

Università “*Federico II*” di Napoli
Dipartimento di Architettura

Sistemi di equazioni lineari

Ferdinando Casolaro
Alessandra Rotunno

Equazioni lineari ad n incognite

Rappresentazione analitica di iperpiani

L'equazione della retta (S_1) nel riferimento Oxy del piano (S_2) è espressa da:

$$ax+by+c = 0$$

che rappresenta un *iperpiano* di S_2 . *Le coppie (x,y) che verificano l'equazione rappresentano punti della retta.*

L'equazione del piano (S_2) nel riferimento $Oxyz$ dello spazio tridimensionale (S_3) è espressa da:

$$ax+by+cz+d = 0$$

che rappresenta un *iperpiano* di S_3 . *Le terne (x,y,z) che verificano l'equazione rappresentano punti del piano.*

L'equazione dello spazio tridimensionale (S_3) nello spazio (S_4) è espressa da:

$$ax+by+cz+dt+e = 0$$

che rappresenta un **iperpiano** di S_4 . Le quaterne (x,y,z,t) che verificano l'equazione rappresentano punti di S_3 , sottospazio S_4 .

In generale, nel riferimento cartesiano di uno spazio S_n , l'equazione di un suo sottospazio S_{n-1} (iperpiano di S_n) è espressa da:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

Le n -ple (x_1, x_2, \dots, x_n) che verificano l'equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$ rappresentano punti di S_{n-1} , sottospazio di spazio S_n .

Pertanto, un iperpiano S_{n-1} di S_n è rappresentato da un'equazione lineare di primo grado a d n incognite.

In un riferimento cartesiano del piano, sia $P(x, y)$ un punto diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x ed y di P .

Se $O\vec{P}(x, y)$ è un vettore ortogonale ad $\vec{n}(a, b)$, da:

$$O\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} \quad \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times O\vec{P} = \vec{0}$$

$$\text{cioè: } ax + by = 0 \quad (*)$$

che rappresenta la retta per l'origine perpendicolare alla direzione del vettore n .

La (*), equazione della retta OP, individua dunque, il luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ del piano tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $n(a, b)$

Anche per il piano in S_3 , si può fissare un riferimento cartesiano ed un punto $P(x,y,z)$ diverso dall'origine, in modo che il segmento orientato $O\vec{P}$

identifichi il vettore che ha per componenti rispettivamente le coordinate x, y, z di P .

$$O\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Se $\vec{n}(a,b,c)$ è un vettore ortogonale ad $O\vec{P}(x, y, z)$, per definizione di prodotto scalare, si ha:

$$\vec{n} \times O\vec{P} = 0, \text{ cioè : } ax + by + cz = 0$$

che è l'equazione del piano per l'origine, che contiene i punti A, B, C .

Tale equazione individua, dunque,

il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio tali che il segmento OP è perpendicolare alla direzione del vettore $\vec{n}(a,b,c)$.

Pertanto, i coefficienti delle incognite, nell'equazione del piano, individuano le componenti di un vettore perpendicolare al piano.

Dal piano per l'origine al generico piano dello spazio. Generalizzazione

Dall'equazione

$$aX + bY + cZ = 0$$

attraverso le traslazioni nello spazio S_3 :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y \\ Z = z + h \end{cases} \quad \begin{cases} X = x \\ Y = y + k \\ Z = z \end{cases} \quad \begin{cases} X = x + t \\ Y = y \\ Z = z \end{cases}$$

si hanno rispettivamente le equazioni:

$$ax + by + cz + h = 0; \quad ax + by + cz + k = 0; \quad ax + by + cz + t = 0$$

che generalizzano l'equazione del piano nello spazio, in qualsiasi posizione, nella classica espressione:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Intersezioni di rette nel piano

Sistemi lineari di equazioni a due incognite

Due rette appartenenti ad uno stesso piano si dicono complanari:

- *incidenti* se hanno un punto proprio in comune;
- *parallele* se non hanno punti propri comuni.

Le coordinate del punto comune a due rette nel piano si determina con la risoluzione dei *Sistemi Lineari* che consiste nel risolvere il seguente problema:

Date le rette r) $ax+by+ c = 0$ ed s) $a'x+b'y+c' = 0$, nel piano, verificare se sono incidenti o complanari ed eventualmente, determinare le coordinate del punto ad esse comune.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Da quanto detto nel capitolo sugli Spazi Vettoriali, sappiamo che due segmenti orientati del piano che individuano due vettori con le direzioni delle rette r ed s , rispettivamente, sono *paralleli* o *incidenti*, a seconda che risulti:

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \text{ (parallele) (*)} \qquad \begin{vmatrix} a & a' \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 \text{ (incidenti) (**)}$$

La matrice (*) ha rango 1, la matrice (**) ha rango 2.

Pertanto, due rette nel piano sono incidenti se e solo se la matrice dei coefficienti delle incognite ha rango 2 (dimensione del piano: spazio S_2).

In tal caso, diciamo che il sistema è compatibile ed ammette una sola soluzione. Tale risultato è conseguenza di un teorema generale (***Teorema di Rouché-Capelli***) che caratterizza l'esistenza di soluzioni (compatibilità) dei sistemi lineari ad n incognite, $\forall n \in N$.

Teorema di Rouché-Capelli

Un sistema lineare è compatibile se e solo se la matrice dei coefficienti (incompleta) e la matrice completa hanno lo stesso rango.

Riferendoci al caso di un sistema di due equazioni a due incognite

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

le matrici:

$$A_c \equiv \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \quad A_i \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

sono dette, rispettivamente, ***matrice completa*** e ***matrice dei coefficienti*** (o incompleta).

Indicato con ρ_c e ρ_i i ranghi rispettivamente di A_c ed A_i , se le matrici hanno entrambe rango due (***uguale al numero delle incognite***), il sistema ammette una sola soluzione, le coordinate del punto di intersezione delle due rette.

A tal proposito, sussiste il seguente teorema di *Cramer* che permette di determinare la soluzione del sistema. Per $n = 2$ si ha:

Le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

in cui $\rho_i = \rho_c = 2$, sono date da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad (***)$$

Intersezioni di rette nel piano: Sistemi lineari a due incognite

Discutere il seguente sistema ed, eventualmente, determinare le coordinate dei punti di intersezione delle due rette che esso rappresenta:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Le matrici di riferimento sono:

$$A_c \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A_i \equiv \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

che hanno lo stesso rango $\rho_i = \rho_c = 2$, in quanto:

$$\det A_i \equiv \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$$

Pertanto, *il sistema è compatibile e le due rette sono incidenti*. Si ha:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{2 + 3}{7} = \frac{5}{7} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{7} = -\frac{1}{7}$$

Intersezioni di rette nel piano: Sistemi lineari a due incognite

Discutere il seguente sistema ed, eventualmente, determinare le coordinate dei punti di intersezione delle due rette che esso rappresenta:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$$

RIPETERE PROCEDIMENTO SLIDE PRECEDENTE

Pertanto, *il sistema è incompatibile e le due rette sono parallele.*

Intersezioni di rette nel piano: Sistemi lineari a due incognite

Discutere i seguenti sistemi ed, eventualmente, determinare le coordinate dei punti di intersezione delle tre rette che esso rappresenta:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad p \text{ (equazioni)} > n \text{ (incognite)} \quad \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

Teorema - *Un sistema con tre equazioni a due incognite è compatibile se e solo se la matrice quadrata completa ha determinante nullo.*

Dim. - *Infatti la matrice incompleta ha rango massimo 2 (numero delle incognite) per cui se risultasse $\rho_c = 3$, non sarebbe verificato il teorema di Rouché-Capelli.*

Generalizzazione a sistemi di qualsiasi ordine

Teorema - *Un sistema con p equazioni a n incognite (con $p > n$) è compatibile se e solo se la matrice quadrata completa ha determinante nullo.*

Intersezioni di rette nel piano: Sistemi lineari a due incognite

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases} \quad \det. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_i = 2; \quad \rho_c = 2$$

RIPETERE PROCEDIMENTO SLIDE PRECEDENTE E FAR VEDERE CHE IL SISTEMA E' COMPATIBILE (tre rette nel piano che hanno un punto comune: terza equazione è somma delle prime due).

Intersezioni di rette nel piano: Sistemi lineari a due incognite

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \det. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_i = 2; \quad \rho_c = 3$$

RIPETERE PROCEDIMENTO SLIDE PRECEDENTE E FAR VEDERE CHE SISTEMA E' INCOMPATIBILE (tre rette nel piano che non hanno alcun punto comune).

Intersezioni di piani nello spazio: Sistemi di equazioni a tre incognite

Discutere il seguente sistema ed, eventualmente, determinare le coordinate dei punti di intersezione dei tre piani che esso rappresenta:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = -1 \end{cases} \quad \det. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_i = 3; \quad \rho_c = 3$$

RIPETERE PROCEDIMENTO SLIDE PRECEDENTE

Pertanto, *il sistema è compatibile. Poiché il rango è uguale al numero delle incognite i tre piani hanno un solo punto in comune.*

Intersezioni di piani nello spazio: Sistemi di equazioni a tre incognite

Discutere il seguente sistema ed, eventualmente, determinare le coordinate dei punti di intersezione dei tre piani che esso rappresenta:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \det. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \rho_i = 2; \quad \rho_c = 2$$

RIPETERE PROCEDIMENTO SLIDE PRECEDENTE, FACENDO VEDERE CHE SI PUO' ELIMINARE UNA EQUAZIONE LINEARMENTE DIPENDENTE DALLE ALTRE DUE.

Pertanto, *il sistema è compatibile. Poiché il rango è minore del numero delle incognite, i tre piani hanno una retta in comune.*

Interpretazione analitica: Si dice che il sistema ammette ∞^1 soluzioni, dove l'esponente 1 è uguale alla differenza tra il numero delle incognite e il rango: $n - \rho = 3 - 2$ che si legge: infinite soluzioni che individuano uno spazio S_1 , cioè una retta.

Generalizzazione a sistemi ad n incognite con rango $k < n$

*In generale, un sistema con h equazioni ad n incognite, compatibile e con rango $\rho = k < n$, ammette ∞^{n-k} soluzioni che si legge: **infinite soluzioni che individuano uno spazio S_{n-k} , cioè uno spazio a $n-k$ dimensioni.***

Ad esempio, un sistema con cinque equazioni a quattro incognite, con rango $\rho_i = \rho_c = 2$, ammette $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni, cioè infinite soluzioni che individuano uno spazio a due dimensioni, cioè un piano.

Precisamente, il sistema costituito da cinque equazioni a quattro incognite, rappresenta cinque spazi S_4 che hanno un piano in comune.

Intersezioni di piani nello spazio: Sistemi di equazioni a tre incognite

Discutere il seguente sistema ed, eventualmente, determinare le coordinate dei punti di intersezione dei tre piani che esso rappresenta:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

RIPETERE PROCEDIMENTO SLIDE PRECEDENTE

Rappresentazione di sistemi lineari mediante matrici

Nelle Scienze applicate, ad esempio nella Scienza delle Costruzioni, ci si trova spesso col problema di risolvere sistemi di p equazioni ad n incognite con $p > 4$, $n > 4$, per cui la rappresentazione di tutte le equazioni risulta essere abbastanza macchinosa.

Utilizzando *l'algebra delle matrici*, in particolare il prodotto di matrici *righe* \times *colonne*, si rappresentano i sistemi lineari in modo sintetico.

Ad esempio, indicato con A la matrice dei coefficienti delle incognite, con X e B , rispettivamente, la *matrice-vettore* delle incognite e la *matrice-vettore* dei termini noti, si abbia il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \quad A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad X \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Matrici come operatori

Si vede immediatamente che le equazioni al primo membro del sistema si ottengono come prodotto *righe* \times *colonne* delle matrici A e X :

$$A \times X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

per cui la rappresentazione del sistema si può sintetizzare come segue:

$$A \times X = B$$

Pertanto, le matrici diventano operatori per rappresentare sistemi di equazioni lineari.