

Selezione di esercizi di Analisi Matematica 1

Docente: Fernando Farroni

Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Indice

1	Campi di Esistenza e studi di funzione	2
1.1	Esercizi proposti	2
1.2	Risoluzione di alcuni esercizi proposti	10
2	Limiti di successioni e di funzioni	19
2.1	Esercizi proposti	20
2.2	Risoluzione di alcuni esercizi proposti	25
2.3	Appendice ai limiti di successione	25
2.3.1	Successioni definite per ricorrenza	25
2.3.2	Esercizi sul calcolo dei limiti di successioni definite per ricorrenza	27
3	Integrali	30
4	Serie numeriche	34
5	Numeri complessi	38
6	Selezione di quesiti teorici	40

Introduzione

Il presente plico contiene materiale didattico destinato ai corsi di Analisi Matematica 1 di cui il Docente è attualmente titolare. Gli esercizi contenuti nel plico sono stati proposti dal Docente nel corso delle lezioni frontali oppure in occasione di prove d'esame svoltesi nei vari anni accademici.

Fernando Farroni, PhD

Dipartimento di Matematica
ed Applicazioni "R. Caccioppoli"

Università degli Studi di Napoli Federico II

Capitolo 1

Campi di Esistenza e studi di funzione

1.1 Esercizi proposti

Esercizio 1. Determinare il campo di esistenza per le seguenti funzioni:

$$f(x) = \log \left(\frac{1 + \sqrt{\pi^2 - 16x^2}}{\sqrt{3} \sin x + \cos x + 1} \right) \quad (1.1)$$

$$f(x) = \left[\frac{x^2 + x + 7}{|x - 3| + x} \right]^{\log_5 x} + \log_3 \left(\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x} - \sqrt{x - 2}) \right) \quad (1.2)$$

$$f(x) = \sqrt{\log \left(\frac{\sin x + 1}{\tan x + 1} \right)} \quad (1.3)$$

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^3} - |x|) \quad (1.4)$$

$$f(x) = \frac{\log(x - 2 + \sqrt{x^2 - x})}{\arcsin(x - 2)} \quad (1.5)$$

$$f(x) = \left(\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{\log_5^2 x - \log_5 x} \right)^{\sqrt{9 - x^2}} \quad (1.6)$$

$$f(x) = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{x} + 4x) + \arccos(1 + \sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x)}{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^\pi}} \quad (1.7)$$

$$f(x) = \arcsin(\sqrt{2 - x^2} - |x|). \quad (1.8)$$

$$f(x) = \frac{\arccos(2x - 1)}{\sqrt{x - 1 + \sqrt{x^2 + x}}} \quad (1.9)$$

$$f(x) = \left(\frac{3^x - 27}{\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}^2 x} \right)^{\sqrt{4 - x^2}} \quad (1.10)$$

$$f(x) = \log \left(\arccos \left(|\sin x| + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (1.11)$$

Esercizio 2. Per le funzioni seguenti si determinino il campo di esistenza, si studi il segno, si indichino eventuali asintoti, si studi la derivabilità, si determinino eventuali estremi assoluti e relativi, si evidenzino le proprietà di monotonia e si indichi il codominio. Si tracci, infine, un grafico approssimativo di ciascuna funzione proposta.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1} \quad (1.12)$$

$$f(x) = \log \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x - 6}} \right) \quad (1.13)$$

$$f(x) = \arctan \left(\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1 \right) \quad (1.14)$$

$$f(x) = e^{-4x} \sqrt{e^{3x} - e^{2x}} \quad (1.15)$$

$$f(x) = \arctan \left(\log (x^2 - 5x + 7) \right) \quad (1.16)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6|x| + 5}}{x^2} \quad (1.17)$$

$$f(x) = e^{-2x} \sqrt{4x^2 - 2} \quad (1.18)$$

$$f(x) = xe^{-(x^2+x+10)} \quad (1.19)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 7x}}{x + 3} \quad (1.20)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x - \sqrt{x}}{x - 1}} \quad (1.21)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 12}}{x - 1} \quad (1.22)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^{2x} + 1}}{e^x - 1} \quad (1.23)$$

$$f(x) = \sqrt{xe^{-(x^2+x)}} \quad (1.24)$$

$$f(x) = \log \left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 2} \right) \quad (1.25)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3|x| + 2}}{x^2} \quad (1.26)$$

$$f(x) = \log(1 + x \log^2 x) \quad (1.27)$$

$$f(x) = \log\left(\frac{1 + x^2}{2}\right) + |\log x| \quad (1.28)$$

$$f(x) = (|x| + |x - 1|)e^{-\frac{2}{x}} \quad (1.29)$$

$$f(x) = (6x^2 + 5x + 1)e^{-5x} \quad (1.30)$$

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 + |x|)} \quad (1.31)$$

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} \quad (1.32)$$

Esercizio 3. Assegnata la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita di seguito

$$f(x) = \begin{cases} mx + q & \text{se } x < 0, \\ \frac{(x+1)^2}{1+|1-x|} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

si determinino i valori di $m, q \in \mathbb{R}$ affinché f risulti continua e derivabile nel punto $x_0 = 0$. Si studi la funzione f in corrispondenza dei valori di m e q così determinati, ovvero si discuta il segno, si indichino eventuali asintoti, si studi la derivabilità nel punto $x = 1$, si determinino eventuali estremi assoluti e relativi, si evidenzino le proprietà di monotonia e si indichi il codominio. Si tracci, infine, un grafico approssimativo di f .

Esercizio 4. Assegnata la funzione

$$f(x) = 2\sqrt{2x} - \sqrt{1-x^2}$$

- Si tracci il grafico di f .
- Dimostrare che la funzione ammette massimo e minimo assoluti nel suo dominio di definizione e determinarli. Si indichi anche il codominio della funzione.
- Calcolare la derivata destra di f nel punto $x_0 = -1$.

Esercizio 5. Assegnata la funzione

$$f(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{1-x^2}$$

- Si tracci il grafico di f .

- Dimostrare che la funzione ammette massimo e minimo assoluti nel suo dominio di definizione e determinarli. Si indichi anche il codominio della funzione.
- Calcolare la derivata sinistra di f nel punto $x_0 = 1$.

Esercizio 6. Assegnata la funzione

$$f(x) = \sqrt{\arctan\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)}$$

- Tracciare un grafico approssimativo di f e determinare il codominio di f .
- Indicato con D il dominio di f , dire se la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \setminus \{0\} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è continua.

Esercizio 7. Assegnata la funzione $f(x) = e^{\frac{1+\log x}{x}}$

- Tracciare un grafico approssimativo di f e determinare il codominio di f .
- Calcolare massimo e minimo assoluti di f sull'intervallo $[\frac{1}{2}, 2]$.
- Indicato con D il dominio di f , dimostrare che è continua la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 8. Assegnata la funzione $f(x) = (x + 1) \sqrt[3]{\frac{4-x}{x}}$

- Tracciare un grafico approssimativo di f .

N.B. Lo studio della concavità o convessità di f è da considerarsi facoltativo.

- Studiare la derivabilità di f .

Esercizio 9. Assegnata la funzione $f(x) = x - \log(2x^2 - 3x)$

- Tracciare un grafico approssimativo di f .

N.B. Nel tracciare il grafico, non è necessario individuare con precisioni i valori espliciti degli zeri di f . Inoltre, lo studio della concavità o convessità di f è da considerarsi facoltativo.

- Indicare il numero di zeri che la funzione assume nel suo insieme di definizione, senza calcolarli esplicitamente.

Esercizio 10. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = |x - 1| + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

ammette due asintoti obliqui distinti.

Esercizio 11. Tracciare un grafico approssimativo per la funzione

$$f(x) = (x + 1)e^{-\frac{1}{x(x+1)}}$$

Dimostrare che la funzione possiede punti di flesso senza calcolare la derivata seconda di f .

Esercizio 12. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\right)}$$

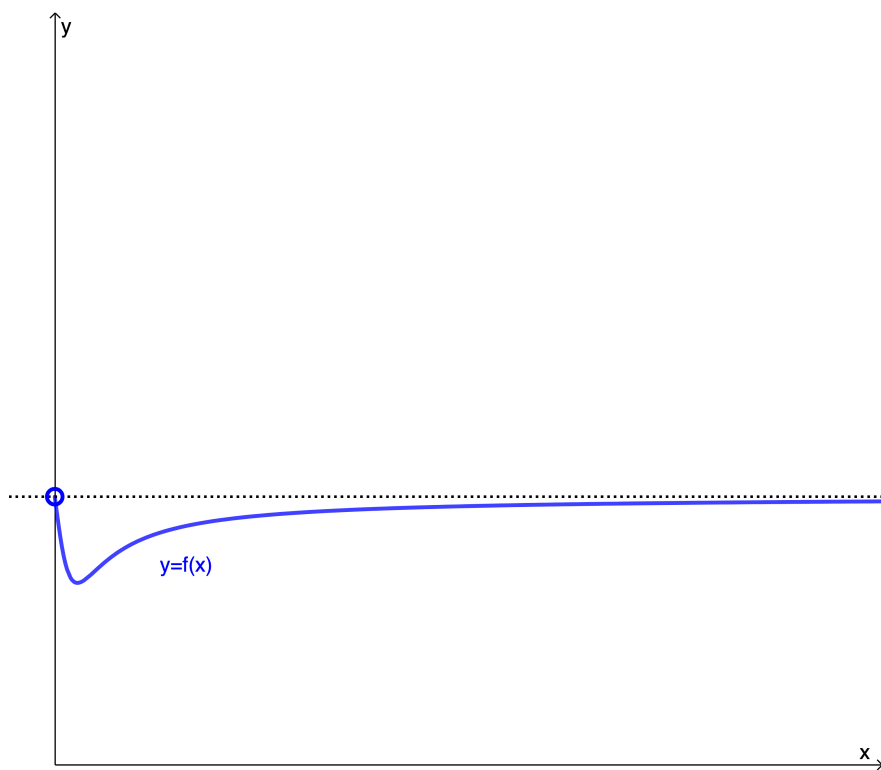
1. Tracciare un grafico approssimativo di f .
2. Fornire la definizione di asintoto orizzontale. La funzione proposta possiede asintoti orizzontali?
3. Si indichi l'unica affermazione corretta fra quelle indicate di seguito:
 - (a) la funzione f possiede soltanto minimo assoluto;
 - (b) la funzione f possiede sia minimo che massimo assoluti;
 - (c) la funzione f possiede soltanto un massimo relativo ma non assoluto;
 - (d) nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

Esercizio 13. Determinare il campo di esistenza e gli intervalli di monotonia della funzione

$$f(x) = |x - 1| \log \left(\sqrt{x^2 + 3x + 3} - x - 1 \right)$$

1.2 Risoluzione di alcuni esercizi proposti

Svolgimento dell'Esercizio 6. Si riporta il grafico di f .



Si osservi infine che $D = (0, +\infty)$ e che la funzione \tilde{f} è continua a destra di zero dopo aver osservato che $f(0^+) = \sqrt{\pi/2}$. \square

Svolgimento dell'Esercizio 8.

- Il dominio di f è $D := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- L'insieme $\{x \in D: f(x) \geq 0\}$ è determinato dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ (x+1)\sqrt[3]{\frac{4-x}{x}} \geq 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

Risoluzione di (1.33)₂. Abbiamo

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{4-x}{x}} \geq 0 &\iff \frac{4-x}{x} \geq 0 \\ &\iff 0 < x \leq 4 \end{aligned}$$

Ne consegue che

$$f(x) > 0 \iff x < -1 \quad \vee \quad 0 < x < 4$$

e che la funzione ammette esattamente due zeri dati da $x = -1$ e $x = 4$.

- Ricerca degli asintoti
 - La retta $x = 0$ è l'unico asintoto verticale; infatti risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$

- A $+\infty$ non esiste asintoto orizzontale; infatti risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

- A $+\infty$ la retta

$$y = -x + \frac{1}{3}$$

è asintoto obliquo. Risulta infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{\frac{4}{x} - 1} + x \left(\sqrt[3]{1 - \frac{4}{x}} + 1 \right) \right] \\ &= -1 + 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{4}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{-\frac{4}{x}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

– Con analoghi ragionamenti, a $-\infty$ non esiste asintoto orizzontale e risulta nuovamente

$$y = -x + \frac{1}{3}$$

asintoto obliquo a $-\infty$. Si lascia al lettore la verifica delle relazioni:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- La funzione è monotona crescente soltanto nell'intervallo $[\frac{2}{3}, 2]$. A tale scopo si osservi che la derivata prima vale

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 8x - 4}{3x \sqrt[3]{x(4-x)^2}} \quad \forall x \in D \setminus \{4\}$$

mentre $x = -4$ rappresenta un punto a tangente verticale avendosi

$$f'(-4) = -\infty$$

Di conseguenza l'insieme $\{x \in D \setminus \{-4\}: f'(x) \geq 0\}$ si determina risolvendo

$$-3x^2 + 8x - 4 \geq 0$$

per $x \in D$ eccetto $x = -4$. La conclusione si ottiene infine osservando che

$$3x^2 - 8x + 4 \leq 0 \iff \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$

Si riporta di seguito il grafico di f .

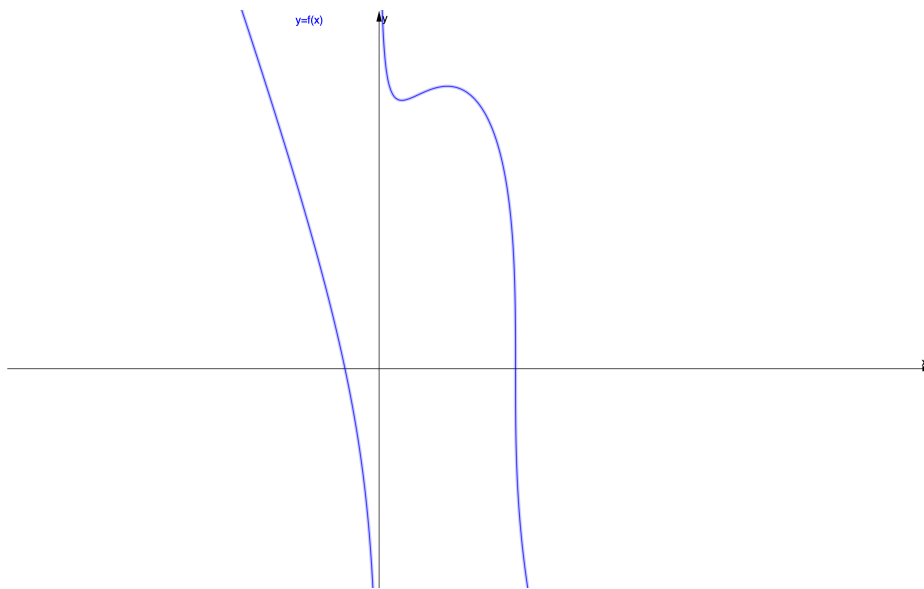


Grafico di f in (1.16)

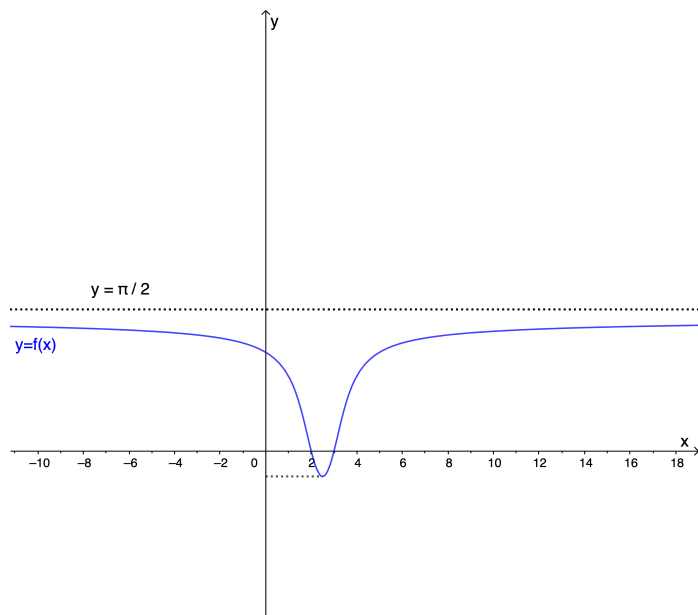


Grafico di f in (1.26)

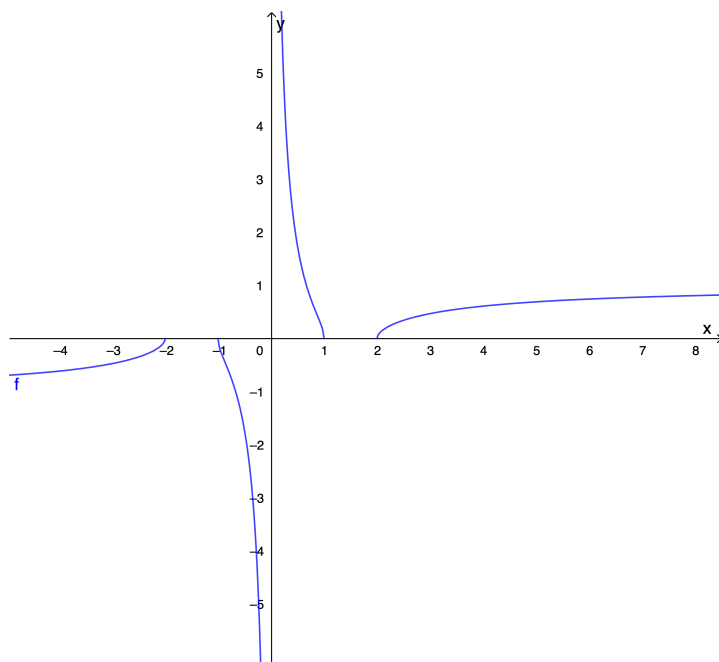
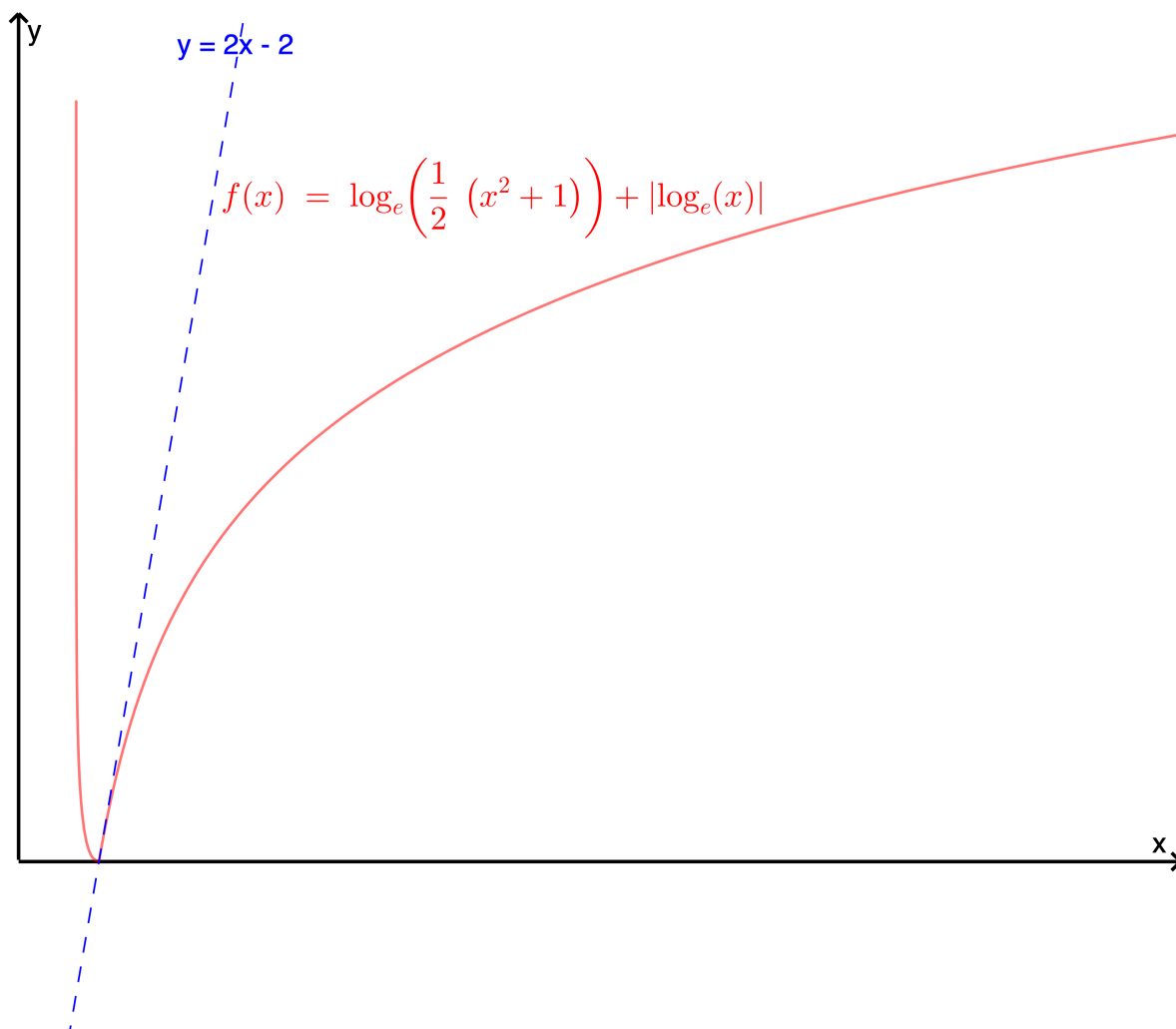


Grafico di f in (1.28)



Il grafico evidenzia le seguenti proprietà:

- $x = 1$ è un punto angoloso e le rette $y = 0$ ed $y = 2x - 2$ sono le rette tangenti a sinistra ed a destra di tale punto rispettivamente.;
- la funzione è convessa in $(0, 1)$ e concava in $(1, +\infty)$.

Svolgimento di (1.8). Denotiamo con D il dominio di f . Si osservi che $0 \in D$ e che

$$x \in D \cap (0, +\infty) \quad \implies \quad -x \in D$$

poichè f è una funzione pari. Pertanto il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine e sarà sufficiente determinare il campo di esistenza della restrizione (denotata successivamente con f_+) di f a $D_+ := D \cap (0, +\infty)$. Questa proprietà conduce a notevoli semplificazioni di calcolo nel seguito, poiché f_+ si riduce alla funzione seguente

$$f_+(x) = \arcsin(\sqrt{2-x^2} - x)$$

Sarà quindi sufficiente risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq \sqrt{2-x^2} - x \leq 1 \\ 2 - x^2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

dove la condizione (1.34)₁ viene imposta a memoria del fatto che f_+ è la restrizione di f a D_+ . Risolvendo (1.34)₃ è immediato accorgersi che il sistema (1.34) è equivalente al seguente

$$\begin{cases} x > 0 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{2-x^2} \leq x+1 \\ \sqrt{2-x^2} \geq x-1 \end{cases} \quad (1.35)$$

Ulteriormente, $(1.34)_1$ e $(1.34)_2$ sono confrontabili ed il sistema (1.35) è equivalente a

$$\begin{cases} 0 < x \leq \sqrt{2} \\ \sqrt{2-x^2} \leq x+1 \\ \sqrt{2-x^2} \geq x-1 \end{cases} \quad (1.36)$$

Si noti che grazie alla condizione $(1.36)_1$ possiamo risolvere la $(1.36)_2$ elevando al quadrato ambo i membri senza impostare la canonica discussione di una disequazione irrazionale

$$\begin{cases} 0 < x \leq \sqrt{2} \\ 2-x^2 \leq (x+1)^2 \\ \sqrt{2-x^2} \geq x-1 \end{cases} \quad (1.37)$$

Risoluzione di $(1.37)_2$. Abbiamo

$$\begin{aligned} 2-x^2 \leq (x+1)^2 &\iff 2x^2+2x-1 \geq 0 \\ &\iff x \leq -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{aligned}$$

Risoluzione di $(1.37)_3$. Si noti che qui conviene procedere con i metodi standard di risoluzione di una disquazione irrazionale. Pertanto

$$\begin{aligned} \sqrt{2-x^2} \geq x-1 &\iff \begin{cases} x-1 < 0 \\ 2-x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x^2 \leq (x-1)^2 \end{cases} \\ &\iff -\sqrt{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{aligned}$$

In definitiva (1.37) è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 0 < x \leq \sqrt{2} \\ x \leq -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \quad (1.38)$$

La cui soluzione è

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

Tenuto conto delle informazioni precedenti, concludiamo che il campo di esistenza D di f è

$$D = \left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right]$$

Lo svolgimento del presente esercizio è concluso.

□

Capitolo 2

Limiti di successioni e di funzioni

2.1 Esercizi proposti

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 + \log(\cos x)}{\arctan^2 x - x^2} \quad (2.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x + \sin x) - \sin x + \tan^2 x}{\arctan(x - \sin x)} \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x \sin x) - x^2}{e^{-x^2} - 1 + \tan^2 x} \quad (2.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - e^{-2x^2}}{x(e^x - e^{-x} - \sin 2x)} \quad (2.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x^2} - \cos(2x)}{1 - \cos(1 - \sqrt{1 - x^4})} \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15x^2 + 2(1 - \cos x - 2 \log(1 + 4x^2))}{\sin(1 - \sqrt{1 + x^4})} \quad (2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1 + 2x^2} - \sqrt{1 + x^2}}{x \sin\left(\frac{x}{2}\right) - (1 - \cos x)} \quad (2.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}{e^x - 1 - x \cos x} \quad (2.8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2(\sqrt{1+x} - 1)}{2x - \sin x - \tan x} \quad (2.9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(2\sqrt{x}) - 2\log(1+x)}{1 - \sqrt{1-x^2}} \quad (2.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-2x} - \cos(2\sqrt{x})}{1 - \sqrt{1-x^2}} \quad (2.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(2 + x + \frac{x^2}{2} - e^x\right)}{x - x \cos x} \quad (2.12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \log(1+x^2)}{e^{-\frac{1}{4}x^2} - \sqrt{\cos x}} \quad (2.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2}}{e^{-x^2} - 1 + \sin^2 x} \quad (2.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x) + 2x \tan x - 4x^2}{1 - e^{x^2} + \log(1 + x \arcsin x)} \quad (2.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \log(1 + x \arctan x) - x^2 + 1 - e^{-x^2}}{\sqrt{1 + 2x^3} - 1 + x - \sin x} \quad (2.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x) + 2x \tan x - 4x^2}{1 - e^{x^2} + \log(1 + x \arcsin x)} \quad (2.17)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 4\log(1+x^2) + 1 - \cos(2x)}{\tan x^2 - x \sin x} \quad (2.18)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x) - \frac{1}{2} \arctan x^2}{x \sin(3x) - 3 \tan x^2} \quad (2.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \quad (2.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^2(1+x)}{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)} \quad (2.21)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos^2 x}{\sin^4(2x)} \quad (2.22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - \cos^2 x}{\sin^4(2x)} \quad (2.23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log\left(e^{-2x^2} \cos(2x)\right)}{x^4} \quad (2.24)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x^2 - 3 \tan 2x^2}{\arcsin^2 x - x^2} \quad (2.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2x^2 - 2\sqrt{x^4 + x^2}}{\log(1 + x^2) - 2 \log x} \quad (2.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + x)^x - \cos^2 x - 2x^2}{(\tan^2 \sqrt[4]{x} - \sin^2 \sqrt[4]{x}) \log \cos x} \quad (2.27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \log \left(\frac{1 + x^2}{1 + x \arctan x} \right) \quad (2.28)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[e^{\frac{1}{x}} - e^{\sin^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)} \right] \quad (2.29)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \log x)^{\log x} - 1}{(x - 1)^2} \quad (2.30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 4 \int_0^x \sin(t^3) dt}{x \log^2(1 + x^4)} \quad (2.31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{x^2} - 2 \cos x - 3x^2}{x^2 - \log(1 + x^2)} \quad (2.32)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^{x^3} - 1 - x}{x \cos x - x} \quad (2.33)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - e^{x^2}}{\log(1 + 4x^2) - 4 \log(1 + x^2)} \quad (2.34)$$

Esercizio 2. Al variare di $\alpha > 0$ calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 \log(1 + 2x^2) - 2 \sin(x^2) - 4 \tan^2 x}{x^\alpha} \quad (2.35)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x + \sin \frac{x^2}{2} - \tan^2 x}{x^\alpha} \quad (2.36)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\cos x + \sin x) - \sin x + \tan^2 x}{x^\alpha} \quad (2.37)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x + \sin \frac{x^2}{2} - \tan^2 x}{x^\alpha} \quad (2.38)$$

Esercizio 3. Determinare il polinomio di Taylor–MacLaurin di grado 6 della funzione $f(x) = \log(\cos x)$ e calcolare $f^{(4)}(0)$.

2.2 Risoluzione di alcuni esercizi proposti

Svolgimento di (2.30). Per comodità osserviamo che il limite proposto può essere riscritto come segue

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 + \log x)^{\log x} - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\log(1+t) \log((1+\log(1+t)))} - 1}{t^2}$$

Per t diverso da zero ed appartenente ad un opportuno intorno di zero si ottiene

$$\begin{aligned} & \frac{e^{\log(1+t) \log((1+\log(1+t)))} - 1}{t^2} \\ &= \frac{e^{\log(1+t) \log((1+\log(1+t)))} - 1}{\log(1+t) \log((1+\log(1+t)))} \frac{\log((1+\log(1+t)))}{\log(1+t)} \left(\frac{\log(1+t)}{t} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

Adoperando opportunamente i limiti notevoli ed osservando che

$$\log(1+t) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \log(1+\log(1+t)) \rightarrow 0 \quad \text{per } t \rightarrow 0$$

concludiamo che il limite proposto vale 1, poiché i fattori che appaiono in (2.39) tendono separatamente a 1 al tendere di t a zero. \square

2.3 Appendice ai limiti di successione

2.3.1 Successioni definite per ricorrenza

Diremo che una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è *definita per ricorrenza* se si presenta nella forma

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = f(a_n) \quad \text{se } n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.40)$$

con $a \in \mathbb{R}$ assegnato ed $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua.

Si osservi che una successione della forma (2.40) può ridursi ad una successione costante quando f presenta *punti fissi*, in accordo con la seguente definizione.

Definizione 2.1. Diremo che $\bar{x} \in \mathbb{R}$ è un *punto fisso* per la funzione f se $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Infatti, se f è dotata di un punto fisso \bar{x} ed il valore iniziale a coincide con \bar{x} segue per induzione che $a_{n+1} = \bar{x}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Oltre al concetto di punto fisso per una funzione, sarà utile nel seguito la nozione di *insieme invariante* per una funzione, in accordo con la prossima definizione.

Definizione 2.2. Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}$ si dice *invariante* per f se $f(\Omega) \subset \Omega$.

L'importanza degli insiemi invarianti dipende dal fatto che se Ω è invariante per f è semplice dedurre per induzione che gli elementi della successione in (2.40) verificano la seguente proprietà

$$a_1 \in \Omega \quad \implies \quad a_{n+1} \in \Omega \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Ultimo aspetto teorico che tratteremo è la seguente condizione necessaria affinché la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (2.40) sia monotona.

Teorema 2.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un insieme invariante per la funzione continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Allora per la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita in (2.40) sussistono le seguenti proprietà:*

$$\text{se } f(x) \geq x \quad \text{per ogni } x \in \Omega \quad \implies \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è monotona crescente}$$

$$\text{se } f(x) \leq x \quad \text{per ogni } x \in \Omega \quad \implies \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è monotona decrescente}$$

La dimostrazione del precedente teorema segue direttamente dalla definizione di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ attraverso (2.40) ed è pertanto omessa.

2.3.2 Esercizi sul calcolo dei limiti di successioni definite per ricorrenza

Esercizio 4. Sia a_n la successione definita per ricorrenza ponendo $a_1 = a \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{2 + 3a_n}$$

Provare che la successione converge e calcolarne il limite.

Svolgimento. Teorema 2.1 suggerisce di determinare possibili sottoinsiemi Ω di \mathbb{R} tali che $\sqrt[3]{2 + 3x} \geq x$ per ogni $x \in \Omega$. Sarà utile verificare se tali sottoinsiemi di \mathbb{R} sono invarianti per $f(x) := \sqrt[3]{2 + 3x}$. Inoltre, la procedura proposta individua i punti fissi di f . Osserviamo a tale scopo che

$$\sqrt[3]{2 + 3x} \geq x \quad \iff \quad x^3 - 3x - 2 \leq 0$$

Non è difficile verificare che il polinomio $P(x) := x^3 - 3x - 2$ ammette $x = -1$ e $x = 2$ quali radici e pertanto l'algoritmo di divisione di polinomi ci consente di fattorizzare $P(x)$ alla maniera seguente

$$P(x) = (x + 1)^2(x - 2)$$

Segue pertanto

$$\sqrt[3]{2 + 3x} \geq x \quad \iff \quad x \leq 2$$

Inoltre $x = -1$ e $x = 2$ sono punti fissi di f , da cui in particolare essendo $a_1 = a$ deve essere

$$\text{se } a = -1 \quad \implies \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è costantemente pari al valore } -1$$

$$\text{se } a = 2 \quad \implies \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è costantemente pari al valore } 2$$

Non è difficile dimostrare che l'insieme $\Omega := (2, +\infty)$ è invariante per f .

Infatti

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2+3x} > 2 &\iff 3x+2 > 8 \\ &\iff x > 2\end{aligned}\tag{2.41}$$

Similmente, sono invarianti per f gli insiemi $\Omega' := (-1, 2)$ e $\Omega'' := (-\infty, -1)$.

La verifica è lasciata al lettore. Tenuto conto nuovamente che $a_1 = a$, deve essere

$$\begin{aligned}\text{se } a < 2 &\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è strettamente crescente} \\ \text{se } a > 2 &\implies (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è strettamente decrescente}\end{aligned}$$

come conseguenza del Teorema 2.1. Infine, è ovvio che se a_n converge ci sono solo due alternative, ovvero a_n tende a -1 oppure a 2.

Tenuto conto che $a_1 = a$, le osservazioni precedenti suggeriscono di distinguere tre casi.

Caso 1: $a > 2$.

Dall'invarianza di Ω segue che $a_n > 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, sapendo che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente decrescente e limitata inferiormente deve essere

$$\lim_n a_n = \inf_n a_n \in [2, +\infty)$$

Sappiamo pertanto che a_n converge e non può ovviamente tendere a -1.

Abbiamo pertanto dimostrato che

$$\text{se } a > 2 \text{ allora } \lim_n a_n = 2$$

.

Caso 2: $-1 < a < 2$.

Dall'invarianza di Ω' segue che $-1 < a_n < 2$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, in tal caso la successione a_n è strettamente crescente. Segue quindi che

$$\text{se } a < 2 \text{ allora } \lim_n a_n = \sup_n a_n \in [-1, 2]$$

In questo caso non può essere $\sup_n a_n = -1$, altrimenti $a_n \leq -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ contraddicendo il fatto che $a_n \in (-1, 2)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Segue che

$$\text{se } -1 < a < 2 \text{ allora } \lim_n a_n = 2$$

Caso 3: $a < -1$.

Dall'invarianza di Ω'' segue che $a_n < -1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In questo caso la successione a_n è strettamente crescente e con ragionamenti analoghi a quelli proposti nel Caso 1 è ovvio che

$$\text{se } a < -1 \text{ allora } \lim_n a_n = -1$$

In definitiva, riassumendo tutte le informazioni a nostra disposizione, risulta

$$\lim_n a_n = \begin{cases} -1 & \text{se } a \leq -1 \\ 2 & \text{se } a > -1 \end{cases}$$

e l'esercizio proposto è completamente risolto. \square

Capitolo 3

Integrali

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 6e^x + 5} dx \quad (3.1)$$

$$\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}} dx \quad (3.2)$$

$$\int \frac{2e^x - 3e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx \quad (3.3)$$

$$\int \frac{\arctan x}{(1+x)^2} dx \quad (3.4)$$

$$\int x \log(x^2 + 2x + 3) dx \quad (3.5)$$

$$\int \frac{dx}{x(\log^2 x + \log x + 5)} \quad (3.6)$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x + \sin x - 12} dx \quad (3.7)$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx \quad (3.8)$$

$$\int \frac{x - 1 + \sqrt{x+4}}{2x - 1} dx \quad (3.9)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x \sqrt{\frac{3}{4} - x - x^2} dx \quad (3.10)$$

$$\int \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x}{\cos^2 x(1 - 3 \sin x \cos x + \cos^2 x)} dx \quad (3.11)$$

$$\int \frac{1 - x^2}{\sqrt{2x - x^2}} dx \quad (3.12)$$

$$\int \frac{(x + 2)\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} - 1} dx \quad (3.13)$$

$$\int \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx \quad (3.14)$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\int_2^3 \arctan \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx \quad (3.15)$$

$$\int_{32}^{729} \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - 1} dx \quad (3.16)$$

$$\int_0^1 e^{2x} \log(1 + e^{2x}) dx \quad (3.17)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{dx}{\sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x} \quad (3.18)$$

$$\int_1^e \frac{\log(1 + \log x + \log^2 x)}{x} dx \quad (3.19)$$

$$\int_{-1}^{-2} \frac{x + 2 + \sqrt{x + 2}}{x^2 + 7x + 12} dx \quad (3.20)$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{x} - 1} \quad (3.21)$$

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 4x}{\sqrt{1 + \cos x}} dx \quad (3.22)$$

$$\int_1^e \frac{\sqrt[4]{\log x}}{x(1 + \sqrt{\log x})} dx \quad (3.23)$$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(|x| + 1)\sqrt{|x^2 - 1|}} \quad (3.24)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x + 7)\sqrt[3]{x - 1}} dx \quad (3.25)$$

$$\int_0^2 \log |x - 1| dx \quad (3.26)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{\sqrt{2 + e^{-x}}} dx \quad (3.27)$$

Esercizio 4. Si determini la primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{e^x + e^{2x}}{1 + e^{\frac{x}{2}}}$$

che vale zero nel punto $x = 0$.

Esercizio 5. Si determini la primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan x}{(x - 1)^2}$$

che vale 1 in zero.

Esercizio 6. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette verticali $x = 1$, $x = 4$ e dal grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

Esercizio 7. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dall'asse delle ascisse, dalle rette verticali $x = 4$, $x = 25$ e dal grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x} \log \left(9 + \frac{1}{x} \right)$$

Capitolo 4

Serie numeriche

Esercizio 1. Studiare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \left(1 + \frac{1}{n^2 + n} \right) \quad (4.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n^n + 5^n + \log n}{9n^n + 10^n + n!} \right)^n \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^3} \quad (4.3)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (4.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6^n + n^2}{8^n + \log n} \right)^n \quad (4.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + \log^2 n}{n^4 + 1 + n \log n} \quad (4.6)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2 + \log n}{1 + \log n} \right)^{-n \log n} \quad (4.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(e^{\frac{n^2+4n+8}{n^4+n^5}} - 1 \right) \quad (4.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \right) \quad (4.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \log \left(\frac{e^{\frac{1}{n^6}} + e^{-\frac{1}{n^6}}}{2} \right) \quad (4.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \right)^4 \quad (4.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) \sin^2 \frac{1}{n^3} \quad (4.12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\arctan \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} \right) - \arctan \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \right) \right]^2 \quad (4.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left[\sin \left(\frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{n^2} \right]^4 \quad (4.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^2 \quad (4.15)$$

Esercizio 2. Studiare la convergenza semplice ed assoluta delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2-n+1} \quad (4.16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^7(n\pi) \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right) \quad (4.17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+n+3}{5^n} \quad (4.18)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(5^{\frac{1}{n}} - 5^{-\frac{1}{n}}\right) \quad (4.19)$$

Esercizio 3. Determinare i valori di $\alpha > 0$ affinché risultino convergenti le seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)}{\sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)} - 1} \quad (4.20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} \right) \quad (4.21)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^\alpha}{n^6 + n^3} \quad (4.22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \log\left(\frac{n^3 + 2n + 2}{n^3 + 4n^2 + 1}\right) \quad (4.23)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sqrt[3]{n^{3\alpha} + n^\alpha} - n^\alpha \right) \quad (4.24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \left[\log^2\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n^2} \right] \quad (4.25)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^\alpha}{n^2 + n^\alpha + 2} \quad (4.26)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{n^\alpha} \quad (4.27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha \log\left(1 + \frac{1}{n^5}\right)}{\sin\frac{1}{n}} \quad (4.28)$$

Esercizio 4. Per i valori di $x \in \mathbb{R}$ che lo consentano, si calcolino le somme delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2x - x^2} - x + 1 \right)^{\frac{n}{2}} \quad (4.29)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[4]{x} - x \right)^{\frac{n}{6}} \quad (4.30)$$

Capitolo 5

Numeri complessi

Esercizio 1. Determinare la potenza quarta del numero complesso $\frac{5}{2}(\sqrt{3}+i)$

Esercizio 2. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)^2}$

Esercizio 3. Riscrivere in forma algebrica il numero complesso $\frac{(\sqrt{5}+i)^3}{\sqrt{5}-i}$

Esercizio 4. Sia $z = \sqrt{6}(1+i) - \sqrt{2}(i-1)$. Calcolare z^4 .

Suggerimento: si usino i seguenti valori noti di seno e coseno

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 5. Esprimere in forma algebrica il numero complesso $\frac{(\sqrt{2}+i)^2}{\sqrt{5}+i}$

Esercizio 6. Determinare modulo ed anomalia del numero complesso

$$z = 16 + (1 + \sqrt{3}i)^3(1+i)^2$$

Esercizio 7. Determinare i possibili $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$z^2 + 2z + |z-3|^2 - 10|z|^2 = 0$$

Esercizio 8. Esprimere in forma algebrica le radici complesse dell'equazione

$$z^2 + i\bar{z} = 0$$

tali che $\text{Im}(z) < 0$, dove $\text{Im}(z)$ denota la parte immaginaria di $z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 9. Esprimere in forma algebrica e trigonometrica le radici complesse delle seguenti equazioni:

$$z^5 + z^4 + 16z + 16 = 0 \quad (5.1)$$

$$z^2 - 18z + 82 = 0 \quad (5.2)$$

$$z^2 - 5\sqrt{3}z + 25 = 0 \quad (5.3)$$

$$z^2 + 5\sqrt{3}z + 25 = 0 \quad (5.4)$$

$$\bar{z}^2 - 5\sqrt{3}\bar{z} + 25 = 0 \quad (5.5)$$

$$z^2 + \sqrt{2}z + 1 = 0 \quad (5.6)$$

$$z^3 - iz = 0 \quad (5.7)$$

$$z^2 - 3z + 3 = 0 \quad (5.8)$$

$$z^2 + 2z + 82 = 0 \quad (5.9)$$

$$z^4 + 4z^2 + 5 = 0 \quad (5.10)$$

$$z^6 = 4|z|^4 \quad (5.11)$$

Esercizio 10. Determinare le radici terze del numero complesso $8 + 8\sqrt{3}i$.

Esercizio 11. Dimostrare che l'equazione

$$i\bar{z}^2 - \text{Re}(z) = i + i|z|^2$$

non ammette soluzioni in \mathbb{C} .

Esercizio 11. Determinare nel campo dei numeri complessi le eventuali soluzioni dell'equazione

$$\bar{z}^2 = \text{Im}(z) - z$$

Capitolo 6

Selezione di quesiti teorici

Quesito 1. Chiarire se l'affermazione

“La successione $(\frac{\log n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ è infinitesima”

è vera o falsa e motivare la risposta.

Quesito 2. Chiarire se l'affermazione:

“Una funzione strettamente crescente e continua $f: (5, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty \quad e \quad f(7) > 0$$

ammette un unico zero nell'intervallo $(5, 7]$ ”

è vera o falsa e motivare la risposta.