aperto di } S$$

per la continuità di $f \circ p$. Allora, per definizione di topologia quoziente, $f^{-1}(A')$ è un aperto di $\tilde{S}$. Per l'arbitrarietà di A' f è continua. $\square$

Una funzione $f: S \longrightarrow T$ si dice *compatibile* con la relazione Σ se:

$$x \Sigma y \implies f(x) = f(y)$$

Teorema 1.3.2. *Sia $f: S \longrightarrow T$ una funzione compatibile con la relazione Σ . Allora esiste un'unica funzione $\tilde{f}: \tilde{S} \longrightarrow T$ tale che $f = \tilde{f} \circ p$. Se f è continua, $\tilde{f}$ è continua.*

Dim. Si provi per esercizio (facilissimo) dopo aver posto

$$\forall [x] \in \tilde{S} \quad \tilde{f}([x]) = f(x) \quad \square$$

Domanda curiosa: $p: S \longrightarrow \tilde{S}$ è compatibile con Σ ?

La topologia quoziente è un po' difficile da gestire. Conviene cercare, se è possibile, un "modello" omeomorfo di uno spazio quoziente che ci sia più familiare, più semplice. Ciò che facciamo di seguito serve a ciò, e mira a stabilire il cosiddetto Teorema di rappresentazione

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & T \\ & p \searrow & \nearrow \tilde{f} \\ & \tilde{S} & \end{array}$$

Una funzione $f: S \longrightarrow T$ si dice funzione di *identificazione* se è suriettiva, continua e se T ha la topologia immagine diretta di quella di S mediante f .

Teorema 1.3.3. *Una funzione $f: S \longrightarrow T$ che sia suriettiva, continua e aperta è una funzione di identificazione.*

Dim. Sia X' un sottoinsieme di T tale che $f^{-1}(X')$ è un aperto di S . Si ha allora che $f f^{-1}(X')$ è un aperto di T (perché f è aperta). Ma $f f^{-1}(X') = X'$ (perché f è suriettiva). Dunque sono aperti di T tutti quei sottoinsiemi la cui controimmagine mediante f è aperta in S . Sono solo loro data la continuità di f . L'asserto è provato: la topologia di T è immagine diretta di quella di S tramite f , ossia f è una funzione di identificazione. $\square$

In maniera analoga si prova che

Teorema 1.3.4. *Una funzione $f: S \longrightarrow T$ che sia suriettiva, continua e chiusa è una funzione di identificazione.*

Teorema 1.3.5 (Teorema di rappresentazione). *Sia S uno spazio topologico, Σ una relazione di equivalenza definita in S , $f: S \rightarrow T$ una funzione di identificazione di S su uno spazio topologico T che sia compatibile con Σ e che assuma valori diversi su elementi di S non equivalenti ($f(x) = f(y) \iff x \Sigma y$). Allora la funzione $\tilde{f}: \tilde{S} \rightarrow T$ tale che $f = \tilde{f} \circ p$ è un omeomorfismo, dunque T è un “modello” del quoziente $\tilde{S}$.*

Dim. $\tilde{f}$ è continua (teor. 1.3.2), suriettiva:

$$\forall x' \in T \quad \tilde{f}^{-1}(x') = p(f^{-1}(x'))$$

Riflettere bene sul rigo precedente: $f^{-1}(x')$ non è un solo punto di S , però l'immagine mediante p è un solo punto di $\tilde{S}$.

Ciò prova che $\tilde{f}$ è iniettiva. Più linearmente proviamolo così, tenendo presenti le ipotesi dell'enunciato:

$$\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([y]) \implies f(x) = f(y) \implies x \Sigma y \implies [x] = [y]$$

Rimane da provare ora che l'inversa $\tilde{f}^{-1}$ della biunivoca $\tilde{f}$ è anch'essa continua. Basta, equivalentemente, provare che $\tilde{f}$ è aperta. Sia $\tilde{A}$ un aperto di $\tilde{S}$ e proviamo che $\tilde{f}(\tilde{A})$ è un aperto di T . Poiché f è una funzione di identificazione, dovremo provare che $f^{-1}(\tilde{f}(\tilde{A}))$ è un aperto di S . Si ha infatti:

$$f^{-1}(\tilde{f}(\tilde{A})) = (\tilde{f} \circ p)^{-1}(\tilde{f}(\tilde{A})) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}\tilde{f}(\tilde{A})) = p^{-1}(\tilde{A})$$

e $p^{-1}(\tilde{A})$ è un aperto di S per definizione di topologia quoziente. $\square$

Facciamo qualche considerazione sul ruolo di T e di $f: S \rightarrow T$ rispetto a quello di $\tilde{S}$ e p .

f gode delle stesse proprietà di $p: S \rightarrow \tilde{S}$:

- 1) f è una funzione di identificazione, così come lo è p ;
- 2) f è compatibile con Σ , così come lo è p ;
- 3) f assume valori diversi su elementi non equivalenti, così come fa p .

In altre parole, con il teorema di rappresentazione riusciamo a liberarci della definizione pesante di topologia quoziente, lasciando il resto inalterato (d'altra parte doveva per forza essere così). Lo spazio modello T ha la sua topologia comoda, non è un quoziente, ma è come se lo fosse.

Gli esempi del prossimo numero mostreranno come non è difficile immaginare un modello, anzi in alcuni casi è veramente spontaneo, visibile, naturale.

1.4 Esempi notevoli di spazi quoziente

1. Circonferenza

$$S = I = [0, 1]$$

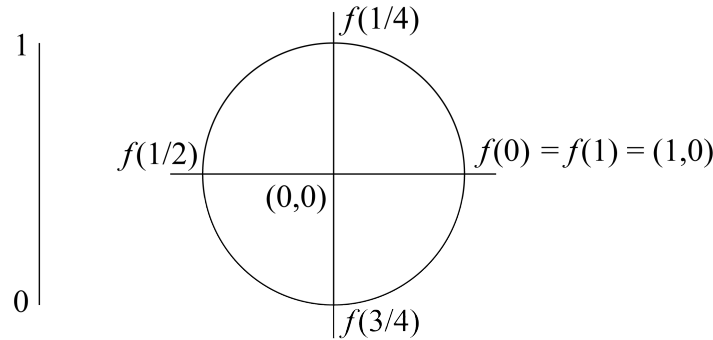
$$t \sim t' \iff \begin{cases} t = t' \\ t = 0, t' = 1 \text{ o } t = 1, t' = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{S} = I/\Sigma$$

Mostriamo, usando il teorema di rappresentazione, che un modello T del quoziente $\tilde{S}$ è la circonferenza $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ del piano euclideo.

Occorre costruire una funzione di identificazione $f: I \rightarrow S^1$.

Poniamo allora $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Per risultati noti di topologia generale e di analisi elementare, f è continua, suriettiva, compatibile con Σ , assume valori diversi su elementi non equivalenti.



Per provare l'asserto basta allora provare che f è una funzione di identificazione. Mostriamo, usando poi il teor. 1.3.4, che f è chiusa.

Sia C un chiuso di I e proviamo che $S^1 - f(C)$ è un aperto di S^1 . Sia $z \in S^1 - f(C)$, mostriamo che z è contenuto in un arco aperto disgiunto da $f(C)$. Dobbiamo distinguere due casi:

1° caso $z \neq (1, 0)$

Sia $t = f^{-1}(z)$. Si ha: $t \neq 0$, $t \neq 1$, $t \notin C$. Esiste allora un intervallo aperto $]t_1, t_2[$ contenente t e contenuto nell'aperto di $I:]0, 1[- C$. Allora l'arco $f(]t_1, t_2[)$ è un aperto di S^1 contenente z e disgiunto da $f(C)$.

2° caso $z = (1, 0)$

$f^{-1}(z) = \{0, 1\}$, $0 \notin C$, $1 \notin C$. Si consideri un intervallo del tipo $[0, a[$ disgiunto da C e uno del tipo $]b, 1]$ disgiunto da C . Si ha che $f([0, a[) \cup f(]b, 1])$ è un arco aperto di S^1 contenente z e disgiunto da $f(C)$.

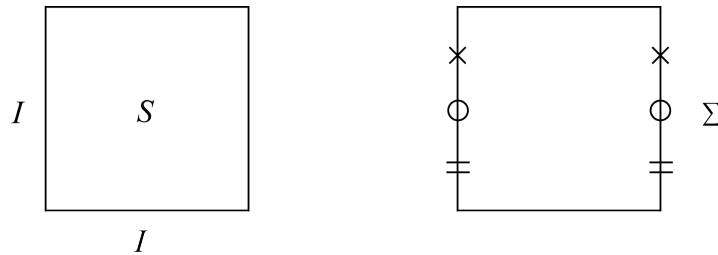
Il modello S^1 trovato per I/Σ è effettivamente naturale da pensare, perché si può vedere I come un pezzo di spago e la relazione Σ , per cui i due estremi sono

equivalenti, come un far coincidere i due capi dello spago chiudendolo a formare una circonferenza.

Il teorema 1.3.5 formalizza in termini rigorosi questa visione spontanea.

2. Cilindro

$S = I \times I$, Σ = relazione che identifica due punti alla stessa altezza sui lati verticali di S :



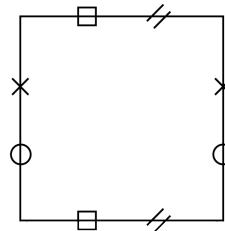
$\tilde{S} = (I \times I)/\Sigma$ ha per modello $T = S^1 \times I$. La funzione di identificazione è

$$f: (t_1, t_2) \in I \times I \longrightarrow ((\cos 2\pi t_1, \sin 2\pi t_1), t_2) \in S^1 \times I$$

3. Toro

$$S = I \times I$$

$\Sigma:$

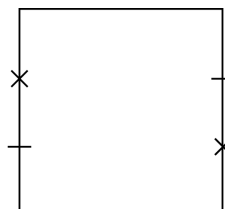


Il modello di S/Σ è $T = S^1 \times S^1$.

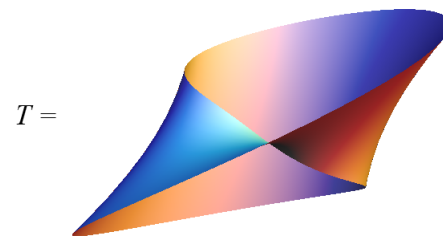
4. Nastro di Möbius

$$S = I \times I$$

$\Sigma:$

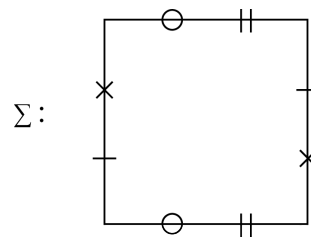


Il modello di S/Σ è



5. Bottiglia di Klein

$$S = I \times I$$



Il resto a lezione.