FISICA II

Lez. 10 – Legge Faraday

Prof. Giovanni Mettivier

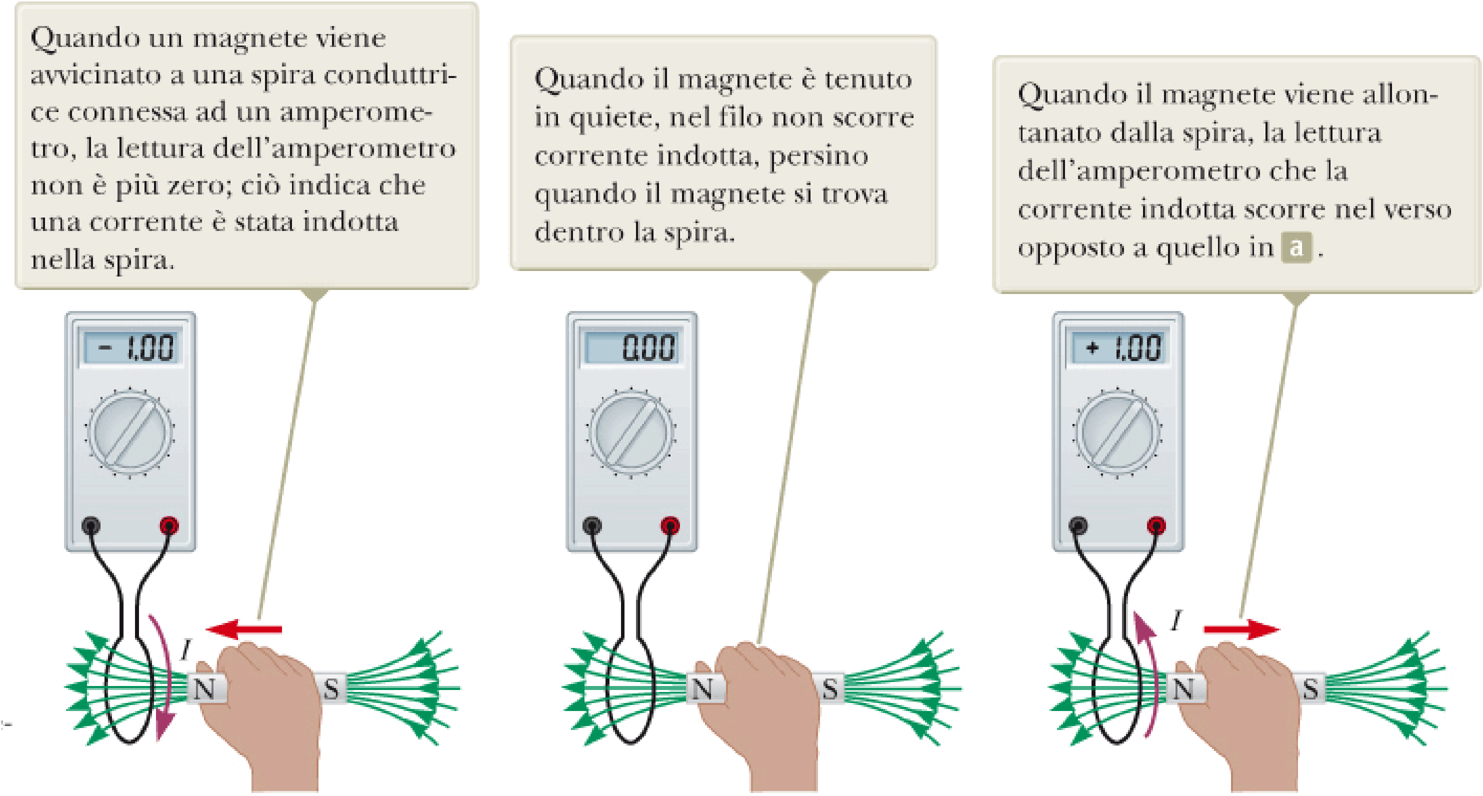
Prof. Giovanni Mettivier, PhD

Dipartimento Scienze Fisiche
Università di Napoli “Federico II”
Compl. Univ. Monte S.Angelo
Via Cintia, I-80126, Napoli
mettivier@na.infn.it
+39-081-676137

Obiettivi di apprendimento

- Capire che il flusso magnetico Φ rispetto a una superficie è la quantità di campo magnetico che la attraversa da parte e parte.
- Calcolare il flusso magnetico Φ attraverso una superficie integrando su tutta la superficie il prodotto scalare tra il vettore campo magnetico ***B*** e il vettore *d**A*** relativo a un elemento di superficie, sia operando con i moduli e gli angoli sia con la notazione a versori.
- Rendervi conto che, al variare del numero di linee di campo magnetico che intercettano una spira conduttrice, in essa si induce una corrente.
- Sapere che la corrente indotta in una spira conduttrice è generata da una forza elettromotrice (*f.e.m*) indotta.
- Applicare la legge di Faraday, che descrive la relazione tra la *f.e.m.* indotta in una spira conduttrice e la variazione temporale del flusso magnetico che la attraversa.
- Estendere la legge di Faraday al caso di molte spire che costituiscono una bobina.
- Identificare i tre possibili modi con cui in generale può variare il flusso magnetico attraverso una bobina.
- Servirvi della legge di Lenz e della regola della mano destra per determinare il verso della *f.e.m.* indotta e della corrente indotta in una spira conduttrice.
- Rendervi conto che, al variare del flusso magnetico attraverso una spira, la corrente indotta nella spira dà luogo a un campo magnetico che tende a opporsi alla variazione di flusso.
- Determinare, per una *f.e.m.* indotta in una spira conduttrice che contiene una batteria, *f.e.m*. netta o complessiva e calcolare la corrente che circola nella spira.

Consideriamo una spira di filo conduttore connessa a un amperometro. Se si avvicina un magnete alla spira, la lettura dell'amperometro si sposta dallo zero. Se invece, arrestiamo il magnete e lo manteniamo in una posizione fissa rispetto alla spira, l'amperometro indica di nuovo zero. Se poi allontaniamo il magnete dalla spira, la lettura cambia nel verso opposto. Con queste osservazioni concludiamo che la spira sente il moto relativo rispetto al magnete e possiamo collegare queste osservazioni alle variazioni del campo magnetico.

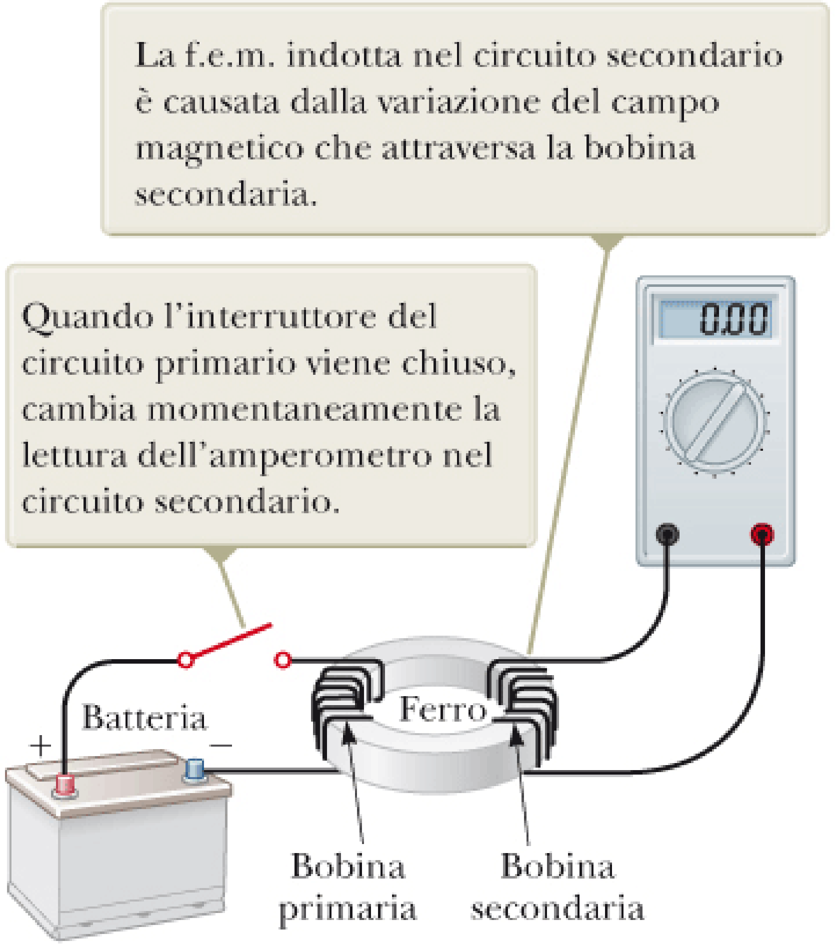


Legge induzione di Faraday

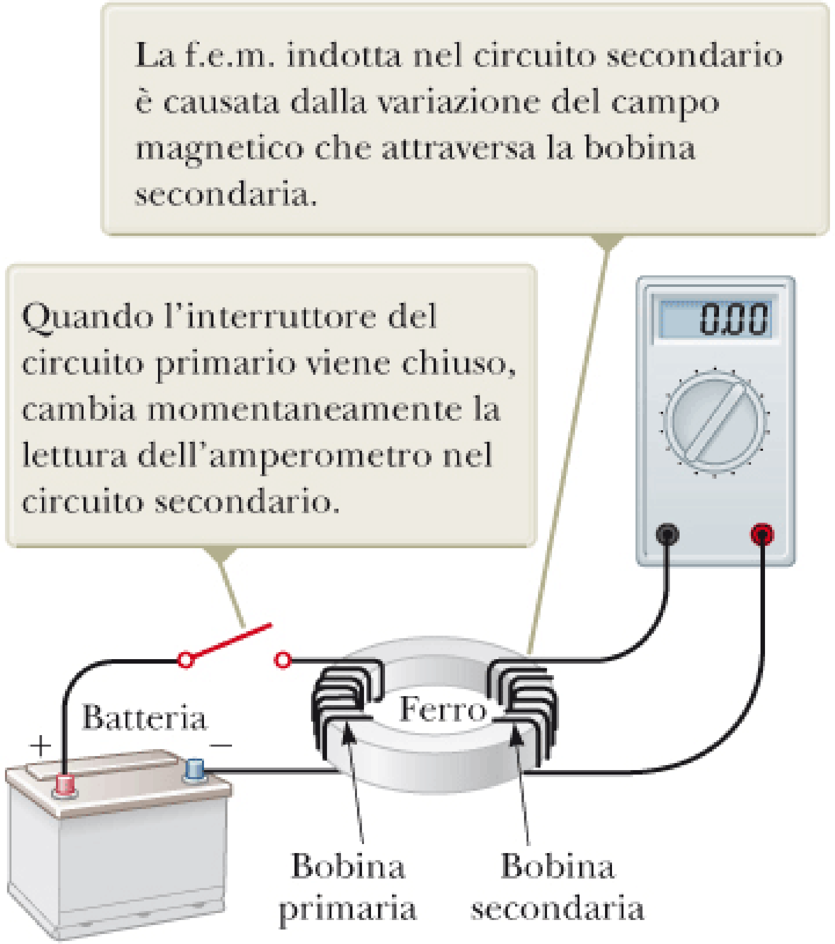
Se c'è una produzione di corrente anche senza la presenza di una batteria nel circuito, si dice che c'è una *corrente indotta* e che è stata generata da una *f.e.m. indotta.*

Descriviamo ora un esperimento eseguito per la prima volta da Faraday. Due bobine sono avvolte attorno allo stesso anello di ferro. La bobina primaria è collegata a una batteria tramite un interruttore. Quando l'interruttore è chiuso, la corrente che circola nella bobina produce un campo magnetico. La bobina secondaria è invece collegata solamente a un amperometro. Il circuito secondario non contiene batterie e non ha nessun collegamento elettrico con il circuito primario, per cui un'eventuale corrente che attraversi la bobina secondaria deve essere indotta da qualche agente esterno.

Nell'istante in cui si chiude l'interruttore, la lettura dell'amperometro si allontana dallo zero, indicando una corrente in un certo verso, e poi torna subito a zero. Nell'istante in cui l'interruttore viene aperto di nuovo, la lettura dell'amperometro si allontana dallo zero, indicando ancora una corrente, ma questa volta in senso opposto a quella di prima, poi torna a zero.

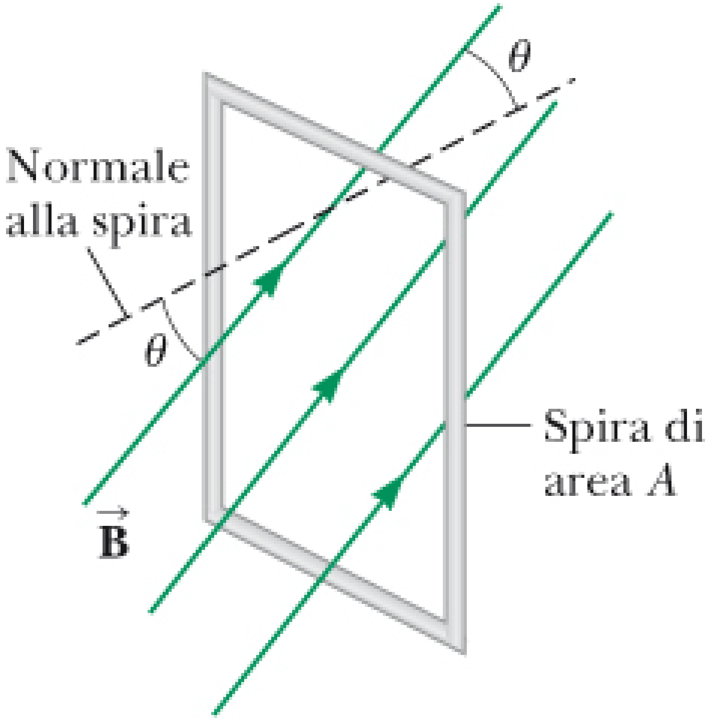


L'ultima osservazione importante è che l'amperometro non indica mai un passaggio di corrente nella bobina secondaria quando la corrente scorre nella bobina primaria è stazionaria. Per comprendere ciò che accade in questo esperimento si noti che, quando l'interruttore è chiuso, la corrente nel circuito primario produce un campo magnetico che penetra il circuito secondario. Inoltre, quando si chiude l'interruttore, il campo magnetico prodotto dalla corrente nel circuito primario varia, in un tempo finito, da zero fino a un certo valore ed è questo campo variabile che induce una corrente nel circuito secondario. E' importante osservare che non c'è corrente indotta nel circuito secondario quando nella bobina primaria c'è una corrente stazionaria. Sono le *variazioni* della corrente nella bobina primaria che inducono una corrente nella bobina secondaria, non la semplice *presenza* di una corrente.



Da queste osservazioni Faraday concluse che una corrente elettrica può essere indotta in un circuito da un campo magnetico variabile.
Nel circuito secondario viene generata una *f.e.m.* indotta dal campo magnetico variabile.
Questa *f.e.m.* indotta è direttamente proporzionale alla deriva temporale del flusso magnetico che attraversa il circuito (flusso concatenato). Questo enunciato, noto come **legge dell'induzione di Faraday**, si scrive matematicamente come

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



dove $\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A}$ è il flusso magnetico attraverso il circuito, cioè il flusso concatenato col circuito.
Se il circuito è una bobina di N spire, tutte di uguale superficie, è Φ_B è il flusso che attraversa una spira, viene indotta una *f.e.m.* in ogni spira. Le spire sono in serie, quindi tutte le *f.e.m.* si sommano e la *f.e.m.* totale indotta nella bobina è

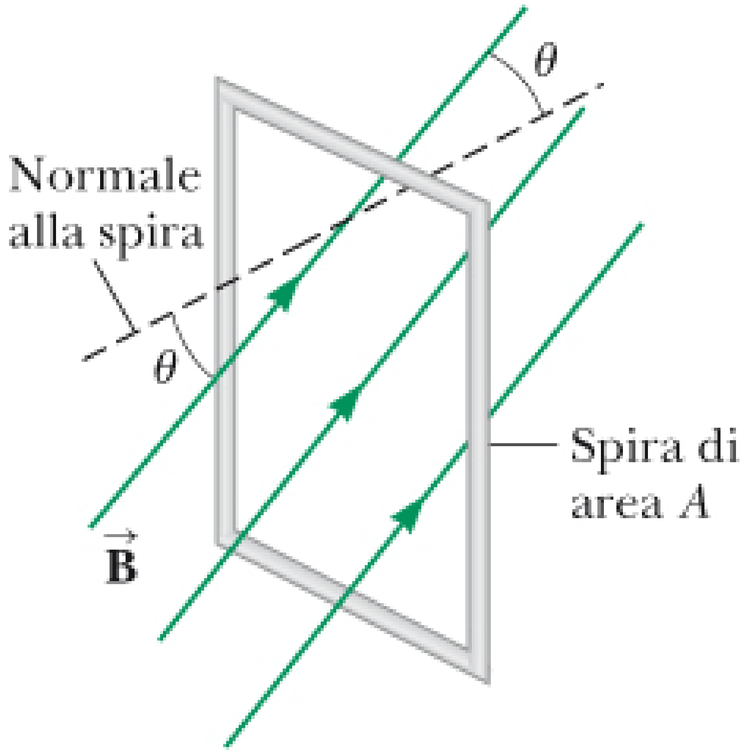
$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Supponiamo, che la spira che racchiude l'area A sia immersa in un campo magnetico uniforme ***B***. Il flusso magnetico concatenato alla spira è uguale a $BAcos\theta$, dove θ è l'angolo tra il campo magnetico concatenato alla spira; pertanto, la *f.e.m.* indotta può essere scritta come

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(BAcos\theta)$$

Questa espressione mostra che una forza elettromotrice può essere indotta in un circuito in diverse situazioni:

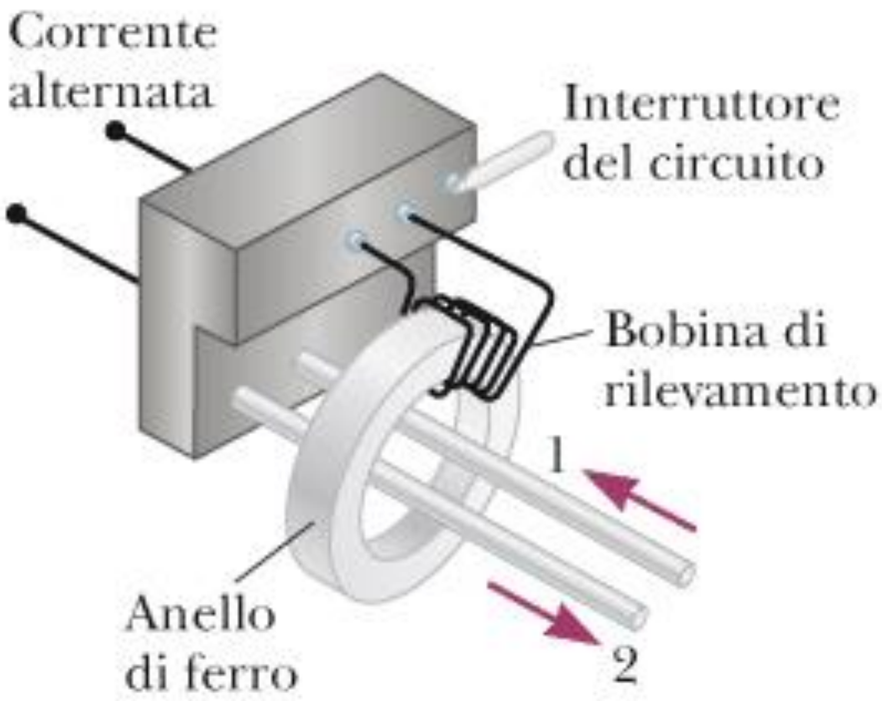
- Quando il modulo di ***B*** varia nel tempo;
- Quando varia la superficie racchiusa dal circuito;
- Quando varia l'angolo θ fra ***B*** e la normale alla superficie del circuito;
- Quando si verifica una qualsiasi combinazione dei casi precedenti.



Non dobbiamo preoccuparci del numero effettivo di linee di forza del campo magnetico che attraversano la spira in qualunque momento; è la variazione di questo numero di linee forza che induce la f.e.m. ed è la rapidità con cui questo numero cambia che determina il valore della f.e.m. indotta.

Altre applicazioni

Il cosiddetto «salvavita» si basa sulla legge di Faraday. Nell'interruttore di protezione, il filo 1 arriva alla presa a parete nell'apparecchiatura elettrica che deve essere messa in sicurezza, mentre il filo 2 torna indietro verso la presa a parete. Un anello di ferro dolce circonda i due fili e una bobina di rilevamento è avvolta intorno a una parte dell'anello. Poiché le correnti nei fili hanno versi opposti, il flusso magnetico attraverso la bobina prodotto dalle due correnti è nullo. Se, invece, la corrente di ritorno nel filo 2 cambia e le due correnti sono diverse, si genera un campo magnetico con linee di campo circolari che avvolgono i due fili.



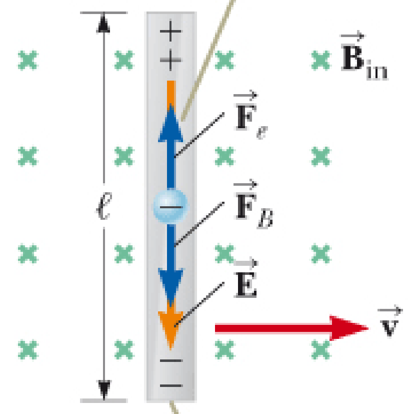
Esempio

Una bobina ha 200 spire quadrate di lato *d=18 cm*. Si accende un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano della bobina. Se il campo varia linearmente da 0 a *0.50 T* in *0.80 s*, qual è il valore della *f.e.m.* che viene indotta nella bobina mentre il campo magnetico sta cambiando?

$$|\varepsilon| = N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = N\frac{\Delta(BA)}{\Delta t} = NA\frac{\Delta B}{\Delta t} = Nd^2\frac{B_f - B_i}{\Delta t}$$

$$|\varepsilon| = (200)(0.18\,m)^2\frac{(0.5\,T - 0)}{0.8\,s} = 4\,V$$

Il conduttore rettilineo di lunghezza *l* mostrato in fig. si muove attraverso un campo magnetico uniforme entrante nel foglio. Per semplicità, supponiamo che il conduttore, soggetto a un'opportuna forza esterna, si muova con una velocità costante perpendicolare al campo. Per quanto sappiamo sulle particelle in moto in un campo magnetico, possiamo dire che sugli elettroni del conduttore agisce una forza $\boldsymbol{F}_B = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ diretta lungo il filo di lunghezza *l* e perpendicolare sia a ***v*** che a ***B*** sotto l'azione di questa forza, gli elettroni si muovo verso l'estremità inferiore del conduttore e vi si accumulano, lasciando nell'estremità superiore del conduttore una carica positiva. A causa di questa separazione di cariche si crea un campo elettrico ***E*** nel conduttore. Pertanto, gli elettroni subiscono anche gli effetti di questo campo elettrico. Le cariche continuano ad accumularsi alle due estremità del conduttore fintanto che la forza magnetica *qvB* verso il basso non sarà equilibrata dalla forza elettrica *qE* verso l'alto.



$$qE = qvB \; oppure \; E = vB$$

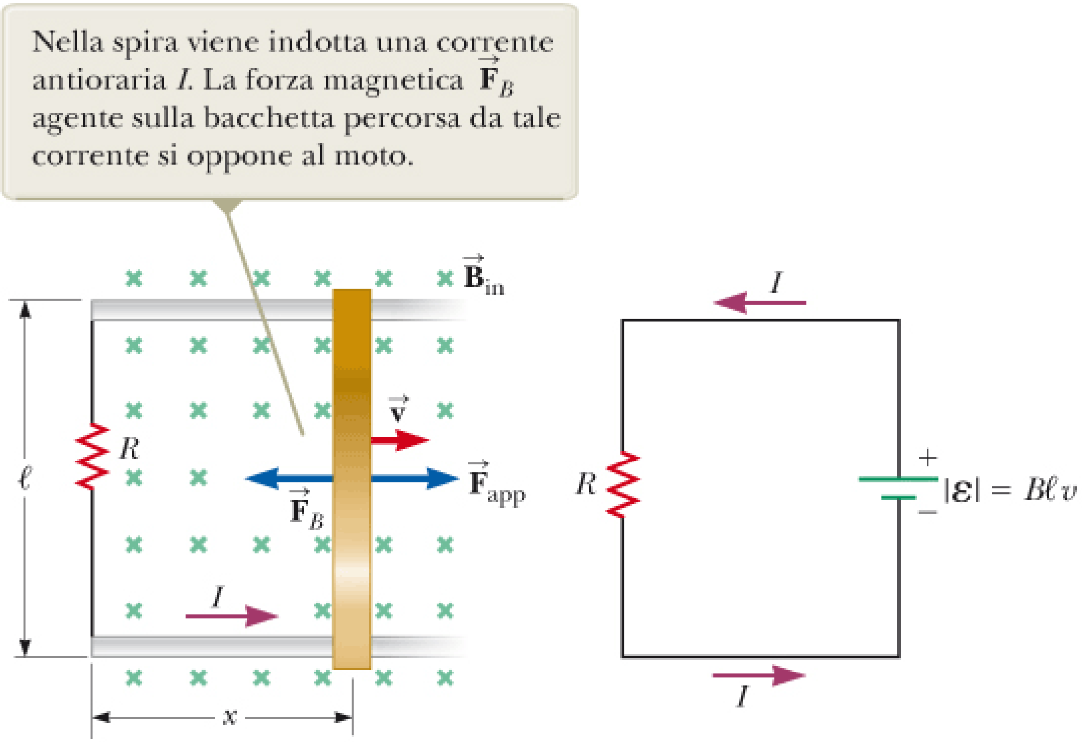
Essendo $\Delta V = El$ otteniamo

$$\Delta V = El = Blv$$

Con l'estremità superiore del filo nella fig. a potenziale maggiore di quello dell'estremità inferiore. Quindi, una differenza di potenziale è presente fra gli estremi del conduttore fintanto che il conduttore si muove nel campo magnetico uniforme. Se si inverte la direzione del moto, anche la polarità della differenza di potenziale si inverte.

Un caso più interessante è quello di un conduttore in movimento che è parte di un circuito chiuso. Si consideri un circuito costituito da una bacchetta conduttrice di lunghezza *l*, che scorre su due guide conduttrici fisse e parallele.
Per semplicità, supponiamo che la bacchetta in movimento abbia resistenza nulla e che la resistenza della parte fissa del circuito sia *R*. Un campo magnetico uniforme e costante ***B*** è applicato perpendicolarmente al piano del circuito.

Quando la bacchetta, sottoposta all'azione di una forza, viene spostata verso destra con velocità ***v***, le cariche libere della bacchetta sono soggette alla forza magnetica $\boldsymbol{F}_{app}$ diretta lungo la bacchetta. Poiché le cariche sono libere di muoversi nel circuito conduttore chiuso, questa forza genererà una corrente indotta.
In un certo istante l'area del circuito è *lx*, dove *x* è la posizione della bacchetta in quell'istante, ed il flusso magnetico attraverso il circuito è



$$\Phi_B = Blx$$

F.e.m. nei circuiti in moto

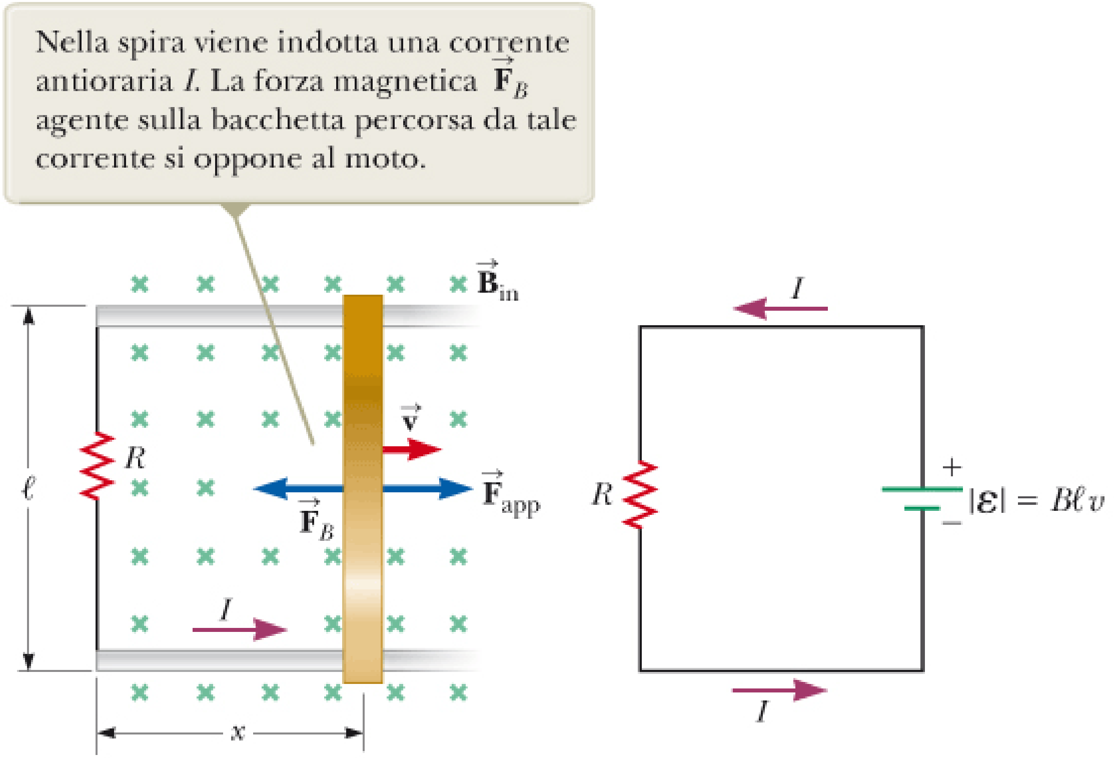
Usando la legge di Faraday e notando che la variazione di *x* nel tempo è *dx/dt*=*v*, si ricava la *f.e.m.* indotta dal moto della bacchetta

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt}$$

Poiché la resistenza del circuito è *R*, l'intensità della corrente indotta è

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$

La fig. mostra il circuito equivalente relativo a questo esempio.



Esaminiamo ora il sistema dal punto di vista energetico. E' possibile capire quale sia la sorgente di questa corrente e dell'energia associata notando che la forza applicata compie un lavoro sulla bacchetta. Il moto della bacchetta nel campo magnetico fa si che le cariche si muovano lungo la bacchetta con una certa velocità di deriva e conseguentemente una corrente scorra lungo la bacchetta. La variazione di energia interna del sistema in un certo intervallo di tempo dovrà essere uguale all'energia trasferita tramite il lavoro fatto sul sistema. In accordo con il principio di conservazione dell'energia. La forma appropriata al nostro caso è $W=\Delta E_{int}$ poiché il lavoro fatto sul sistema si trasforma in energia interna nel resistore.

Quando la bacchetta si muove attraverso il campo magnetico uniforme ***B***, subisce una forza magnetica $\boldsymbol{F}_B$ di modulo *IlB*. Poiché la bacchetta si muove a velocità costante : la forza magnetica è uguale in modulo e opposta alla forza applicata, e quindi diretta verso sinistra. Usando $\mathrm{I} = Blv/R$ e F_{app}=F_B=*IlB*, la potenza fornita dalla forza applicata è

$$P = F_{app}v = (IlB)v = \frac{B^2 l^2 v^2}{R} = \frac{\varepsilon^2}{R}$$

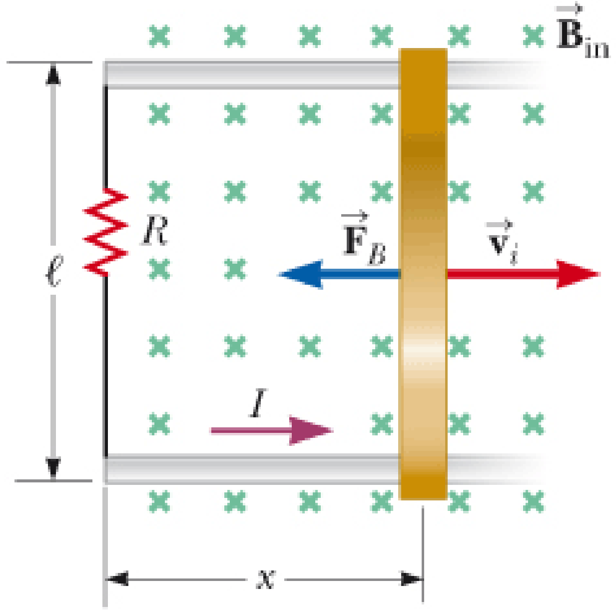
L'eq. *I=dQ/dt* mostra che questa potenza è uguale a quella che viene fornita al resistore, pertanto la conservazione dell'energia è verificata.

Esempio

Una bacchetta conduttrice di massa *m* e lunghezza *l* si muove su due guide parallele, prive di attrito, in presenza di un campo magnetico uniforme entrante nel foglio, come illustrato in fig. Alla bacchetta è stata impressa una velocità iniziale $\mathbf{v}_i$ verso destra a $t=0$.

a) Usando le leggi di Newton, si calcoli la velocità della bacchetta in funzione del tempo

$$F_x = ma \rightarrow IlB = m\frac{dv}{dt}$$



$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}v$$

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2l^2}{mR}\right)dt \qquad \int_{v_i}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{B^2l^2}{mR}\int_0^t dt$$

$$ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\left(\frac{B^2l^2}{mR}\right)t \qquad v = v_i e^{-t/\tau}$$

Esempio

Una bacchetta conduttrice di massa *m* e lunghezza *l* si muove su due guide parallele, prive di attrito, in presenza di un campo magnetico uniforme entrante nel foglio, come illustrato in fig. Alla bacchetta è stata impressa una velocità iniziale ***vi*** verso destra a *t=0.*

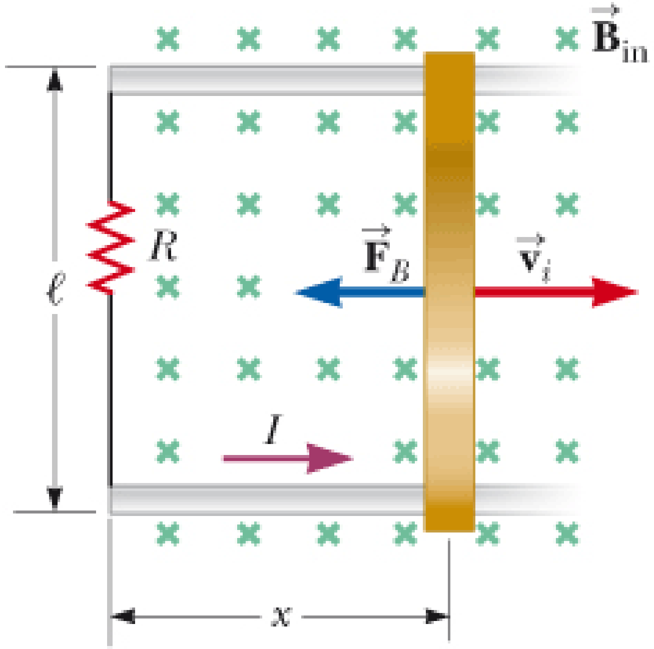
a) Si mostri che lo stesso risultato si può ricavare con un approccio energetico

$$P_{resistore} = -P_{bacchetta}$$

$$I^2 R = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\frac{B^2 l^2 v^2}{R} = -mv\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2 l^2}{mR}\right)dt$$



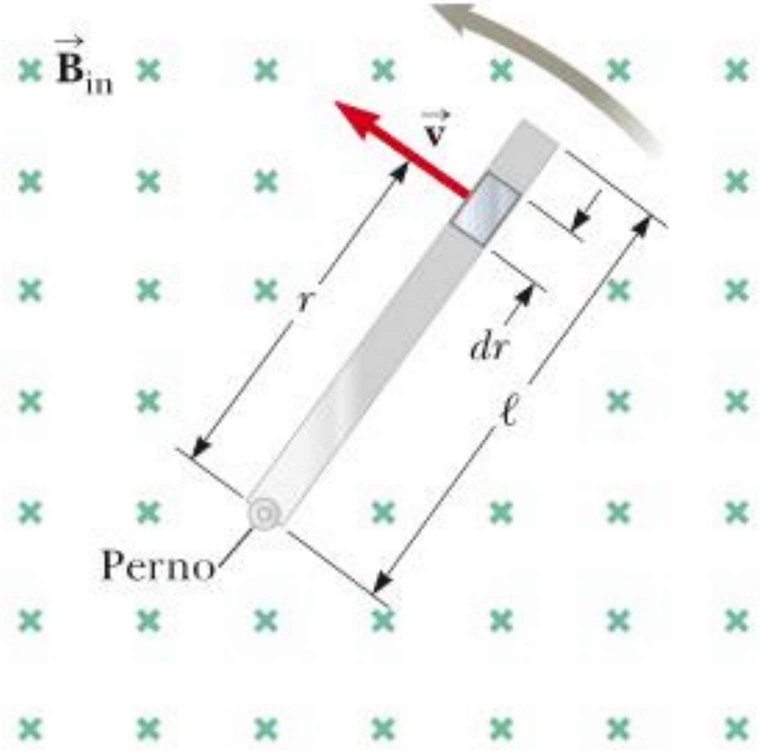
Esempio

Una bacchetta conduttrice di lunghezza *l* ruota con velocità angolare costante ω attorno a un'estremità. Un campo magnetico uniforme ***B*** è diretto perpendicolarmente al piano di rotazione. Si calcoli la *f.e.m.* indotta fra le estremità della bacchetta.

$$d\varepsilon = Bvdr$$

$$\varepsilon = \int Bvdr$$

$$\varepsilon = B\int vdr = B\omega\int_0^l rdr = \frac{1}{2}B\omega l^2$$



Legge di Lenz

La legge di Faraday indica che la *f.e.m.* indotta e la variazione del flusso hanno segni algebrici opposti. Questo fatto ha un significato fisico profondo, che è espresso dalla **legge di Lenz**

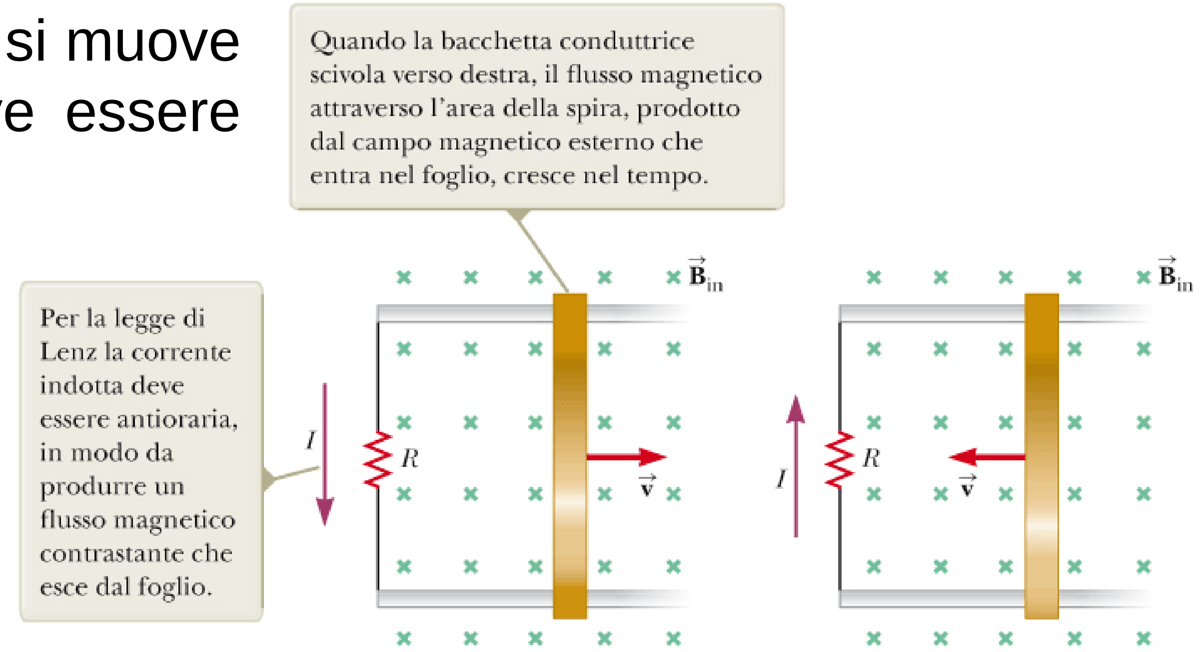
La polarità della *f.e.m.* indotta è tale che la corrente generata crei un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso che ha generato la *f.e.m*.

In altre parole, la corrente indotta tende a mantenere costante il valore del flusso magnetico concatenato con il circuito.

Legge di Lenz

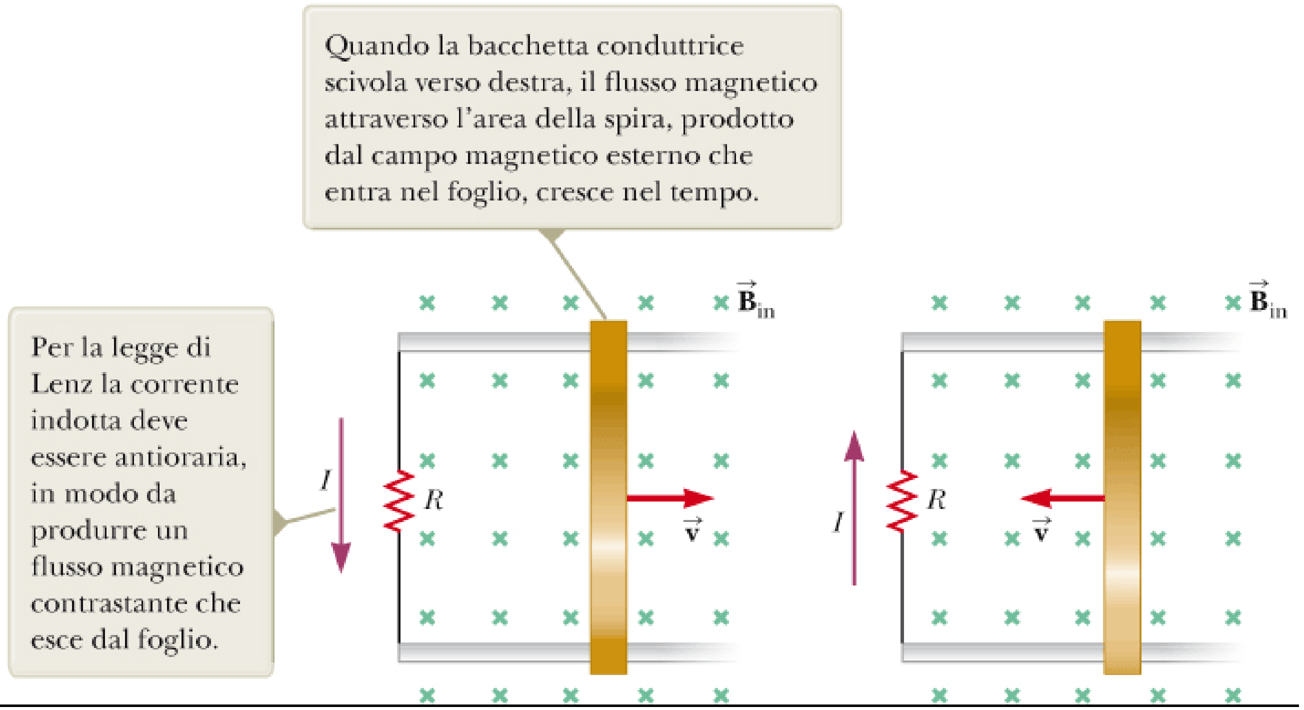
Riconsideriamo l'esempio della bacchetta che si muove verso destra su due guide parallele in presenza di un campo magnetico uniforme. Quando la bacchetta si muove verso destra, il flusso magnetico concatenato con il circuito, la cui area sta aumentando, aumenta nel tempo. La legge di Lenz afferma che la corrente indotta deve avere un verso tale che il campo magnetico da esso prodotta si opponga alla variazione del flusso del campo magnetico esterno. Poiché il flusso del campo esterno, entrante nel foglio, è crescente, la corrente indotta deve produrre un campo uscente dal foglio che si opponga a tale variazione.

Di conseguenza, quando la bacchetta si muove verso destra, la corrente indotta deve essere antioraria.



Riesaminiamo questa situazione fisica dal punto di vista energetico. Supponiamo di imprimere alla bacchetta una piccola spinta verso destra. Dalle considerazioni precedenti, questo movimento della bacchetta produce nel circuito una corrente indotta antioraria. Vediamo cosa accadrebbe se, invece, il verso della corrente fosse orario. In questo caso la forza agente sulla bacchetta dovuta al campo magnetico sarebbe diretta verso destra e tenderebbe ad accelerare ulteriormente la bacchetta, aumentandone la velocità. Tale accelerazione, a sua volta, farebbe crescere ancora più rapidamente l'area del circuito, aumentando così la corrente indotta; ciò aumenterebbe la forza magnetica, che aumenterebbe la corrente, e così via.

Di conseguenza, il sistema acquisterebbe energia senza un apporto dall'esterno. Un comportamento di questo tipo, chiaramente in contrasto con l'esperienza, violerebbe la legge di conservazione dell'energia. Siamo quindi costretti a concludere che il verso della corrente indotta deve essere antiorario.



Idee chiave

- Il flusso magnetico Φ_B attraverso un'area *A* immersa in un campo magnetico ***B*** è definito come

$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{A}$$

dove l'integrale è esteso all'intera superficie. L'unità SI del flusso magnetico è il weber (Wb), per cui 1 Wb = 1Tm^2.

- Se ***B*** è perpendicolare all'area o ovunque uniforme, il flusso è dato da

$$\Phi_B = BA$$

- Quando il flusso Φ_B attraverso una superficie racchiusa da una spira conduttrice varia nel tempo, nella spira si inducono una *f.e.m.* a una corrente – un processo chiamato induzione. La *f.e.m.* indotta è

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Idee chiave

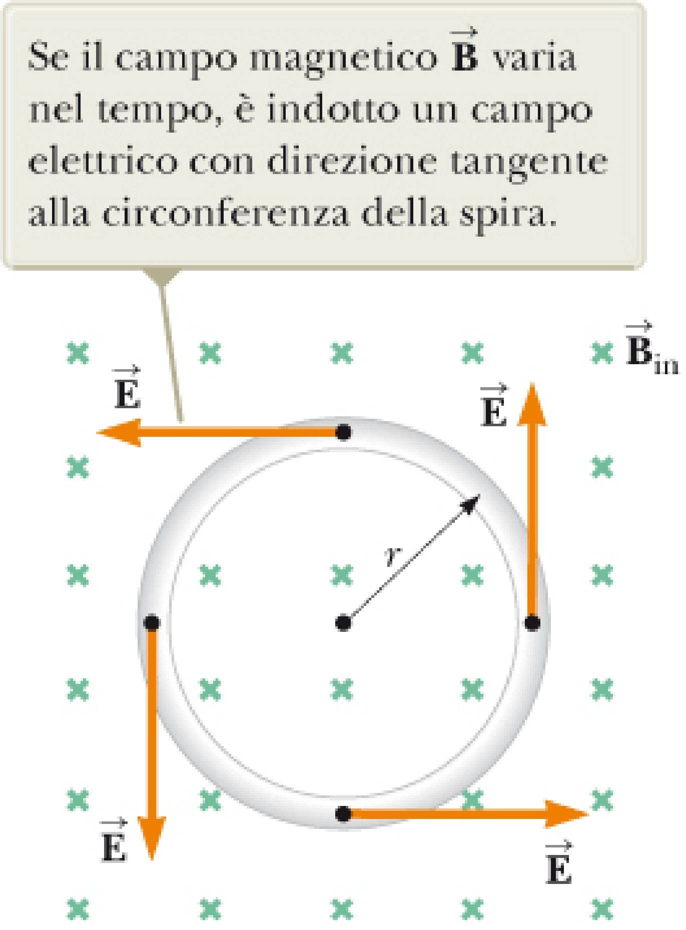
- Se al posto della singola spira si ha una bobina compatta composta da *n* spire, la *f.e.m.* indotta è

$$\varepsilon = -n\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- La corrente indotta ha verso tale che il campo magnetico generato dalla corrente stessa si opponga alla variazione di flusso magnetico che induce la corrente. La *f.e.m.* indotta ha lo stesso verso dalla corrente.

Consideriamo una spira circolare conduttrice di raggio r immersa in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano della spira, come mostrato nella fig. Se il campo magnetico varia nel tempo, secondo la legge di Faraday, nella spira viene indotta una f.e.m. $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$.

L'induzione di una corrente nella spira implica che nella spira deve essere presente un campo elettrico, che possiamo presumere tangente alla spira in ogni punto, poiché sotto l'azione di una forza elettrica le cariche che si possono muovere solo in tale direzione. Il lavoro necessario per far compiere a una carica di prova q un intero giro lungo la spira è $q\varepsilon$.



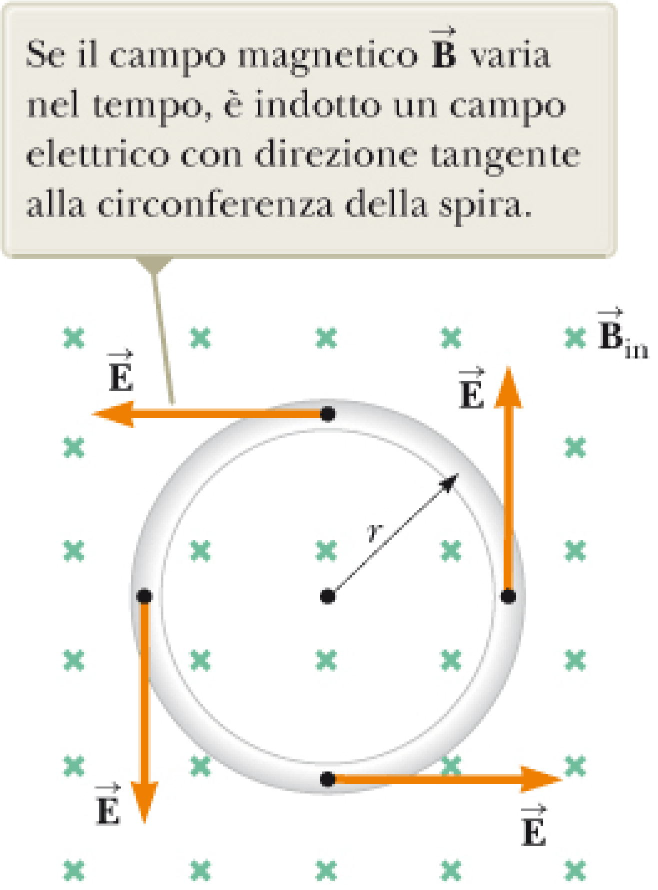
F.e.m indotte e campi elettrici indotti

Poiché la forza elettrica agente sulla carica è $q\mathbf{E}$, il lavoro fatto sulla carica in un giro sarà $qE(2\pi r)$, dove $2\pi r$ è la lunghezza della circonferenza della spira. Le due espressioni del lavoro devono essere uguali, e quindi

$$q\varepsilon = qE(2\pi r) \qquad E = \frac{\varepsilon}{2\pi r}$$

Con questo risultato, e considerando il fatto che, per una spira circolare, $\Phi_B = BA = B\pi r^2$, si trova che il campo elettrico indotto può essere espresso da

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

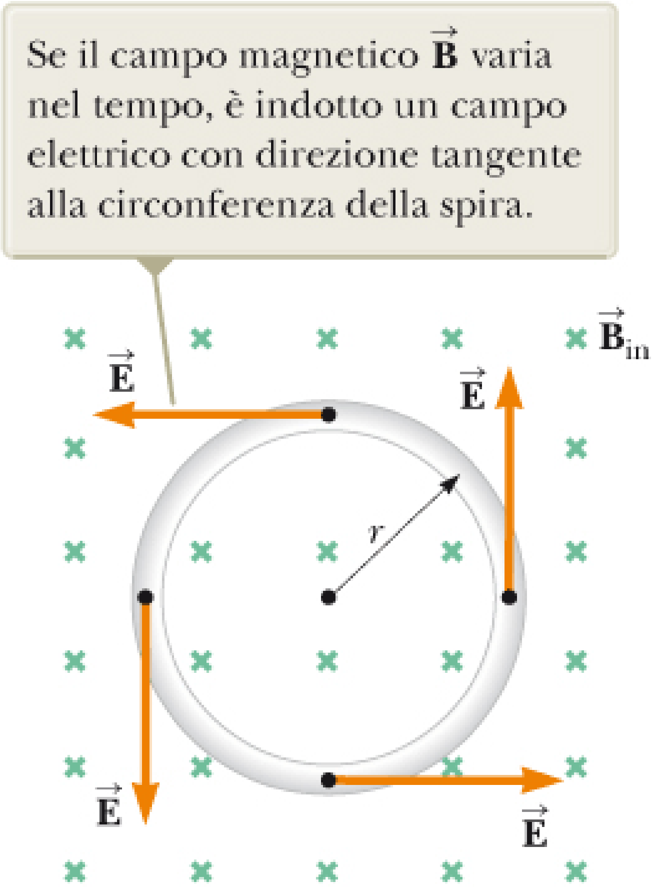


F.e.m indotte e campi elettrici indotti

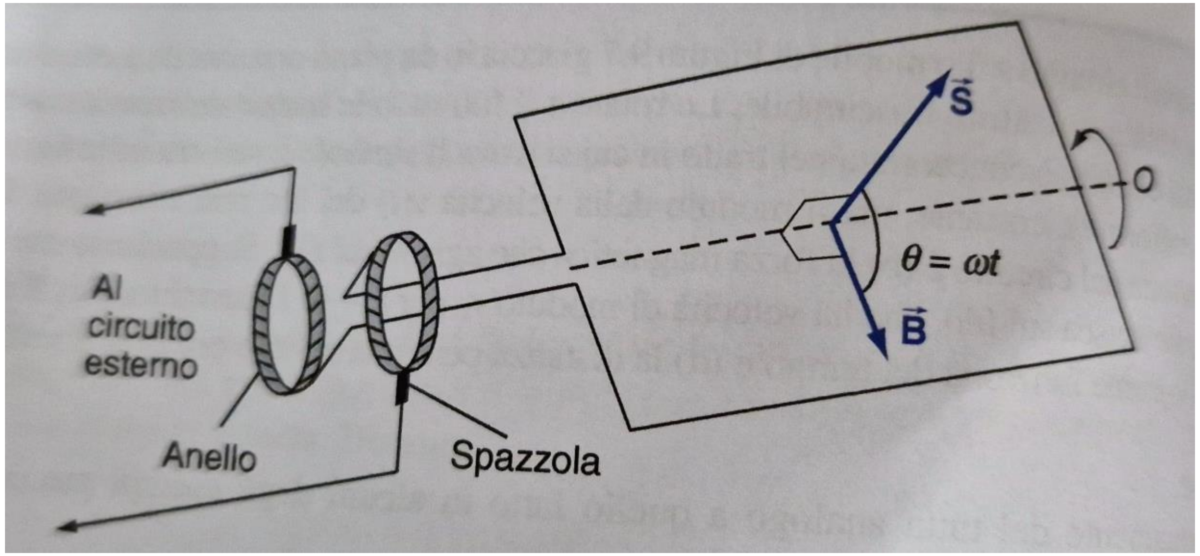
Se si conosce come varia il campo magnetico in funzione del tempo, questa equazione permette di calcolare il campo elettrico indotto.
La *f.e.m.* indotta in ogni percorso chiuso è espressa dall'integrale di linea di ***Eds*** sul cammino chiuso: $\varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{s}$. In generale, *E* può non essere costante e il cammino può non essere circolare. Pertanto, la forma più generale della legge dell'induzione di Faraday è

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Il campo elettrico indotto ***E*** che compare nell'equazione è un campo non conservativo prodotto da un campo magnetico variabile. Il campo ***E*** non può essere un campo elettrostatico; infatti, se lo fosse, sarebbe conservativo e l'integrale di linea di ***Eds*** lungo un percorso chiuso dovrebbe essere nullo, ma ciò sarebbe in contrasto con l'equazione stessa.



Una spira conduttrice si trova in una regione in cui è presente un campo magnetico, come mostra la figura. Per semplicità, supponiamo che il campo magnetico sia uniforme e che la spira venga fatta ruotare intorno a un asse O da un agente esterno. L'asse è nel piano della spira e perpendicolare al campo; la spira è piana e può avere forma qualsiasi (non necessariamente rettangolare). θ rappresenta l'angolo compreso tra il campo magnetico e il vettore superficie $\vec{S}$, che è perpendicolare al piano della spira. Il flusso concatenato con questa spira è



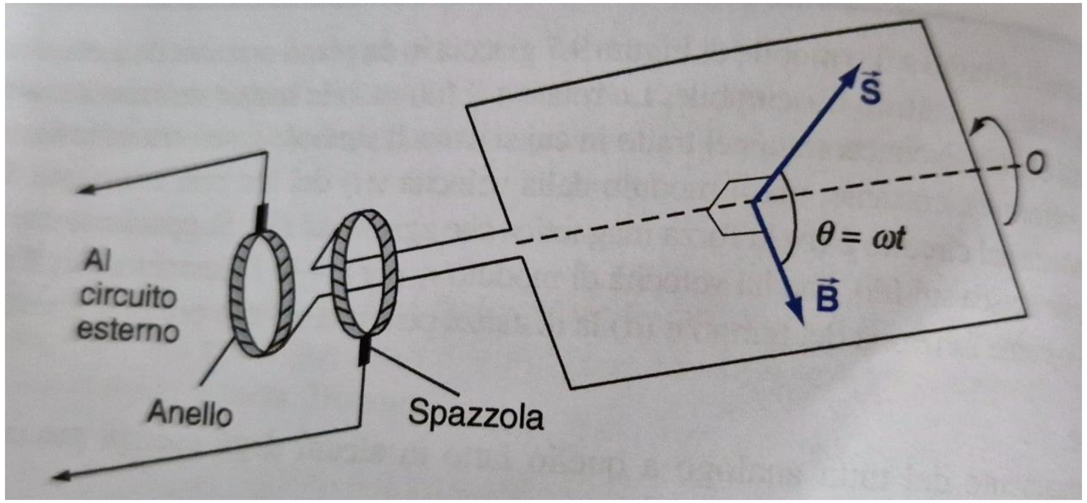
$$\Phi_B = \int \vec{B} d\vec{S} = \vec{B}\vec{S} = BS\, cos\theta$$

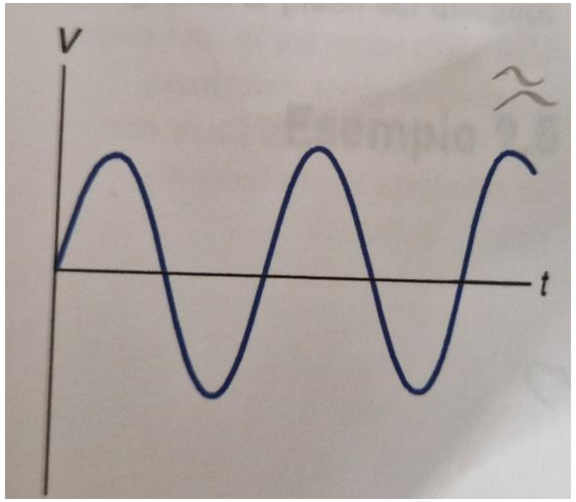
Dal momento che la spira ruota, l'angolo θ varia, il che comporta una variazione del flusso e quindi una f.e.m. indotta. Supponiamo che la spira ruoti con una velocità angolare costante ω intorno all'asse. Allora $\theta = \omega t$ e il flusso concatenato con la spira è

$$\Phi_B = BS\, cos\omega t$$

La f.e.m. indotta, in base alla legge di Farday, $\mathcal{E} = -\, d\Phi_B/dt$, è data in questo caso da

$$\varepsilon = BS\omega\, sen\omega t$$





Per un avvolgimento con N spire, si ha una f.e.m. indotta in ciascuna delle spire (in serie), e la f.e.m. indotta nell'avvolgimento rotante è semplicemente pari a N volte la f.e.m. di una spira:

$$\varepsilon = NBS\omega \; sen\omega t$$

Questa f.e.m. oscilla sinusoidalmente con pulsazione ω ovvero con frequenza $\nu=\omega/2\pi$. Il valore massimo, o valore di picco, della f.e.m. è $\varepsilon_{max} = |NBS\omega|$, il quale viene raggiunto quando $|sen\,\omega t| = 1$ e quindi la f.e.m. oscilla tra ε_{max} e $-\varepsilon_{max}$. Anche la corrente associata oscilla con la stessa frequenza ed è chiamata *corrente alternata*. Un generatore che fornisce una f.e.m. della forma data viene chiamato *generatore di c.a.*. Si noti che la pulsazione compare due volte; è contenuta nel termine oscillatorio *sen* ωt e nel termine ampiezza *NBS*ω.