FISICA II

Lez. 9 – Sorgenti di campo magnetico

Prof. Giovanni Mettivier

Prof. Giovanni Mettivier, PhD

Dipartimento Scienze Fisiche
Università di Napoli “Federico II”
Compl. Univ. Monte S.Angelo
Via Cintia, I-80126, Napoli
mettivier@na.infn.it
+39-081-676137

Obiettivi di apprendimento

- Rappresentare un tratto elementare di una distribuzione di corrente in un filo e indicare la direzione del campo magnetico che esso instaura in un qualsiasi punto prossimo al filo.
- Determinare, dato un punto in prossimità di un filo e un elemento di corrente lungo di esso, il modulo e la direzione del campo magnetico generato dall’elemento.
- Trovare il modulo del campo magnetico instaurato da un elemento di filo percorso da corrente in un punto giacente sulla stessa direzione dell’elemento stesso.
- Applicare la relazione tra il modulo del campo magnetico, la corrente e la distanza da un punto esterno a un lungo filo rettilineo percorso da corrente.
- Determinare, mediante la regola della mano destra, la direzione del vettore campo magnetico in un punto esterno a un lungo filo rettilineo percorso da corrente.
- Rendervi conto che attorno a un lungo filo rettilineo percorso da corrente le linee di campo magnetico sono circolari.
- Applicare la relazione tra il modulo del campo magnetico, la corrente e la distanza da un punto esterno all’estremità di un filo rettilineo seminfinito percorso da corrente.

Subito dopo che Oersted, nel 1819, ebbe scoperto che un ago magnetizzato viene deflesso da un conduttore percorso da corrente, Biot e Savart ricavarono un'espressione matematica che permette di calcolare il campo magnetico in un qualsiasi punto dello spazio in funzione della corrente che produce il campo. Questa espressione per il campo magnetico *d**B*** in un punto *P*, prodotto dall'elemento di lunghezza *d**s*** di un filo percorso da una corrente continua *I*, è il risultato delle seguenti osservazioni sperimentali:

- Il vettore *d**B*** è perpendicolare a *d**s*** (orientato nel verso della corrente) sia al versore ***r*** orientato da *d**s*** verso *P*.
- Il modulo di *d**B*** è inversamente proporzionale ad r^2, la distanza fra *d**s*** e *P*
- Il modulo di *d**B*** è proporzionale alla corrente *I* ed alla lunghezza *ds* dell'elemento *d**s***
- Il modulo di *d**B*** è proporzionale a $\sin\theta$, dove θ è l'angolo fra i vettori *d**s*** e ***r***.

Queste osservazioni sono riassunte da una espressione vettoriale conosciuta come **legge di Biot-Savart**.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

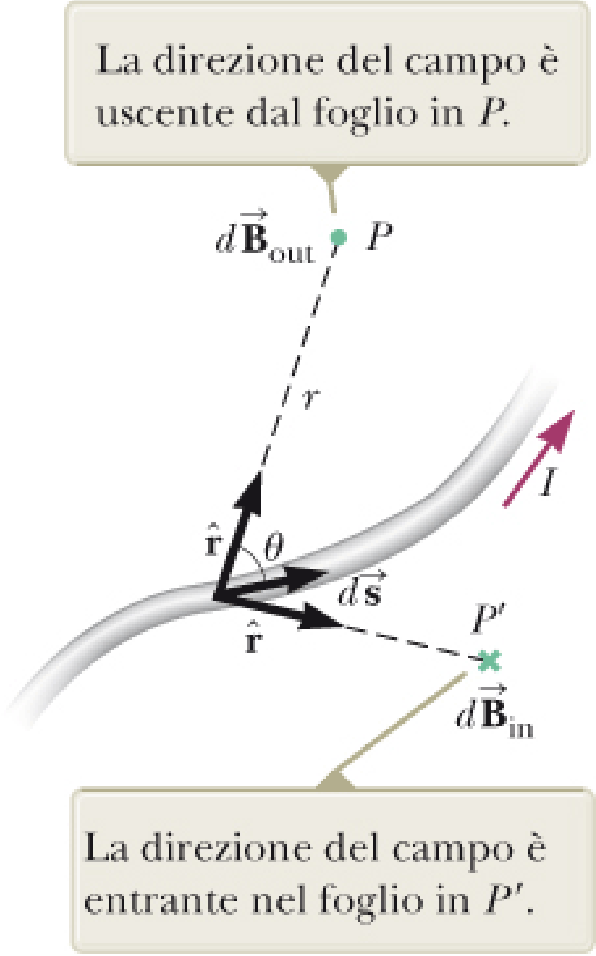
dove μ_o è una costante chiamata **permeabilità magnetica del vuoto:**

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-17} T\, m/A$$

Per calcolare il campo magnetico *totale* ***B***

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

dove l'integrale è esteso a tutta la distribuzione di corrente.
La legge di Biot-Savart, sebbene inizialmente formulata per un filo conduttore percorso da corrente, è valida anche nel caso di correnti generate da cariche che si muovono nello spazio, come per esempio un fascio di particelle in un acceleratore. In questo caso *d**s*** rappresenta la lunghezza di un piccolo segmento dello spazio in cui fluiscono le cariche.



Il campo magnetico prodotto da un elemento di corrente è perpendicolare sia all'elemento *d**s*** che al versore ***r*** ed è descritto dal prodotto vettoriale. Perciò, se il conduttore giace nel piano del foglio, come nella fig., *d**B*** sarà perpendicolare ed uscente dal foglio nel punto *P*, mentre nel punto *P'* sarà perpendicolare ed entrante nel foglio.

Legge Biot-Savart

Esempio

Si consideri un filo sottile e rettilineo percorso da una corrente costante *I* che giace sull'asse *x*. Si determini il vettore campo magnetico prodotto da questa corrente nel punto *P.*

$$d\vec{s} \times \hat{r} = |d\vec{s} \times \hat{r}|\hat{k} = \left[dx\, sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]\hat{k} = (dx\, cos\theta)\hat{k}$$

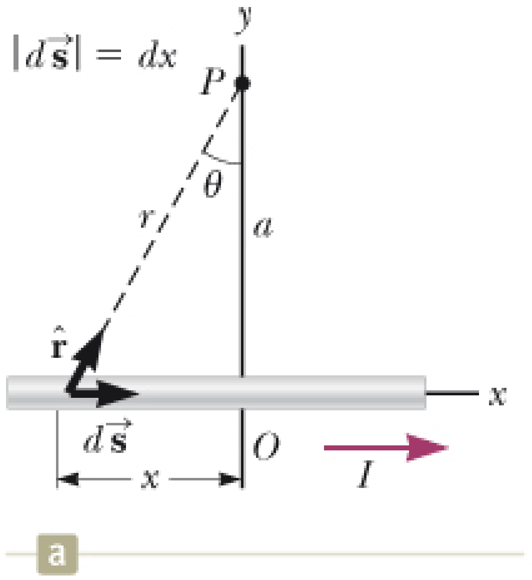
$$d\vec{B} = (dB)\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\, cos\theta}{r^2}\hat{k}$$

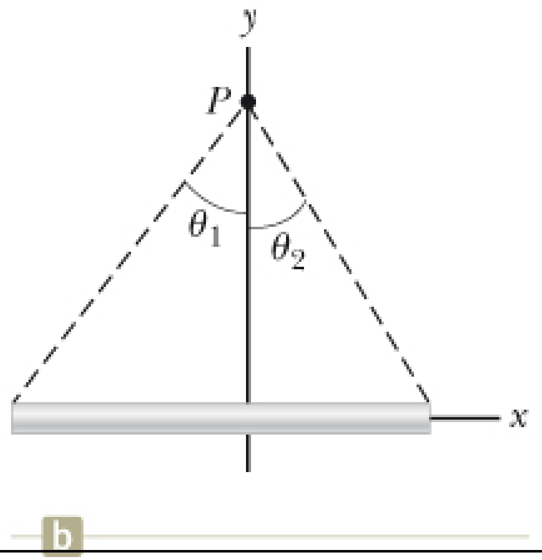
$$r = \frac{a}{\cos\theta}, \qquad x = -a\, tan\theta$$

$$dx = -a\, sec^2\theta d\theta = -\frac{a d\theta}{cos^2\theta}$$

$$dB = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{a d\theta}{cos^2\theta}\right)\left(\frac{cos^2\theta}{a^2}\right)\cos\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta d\theta$$

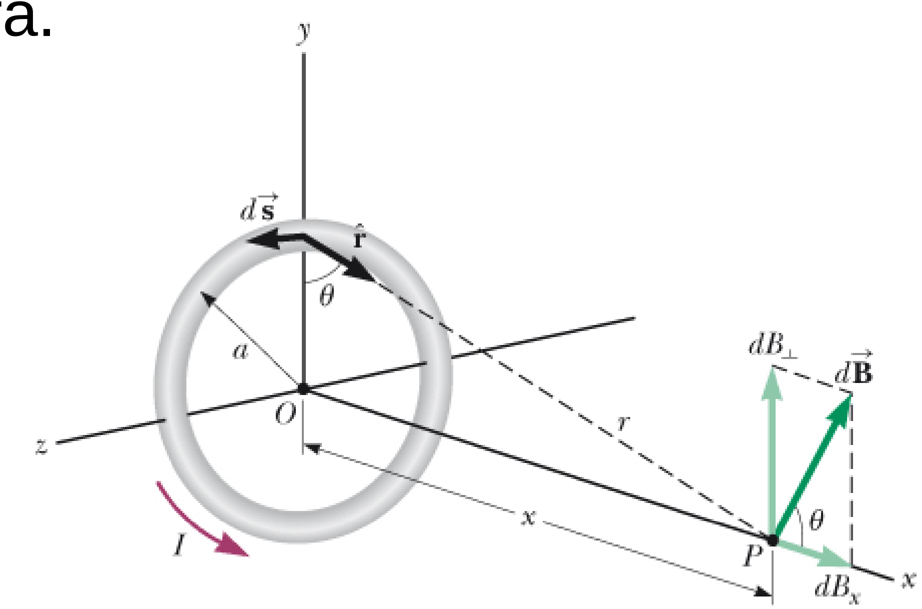
$$B = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_2}^{\theta_1}\cos\theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) \cong \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$





Esempio

Una spira di forma circolare di raggio *a*, che si trova nel piano *yz*, è percorsa da una corrente costante *I*. Si calcoli il campo magnetico in un punto *P* sull’asse ad una distanza *x* dal centro della spira.



$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|d\vec{s} \times \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{(a^2+x^2)}$$

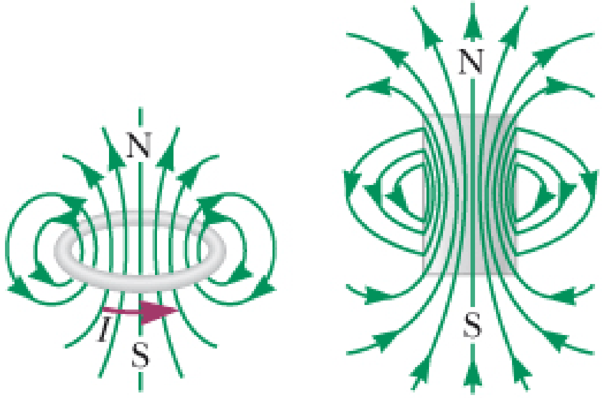
$$dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{(a^2+x^2)}\cos\theta$$

$$B_x = \oint dB_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{ds\cos\theta}{a^2+x^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{ds}{a^2+x^2}\left[\frac{a}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right] = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}\oint ds$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}(2\pi a) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$$



Idee chiave

- Il campo magnetico prodotto da un conduttore percorso da corrente si può trovare attraverso la legge di Biot-Savart. Essa stabilisce che il contributo infinitesimo *d***B** al campo attribuibile a un elemento infinitesimo *d***s** di filo percorso da corrente *i* in un punto *P* situato a distanza *r* dall'elemento di corrente è dato da

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{i\,d\vec{s}\,\times\,\vec{r}}{r^3}$$

- La quantità μ_o, detta permeabilità magnetica del vuoto, ha il valore esatto

$$4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m/A \approx 1.26 \cdot 10^{-6} T\ m/A$$

- Nel caso di un lungo filo rettilineo percorso da corrente *i*, la legge di Biot-Savart da, per il modulo del campo magnetico a una distanza *R* dal filo

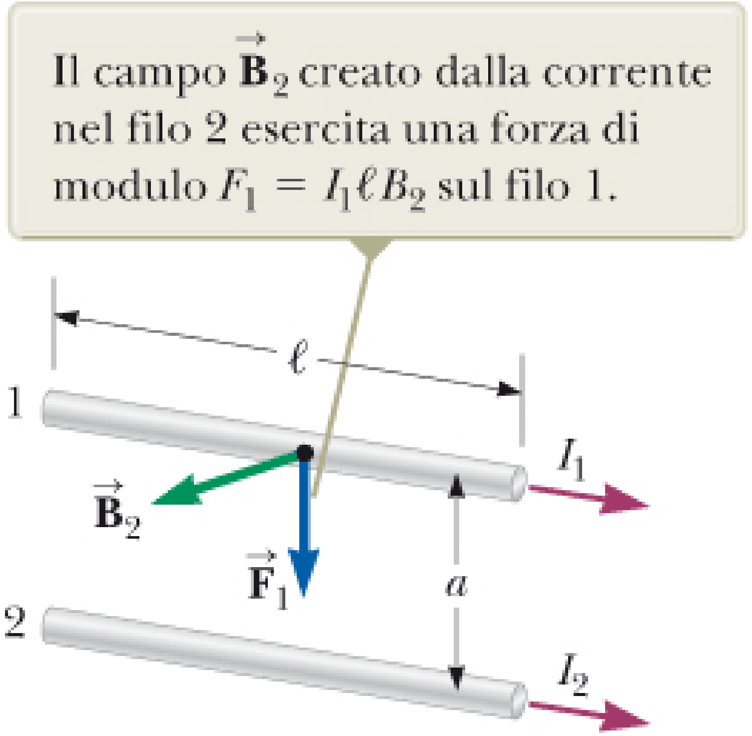
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$

Obiettivi di apprendimento

- Trovare, date due correnti paralleli concordi o discordi, il campo magnetico generato dall'una nella posizione dell'altra, e calcolare la forza agente tra di esse.
- Rendervi conto che due correnti concordi si attraggono e viceversa si respingono.

La forza magnetica fra condutori paralleli

Poiché la corrente che scorre nel conduttore genera un proprio campo magnetico, è facile capire che due conduttori percorsi da corrente esercitano fra loro forze magnetiche. Uno dei due conduttori crea il campo magnetico e l'altro filo può essere descritto come un insieme di cariche in un campo magnetico.



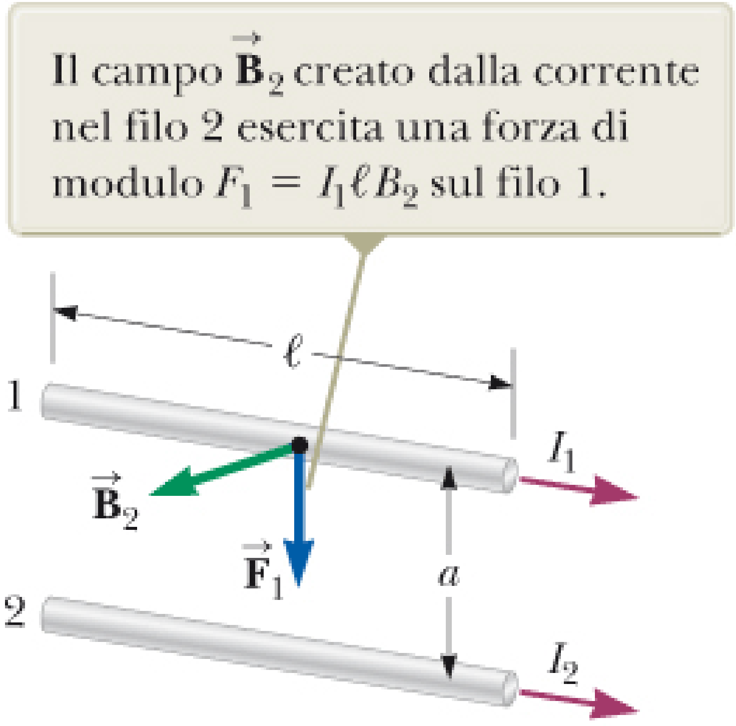
Si considerino due fili rettilinei molto lunghi e paralleli che sono distanti fra loro *a* e che sono percorsi, nello stesso verso, dalle correnti I_1 e I_2. Il filo 2, ora arbitrariamente definito filo sorgente, viene percorso dalla corrente I_2 e genera un campo magnetico $\mathbf{B}_2$ nel punto dove si trova il filo 1, il filo di prova. L'intensità di questo campo magnetico è la stessa su tutti i punti del filo 1. La direzione di $\mathbf{B}_2$ è perpendicolare al filo 1. Da $\mathbf{F}_B = I\mathbf{L} \times \mathbf{B}$ la forza magnetica che agisce su una lunghezza *l* del filo 1 è $\mathbf{F}_1 = I_1 \mathbf{l} \times \mathbf{B}_2$ e, poiché $\mathbf{l}$ è perpendicolare a $\mathbf{B}_2$, il modulo di $\mathbf{F}_1$ è $F_1 = I_1 l B_2$. Da $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$ si ricava il modulo di $\mathbf{B}_2$, il campo generato dal filo 2:

$$F_1 = I_1 l B_2 = I_1 l \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\right) = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l$$

Il vettore $\mathbf{F}_1$ punta verso il filo 2, poiché $\mathbf{l} \times \mathbf{B}_2$ ha quell'orientamento. Se si calcola il campo magnetico generato dal filo 1, la forza $\mathbf{F}_2$ agente sul filo 2 sarà uguale in modulo e direzione ad $\mathbf{F}_1$.

Quando le correnti nei due fili scorrono in verso opposto (cioè quando il verso di una delle correnti è invertito), le forze si invertono e i due fili si respingono. **Si ha quindi che conduttori paralleli in cui scorrono correnti nello *stesso* verso si *attraggono* mentre conduttori paralleli in cui scorrono correnti in verso *opposto* si *respingono.***

Poiché i moduli delle forze che due fili si scambiano sono uguali, per semplicità si indica con F_B il modulo della forza magnetica fra due fili. Possiamo allora riscrivere il modulo in termini della forza per unità di lunghezza.



$$\frac{F_B}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

La forza fra due fili paralleli percorsi da corrente è usata per definire l'**Ampere** nel modo seguente:

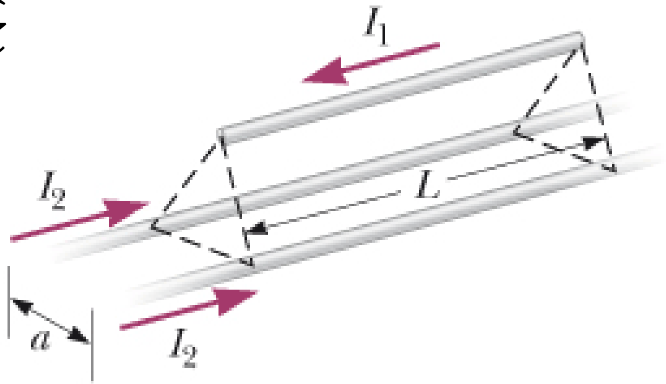
Quando la forza di interazione per unità di lunghezza fra due fili molto lunghi, paralleli, distanti fra loro 1 m e percorsi dalla stessa corrente è 2×10^{-7} *N/m*, la corrente che scorre in ciascun filo è 1 A.

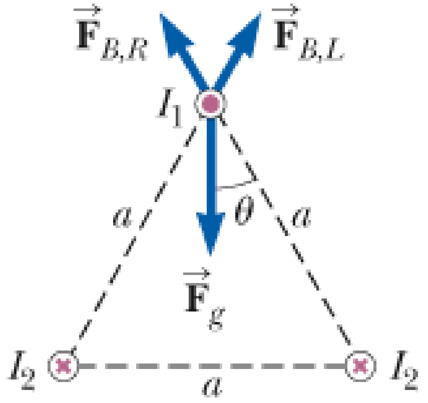
Usando l'Ampere, il **coulomb**, l'unità di carica nel SI, è definito nel modo seguente: 1 coulomb (1 C) è la quantità di carica che in 1 s attraversa una qualunque sezione di un conduttore percorso da una corrente continua di 1 A.

Esercizio

Due fili paralleli e infinitamente lunghi sono appoggiati sul terreno alla distanza di *a=1 cm* l'uno dall'altro. Un terzo filo, di lunghezza *L=10 m* e massa *400 g,* nel quale scorre una corrente I_1*=100 A*, sta levitando sopra gli altri due, rimanendo orizzontale al centro fra i due fili. I fili infinitamente lunghi sono percorsi dalla stessa corrente I_2 nella stessa direzione, che però scorre nel verso opposto a quello della corrente nel filo sospeso, Qual è il valore di I_2 che permette ai tre fili di formare un triangolo equilatero?

$$\vec{F}_B = 2\left(\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l\right)\cos\theta\hat{k} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l\cos\theta\,\hat{k}$$





$$\vec{F}_g = -mg\hat{k}$$

$$\sum\vec{F} = \vec{F}_B + \vec{F}_g = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l\cos\theta\,\hat{k} - mg\hat{k} = 0$$

$$I_2 = \frac{mg\pi a}{\mu_0 I_1 l\cos\theta} = \frac{(0.4\,kg)(9.8\ m/s^2)\mu(0.01\,m)}{(4\pi\times 10^{-7}T\ \ m/A)(100\,A)(10\,m)\cos 30°} = 113\,A$$

Idee chiave

- Due fili paralleli percorsi da correnti che hanno lo stesso verso si attraggono tra loro. Viceversa, se le correnti hanno versi opposti, si respingono. Date la distanza tra i fili, i_a e i_b le correnti nei due fili ed L la lunghezza dei medesimi, la forza che ciascuno di essi esercita sull'altro è data in modulo da

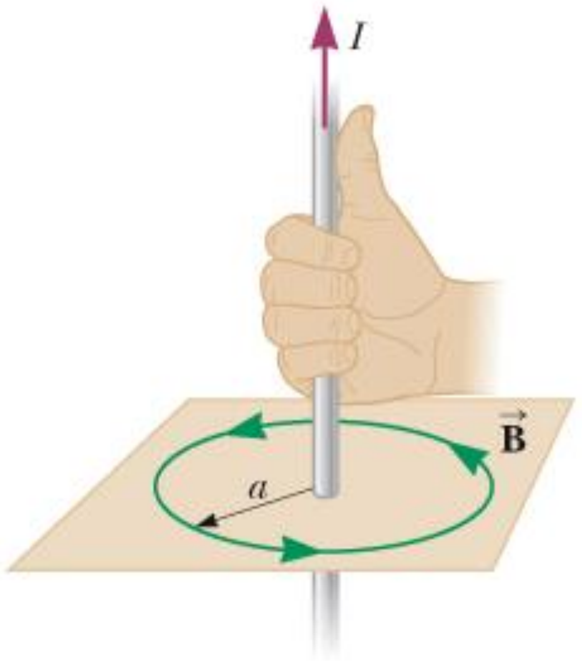
$$F_{ab} = i_b L B_a sin90° = \frac{\mu_0 L i_a i_b}{2\pi d}$$

Obiettivi di apprendimento

- Applicare la legge di Ampere a una linea chiusa che circonda una corrente.
- Determinare il segno algebrico di una corrente circondata da una linea chiusa utilizzando la legge di Ampere e la regola della mano destra.
- Determinare la corrente netta da introdurre nella legge di Ampere quando più di una corrente scorre all'interno di una linea chiusa amperiana.
- Applicare la legge di Ampere a un lungo filo rettilineo percorso da corrente per trovare il modulo del campo magnetico all'interno e all'esterno del filo, rendendovi contro che contano solo le correnti che passano all'interno della linea chiusa amperiana.

Legge di Ampere

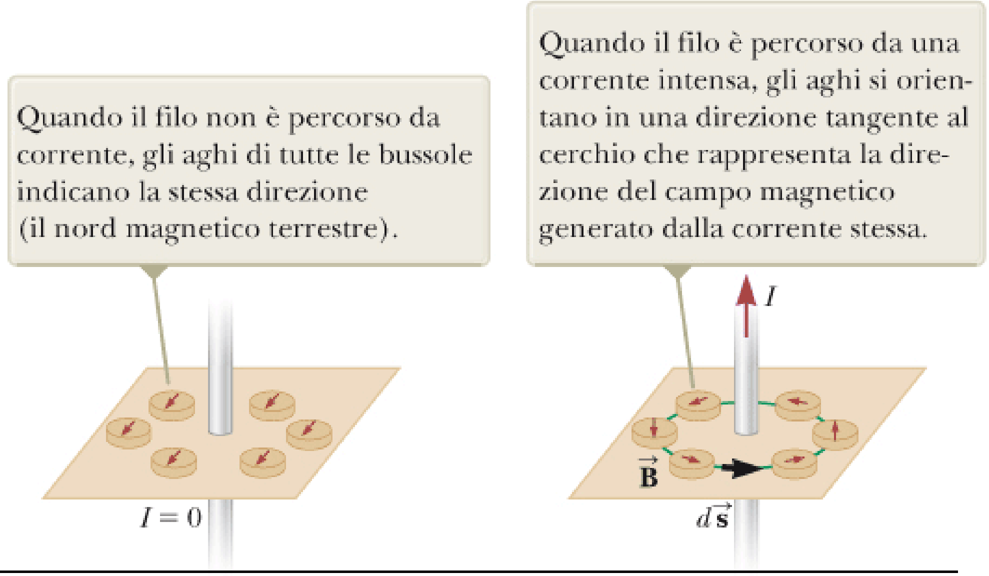
La fig. è una vista tridimensionale del campo magnetico che circonda un lungo un lungo filo diritto percorso da corrente.
Una regola utile per determinare il verso di ***B*** è l'immaginare di afferrare il filo con la mano destra, tenendo il pollice rivolto nel verso della corrente. Le quattro dita si avvolgono attorno al filo nel verso del campo magnetico.
La fig. mostra anche che una linea di campo magnetico non ha inizio né fine, ma forma ad anello chiuso.
Calcoliamo ora il prodotto scalare ***B****d**s*** per un piccolo elemento *d**s***, scelto sul percorso circolare definito dagli aghi delle bussole, e sommiamo i prodotti per tutti gli elementi che formano il percorso circolare, chiuso. Lungo questo percorso i vettori *d**s*** e ***B*** sono paralleli in ogni punto, per cui ***B****d**s***=*Bds*.



Inoltre, il modulo di ***B*** è costante su questa circonferenza e si calcola con $\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$. La somma dei prodotti *Bds* sul percorso circolare chiuso, che è l'integrale di linea di ***B****d**s***, è quindi

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B \oint ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(2\pi r) = \mu_0 I$$

dove $\oint ds = 2\pi r$ è la lunghezza della circonferenza.



Questo risultato, nonostante sia stato calcolato per il caso particolare di un percorso circolare, è valido, in generale, per un percorso chiuso *qualunque* (***percorso di Ampere***) che circonda una corrente che scorre in un circuito concatenato con la linea chiusa. Il caso generale, conosciuto come **legge di Ampere**, può essere così sintetizzato:

L'integrale di linea di ***B**ds* esteso ad una qualsiasi linea chiusa è uguale a $\mu_0 I$ dove *I* è la corrente continua totale che attraversa una superficie qualsiasi che abbia il percorso chiuso come frontiera:

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I$$

Esempio

Un filo rettilineo molto lungo di raggio *R* è percorso da una corrente continua *I*, distribuita uniformemente su tutta la sezione del filo. Si calcoli il campo magnetico a distanza *r* dall'asse del filo per *r*≥*R* per *r*<*R*.

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B \oint ds = B(2\pi r) = \mu_0 I$$

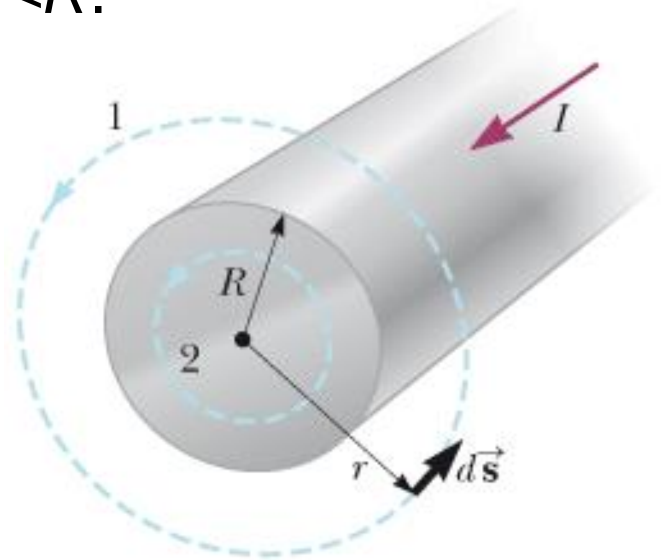
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad (per\ \ \mathrm{r} \geq R)$$

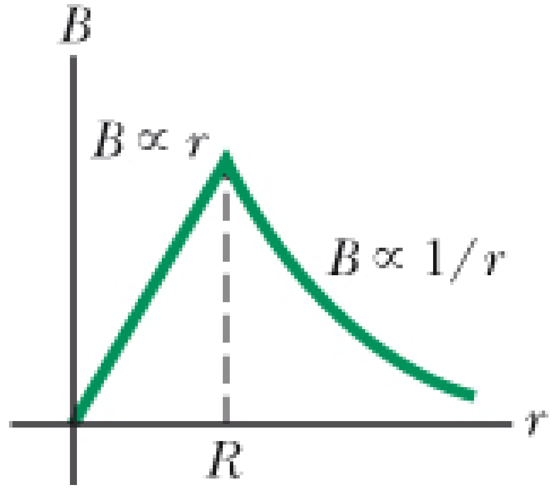
$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

$$I' = \frac{r^2}{R^2} I$$

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = B(2\pi r) = \mu_0 I' = \mu_0 \left(\frac{r^2}{R^2} I\right)$$

$$B = \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\right) r \quad (per\ r < R)$$





Idee chiave

- La legge di Ampere stabilisce che

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_{ch}$$

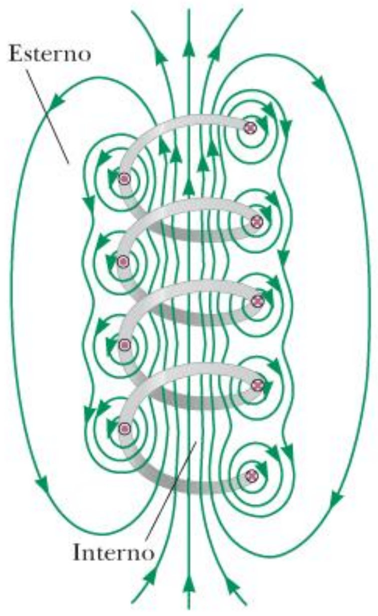
- L'integrale di questa equazione è valutato lungo una linea chiusa chiamata *linea amperiana*. La corrente i a secondo membro è la corrente *netta* racchiusa entro la linea amperiana.

Obiettivi di apprendimento

- Descrivere un solenoide disegnandone le linee di campo magnetico.
- Spiegare come si usa la legge di Ampere per trovare il campo magnetico all’interno di un solenoide.
- Applicare la relazione che intercorre tra il campo magnetico B interno al solenoide, la corrente *i* e il numero di spire *n* per unità di lunghezza del solenoide.

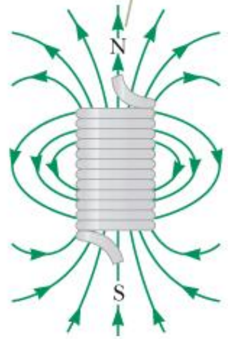
Campo magnetico solenoide

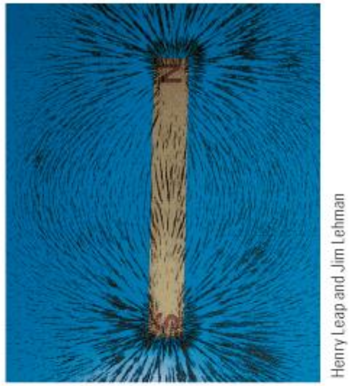
Un **solenoide** è un lungo filo avvolto a forma di elica. Con questa configurazione è possibile generare un campo magnetico sufficientemente uniforme nello spazio interno all’avvolgimento in cui circola la corrente, che chiameremo *l’interno* del solenoide. Se le spire sono molto fitte, ciascuna spira può essere approssimata con un anello circolare ed il campo magnetico risultante è la somma vettoriale dei campi prodotti da ogni spira.



La configurazione delle linee di campo è simile a quella che circonda una sbarretta magnetizzata. Per questa ragione un’estremità del solenoide si comporta come il polo nord di un magnete e l’altra come il polo sud.

Le linee di campo assomigliano a quelle di una sbarretta magnetizzata; ciò vuol dire che il solenoide ha un polo nord e un polo sud.



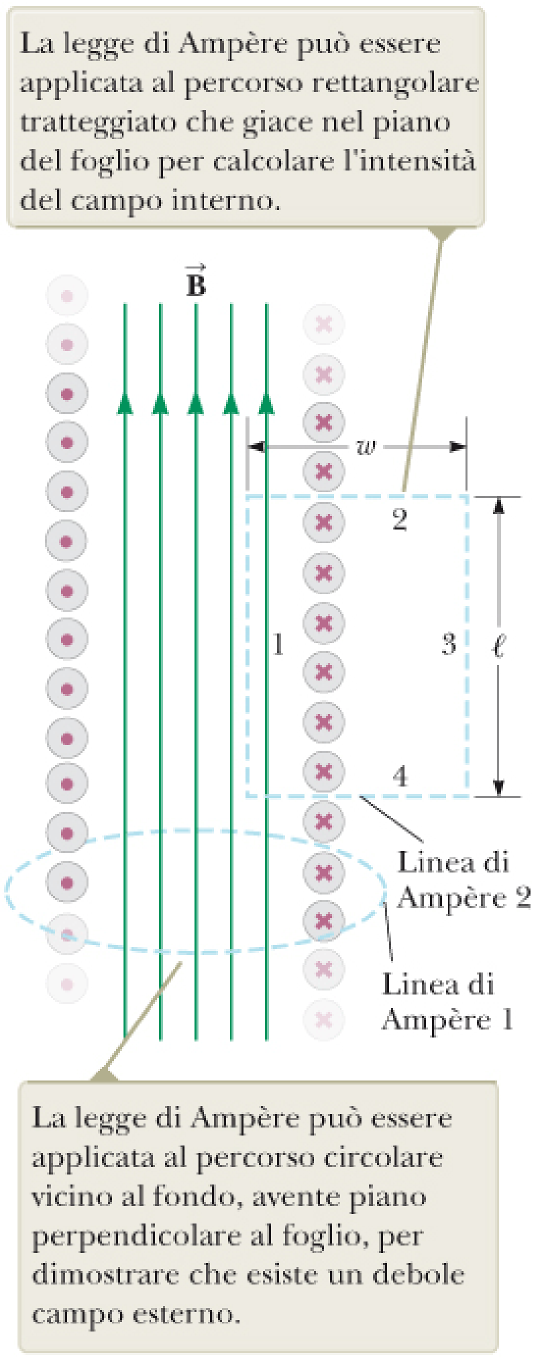


Se le spire sono molto vicine fra loro e la lunghezza del solenoide è molto maggiore del raggio, il solenoide diventa in *solenoide ideale*. La fig. nella prossima slide mostra una sezione longitudinale di una parte del solenoide in cui scorre una corrente *I*. in questo caso il campo esterno è praticamente nullo ed il campo interno è uniforme su quasi tutto il volume.

Campo magnetico solenoide

Possiamo utilizzare la legge di Ampere per ottenere una espressione valida per il campo magnetico all'interno di un solenoide ideale. Poiché il solenoide è ideale, nello spazio interno ***B*** è uniforme e parallelo all'asse, mentre all'esterno le linee di campo magnetico formano circonferenze attorno al solenoide. I piani nei quali giacciono queste circonferenze sono perpendicolari al foglio. Consideriamo il percorso rettangolare (percorso 2) di lunghezza *l* e di larghezza *w*. Applichiamo a questo percorso la legge di Ampere, calcolando l'integrale di ***B**ds* per ciascuno dei quattro lati del rettangolo. Il contributo del lato 3 è nullo, poiché in questa regione il campo magnetico è nullo. Anche i contributi dei lati 2 e 4 sono nulli, perché lungo questi lati ***B*** è perpendicolare a *d**s***. Il lato 1 contribuisce all'integrale perché, lungo questo percorso, ***B*** è uniforme e parallelo a *d**s***. L'integrale esteso al percorso rettangolare chiuso è quindi

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_{percorso\ 2} \vec{B} d\vec{s} = B \int_{percorso\ 2} ds = Bl$$



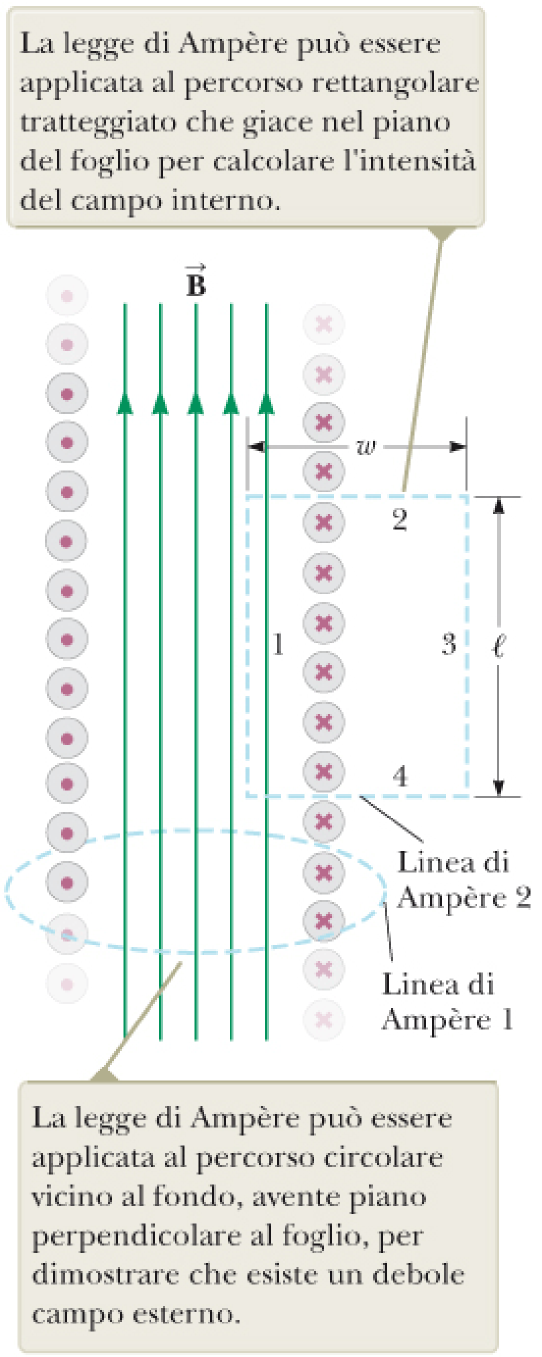
Campo magnetico solenoide

Il secondo membro della legge di Ampere è proporzionale alla corrente totale *I* concatenata con il percorso di integrazione. In questo caso la corrente totale attraverso il percorso rettangolare è uguale alla corrente che passa in ciascuna spira moltiplicata per il numero di spire. Se *N* è il numero di spire nel tratto di lunghezza *l*, la corrente totale attraverso il rettangolo è *NI*. Applicando la legge di Ampere a questo percorso si ha quindi

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = Bl = \mu_0 NI$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 nI$$

dove *n=N/l* è il numero di spire per unità di lunghezza.

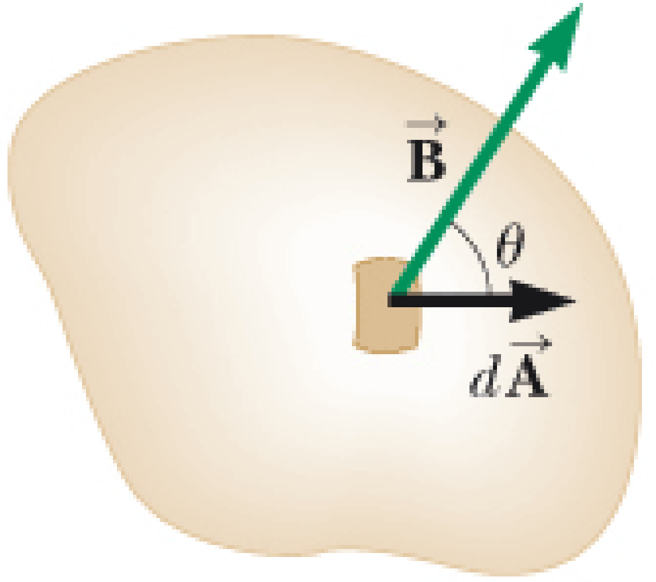


Idee chiave

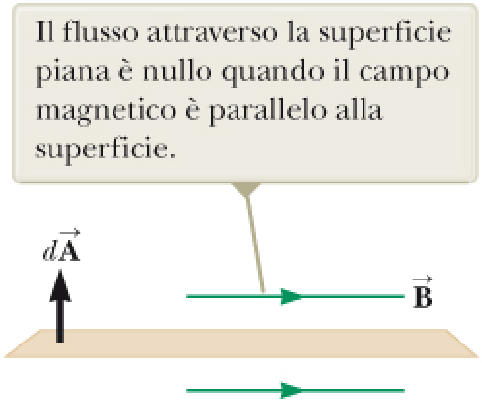
- Entro un lungo solenoide, composto da n spire per unità di lunghezza e percorso dalla corrente i, il modulo B del campo magnetico in un punto lontano dalle estremità è

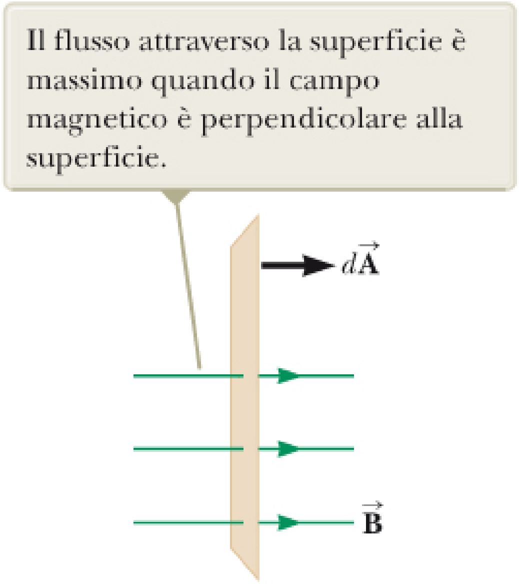
$$B = \mu_0 i n$$

Si consideri un elemento di area *dA* su una superficie di forma qualunque. Se il campo magnetico su questo elemento è ***B***, il flusso magnetico attraverso l'elemento di superficie è ***B****d****A***, dove *d****A*** è un vettore perpendicolare alla superficie di modo uguale all'area *dA*. Il flusso magnetico totale Φ_B attraverso la superficie è quindi



$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A}$$





L'unità di flusso magnetico è Tm^2, che è definita come *weber* (*Wb*); $1\ Wb = 1\ Tm^2$

Obiettivi di apprendimento

- Tracciare le linee di campo magnetico per una spira percorsa da corrente.
- Applicare, per una bobina percorsa da corrente, la relazione che lega il modulo del momento dipolare m con la corrente i nella bobina, il suo numero N di spire e l'area A delle spire.
- Applicare, per un punto situato lungo l'asse della bobina, la relazione che intercorre tra il modulo B del campo magnetico, il momento magnetico m e la distanza z dal centro della bobina.

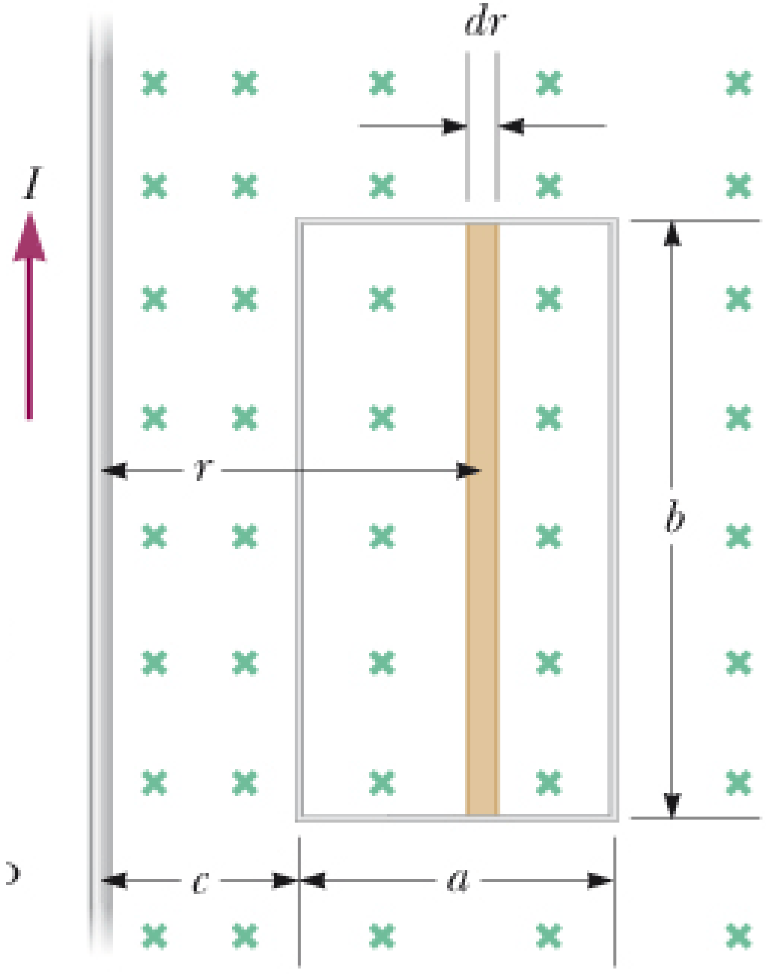
Idee chiave

- Il campo magnetico generato da una spira percorsa da corrente, assimilabile a un dipolo magnetico, in un punto P situato a distanza z dal centro della spira lungo il sua asse è parallelo all’asse ed è dato da

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{\mu}}{z^3}$$

in cui m è il momento di dipolo della bobina. L’equazione è valida per valori z molto maggiori delle dimensioni della bobina.

Una spira rettangolare di larghezza *a* e di lunghezza *b* si trova vicino ad un lungo filo rettilineo in cui scorre una corrente *I*. La distanza tra il filo ed il lato più vicino della spira è *c*. Il filo è parallelo al lato più lungo della spira. Si calcoli il flusso magnetico totale che attraversa la spira dovuto alla corrente nel filo.



$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A} = \int B dA = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA$$

$$\Phi_B = \int \frac{\mu_0 I}{2\pi r} b\, dr = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int \frac{dr}{r}$$

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \int_c^{a+c} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{a}{c}\right)$$

La situazione è completamente diversa nel caso del campo magnetico, le cui linee di campo sono continue e chiuse. In altre parole, le linee di campo magnetico non iniziano né finiscono in qualche punto.
Il numero di linee di campo che entrano nella superficie è uguale al numero di quelle che ne escono; ciò vuol dire che il flusso magnetico è nullo.
La **legge di Gauss nel magnetismo** stabilisce che:

Il flusso magnetico che attraversa una superficie chiusa qualsiasi è sempre nullo

$$\oint \vec{B} d\vec{A} = 0$$