Flusso del campo

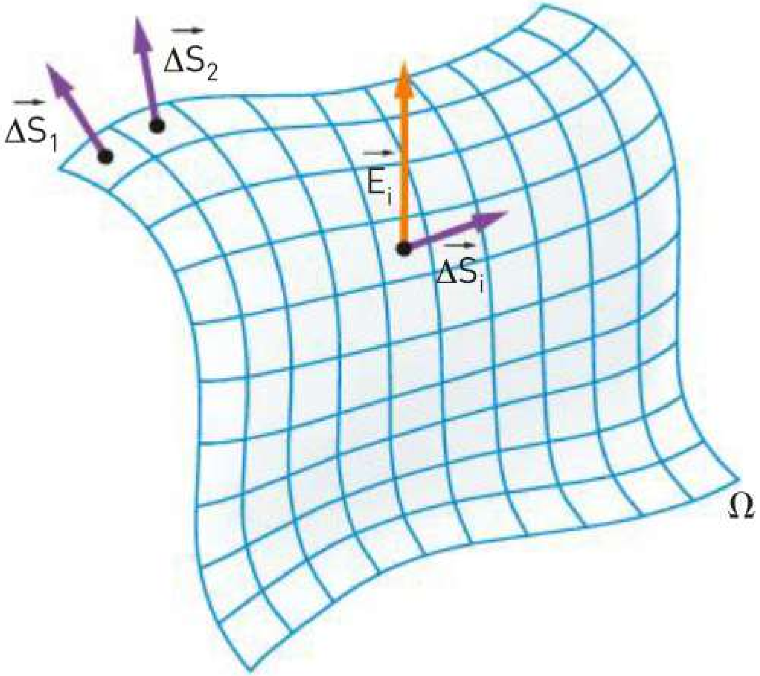
Il flusso del campo attraverso una superficie è uno scalare definito come:

$$\phi_E = \int_{\Omega} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} \, dS$$

Il flusso è proporzionale al numero di linee di campo che attraversano una data superficie Ω

$$\Delta\vec{S}_1 = \vec{n}_1 dS$$

$$\Delta\vec{S}_2 = \vec{n}_2 dS$$



Il flusso si misura nel SI in N·m^2/C.

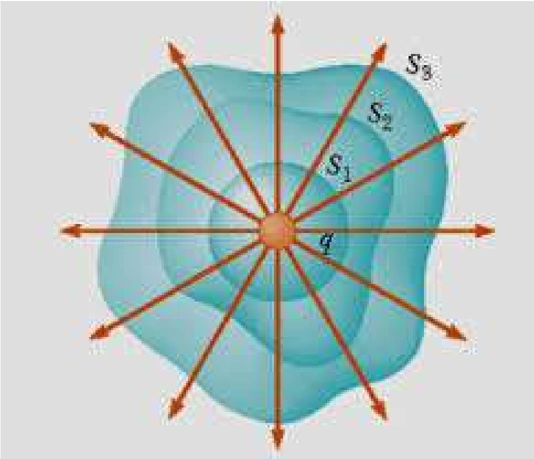
Teorema di Gauss

Il flusso del campo attraverso una qualsiasi superficie **chiusa**, Ω, è pari alla somma algebrica delle cariche interne a quella superficie sulla costante dielettrica del mezzo nel quale ci troviamo. Le cariche esterne NON contribuiscono al flusso attraverso Ω.

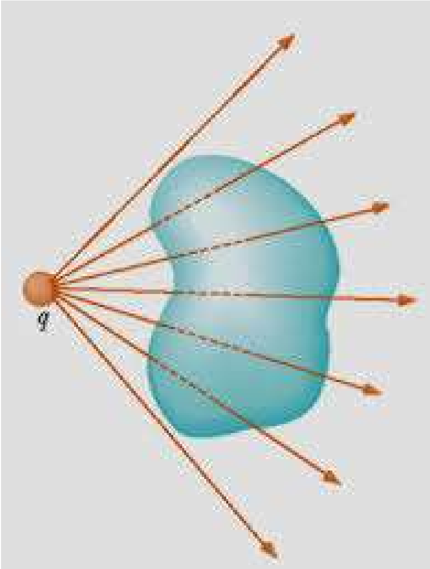
$$\boxed{\Phi_E = \oint_{\Omega} \overline{E} \cdot \overline{n} dS = \frac{Q_{tot,i}}{\varepsilon_0}}$$

DIMOSTRAZIONE (grafica immediata)

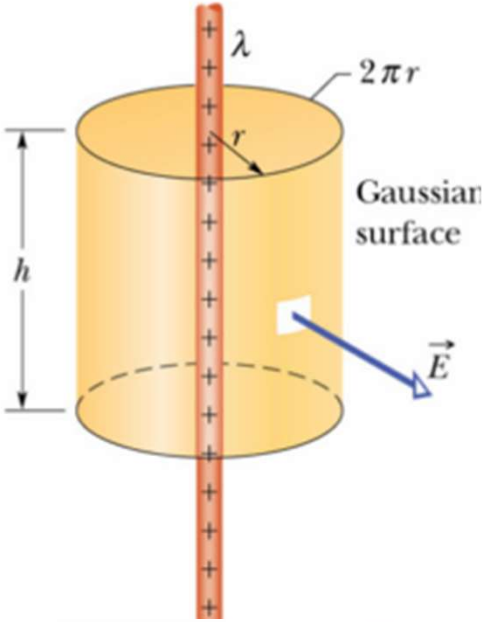
Carica interna: tutte le linee di campo che escono o entrano nella carica interna intersecano la superficie chiusa in un solo punto e quindi tutte contribuiscono al flusso

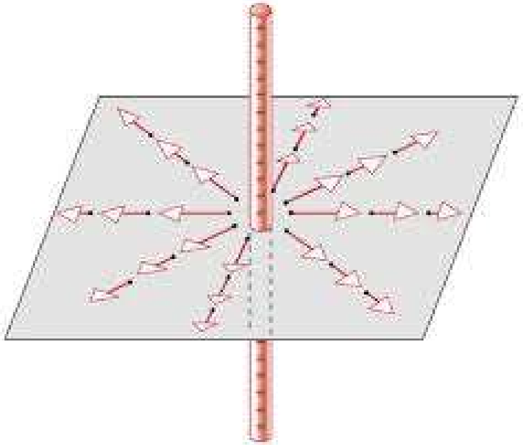


Carica esterna: tutte le linee di campo che escono o entrano nella carica esterna o non intersecano la superficie chiusa o la intersecano in 2 punti, uno in entrata e uno in uscita e quindi tutte NON contribuiscono al flusso



Applicazioni del teorema di Gauss: filo carico e lastra carica

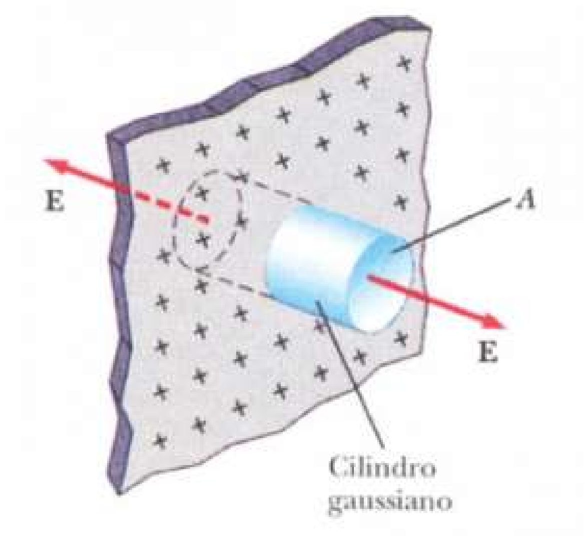




$$E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$q = \int \lambda \, dl = \lambda \, l$$

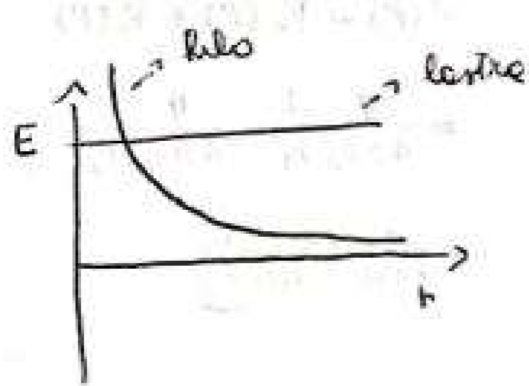
$$E \cdot 2\pi l r = \frac{\lambda \, l}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\lambda}{2 \, \pi r \, \epsilon_0}$$



$$2S{\cdot}E = \frac{q}{\epsilon_0} \rightarrow SE = \frac{\sigma S}{2\epsilon_0}$$

$$E(costante) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$q = \int \sigma \, dS = \sigma S$$



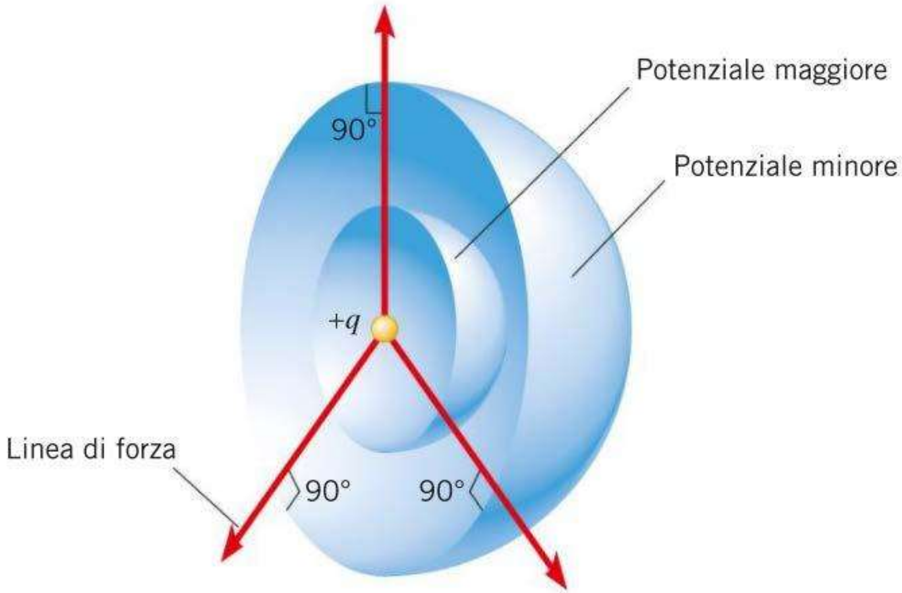
Superfici equipotenziali

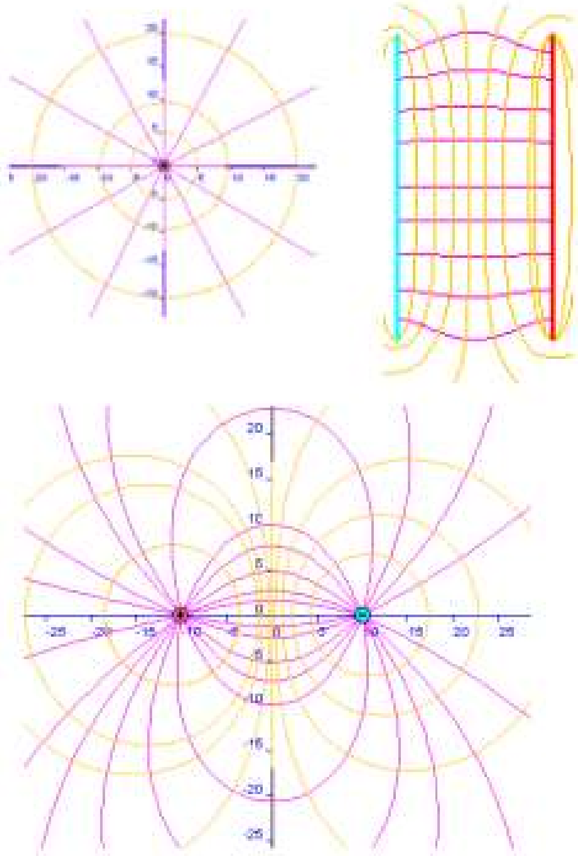
Si definiscono come l'insieme dei punti aventi lo stesso valore del potenziale.

(a) quando q_0 si sposta tra A e B di una equipotenziale il lavoro è 0.

$$L_{AB} = -q_0 \cdot \Delta V = q_0\,(V_A - V_B) = 0 \qquad (V_A = V_B)$$

(b) Le linee di forza di $\overrightarrow{E}$ sono perpendicolari ad una equipotenziale.





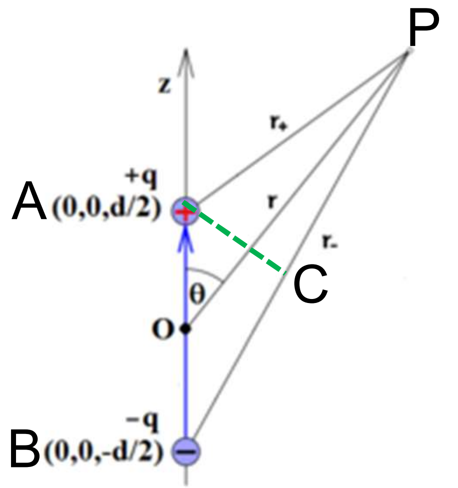
campo e superfici equipotenziali per carica puntiforme, dipolo e piastre parallele. Si osservi la perpendicolarità punto a punto tra la superficie equipotenziale e la linea di forza

Dipolo elettrico

È costituito da 2 cariche uguali e opposte +q e -q separate da una distanza fissa, *d*.

E' caratterizzato dal **MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO**: $\vec{p} = q\,\vec{d}$

Il vettore ***d*** è orientato dalla carica negativa a quella positiva



Calcoliamo il potenziale di dipolo elettrico in un punto P:

$$V\,(P) = V_+\,(P) + V_-(P) = \frac{q}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r_+} - \frac{q}{4\,\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r_-} = \frac{q}{4\,\pi\,\epsilon_0}\left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}\right)$$

Sia P molto lontano da +q e -q, quindi $r \gg d$. Allora:

$$\Delta r = r_- - r_+ \cong BC = d\cos\theta \qquad\qquad r_+ r_- \approx r^2$$

$$V\,(P) = \frac{q}{4\,\pi\,\epsilon_0}\cdot\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{|\vec{P}|\cdot\cos\theta}{4\,\pi\,\epsilon_0 r^2}$$

NOTE.

(a) Decresce come $\frac{1}{r^2}$, mentre per la carica puntiforme va come $\frac{1}{r}$

(b) Sul piano equatoriale $\theta = \frac{\pi}{2}$ vale $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

<u>Il momento di dipolo si misura in $|\vec{p}|$ = C · m</u>

Casi particolari di interesse: molecole polari, campo di doppio strato

Sono neutre ma hanno baricentri distinti di cariche positive e negative. Altrimenti abbiamo molecole apolari.

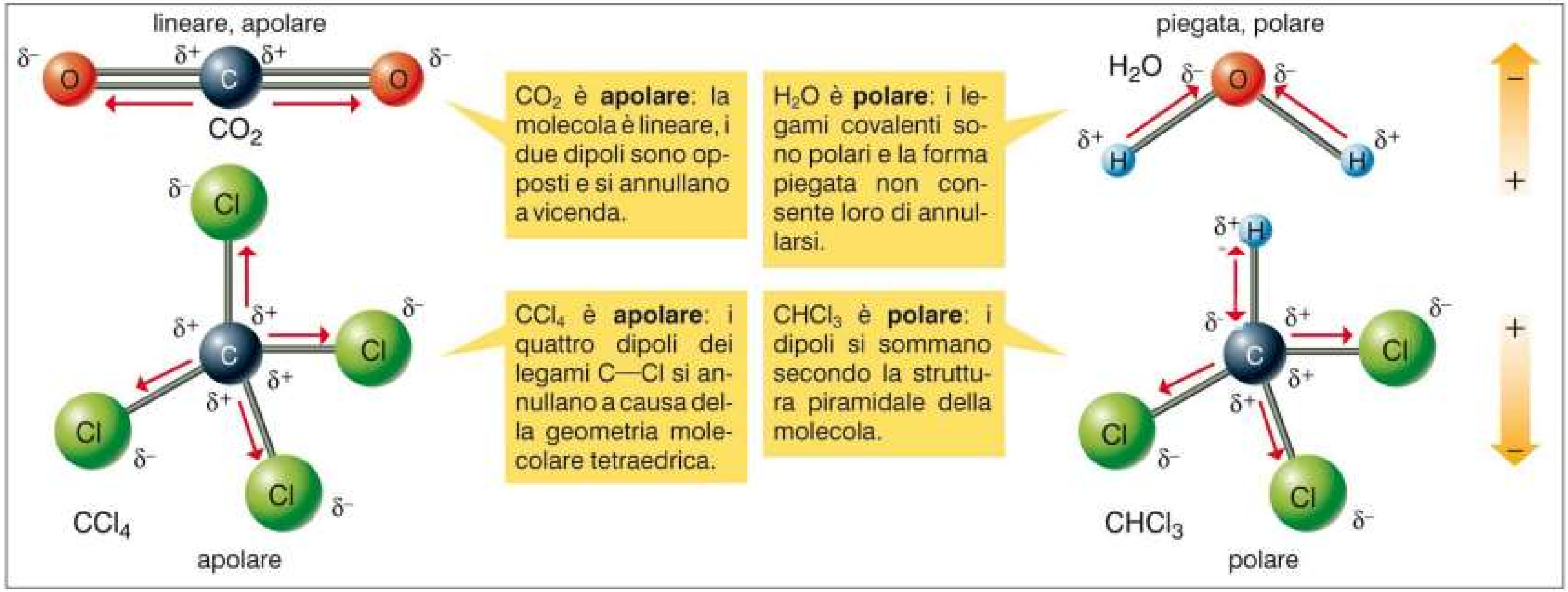
$|\vec{P}|$ in C · m

HCl $3{,}4 \cdot 10^{-30}$

NaCl $30{,}0 \cdot 10^{-30}$

H_2O $6{,}2 \cdot 10^{-30}$

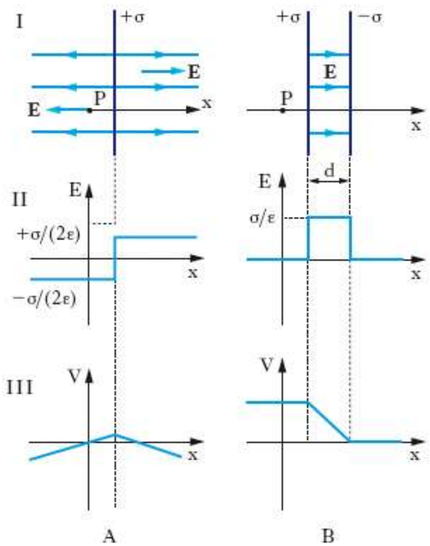
CO $0{,}4 \cdot 10^{-30}$



Il doppio strato di carica è importante in molte applicazioni biologiche (membrana cellulare, elettrocardiogramma, elettroencefalogramma)

$$E = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} & 0 < x < d \\ 0 & x > d \end{cases}$$

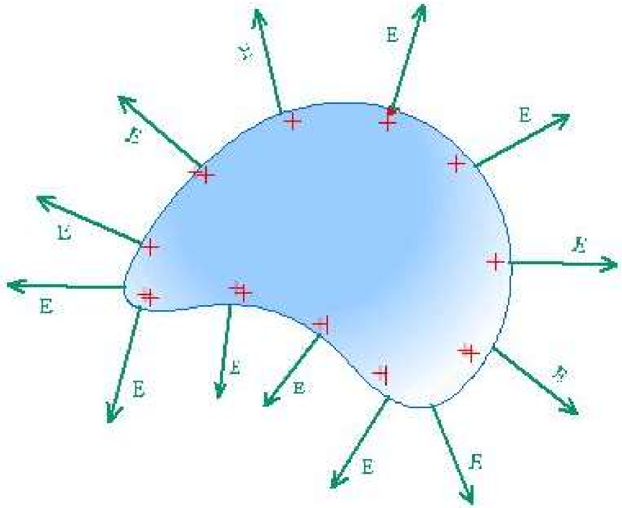
$$V = \begin{cases} cost = 0 & x > d \\ mettiamo\ cost. = 0 & \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}(d - x) & 0 < x < d \\ \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} d & x < 0 \end{cases}$$



Conduttori e isolanti

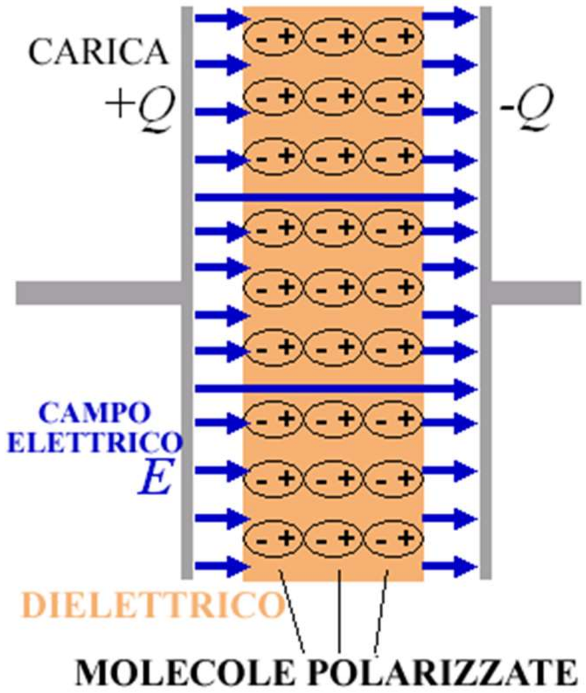
$E_i = 0$ all'interno campo nullo perché non c'è carica statica. La carica si porta tutta sulla superficie. La superficie di un conduttore è un'equipotenziale e il campo in corrispondenza della superficie di un conduttore è ad essa ortogonale e vale: $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0}}$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$



Il teorema è un'immediata conseguenza del teorema di Gauss

$E_i \neq 0$ all'interno di un isolante o dielettrico il campo non è nullo perché ci sono le cariche di polarizzazione.



Capacità elettrostatica e condensatore

La capacità elettrostatica di un conduttore isolato è il rapporto tra la sua carica e il suo potenziale.

$$C = \frac{Q}{V}$$

Per un conduttore sferico di raggio R e isolato la capacità nel vuoto è:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\,\pi\,\epsilon_o R}} = 4\,\pi\,\epsilon_o R$$

Si misura in Farad (F). $1\,F = \frac{1\,C}{1\,V}$ (è una capacità grande). A titolo di esempio calcoliamo la capacità del pianeta Terra. Consideriamola un conduttore.

$$C = 4\,\pi\,\epsilon_o R = 4\,\pi\,\cdot 8{,}85\,\cdot\,10^{-12}\,\frac{C^2}{N\cdot\,m^2}\cdot 6{,}3\,\cdot\,10^6 m = 7\cdot\,10^{-4}\,F$$

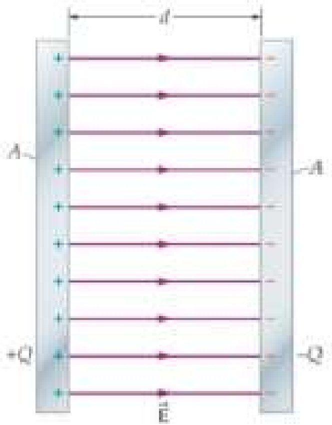
Per due conduttori isolati e carichi +Q e -Q si definisce la capacità del condensatore

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

$V_1 e\ V_2$ potenziale di ciascuno dei due conduttori

Condensatore a facce piane e parallele

Consideriamo per semplicità il caso dei due conduttori piani (lastra) e paralleli.



Il campo elettrico tra le due armature è dato da:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

La differenza di potenziale tra le due armature è

$$\Delta V = -Ed = -\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

Da cui si ricava la capacità: $C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{Qd/(\varepsilon_0 A)} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$

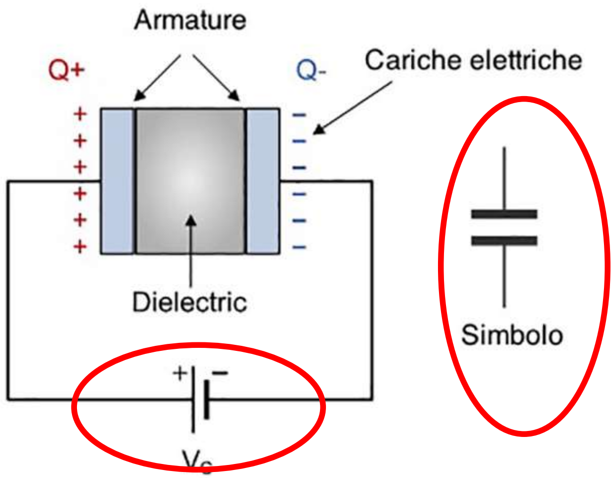
La capacità dipende solo da parametri geometrici

Nel caso sia presente tra le lastre (armature) del dielettrico $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ si ha:

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon_r C_0$$

$\boldsymbol{C_0}$= equivalente in vuoto

I simboli di condensatore e generatore d.d.p. sono



Energia elettrostatica in un condensatore carico

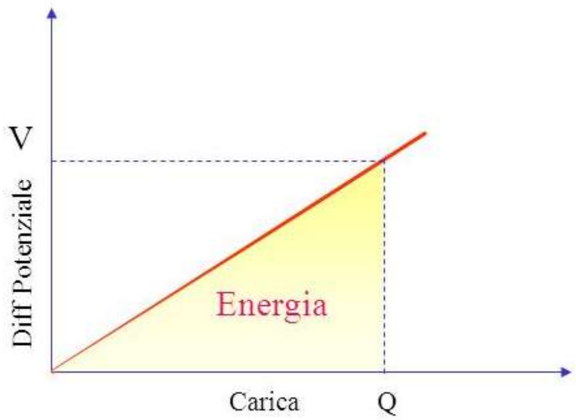
In un condensatore l'energia elettrostatica accumulata è il lavoro per accumulare da zero la carica finale +Q e -Q. Il lavoro infinitesimo dovuto ad un incremento infinitesimo di carica è:

$$dL = dq \cdot V(q)$$

Ma

$$dq = C \cdot dV$$

$$dL = C \cdot V(q) \cdot dV \rightarrow L = \int_0^{V_{fin}} C \cdot V(q) \cdot dV = \frac{1}{2}\, C\, {V_{fin}}^2 = \frac{Q^2}{2\, C}$$



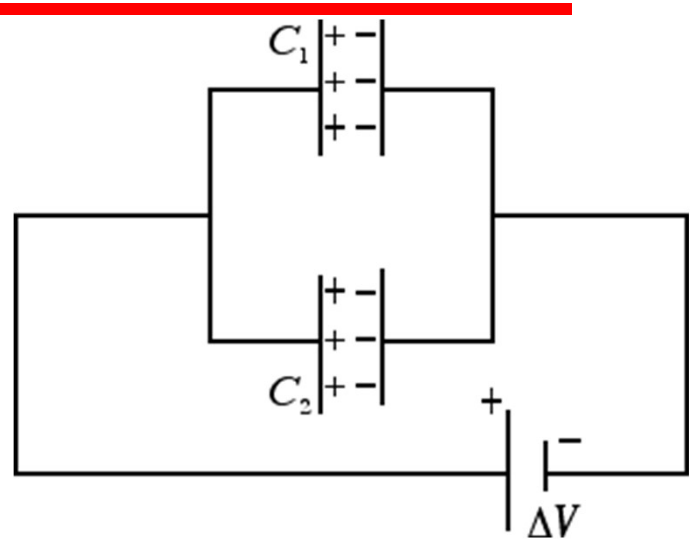
$$\boxed{W = \frac{1}{2} VQ}$$

Ed essendo anche $C = Q/V$

$$\boxed{W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}}$$

Capacità equivalente serie e parallelo

1- PARALLELO

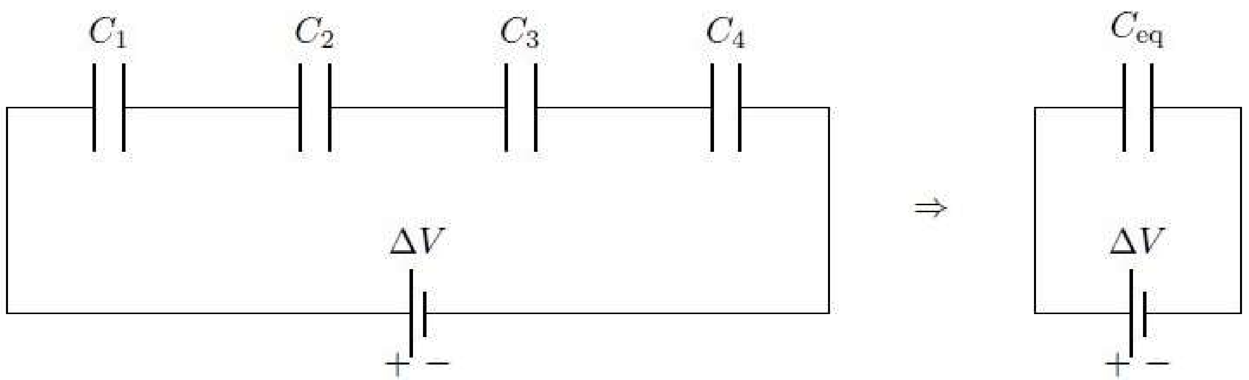


$$C_{eq.} = \frac{Q_{TOT}}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

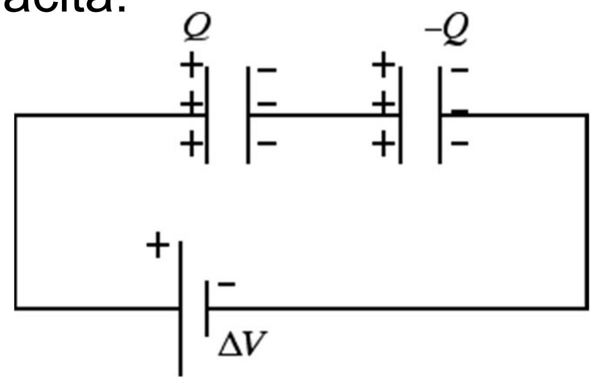
Si generalizza a dare:

$$C_{eq} = \sum_i C_i$$

2- SERIE Il circuito equivalente è:



Per semplicità nel caso di 2 capacità:



$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V_{TOT}} = \frac{Q}{\Delta V_1 + \Delta V_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Delta V_1}{Q} + \frac{\Delta V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$$

I dielettrici

In presenza di dielettrico il campo tra le lastre è più piccolo.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}$$

$\epsilon_r \geq 1$

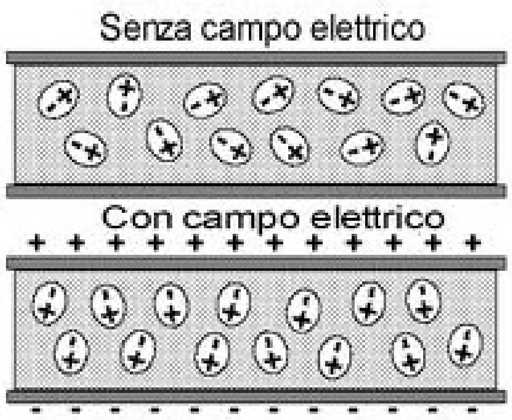
$\epsilon_r = 1$ nel vuoto

Infatti la legge di Coulomb diventa:

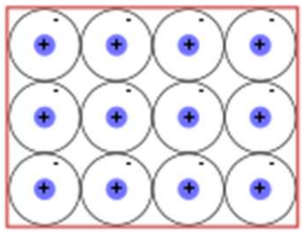
$$\overrightarrow{F_e} = \frac{1}{4\,\pi\epsilon_0\epsilon_r}\frac{q_1q_2}{{r_{12}}^2}\widehat{r_{12}}$$

La forza ha modulo minore (le cariche si "sentono" di meno)

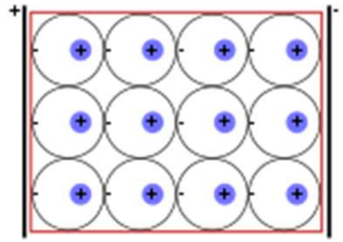
DIELETTRICI POLARI



DIELETTRICI NON POLARI



In assenza di campo i baricentri di cariche positive e negative coincidono.



In presenza di campo si ha separazione dei due baricentri che non coincidono più.
Il dipolo si orienta come in un campo, ma è un dipolo indotto e non permanente.

Applicazione medica dei condensatori

IL DEFIBRILLATORE CARDIACO A CORRENTE CONTINUA

Impulsi di pochi ms. Una scarica repentina è applicata al cuore tramite una coppia di elettrodi che fanno passare al petto un impulso di corrente. Un condensatore tipicamente con $C \approx$ 15-16 μF viene caricato a $\Delta V \approx$ 7kV. La durata della scarica è ΔT = 5ms (induttanza L = 0,1 H). Energia elettrostatica scaricata è $\approx$ 100-400 J.

Corrente elettrica

La quantità di carica che passa nell'unità di tempo attraverso una certa sezione di conduttore è definita come intensità di corrente, *I*:

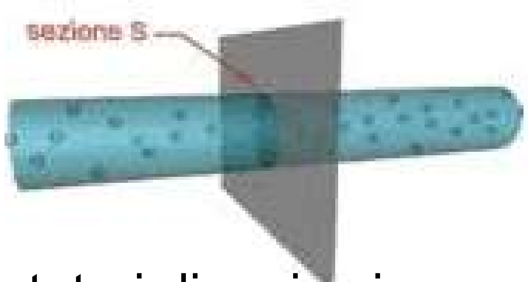
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Si misura in Ampére (A):

$$1A = \frac{1\,C}{1\,s}$$

I > 0 quando è concorde al moto delle cariche positive.
La densità di corrente, ***J***, è un vettore orientato come la velocità di deriva delle cariche positive avente come modulo la corrente (intensità di corrente)/unità di superficie.

$$|\boldsymbol{J}| = \frac{I}{S}$$



Per effetto degli urti dei portatori di carica in un conduttore reale (che danno luogo ad un moto con attrito) questi ultimi, anche in presenza di un campo elettrico esterno che li spinge, si muovono con velocità costante, detta appunto **VELOCITÀ DI DERIVA**:

Modello di conduzione

Nell'unità di tempo passa la sezione il numero portatori di carica contenuti nel cilindro di base *S* e altezza $V_d \cdot \Delta t$, dove V_d è appunto la velocità di deriva. Nel caso di elettroni di carica *e* aventi densità di carica di volume *n*:

$$|\Delta Q| = N_e \cdot e = n \cdot S\, Vd \cdot \Delta t \cdot e$$

$$I = \frac{|\Delta Q|}{\Delta t} = \frac{n\, S\, Vd \cdot \Delta t \cdot e}{\Delta t} = e\, n\, Vd\, S$$

$$\left|\vec{J}\right| = \frac{I}{S} = e\, n\, V_d \rightarrow \vec{J} = e\, n\, \overrightarrow{V_d}$$

$$V_d \sim 10^{-3} m/s$$

$$V_d \ll V_{qm} \sim 10^5 m/s$$

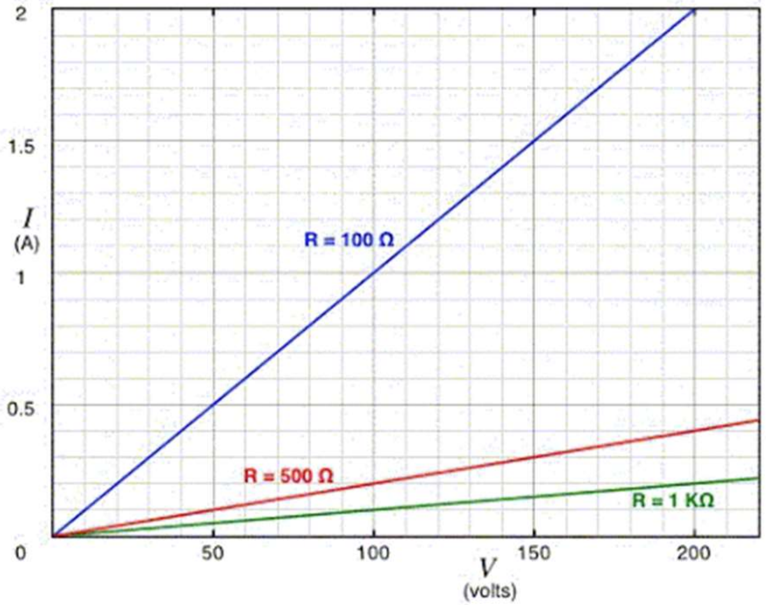
dove V_{qm} è velocità quadratica media dei portatori ovvero la loro velocità termica a temperatura ambiente.

Ma V_d è una velocità ordinata e coerente di tutti i portatori, mentre V_{qm} è casuale.

Resistenza elettrica e legge di Ohm

LEGGE DI OHM: $\Delta V = I \cdot R$ R è definita resistenza elettrica e si misura in Ohm (Ω)

$$1\,\Omega = \frac{1V}{1A}$$



In un tratto lungo *l* di conduttore cilindrico omogeneo: $R = \rho \frac{l}{S}$

ρ = resistività (dipende dal materiale e dalla temperatura)
l = lunghezza
S = sezione

$$\rho\,(T) = \rho_0\,[1 + \alpha\,(T - T_0)]$$
$$\rho_0 = \rho(T = T_0)$$

Materiale	Resistività (Ωm)
Argento	$1{,}62 \times 10^{-8}$
Rame	$1{,}68 \times 10^{-8}$
Oro	$2{,}35 \times 10^{-8}$
Alluminio	$2{,}75 \times 10^{-8}$
Tungsteno	$5{,}25 \times 10^{-8}$
Ferro	$9{,}68 \times 10^{-8}$
Platino	$10{,}6 \times 10^{-8}$
Acqua di mare	2.00×10^{-1}
Acqua potabile	tra 2.00×10^{1} e 2.00×10^{3}
Silicio puro (non drogato)	$2{,}5 \times 10^{3}$
Vetro	tra 10^{10} e 10^{14}
Aria	tra 1.30×10^{16} e 3.30×10^{16}

Effetto Joule e potenza dissipata in una resistenza

$$L = -\Delta U = -q\,\Delta V = q\,(V_A - V_B)$$

$$\Delta L = \Delta q \cdot \Delta V = \Delta q \cdot IR$$

La POTENZA associata a ΔL che viene DISSIPATA IN CALORE è:

$$\boxed{P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot IR = I^2 R}$$

Applicazione: la stufa elettrica

Effetto indesiderato: la dissipazione di energia in calore (perdite) nei grandi cavi che trasportano l'elettricità per grandi distanze

Correnti alternate

$$V(t) = V_0 \, sin\,(2\,\pi\nu\, t) \quad \Rightarrow \quad I\,(t) = \frac{V\,(t)}{R} = \left(\frac{V_0}{R}\right) \sin(2\,\pi\,\nu\,t) \qquad \left(\frac{V_0}{R}\right) = I_0$$

$P(t) = I^2(t) \cdot R = R \cdot I_0{}^2 sin^2(2\,\pi\,\nu\,t)$ > 0 sempre $\quad sin^2(2\,\pi\,\nu\,t)$ è sempre positivo

V_0= tensione di picco
I_0= corrente di picco

$$P_{max} = I_0{}^2 R \qquad \bar{P} =< P >= \frac{1}{2} P_{max} = \frac{1}{2} I_0{}^2 R$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T P(t)dt$$

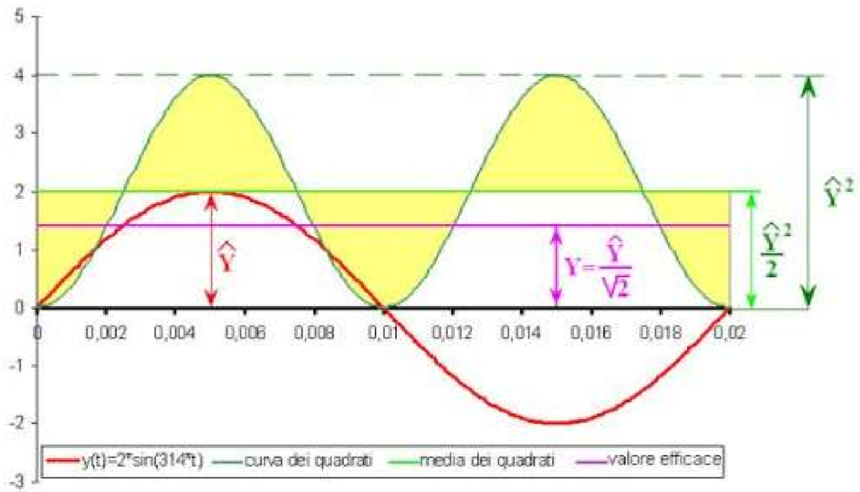
T è periodo della potenza che è la metà di quello di *I* e *ΔV*.

Passiamo ai valori efficaci delle grandezze. La definizione è:

$$x_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 \, dt}.$$

È facile vedere in matematica che:

$$\int_0^{2\,\pi} sin^2\,(x)\,d\,\gamma = \frac{1}{2}$$



e quindi:

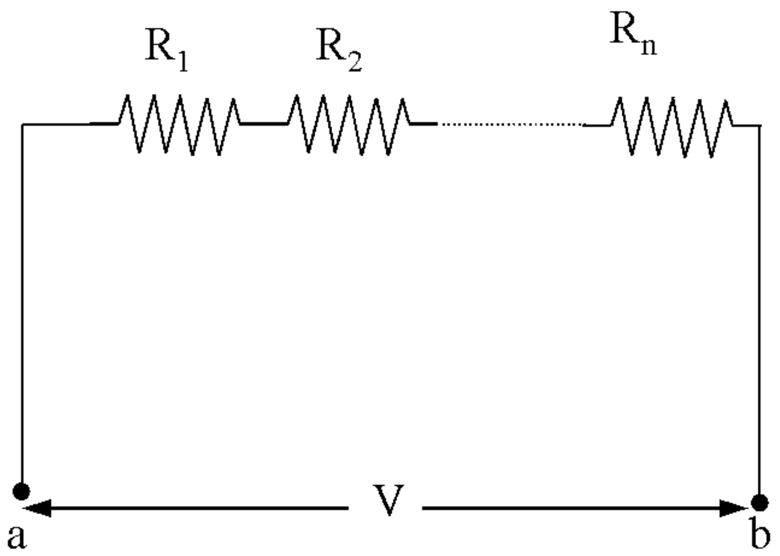
$$I_{eff} = \sqrt{< I^2 >} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \qquad V_{eff} = \sqrt{< V^2 >} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} {I_0}^2 R = \frac{1}{2} I_0 V_0 = I_{eff} \cdot V_{eff}$$

In Europa V_{eff} = 220 V quindi per il valore di picco, V_0, abbiamo V_0 = V_{eff} $\cdot \sqrt{2}$ = 311 V. Negli Stati Uniti V_{eff} = 110 V

Resistenze equivalenti serie e parallelo

SERIE

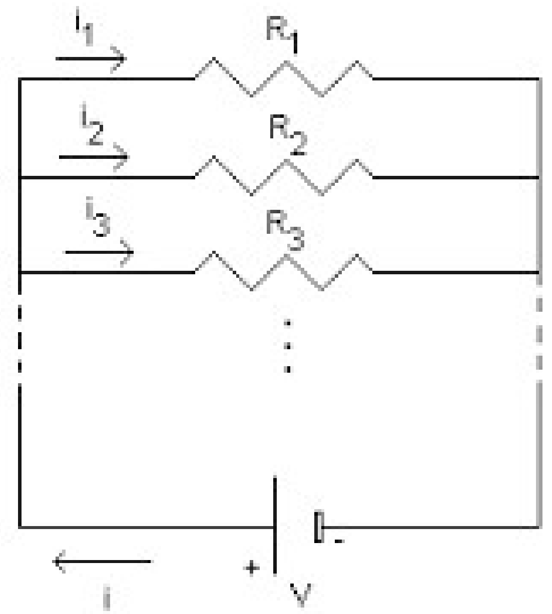


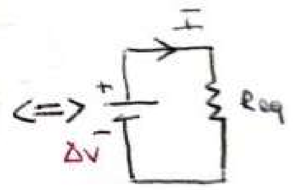
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \cdots \Delta V_n$$

$$= I\,(R_1 + R_2 + \cdots R_n) = IR_{eq}$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{N} R_i$$

PARALLELO





$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Conservazione della carica

$$\frac{\Delta V}{R_{eq}} = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} + \frac{\Delta V}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$