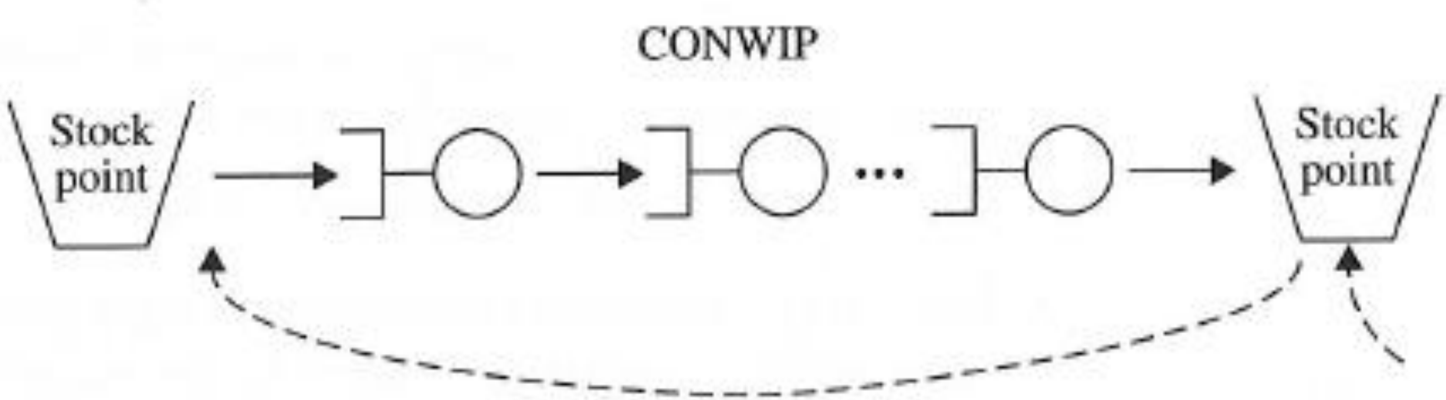
Fondamenti di dinamica dei flussi produttivi

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- Un flusso produttivo e/o logistico si sviluppa secondo leggi che correlano i tre parametri fondamentali, cioè **throughput** (produttività), **cycle time** (tempo di attraversamento), **inventory** (scorte).
- La Legge di Little rappresenta il fondamento delle suddette leggi.

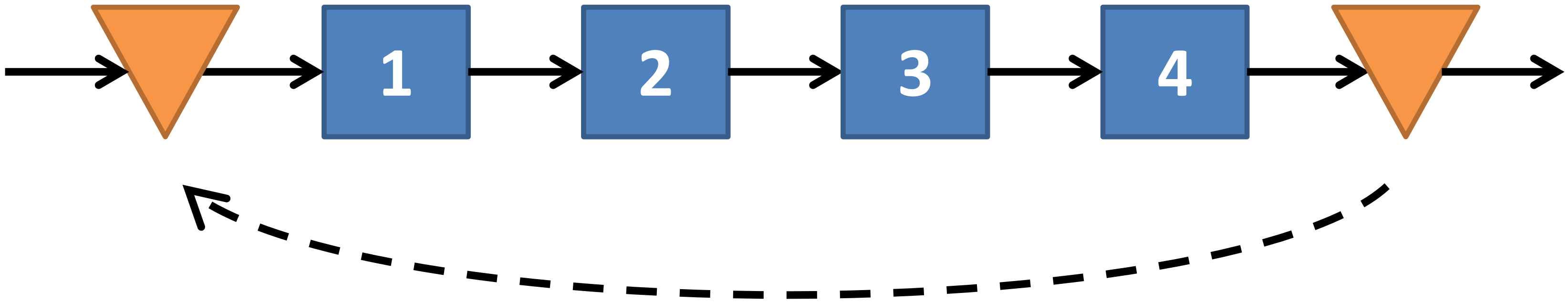
Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- Andiamo ad osservare queste relazioni considerando un sistema nel quale siamo in grado di controllare il WIP.
- Consideriamo un sistema CONWIP, nel quale un nuovo job può entrare solo quando un altro è stato completato.



Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- Consideriamo un esempio, costituito da una linea formata da 4 stazioni (macchine), il cui WIP è controllato con la tecnica CONWIP.



Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- Adottiamo le seguenti ipotesi:
  - **Nessuna variabilità** (sistema deterministico)
  - **Linea bilanciata**, cioè ogni pezzo deve essere lavorato in tutte le macchine e richiede lo stesso tempo medio effettivo di processamento, cioè

$$t_{e_1} = t_{e_2} = t_{e_3} = t_{e_4}$$

- Queste ipotesi determinano la condizione «**ottimale**» di funzionamento di una linea (o anche «flusso»).

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- Eseguiamo una simulazione del funzionamento della linea considerando i seguenti dati:
  - Tempo $t_{e_i} = 2 \ \text{h} \qquad i = 1, \dots, 4$
  - Rateo $r_{e_i} = \frac{1}{t_{e_i}} = \frac{1}{2} = 0.5 \ \text{pz/h} \qquad i = 1, \dots, 4$
  - La linea lavora in modo continuativo
  - Tutta la produzione è venduta, cioè mercato illimitato.
- Si osserva come, dato il mercato illimitato, massimizzare il *throughput* (**TH**) implica massimizzare il ricavo.

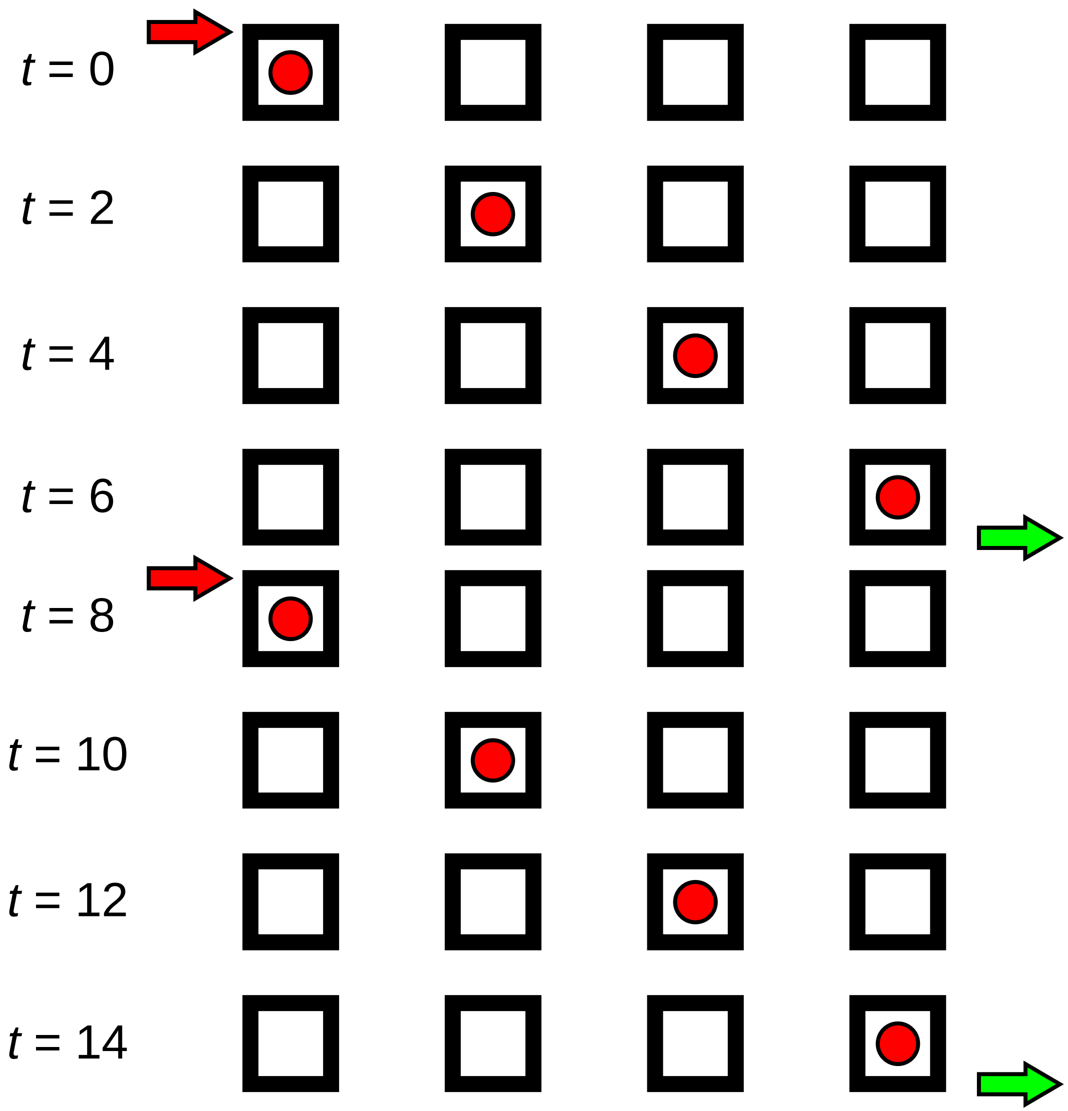
- Osserviamo inoltre che:

$$r_b = \min\{r_{e_i}\} = r_{e_1} = r_{e_2} = r_{e_3} = r_{e_4} = 0.5 \ \ \text{pz/h}$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{4} t_{e_i} = \sum_{i=1}^{4} 2 = 4 \cdot 2 = 8 \ \ \text{h}$$

- Andiamo ora a simulare il funzionamento della linea, partendo da WIP = 1, poi aumentando via via la quantità di WIP.

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

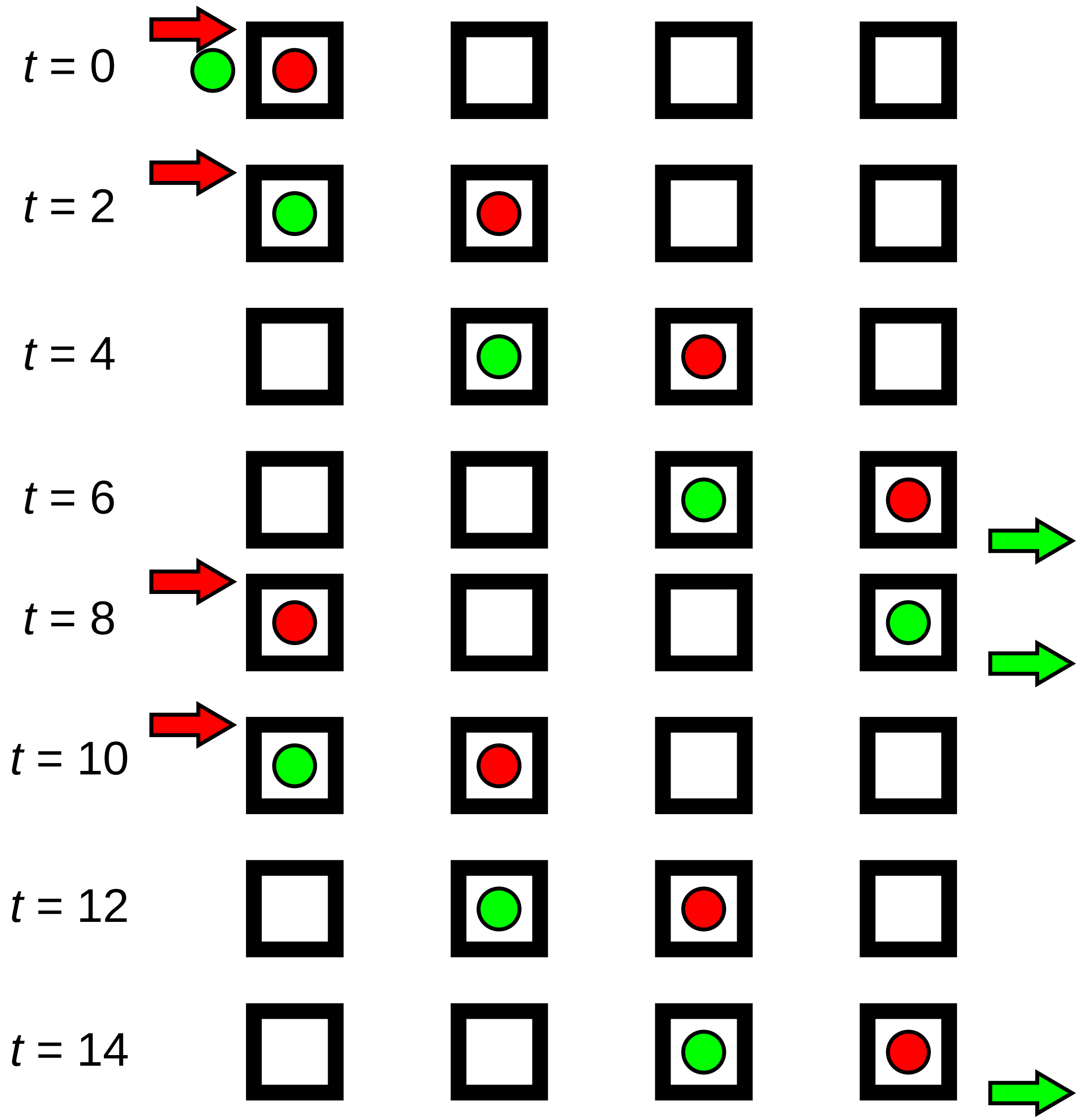


- La prestazione della linea:

$$T_0 = 8 \text{ h}$$
$$r_b = 0.5 \text{ pz/h}$$

$$WIP = 1 \text{ pz}$$
$$TH = \frac{1}{8} \text{ pz/h} = \frac{1}{4} r_b$$
$$CT = 8 \text{ h}$$

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato



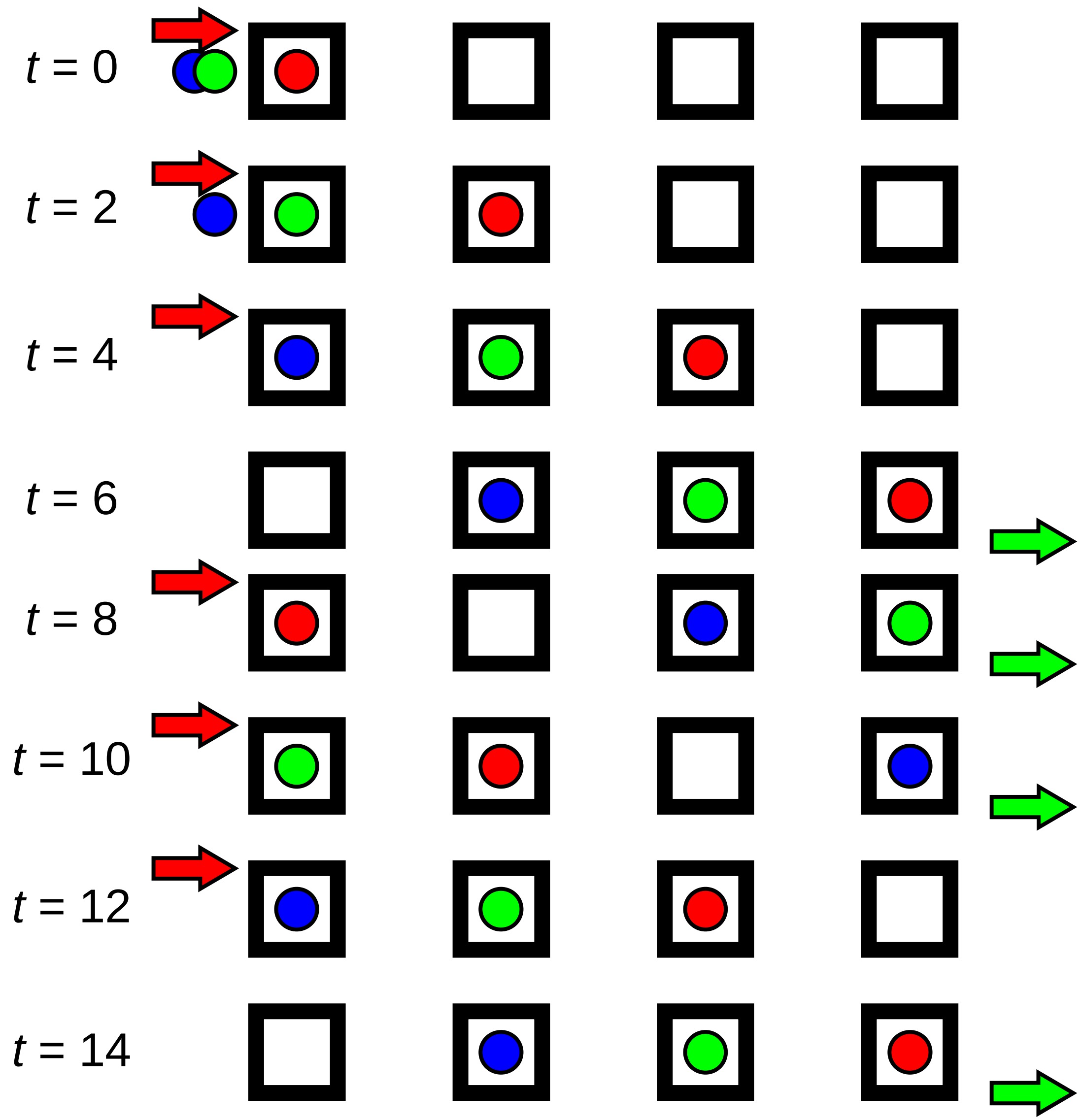
Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- La prestazione della linea:

$$T_0 = 8\ \mathrm{h}$$
$$r_b = 0.5\ \mathrm{pz/h}$$

$$WIP = 2\ \mathrm{pz}$$
$$TH = \frac{1}{4}\ \mathrm{pz/h} = \frac{1}{2} r_b$$
$$CT = 8\ \mathrm{h}$$

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato



Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

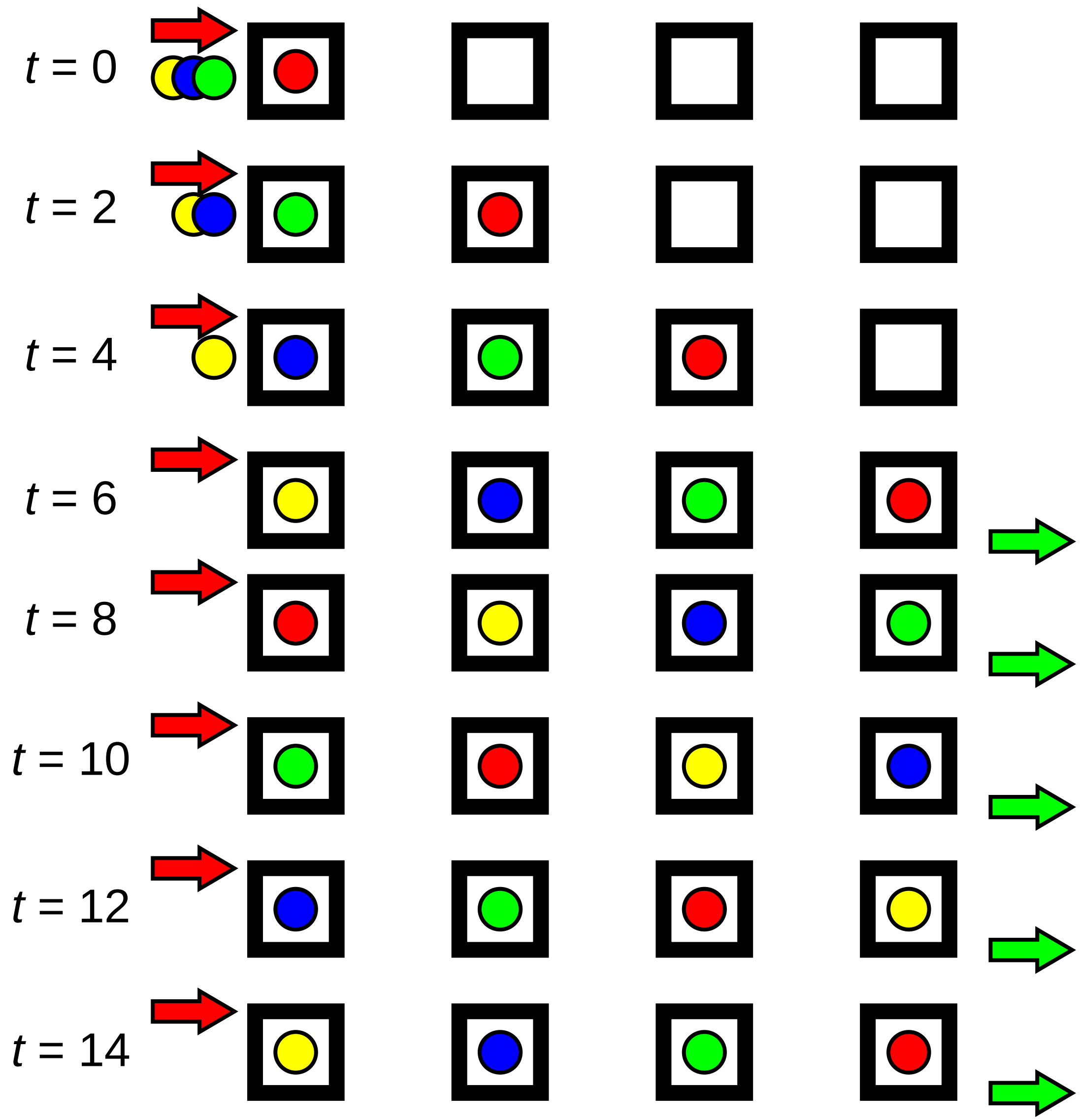
- La prestazione della linea:

$$T_0 = 8 \text{ h}$$
$$r_b = 0.5 \text{ pz/h}$$

$$WIP = 3 \text{ pz}$$
$$TH = \frac{3}{8} \text{ pz/h} = \frac{3}{4} r_b$$
$$CT = 8 \text{ h}$$

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli Federico II



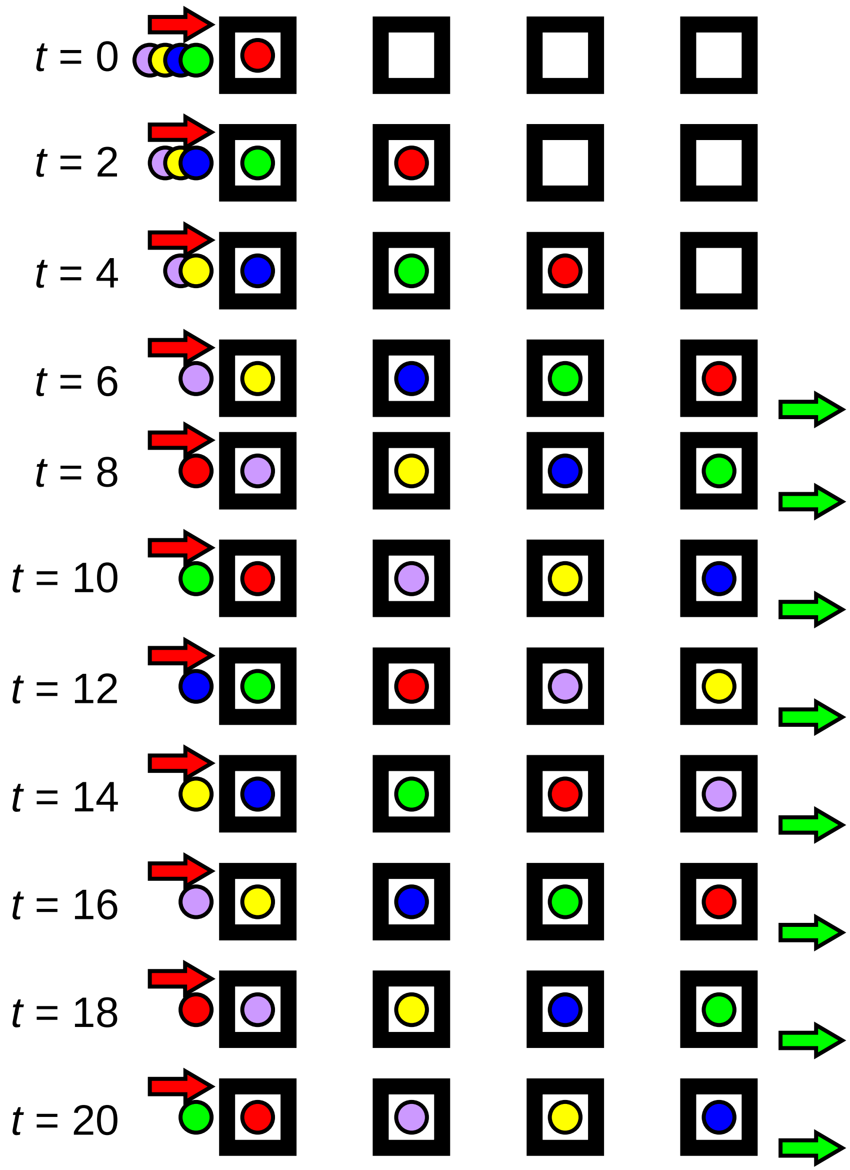
Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- La prestazione della linea:

$$T_0 = 8\ \text{h}$$
$$r_b = 0.5\ \text{pz/h}$$

$$WIP = 4\ \text{pz}$$
$$TH = \frac{1}{2}\ \text{pz/h} = r_b$$
$$CT = 8\ \text{h}$$

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato



Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- La prestazione della linea:

$$T_0 = 8 \text{ h}$$
$$r_b = 0.5 \text{ pz/h}$$

$$WIP = 5 \text{ pz}$$
$$TH = \frac{1}{2} \text{ pz/h} = r_b$$
$$CT = 10 \text{ h}$$

- Riepilogo:

WIP	CT	% T_0	TH	% r_b
1	8	100	0.125	25
2	8	100	0.250	50
3	8	100	0.375	75
4	8	100	0.500	100
5	10	125	0.500	100
6	12	150	0.500	100
7	14	175	0.500	100
8	16	200	0.500	100
9	18	225	0.500	100
10	20	250	0.500	100

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

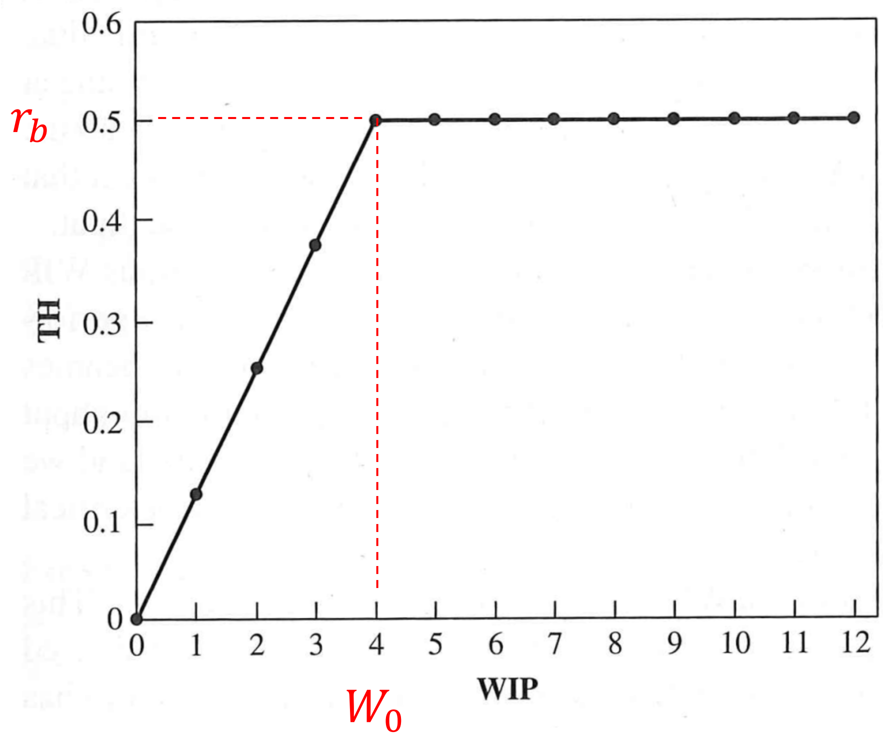
- Si osserva come la Legge di Little sia sempre rispettata per ogni tripletta di valori di TH, CT e WIP.
- Si osserva inoltre che vi è un particolare valore di WIP che consente alla linea di raggiungere il massimo TH, cioè r_b, con il minimo CT, cioè T_0. Tale valore è chiamato **WIP critico** e vale

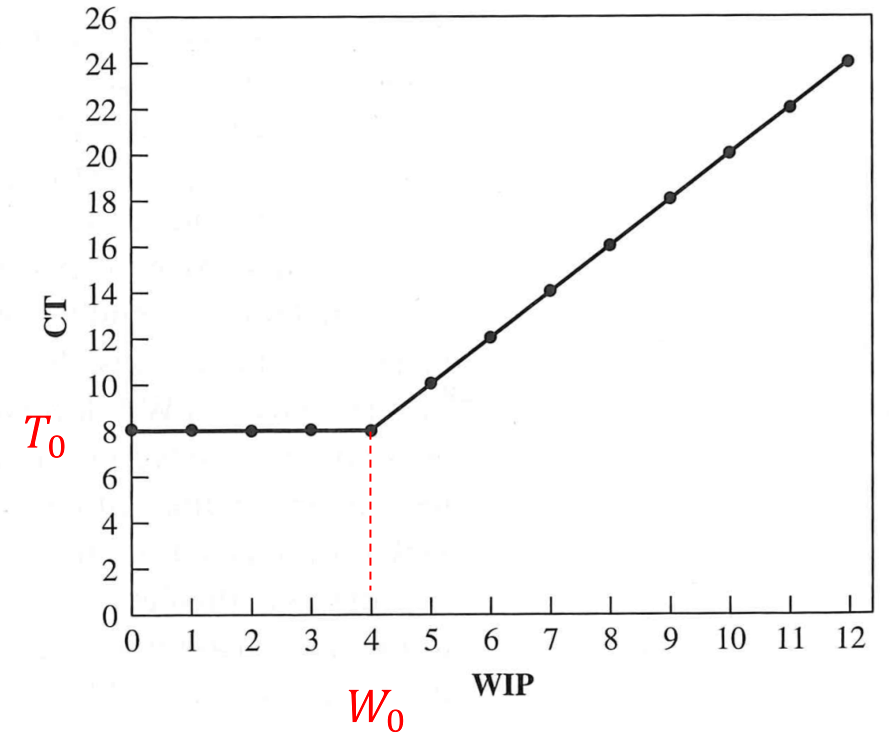
$$W_0 = r_b \cdot T_0$$

- Questo è il miglior valore di WIP per una linea che **non ha variabilità**.

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- Graficamente:





$$W_0 = r_b \cdot T_0 = 0.5 \cdot 8 = 4 \ \text{pz}$$

Prestazione massima di un flusso a WIP controllato

- Possiamo quindi derivare una legge per questa situazione «**ottima**» di funzionamento

  Best-case performance law: per una linea qualunque, il **minimo CT** ed il **massimo TH** per un determinato valore ***w*** di WIP sono dati da:

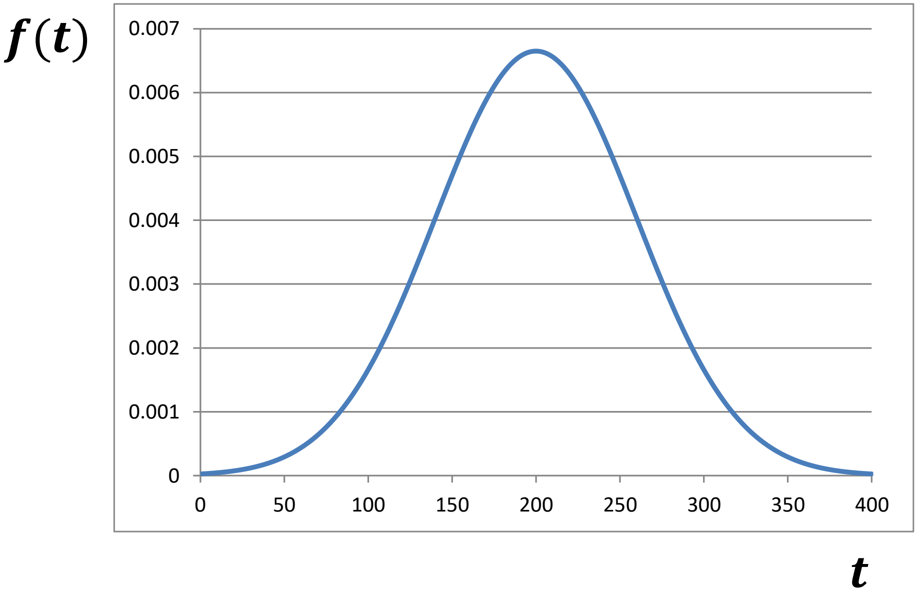
$$CT_{best} = \begin{cases} T_0, & \text{se } w \le W_0 \\ \dfrac{w}{r_b}, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

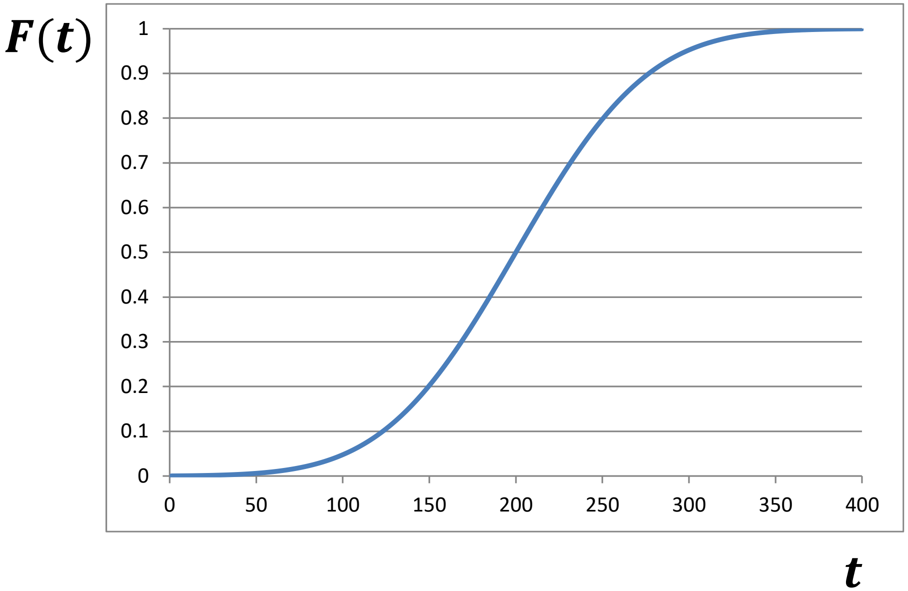
$$TH_{best} = \begin{cases} \dfrac{w}{T_0}, & \text{se } w \le W_0 \\ r_b, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Effetto della variabilità

- Introduciamo una variabilità nei tempi di processamento.
- I tempi di processamento saranno quindi «sorteggiati» da una distribuzione di probabilità.
- La presenza di variabilità provoca sempre un degrado delle prestazioni del sistema, che si traducono in una perdita di TH, un aumento di CT, o un aumento di WIP.

Esempio - Gaussiana



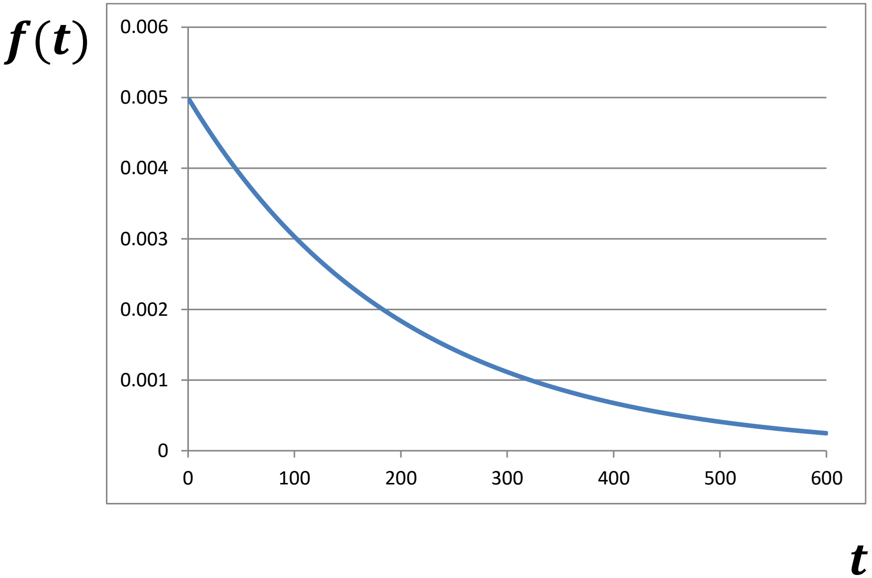


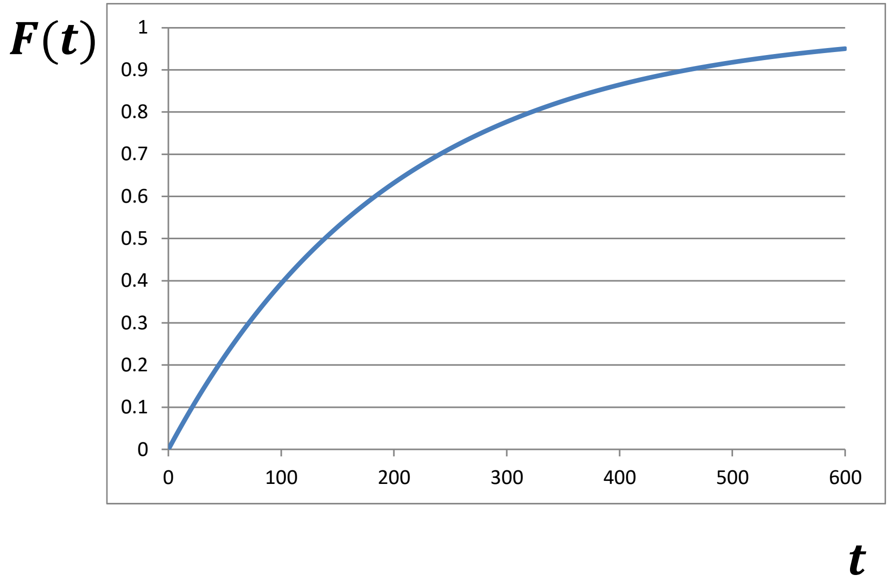
$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$$

Probabilità di avere un valore nell'intervallo $(-\infty, t]$

Esempio - Esponenziale





$$f(t) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}}$$

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Probabilità di avere un valore nell'intervallo $[0, t]$

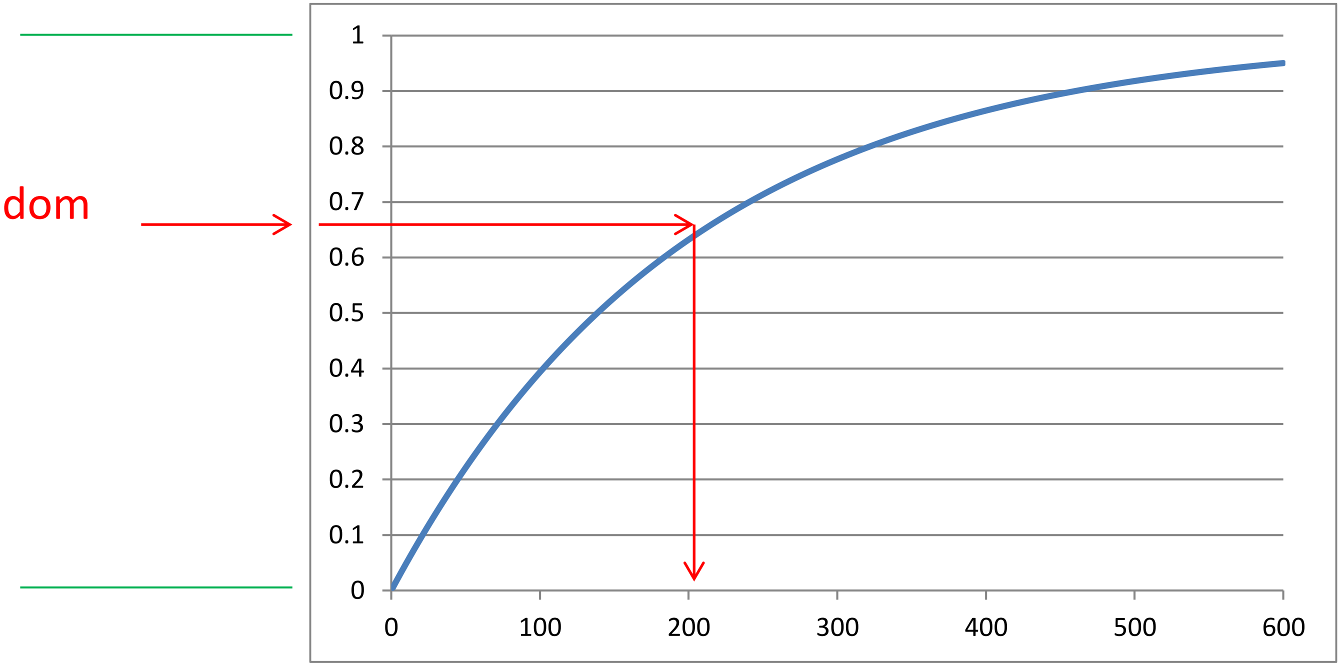
Effetto della variabilità

- La funzione esponenziale possiede la proprietà «memoryless», cioè la probabilità degli stati futuri non dipende dal passato, ma solo dallo stato attuale.
- Se una macchina ha un tempo di processamento che deriva da un processo di sorteggio «indipendente e identicamente distribuito (i.i.d.)» da una esponenziale, e la macchina sta lavorando un pezzo, allora il tempo medio al completamento è pari al valor medio della esponenziale, indipendentemente da quando il pezzo ha iniziato la lavorazione.

Sorteggio i.i.d. da esponenziale

$F(t)$

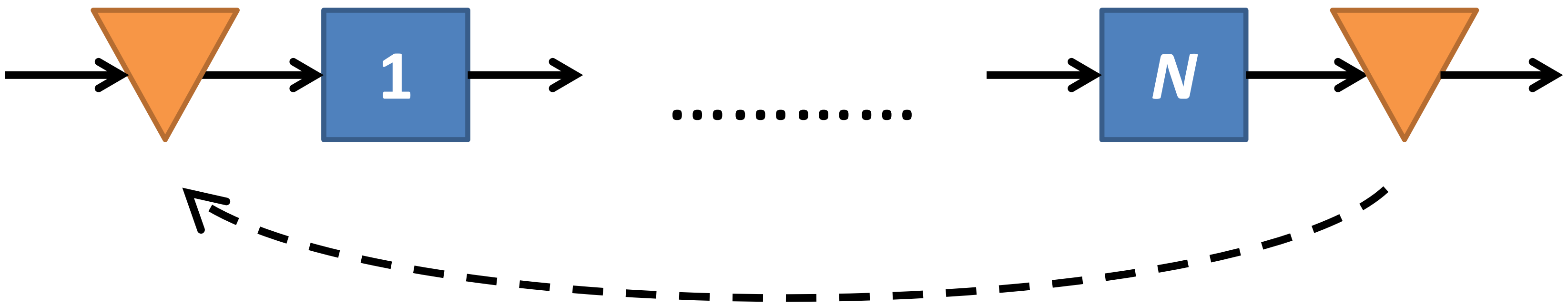
Numero random tra 0 e 1



t

Effetto della variabilità

- Consideriamo un sistema di ***N*** macchine in serie



- Ogni macchina ha un tempo di processamento esponenziale, di media ***t***
- Il sistema mantiene il WIP controllato al livello ***w***

Effetto della variabilità

- Rispetto ad un lungo periodo di osservazione, possiamo quindi calcolare

$$T_0 = N \cdot t$$

$$r_b = \frac{1}{t}$$

Effetto della variabilità

- Andiamo a determinare il tempo medio che impiega un pezzo ad attraversare il sistema.
- Il sistema è di fatto un CONWIP, nel quale i kanban circolano continuamente e determinano quella che è chiamata «*closed queue network*».
- Un sistema di questo tipo, avendo anche un comportamento *memoryless* per le ipotesi fatte, può essere risolto applicando la ***mean value analysis*** **(MVA)**.

Effetto della variabilità

- La MVA stabilisce che, allo stato stazionario, un generico pezzo che arriva ad una macchina vede gli altri $w-1$ pezzi distribuiti su tutte le macchine in modo proporzionale al comportamento medio del sistema.
- Nel nostro caso, essendo il sistema bilanciato, i $w-1$ pezzi si distribuiranno in modo uniforme su tutte le macchine.

Effetto della variabilità

- Perciò, un generico pezzo che arriva ad una macchina vedrà di fronte a sé un numero di pezzi pari a:

$$\frac{w-1}{N}$$

- e spenderà un tempo medio per attraversare la macchina pari a:

$$\frac{w-1}{N} \cdot t + t = \left(1 + \frac{w-1}{N}\right) \cdot t$$

- Dato che tutte le stazioni sono «identiche» in quanto hanno la stessa distribuzione dei tempi di attraversamento, possiamo calcolare il CT della linea come:

$$CT = N \cdot \left(1 + \frac{w-1}{N}\right) \cdot t$$

$$= N \cdot t + (w-1) \cdot t$$

$$= T_0 + \frac{w-1}{r_b}$$

Effetto della variabilità

- Applicando la Legge di Little possiamo poi calcolare il TH

$$TH = \frac{WIP}{CT}$$

$$= \frac{w}{T_0 + (w-1)/r_b}$$

$$= \frac{w}{W_0 + w - 1} \cdot r_b$$

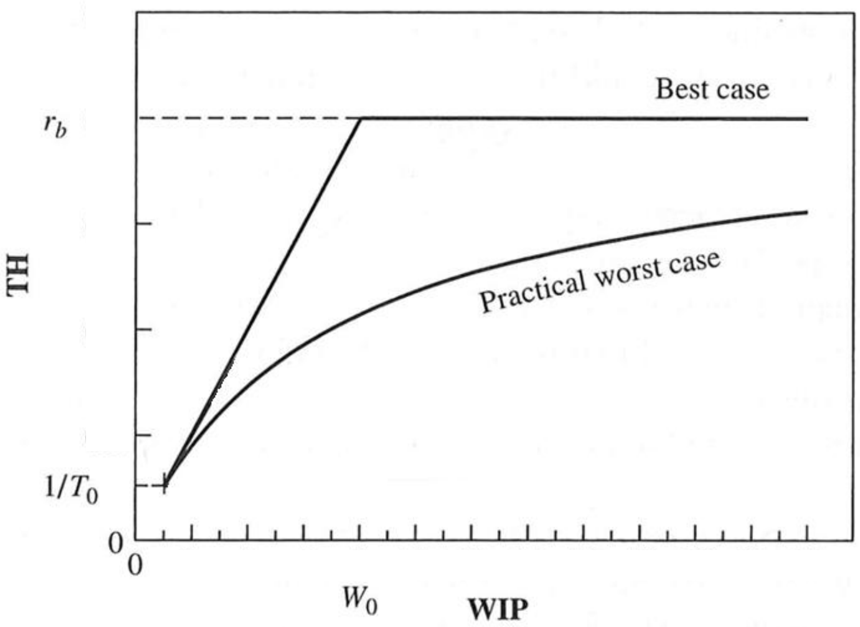
- Otteniamo quindi una legge di prestazione che considera una variabilità nel sistema, in questo caso modellata come un sistema *memoryless*
- **Practical worst-case (PWC) performance law**

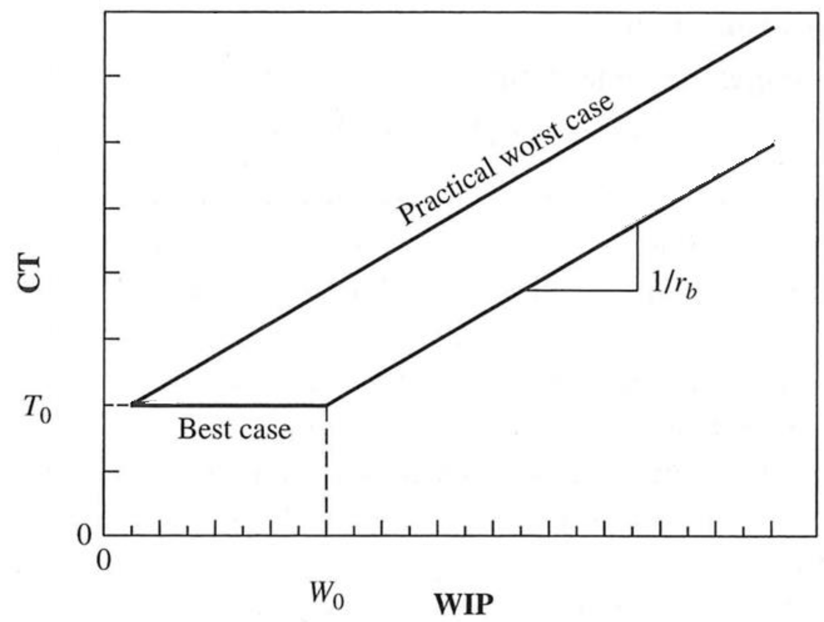
$$CT_{PWC} = T_0 + \frac{w-1}{r_b}$$

$$TH_{PWC} = \frac{w}{W_0 + w - 1} \cdot r_b$$

Effetto della variabilità

- Graficamente



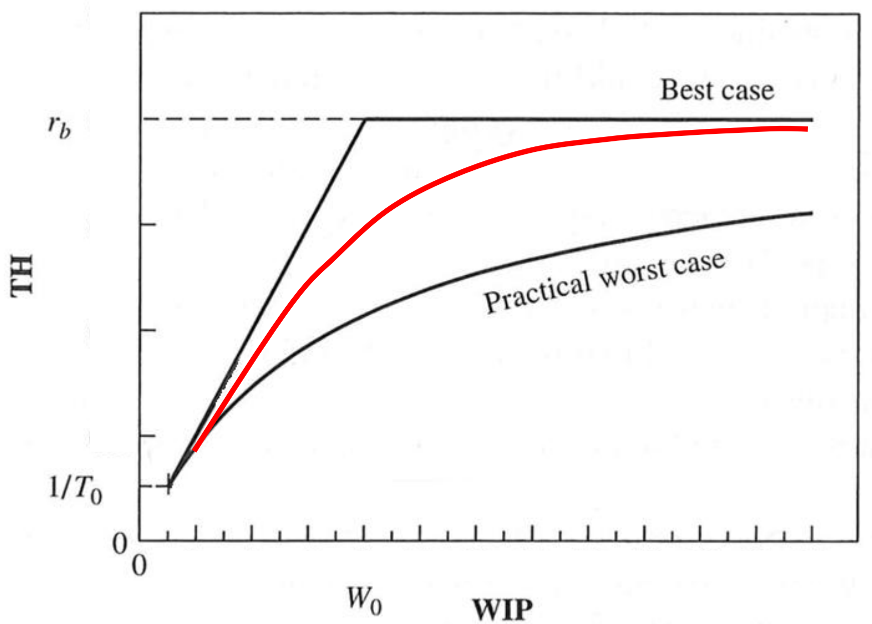


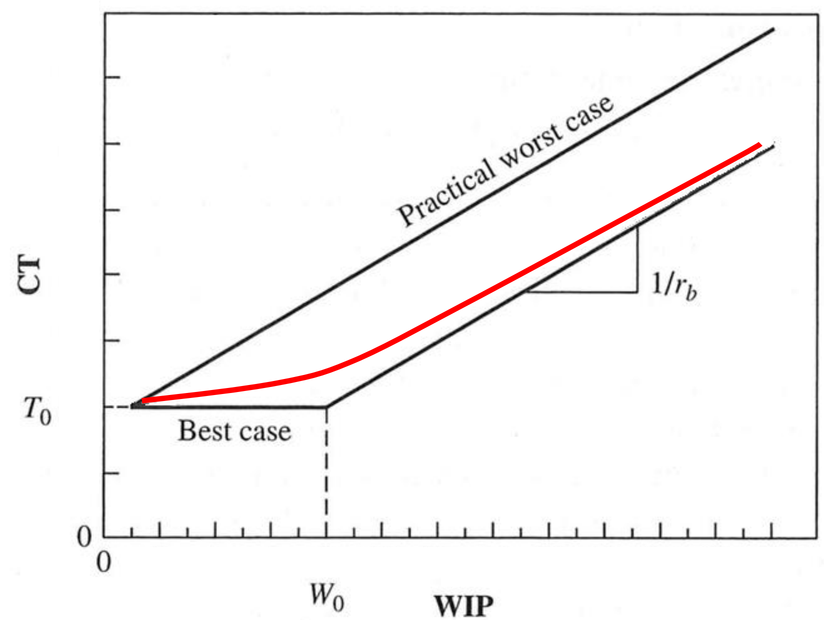
Effetto della variabilità

- Si nota quindi come la presenza di variabilità produce un degrado delle prestazioni del sistema
- Gli effetti della variabilità possono essere compensati agendo su due leve d'azione:

1. Aumentare la **scorta nel sistema**, per meglio disaccoppiare le macchine ed impedire i fenomeni di *starvation* e *blocking*
2. Aggiungere **capacità produttiva** in alcune parti del sistema (sbilanciare il sistema)

- La linea rossa mostra l’effetto di sovraccapacità produttiva introdotta nelle risorse non collo di bottiglia





Scuola Politecnica e delle Scienze di Base
Università degli Studi di Napoli Federico II

Esercizio: Penny Fab Two

- Sia data una linea in cui i job devono visitare quattro stazioni per essere processati.
- Le stazioni sono costituite da più macchine identiche poste in parallelo.

Station Number	Number of Machines	Process Time (hour)
1	1	2
2	2	5
3	6	10
4	2	3

- Si determinino le curve del best-case e del practical worst-case

Svolgimento

- Per prima cosa determiniamo i ratei effettivi di processamento delle stazioni.

$$r_{e_1} = \frac{m_1}{t_{e_1}} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \text{job/h}$$

$$r_{e_2} = \frac{m_2}{t_{e_2}} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \text{job/h}$$

$$r_{e_3} = \frac{m_3}{t_{e_3}} = \frac{6}{10} = 0.6 \quad \text{job/h}$$

$$r_{e_4} = \frac{m_4}{t_{e_4}} = \frac{2}{3} = 0.67 \quad \text{job/h}$$

- Determiniamo ora i parametri di linea

$$r_b = r_{e_2} = 0.4 \qquad \text{job/h}$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{4} t_{e_i} = 2 + 5 + 10 + 3 = 20 \qquad \text{h}$$

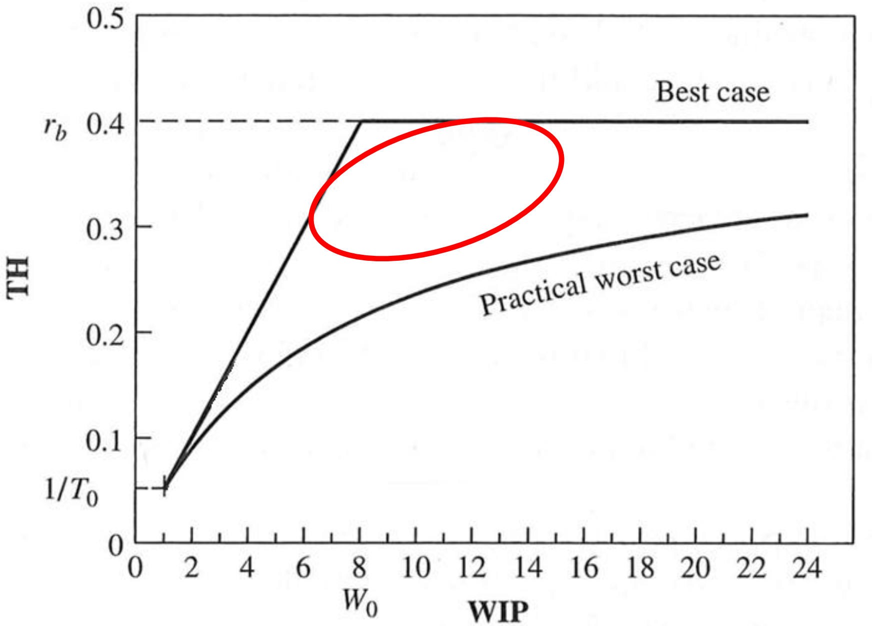
$$W_0 = r_b \cdot T_0 = 0.4 \cdot 20 = 8 \qquad \text{job}$$

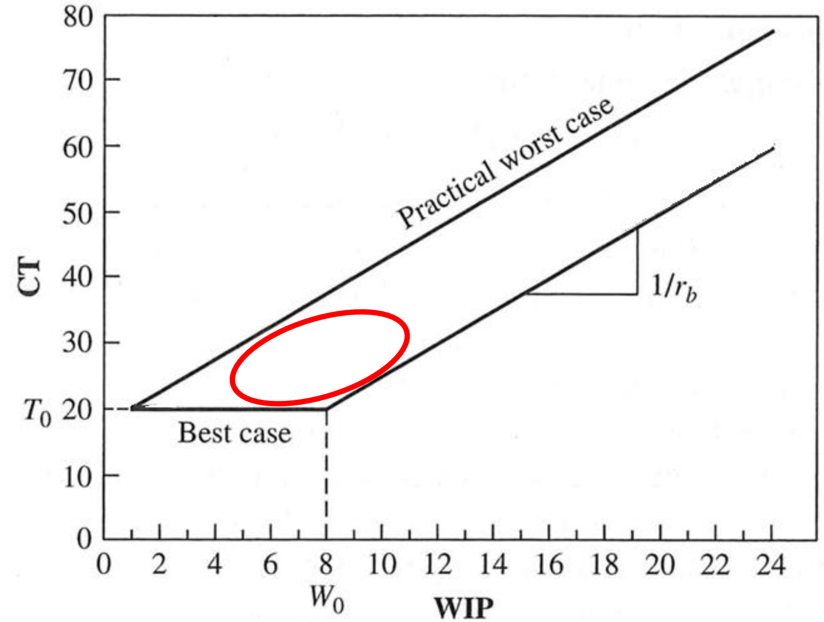
- Le equazioni del PWC

$$CT = T_0 + \frac{w-1}{r_b} = 20 + \frac{w-1}{0.4} \qquad \text{h}$$

$$TH = \frac{w}{W_0 + w - 1} \cdot r_b$$
$$= \frac{w}{8 + w - 1} \cdot 0.4 \quad \text{job/h}$$

Esercizio





- La linea reale può esprimere prestazioni comunque limitate dal best-case. Tanto più si avvicina al «ginocchio» del best-case, tanto più esprime una prestazione ideale.

Esercizio

- Se volessimo calcolare il WIP medio alle stazioni quando la linea funziona alla sua produttività massima:

Station Number	Number of Machines	Process Time (hour)	Station Capacity (Jobs per Hour)
1	1	2	0.50
2	2	5	0.40
3	6	10	0.60
4	2	3	0.67

$$\text{ST1: } WIP_{ST1} = r_b \cdot CT_{ST1} = 0.4 \cdot 2 = 0.8 \text{ job}$$

$$\text{ST2: } WIP_{ST2} = r_b \cdot CT_{ST2} = 0.4 \cdot 5 = 2 \text{ job}$$

$$\text{ST3: } WIP_{ST3} = r_b \cdot CT_{ST3} = 0.4 \cdot 10 = 4 \text{ job}$$

$$\text{ST4: } WIP_{ST4} = r_b \cdot CT_{ST4} = 0.4 \cdot 3 = 1.2 \text{ job}$$

Per approfondimenti

Hopp, W.J., and Spearman, M.L. (2001). *Factory Physics*. 2nd edition. McGraw-Hill, New York, USA. ISBN: 0-256-24795-1