

**Esercizio n. 1** Un recipiente sulla cui parete è praticato un foro di raggio 1.5 cm è riempito d'acqua tramite un rubinetto con la portata di 90 l/min. A quale altezza, rispetto al foro, si porterà in condizioni stazionarie il livello dell'acqua nel recipiente?

- a) 1.1 m      b) 50 cm      c) 35 cm      d) **23 cm**      e) 76 cm

Dal principio di Bernoulli abbiamo:

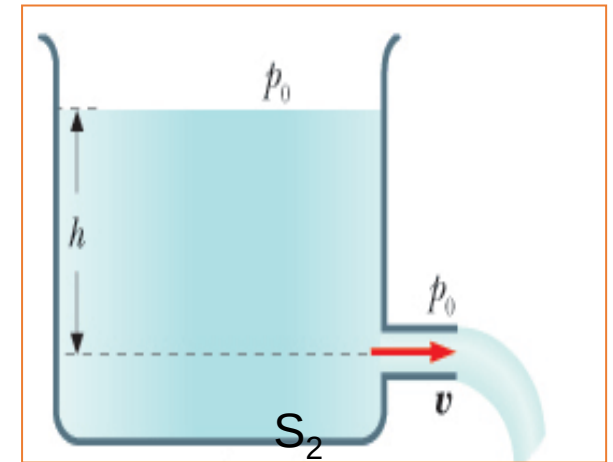
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$$

Ma

$p_1 = p_2 =$  pressione atmosferica

$h_2 = 0$

$v_1 = 0$  il livello dell'acqua scende con velocità  
approssimativamente uguale a zero



Mazzoldi, Nigro, Voci  
Elementi di Fisica, Meccanica - Termodinamica  
EdiSES, 2007

Quindi:

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gh_1}$$



In condizioni stazionarie:

$$Q_{\text{rec}} = Q_{\text{foro}}$$



$$Q_{\text{rec}} = S_{\text{foro}} v_2 = S_{\text{foro}} \sqrt{2gh_1}$$



$$Q_{\text{rec}}^2 = S_{\text{foro}}^2 2gh_1$$



$$h_1 = \frac{Q_{\text{rec}}^2}{2gS_{\text{foro}}^2} = 0.23\text{m} = 23\text{cm}$$



**Esercizio n. 2** In regime di moto stazionario nel tratto A di una condotta cilindrica orizzontale fluisce acqua con una velocità di 2.9 m/s; la pressione dinamica in A è di  $2.5 \cdot 10^5$  Pa. Successivamente la condotta si restringe presentando un diametro che è la metà del diametro iniziale; un tubo piezometrico T inserito nel tratto B di minor sezione si innesta in un serbatoio S ad altezza  $h = 7$  m rispetto alla condotta (vedi figura). Assimilando l'acqua a un fluido ideale, a) determinare la pressione dinamica nel tratto B; b) sapendo che la pressione esterna è pari a 1 atm, verificare se la pressione dinamica in B è sufficiente a erogare acqua al serbatoio.

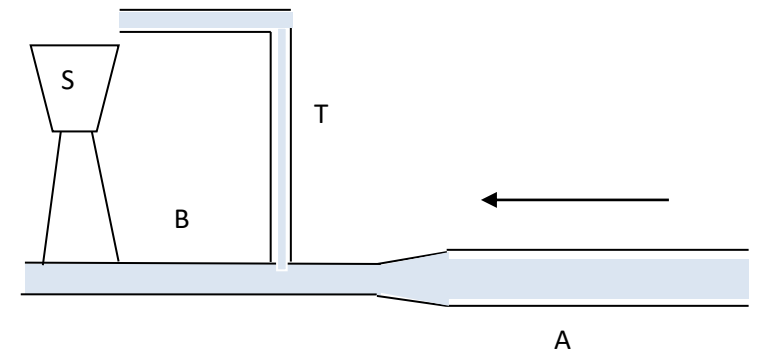
- a)  $1.87 \cdot 10^2$  Pa, è sufficiente      b)  $2.22 \cdot 10^5$  Pa, è insufficiente  
c) 1 atm, è sufficiente      d)  $1.87 \cdot 10^5$  Pa, è sufficiente  
e) 1mmHg, insufficiente

*Applichiamo l'equazione di Bernoulli ad una sezione  $S_A$  del tratto A e ad una sezione  $S_B$  del tratto B:*

$$p_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$



$$p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2)$$



*Sappiamo che il diametro nel tratto B è la metà del diametro nel tratto A, quindi applicando la legge di continuità:*

$$S_A v_A = S_B v_B \quad \longrightarrow \quad v_B = \frac{S_A}{S_B} v_A \quad \longrightarrow \quad v_B = \frac{\pi D_A^2 / 4}{\pi D_B^2 / 4} v_A$$
$$v_B = \frac{D_A^2}{D_B^2 / 4} v_A = 4v_A$$

*Quindi:*

$$p_B = p_A + \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2) = (2.5 \times 10^5 \text{ Pa}) - \frac{15}{2} \times (1000 \text{ kg} / \text{m}^3) \times (2.9^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2) =$$
$$= 1.87 \times 10^5 \text{ Pa}$$

*Per alimentare il serbatoio collegato con il tubo piezometrico T occorre una pressione dinamica in B che sia almeno uguale a quella necessaria per far salire l'acqua nel tubo fino al punto di innesto del serbatoio, cioè deve essere:*

$$p = p_0 + \rho gh$$

$$p = (1.01 \times 10^5 \text{ Pa}) + (1000 \text{ kg} / \text{m}^3) \times (9.81 \text{ m} / \text{s}^2) \times (7 \text{ m}) = 1.7 \times 10^5 \text{ Pa}$$

*Nel tratto B:*

$$p_B > p$$

La pressione dinamica in B è sufficiente ad erogare acqua al serbatoio.

**Esercizio n. 3** Un fluido, la cui viscosità è di  $1,81 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$ , viene spruzzato nell'aria con una portata di  $10^{-7} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$  servendosi di una siringa. L'ago della siringa è lungo  $0.02 \text{ m}$  ed ha il raggio interno uguale a  $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

a) Qual è la velocità media del fluido (assumendo un flusso laminare)?

b) Qual è la differenza di pressione necessaria a mantenere tale portata?

a) **0.12 m/s; 147 Pa**      b) 1.2 m/s;  $3.7 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$       c) 3.2 cm/s;  $3.7 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$       d) 0.88 m/s;  $1.7 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$

c) 4.0 cm/s  $1.7 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$

La velocità media del fluido in uscita dalla siringa dipende dalla sezione dell'ago e dalla portata per cui:

$$v_m = \frac{Q}{S} \quad \longrightarrow \quad v_m = \frac{Q}{\pi r^2} \quad \longrightarrow \quad v_m = \frac{10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}}{3.14 \times 10^{-8} \text{ m}^2} \quad \longrightarrow \quad v_m = 0.12 \text{ m/s}$$

Per la legge di Poiseuille, la caduta di pressione necessaria a mantenere la portata del fluido è:

$$\Delta P = \frac{8 \eta l}{\pi r^4} Q$$

$$\Delta P = \left( \frac{(8 \times 1.81 \cdot 10^{-3} \times 0.02)}{3.14 \times (5 \cdot 10^{-4})^4} \right) \times 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s} = 147 \text{ Pa}$$

**Esercitazione n. 4** Ad un paziente viene iniettata una soluzione tramite un'iniezione con un ago ipodermico lungo 3.2 cm e di diametro 0.28 mm. Se si suppone che la soluzione presenti la stessa densità e viscosità dell'acqua, quanto deve valere la differenza di pressione necessaria per iniettare la soluzione a 1.5 g/s? (densità dell'acqua 1000 kg/m<sup>3</sup>; viscosità dell'acqua a 20 °C 1.005 10<sup>-3</sup> Pa s)

a) 3.2 10<sup>5</sup> Pa      b) 1.1 10<sup>2</sup> Pa      c) 1 atm      d) 760 mmHg      e) 0.87 10<sup>6</sup> Pa

Valutiamo la portata della siringa:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{m}{\rho \Delta t} = \frac{(1.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s})}{(10^3 \text{ kg/m}^3)} = 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Dalla legge di Poiseuille si ricava la differenza di pressione necessaria per iniettare la soluzione:

$$\Delta p = \frac{8 \eta l Q}{\pi R^4}$$

Quindi:

$$\Delta p = \frac{8 \times (1.005 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}) \times (3.2 \cdot 10^{-2} \text{ m}) \times (1.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s})}{(3.14) \times (0.14 \cdot 10^{-3} \text{ m})^4} = 3.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

**Esercitazione n. 5** Un liquido con viscosità  $\eta = 0.05$  poise e densità  $\rho = 1.1$  g/cm<sup>3</sup>, scorre in un condotto a sezione circolare di raggio 1.2 mm e lunghezza  $l = 25$  cm. Calcolare a) la velocità media di flusso assumendo che esso sia laminare e che agli estremi la differenza di pressione sia 0.1 atm; b) la velocità critica per  $N_R = 1500$ ; c) che differenza di pressione bisogna applicare perché il flusso diventi turbolento?

- a) 2.33 m/s; 19 m/s; 2300 Pa      b) **1.46 m/s; 2.8 m/s; 0.19 atm**      c) 10 mm/s; 10 m/s; 133 Pa  
d) 9.81 m/s; 22.5 m/s; 1 atm      e) 2.90 m/s; 9.91 m/s; 760 mmHg

Per un fluido viscoso in moto stazionario in un condotto cilindrico vale la legge di Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi r^4}{8 \eta l} \Delta p$$

Vale anche la legge della portata, quindi:

$$Q = S v_m = \pi r^2 v_m$$

Uguagliando le due relazioni:

$$\pi r^2 v_m = \frac{\pi r^4}{8 \eta l} \Delta p$$

Da cui:

$$v_m = \frac{r^2}{8 \eta l} \Delta p = \frac{(1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \times (0.1 \text{ atm} \times 101325 \text{ Pa/atm})}{8 \times (0.005 \text{ Pa s}) \times (0.25 \text{ m})} = 1.46 \text{ m/s}$$



Per determinare la velocità critica utilizziamo il numero di Reynolds, quindi:

$$v_c = \frac{N_R \eta}{2 \rho r} = \frac{1500 \times 0.005 Pa \cdot s}{2 \times (1100 kg / m^3) \times (1.2 \cdot 10^{-3} m)} = 2.8 m / s$$

Il flusso diventerà turbolento quando la velocità supererà il suo valore critico:

$$v_m > v_c$$



$$\frac{r^2}{8 \eta l} \Delta p > \frac{N_R \eta}{2 \rho r}$$



Per la differenza di pressione abbiamo quindi che deve essere:

$$\Delta p > \frac{4 l N_R \eta^2}{\rho r^3} = 0.19 atm$$



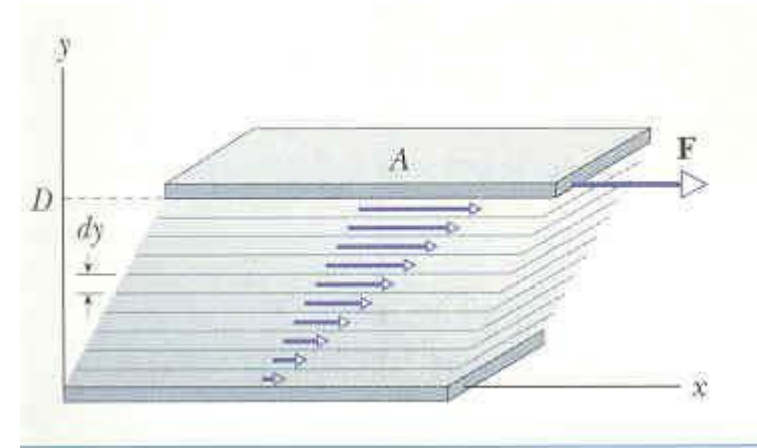
**Esercitazione n. 6** Una lastra piana di superficie  $S = 20 \text{ cm}^2$  può scorrere sulla superficie libera di un liquido di viscosità  $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}$  sotto l'azione di una certa forza  $F$ . Calcolare il valore di  $F$ , se la lastra si muove di moto uniforme con velocità  $v = 1 \text{ m/s}$ , sapendo che l'altezza dello strato liquido è  $1 \text{ cm}$ .

- a)  $1 \text{ N}$     b)  $10^3 \text{ N}$     c)  $20 \cdot 10^{-5} \text{ N}$     d)  $50 \cdot 10^{-6} \text{ N}$     e)  $9 \cdot 10^7 \text{ N}$

$$F = A\eta \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Da cui:

$$F = (20 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2) \times (1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa s}) \frac{(1 \text{ m/s})}{(0.01 \text{ m})} = 20 \cdot 10^{-5} \text{ N}$$



**Esercitazione n. 7** Che resistenza oppone all'acqua ( $\eta = 10^{-3} \text{ Pa s}$ ) un ago ipodermico di lunghezza 8 cm e raggio interno 0.04 cm? L'ago viene ora inserito in una siringa con un pistone di area  $3.5 \text{ cm}^2$ . Quale forza bisogna applicare perché l'acqua penetri nella vena con una portata  $Q = 2 \text{ cm}^3/\text{s}$ ? Assumere che la pressione nella vena sia di 9 mmHg.

a)  $2.65 \cdot 10^3 \text{ Pa s/m}^3$ ; 5 N

b)  $4.56 \cdot 10^{-2} \text{ Pa s/m}^3$ ; 1 N

c)  $7.96 \cdot 10^9 \text{ Pa s/m}^3$ ; 6 N

d)  $7.96 \cdot 10^6 \text{ Pa s/m}^3$ ; 8 N

e)  $10.1 \cdot 10^9 \text{ Pa s/m}^3$ ; 6 N

La resistenza dell'ago è data da:

$$R = \frac{8\eta l}{\pi r^4} = \frac{8 \times (10^{-3} \text{ Pa s}) \times (0.08 \text{ m})}{\pi (0.04 \cdot 10^{-2} \text{ m})^4} = 7.96 \cdot 10^9 \text{ Pa s/m}^3$$

La differenza di pressione ai suoi capi è:

$$\Delta p = QR = (2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}) \times (7.96 \cdot 10^9 \text{ Pa s}) = 15920 \text{ N/m}^2 = 120 \text{ mmHg}$$

$$\text{Se } \Delta P = P_1 - P_2 = 120 \text{ mm Hg}$$

e

$$P_2 = 9 \text{ mm Hg}$$

$$\text{allora } P_1 = 129 \text{ mmHg} = 17157 \text{ N/m}^2$$

$$\text{Bisogna quindi applicare una forza: } F_1 = P_1 A = (17157 \text{ N/m}^2)(3.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 6 \text{ N}$$

**Esercitazione n. 8** Un circuito idraulico è costituito da un tubo di diametro 2 mm lungo 2 m in cui scorre un liquido di viscosità  $\eta = 10^{-3} \text{ Pa s}$  e densità  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  con una portata di  $1 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Il moto si può considerare laminare? La velocità con cui si scorre il liquido vale:

- a) no, 200 cm/s      b) **si, 0.318 m/s**      c) si, 318 cm/s      d) si, 100 dm/s  
e) no, 3.18 m/s

La velocità media  $v_m$  del liquido è legata alla portata dalla relazione:

$$Q = v_m S$$

da cui

$$v_m = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{1 \times 10^{-6} \text{ m}^3 / \text{s}}{3.14 \times 1 \times 10^{-3} \text{ m}} = 0.318 \text{ m/s}$$

*Legge di Leonardo*

Per verificare se il moto è laminare valutiamo il numero di Reynolds:

$$R = \frac{v_m \rho r}{\eta} = \frac{(0.318 \text{ m/s}) \times (1000 \text{ kg/m}^3) \times (10^{-3} \text{ m})}{10^{-3} \text{ Pa s}} = 318$$

*Il numero di Reynolds è minore di 1000, quindi il moto è laminare.*

**Esercizio n. 9** Calcolare la dilatazione dei vasi sanguigni in un individuo sotto sforzo tale che la pressione media dell'aorta salga a 140 mmHg e la portata del sangue si triplichi. (si consideri una portata media del sistema circolatori di 85 cm<sup>3</sup>/s, pressione media dell'aorta 100 mmHg, pressione media vena cava 10 mmHg).

- a) 1.2 r                      b) r                      c) 0.5 r                      d) 1.5 r                      e) 3 r

*Poiché la pressione media dell'aorta è 100 mmHg, mentre quella della vena cava è 10 mmHg, si ricava per la differenza di pressione ai capi dell'intera rete sanguigna (in condizioni normali):*

$$\Delta P = (100 - 10) \text{ mmHg} = 90 \text{ mmHg} = 11970 \text{ N} / \text{m}^2$$

*La resistenza totale è, considerando una portata media di 85 cm<sup>3</sup>/s:*

$$R = \frac{\Delta P}{Q} = \frac{11970 \text{ Pa}}{85 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 1.41 \times 10^8 \text{ Pa} \cdot \text{s} / \text{m}^3$$

*Quando la pressione nell'aorta sale a 140 mmHg, poiché la pressione nella vena cava rimane invariata, si ha invece:*

$$\Delta P^* = (140 - 10) \text{ mmHg} = 17290 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1.44 \Delta P$$

dove l'asterisco  
contraddistingue i  
valori sotto sforzo.



La resistenza totale diventa:

$$R^* = \frac{\Delta P^*}{Q^*} = \frac{17290 \text{ Pa}}{3.85 \times 10^{-6} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}} = 6.78 \times 10^7 \text{ Pa} \frac{\text{s}}{\text{m}^3} = 0.48 R$$

Questa diminuzione (praticamente del 50%) della resistenza viene raggiunta dilatando i vasi sanguigni.

Per quanto riguarda il raggio:

$$\frac{R^*}{R} = \left( \frac{r}{r^*} \right)^4$$

Da cui:

$$r^* = \sqrt[4]{\frac{R}{R^*}} \times r = 1.2 \cdot r$$



**Esercizio n. 10** Una fontanella a zampillo verticale ha il beccuccio di uscita dell'acqua di forma circolare con raggio uguale a 0.5 cm. Se la fontana è alimentata con un condotto di portata 1 l/s, a quale altezza arriverà il getto, se si trascurano le dissipazioni?

a) 13.3 m

b) 10.5 m

c) 8 m

d) 90 cm

e) 1m

La portata della fontanella è data da:  $Q = Sv$

La velocità di uscita dell'acqua sarà:

$$v = \frac{Q}{\pi r^2}$$

Trascurando l'attrito dell'aria la massima quota a cui arriverà il getto d'acqua è data dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow$$

**Conservazione dell'energia**

$$h = \left( \frac{Q}{\pi r^2} \right)^2 \frac{1}{2g} = \frac{(10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s})^2}{\pi^2 \times (5 \times 10^{-3} \text{ m})^4} \frac{1}{2(9.81 \text{ m} / \text{s}^2)} \cong 8 \text{ m}$$