a.a. 2023-2024
Analisi Matematica I
corsi di laurea in **Ingegneria Informatica** e **Ingegneria dell'Automazione**
canale **SG2** (cognomi **J-Z**)

Bibliografia:

[MS] P. Marcellini, C. Sbordone, *Analisi Matematica Uno*, Liguori
[G] E. Giusti, *Analisi matematica 1*, Bollati Boringhieri
[PS] C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 1*, Zanichelli

Lezioni svolte:

- **Mercoledì 13/09** (8:30-10:30)

  Argomento Insiemi, elementi, relazione di appartenenza. Sottoinsiemi. Esempio di uso di simboli logici (congiunzione, disgiunzione, quantificatore universale ed esistenziale) nella descrizione di insiemi. Intersezione, unione, complementare, differenza, differenza simmetrica, prodotto cartesiano di insiemi. Relazioni. Funzioni (tra insiemi qualsiasi): dominio, codominio, immagine. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive. Composizione di funzioni. Funzione inversa.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 1, sezioni 4, 6, 7
  [G] capitolo 3, sezioni 1, 2, 3
  [PS] capitolo 1, sezioni 2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.3, 4.4

- **Mercoledì 20/09** (8:30-10:30)

  Argomento Assiomi dei numeri reali: R è un campo ordinato completo; assioma di completezza e assioma di Dedekind. Definizione di massimo, minimo, maggiorante, minorante per un sottoinsieme di R; insiemi superiormente limitati, inferiormente limitati, limitati; estremo superiore, estremo inferiore (in R) di un sottoinsieme di R.
  Conseguenze dell'assioma di completezza:
  1) proprietà dell'estremo superiore: ogni sottoinsieme di R non vuoto e superiormente limitato ammette estremo superiore in R (con dimostrazione);
  2) proprietà di Archimede: per ogni numero reale x esiste un numero naturale n tale che $n>x$ (con dimostrazione);
  3) densità di Q in R: per ogni coppia di numeri reali a,b con $a<b$ esiste un numero razionale q tale che $a<q<b$ (con dimostrazione, da terminare).

Riferimenti:
[MS] capitolo 1, sezioni 2, 3;   capitolo 2, sezioni 13, 18
[G] capitolo 1, sezioni 1, 3, 4
[PS] capitolo 2, sezioni 1, 2

- **Giovedì 21/09** (16:30-18:30)

  Argomento Densità di Q in R (con dimostrazione). Generalizzazione della definizione di estremo superiore e inferiore per un sottoinsieme non vuoto A di R (sup A = +∞ se A illimitato superiormente, sup A = -∞ se A illimitato inferiormente). Intervalli: notazione, estremi di un intervallo, intervalli limitati e illimitati, aperti e chiusi. Richiami sui numeri naturali, interi, razionali. Non esistenza di una radice quadrata di 2 in Q (con dimostrazione). Definizione di radice n-esima di un numero reale non negativo e sua esistenza in R (enunciato). Generalizzazione: definizione di radice n-esima di un numero reale di segno qualsiasi nel caso in cui n è dispari.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 1, sezione 5;   capitolo 2, sezioni 13, 18
  [G] capitolo 1, sezioni 3, 4
  [PS] capitolo 1, sezioni 2.4, 3.1

- **Venerdì 22/09** (12:30-14:30)

  Argomento Radice n-esima di un numero reale non negativo: dimostrazione dell'unicità, ammettendo l'esistenza; cenno di dimostrazione dell'esistenza. Caso particolare: dimostrazione dell'esistenza della radice quadrata di 2 in R. Non completezza di Q.
  Principio di induzione. Disuguaglianza di Bernoulli (con dimostrazione).

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 1, sezioni 5, 9, 11
  [G] capitolo 1, sezioni 3, 4, 6
  [PS] capitolo 2, sezione 3.1;   capitolo 1, sezione 5.2

- **Mercoledì 27/09** (8:30-10:30)

  Argomento Fattoriale e coefficiente binomiale. Sviluppo della potenza n-esima del binomio. Potenze a esponente razionale e a esponente reale con base un numero reale positivo. Logaritmo di un numero reale positivo.

Riferimenti:
[MS] capitolo 1, sezione 9;   capitolo 2, sezione 16
[G] capitolo 2, sezioni 1 (esempio 1.2) e 8
[PS] capitolo 1, sezione 6.1;   capitolo 2, sezione 3

- **Giovedì 28/09** (16:30-18:30)

  Argomento Grafico di una funzione reale di variabile reale. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore di una funzione reale su un sottoinsieme del dominio; funzioni limitate e illimitate. Funzioni monotone. Invertibilità (sull'immagine) di una funzione strettamente monotona.
  Funzioni elementari. Funzioni potenza, funzioni logaritmiche ed esponenziali. Esercizi su equazioni e disequazioni con radici e logaritmi.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 1, sezioni 6, 7, 9
  [G] capitolo 3, sezioni 1, 2, 3
  [PS] capitolo 4, sezione 1;   capitolo 5, sezione 3.4

- **Venerdì 29/09** (12:30-14:30)

  Argomento Funzione valore assoluto; proprietà del valore assoluto (comportamento rispetto a opposto, prodotto, quoziente), disuguaglianza triangolare. Esempio di funzione definita "a tratti" e di rappresentazione del suo grafico.
  Esercizi su disequazioni con valori assoluti e radicali.
  Funzioni goniometriche (sin, cos, tan): definizione, periodicità, simmetrie, valori notevoli, formule di addizione e sottrazione, formule di duplicazione, formule di prostaferesi (cenno). Funzioni goniometriche inverse (arcsin, arccos, arctan). Simmetrie: funzioni pari e dispari.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 1, sezioni 8, 10
  [PS] capitolo 5, sezione 3.6

- **Mercoledì 04/10** (8:30-10:30)

  Argomento Esercizi sulla determinazione di dominio, zeri e segno di una funzione individuata da un'espressione analitica. Grafici di funzioni deducibili da grafici noti per mezzo di trasformazioni elementari del piano cartesiano: dal grafico di $y=f(x)$, deduzione dei grafici di $y=f(x)+c$, $y=-f(x)$, $y=c\cdot f(x)$, $y=|f(x)|$, $y=f(x+c)$, con c una costante reale (da terminare).

- **Giovedì 05/10** (16:30-18:30)

  Argomento Grafici deducibili: dal grafico di y=f(x), deduzione del grafico di y=f(x+c), y=f(-x), y=f(c–x), y=f(c•x), y=f(|x|), con c una costante reale.
  Cenni ai numeri complessi: definizione di C, parte reale, parte immaginaria, modulo, coniugato di un numero complesso; somma e prodotto tra numeri complessi; argomento di un numero complesso diverso da 0. Interpretazione geometrica dei numeri complessi come punti del piano di Gauss.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 2, sezione 17
  [G] capitolo 1, sezione 8
  [PS] capitolo 2, sezione 4

- **Venerdì 06/10** (12:30-14:30)

  Argomento Cenni ai numeri complessi: forma algebrica e trigonometrica; opposto e reciproco di un numero complesso in forma algebrica; prodotto tra numeri complessi in forma trigonometrica; potenze di un numero complesso in forma trigonometrica (formula di De Moivre); radici n-esime di un numero complesso.
  Successioni. Definizione di successione a valori reali. Definizione di limite (finito o infinito) di una successione a valori reali. Operazioni con i limiti (somma, prodotto e quoziente).

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 2, sezione 17; capitolo 3, sezioni 22, 23, 25, 26
  [G] capitolo 1, sezione 8; capitolo 2, sezioni 1, 2, 3, 4
  [PS] capitolo 2, sezione 4; capitolo 4, sezione 3.1

- **Mercoledì 11/10** (8:30-10:30)

  Argomento Definizione di successione convergente, divergente, regolare, non regolare, monotona, limitata, illimitata, positiva, negativa. Definizione di “condizione soddisfatta definitivamente” da una successione (es.: successione definitivamente positiva).
  Alcuni limiti notevoli (senza dimostrazione):
  - limite per $n \to +\infty$ di n^b, con b costante reale
  - limite per $n \to +\infty$ di $(a_n)^b$, con b costante reale, per a_n una successione convergente a un limite finito > 0 oppure divergente a $+\infty$

- limite per $n \to +\infty$ di $(a_n)^k$, con k numero intero, per a_n una successione convergente a un limite finito < 0 oppure divergente a $-\infty$
- limite per $n \to +\infty$ di radice k-esima di a_n, con k naturale dispari, per a_n una successione convergente a un limite finito < 0 oppure divergente a $-\infty$
- limite per $n \to +\infty$ di $\log_b(n)$, con b numero reale positivo diverso da 1
- limite per $n \to +\infty$ di $\log_b(a_n)$, con b numero reale positivo diverso da 1, per una successione a_n positiva convergente a un limite finito ≥ 0 oppure divergente a $+\infty$

Esercizi sul calcolo di limiti di successioni: risoluzione, per raccoglimento a fattore comune della parte principale, di forme indeterminate di tipo $\infty-\infty$, ∞/∞, 0/0 provenienti da limiti di successioni con termine generale a_n definito attraverso prodotti o quozienti di somme di potenze di n; risoluzione, per razionalizzazione, di alcune forme indeterminate provenienti da limiti di successioni contenenti differenze di radici quadrate o cubiche.

- **Giovedì 12/10** (16:30-18:30)

  Argomento Teorema di unicità del limite (con dimostrazione). Teorema della permanenza del segno (con dimostrazione). Conseguenza: una successione regolare con termini definitivamente ≥ 0 ha limite ≥ 0 (e affermazione analoga per successioni regolari con termini definitivamente ≤ 0).
  Definizione di limite per eccesso e per difetto. Estensione delle regole per le operazioni con i limiti (somma, prodotto e quoziente) includendo il caso di limiti uguali a 0^+ o 0^-.
  Teoremi di confronto: Teorema di confronto due successioni; Teorema di confronto tra tre successioni ("Teorema dei carabinieri") (con dimostrazione)

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 3, sezioni 23, 27
  [G] capitolo 2, sezioni 3, 4
  [PS] capitolo 4, sezioni 2, 3

- **Venerdì 13/10** (12:30-14:30)

  Argomento Successioni infinitesime. Conseguenze del teorema di confronto:
  1) Una successione $\{a_n\}$ è infinitesima se e solo se la successione $\{|a_n|\}$ dei suoi valori assoluti è infinitesima (con dimostrazione)
  2) Teorema sul prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata (con dimostrazione). Esempio: limite per $n \to +\infty$ di $\cos(n)/n$
  3) Limite per $n \to +\infty$ della successione $\{q^n\}$, al variare di q numero reale (con dimostrazione nel caso $q > -1$)
  4) Test della radice e del rapporto (cenno di dimostrazione)
  Gerarchia degli infiniti per le successioni (logaritmo, potenza, esponenziale) (solo enunciato, da terminare).

Riferimenti:
[MS] capitolo 3, sezioni 28, 29, 33
[G] capitolo 2, sezioni 2, 4
[PS] capitolo 4, sezioni 3.1, 3.2

- **Mercoledì 18/10** (8:30-10:30)

  Argomento Gerarchia degli infiniti per le successioni: limiti per $n \to +\infty$ dei rapporti tra le successioni $\log_b(n)$, n^c, b^n, $n!$, n^n, per parametri reali $b>1$ e $c>0$ (con dimostrazione che $n^c/b^n \to 0$ e $b^n/n! \to 0$ per $n \to +\infty$, usando il test del rapporto). Generalizzazione al caso di successioni $\log_b(a_n)$, $(a_n)^c$, …, per $\{a_n\}$ una qualsiasi successione divergente a $+\infty$
  Esercizi sul calcolo di limiti usando la gerarchia degli infiniti.
  Teorema di regolarità delle successioni monotone: ogni successione monotona è regolare, e caratterizzazione del limite (solo enunciato, da dimostrare).
  Teorema-definizione del numero di Nepero *e*: la successione $(1+1/n)^n$ è monotona non-decrescente e limitata (solo enunciato, da dimostrare), e il numero *e* è definito come il suo limite per $n \to +\infty$.
  Definizione di logaritmo naturale (= logaritmo in base *e*). Notazione: per ogni $x>0$, si fissa la convenzione di indicare con $\log(x)$, o $\ln(x)$, il logaritmo di x in base *e*.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 3, sezioni 30, 31, 33
  [G] capitolo 2, sezioni 6, 7
  [PS] capitolo 4, sezione 3

- **Giovedì 19/10** (16:30-18:30)

  Argomento Dimostrazione del teorema di regolarità per successioni monotone.
  Dimostrazione che $(1+1/n)^n$ è una successione monotona non-decrescente e limitata.
  Funzioni iperboliche (sinh, cosh, tanh) e loro inverse (settsinh, settcosh). Applicazione dei logaritmi al calcolo di limiti di successioni della forma $\{(a_n)^{(b_n)}\}$ e forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 3, sezioni 30, 31
  [G] capitolo 2, sezioni 6, 7
  [PS] capitolo 4, sezione 3

- **Venerdì 20/10** (12:30-14:30)

  Argomento Esercizi sul calcolo di limiti di successioni della forma $\{(a_n)^\wedge(b_n)\}$, con risoluzione di alcune forme indeterminate del tipo 0^0, ∞^0, 1^∞. Osservazioni particolari:
    - per ogni numero reale a>0, si ha $a^{1/n} \to 1$ per $n \to +\infty$
    - per ogni numero reale a, si ha $(n^a)^{1/n} \to 1$ per $n \to +\infty$
    - generalizzazione di $(1+1/n)^n \to e$: se $\{\varepsilon_n\}$ è tale che $\varepsilon_n \neq 0$ e $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora $(1+\varepsilon_n)^{1/\varepsilon n} \to e$

  Limiti notevoli con logaritmi, esponenziali, funzioni goniometriche e iperboliche.
  Definizione di asintotico (simbolo: ~) e di o-piccolo per successioni. Applicazioni della relazione di asintotico al calcolo di limiti di successioni (principio di sostituzione degli asintotici in prodotti e quozienti):
    - se $a_n \sim b_n$ e $c_n \sim d_n$, allora vale $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot d_n$ e $a_n/c_n \sim b_n/d_n$
    - se $a_n \cdot b_n \to L$ (con L finito o infinito) e $b_n \sim c_n$, allora $a_n \cdot c_n \to L$
    - se $a_n/b_n \to L$ (con L finito o infinito) e $b_n \sim c_n$, allora $a_n/c_n \to L$

- **Mercoledì 25/10** (8:30-10:30)

  Argomento Calcolo di limiti usando limiti notevoli e principio di sostituzione degli asintotici nei prodotti e nei quozienti. Esercizi sulla determinazione del comportamento asintotico di una successione.
  Sottosuccessioni (o successioni estratte). Teorema di Bolzano-Weierstrass: ogni successione limitata di numeri reali ammette una sottosuccessione convergente (con dimostrazione)

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 3, sezione 34
  [G] capitolo 2, sezione 11
  [PS] capitolo 4, sezione 3.4

- **Giovedì 26/10** (16:30-18:30)

  Argomento Successioni di Cauchy. Criterio di Cauchy per la convergenza di una successione: una successione di numeri reali è convergente se e solo se è di Cauchy (con dimostrazione).
  Serie numeriche: Definizione di serie $\sum a_n$ di termine generale a_n, somme parziali di una serie. Serie convergenti, divergenti, regolari, irregolari. Somma di una serie convergente

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 3, sezione 35;   capitolo 11, sezione 104

- **Venerdì 27/10** (12:30-14:30)

  Argomento Carattere (convergente, divergente, irregolare) di una serie numerica. Osservazioni su operazioni che non alterano il carattere di una serie:
  - se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni ed esiste N tale che $a_n = b_n$ per ogni $n > N$, allora le serie $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso carattere ("cambiare il valore di un numero finito di termini non altera il carattere della serie")
  - se $\{a_n\}$ è una successione e c è un numero reale diverso da 0, allora le serie $\sum a_n$ e $\sum c \cdot a_n$ hanno lo stesso carattere ("moltiplicare il termine generale per una costante diversa da zero non altera il carattere della serie")

  Serie geometrica $\sum x^n$: carattere (divergente per $x \geq 1$, convergente per $-1 < x < 1$, irregolare per $x \leq -1$) e somma nel caso $-1 < x < 1$ (con dimostrazione).
  Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie. Condizione necessaria di convergenza: se $\sum a_n$ converge, allora $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.
  Serie a termini non negativi:
  - Teorema di regolarità: se $a_n \geq 0$ per ogni n, allora la serie $\sum a_n$ è regolare (o convergente, o divergente a $+\infty$)
  - Teorema di confronto: se $a_n \geq b_n \geq 0$ per ogni n, allora valgono le implicazioni:
    1) se $\sum a_n$ converge, allora $\sum b_n$ converge
    2) se $\sum b_n$ diverge, allora $\sum a_n$ diverge
  - Teorema di confronto asintotico: se $a_n > 0$, $b_n > 0$ e $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, allora $\sum a_n$ converge se e solo se $\sum b_n$ converge
  - Serie armonica generalizzata (solo enunciato): la serie di termine generale $1/n^a$ (con a numero reale fissato) è convergente per $a > 1$ e divergente per $a \leq 1$

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 11, sezioni 104, 105, 106, 107, 108

- **Giovedì 02/11** (10:30-12:30, 16:30-18:30)

  Argomento Esercizi sulla determinazione del carattere di serie numeriche.
  Teorema sul carattere della serie armonica generalizzata: la serie di termine generale $1/n^a$ (con a numero reale fissato) è convergente per $a > 1$ e divergente per $a \leq 1$ (con dimostrazione per il caso $a \leq 1$, e cenno di dimostrazione nel caso $a > 1$).
  Test della radice e test del rapporto per serie a termini positivi.
  Definizione di serie assolutamente convergente: la serie $\sum a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum |a_n|$ è convergente. Teorema: una serie assolutamente convergente è anche convergente.
  Teorema di Leibniz per serie a segni alterni: se $\{a_n\}$ è successione non-crescente di numeri non-negativi soddisfacente $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$, allora $\sum (-1)^n a_n$ è convergente.

Riferimenti:
[MS] capitolo 11, sezioni 107, 108, 109, 110

- **Venerdì 03/11** (12:30-14:30)

  Argomento Esercizi di riepilogo sulla determinazione del carattere di serie numeriche, anche in dipendenza da un parametro.

Dal 06/11 al 10/11: sospensione della didattica

Venerdì 10/11: **prova in itinere**

- **Mercoledì 15/11** (8:30-10:30)

  Argomento Definizione di continuità per una funzione reale di variabile reale $f : D \to R$ (di dominio $D \subseteq R$): continuità in un punto, continuità in un sottoinsieme del dominio.
  Teorema: dati $f : D \to R$ e un punto x_0 in D, le affermazioni seguenti sono equivalenti:
  1) f è continua in x_0
  2) per ogni successione $\{x_n\}$ di punti di D tale che $x_n \to x_0$, si ha $f(x_n) \to f(x_0)$
  (con dimostrazione dell'implicazione 1) ⇒ 2).)
  Teorema: somma, prodotto e composizione di funzioni continue sono continui (con dimostrazione). Proposizione: la funzione $f : R - \{0\} \to R$ definita da $f(x) = 1/x$ è continua.
  Corollario: il quoziente di funzioni continue (se ben definito) è continuo; in particolare, le funzioni polinomiali e le funzioni razionali (quozienti di polinomi) sono continue (nei rispettivi domini).

  Riferimenti:
  [G] capitolo 3, sezione 8
  [MS] capitolo 4, sezione 44

- **Giovedì 16/11** (16:30-18:30)

  Argomento Teorema di Weierstrass: una funzione continua $f : [a,b] \to R$ su un intervallo chiuso e limitato è limitata e assume massimo e minimo (con dimostrazione).
  Teorema di Darboux (o dei valori intermedi): una funzione continua $f : [a,b] \to R$ su un intervallo chiuso e limitato assume in [a,b] tutti i valori compresi tra f(a) e f(b) (con dimostrazione). Corollari:
  - Teorema degli zeri: se $f : [a,b] \to R$ è continua e $f(a) \le 0$, $f(b) \ge 0$, allora esiste un punto $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = 0$

    - Teorema di Darboux, seconda versione: una funzione continua $f : [a,b] \to R$ assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo, cioè $f([a,b]) = [m,M]$, dove $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$
    - Teorema di Darboux generalizzato: se $I \subseteq R$ è un intervallo (non necessariamente chiuso o limitato) e $f : I \to R$ è continua, allora l'immagine $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è un intervallo

  Teorema (criterio di continuità per una funzione monotona su un intervallo): se $I \subseteq R$ è un intervallo e $f : I \to R$ è monotona, allora f è continua se e solo se $f(I)$ è un intervallo (con dimostrazione).

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 4, sezioni 46, 47, 48, 49
  [G] capitolo 3, sezioni 10, 12

- **Venerdì 17/11** (12:30-14:30)

  Argomento Teorema: se $I \subseteq R$ è un intervallo e $f : I \to R$ è continua e strettamente monotona, allora la funzione inversa $f^{-1} : f(I) \to I$ è continua (con dimostrazione).
  Teorema: le funzioni elementari (potenze a esponente intero, radici, potenze a esponente reale, esponenziali, logaritmi, funzioni goniometriche e iperboliche e loro inverse locali) sono continue nei rispettivi domini (con dimostrazione).
  Definizione di intorno di un punto in R. Definizione di punto di accumulazione per un insieme $D \subseteq R$. Definizione di limite (finito) di una funzione $f : D \to R$ in un punto di accumulazione per il suo dominio D.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 4, sezioni 49, 50, 41, 42
  [G] capitolo 3, sezioni 12, 4

- **Mercoledì 22/11** (8:30-10:30)

  Argomento Relazione tra continuità di $f : D \to R$ in un punto $x_0 \in D$ di accumulazione per D e limite di f in x_0: f è continua in x_0 se e solo se $f(x) \to f(x_0)$ per $x \to x_0$.
  Definizione generalizzata di intorno (intorno di $x_0 \in R$, intorno di $+\infty$, intorno di $-\infty$).
  Definizione generalizzata di punto di accumulazione (includendo i casi $-\infty$ e $+\infty$) per un insieme $D \subseteq R$. Definizione generalizzata di limite di funzione (limite finito o infinito, per $x \to x_0 \in R$, per $x \to +\infty$, per $x \to -\infty$).
  Teorema ("teorema ponte"): dati $D \subseteq R$ insieme, $f : D \to R$ funzione, $a \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$ di accumulazione per D, e $L \in R \cup \{-\infty,+\infty\}$, le affermazioni seguenti sono equivalenti:

  1) $f(x) \to L$ per $x \to a$
  2) per ogni successione $\{x_n\}$ di punti in $D-\{a\}$ tale che $x_n \to a$, si ha $f(x_n) \to L$

Limite destro e sinistro, per difetto e per eccesso. Teorema di unicità del limite. Teorema di permanenza del segno (per limiti di funzioni e per funzioni continue). Teorema di confronto. Teorema di esistenza del limite per funzioni monotone. Limiti delle funzioni elementari agli estremi degli intervalli di definizione. Operazioni con i limiti (limite della somma, del prodotto, del quoziente). Limiti di funzioni composte.

Riferimenti:
[MS] capitolo 4, sezioni 50, 41, 42, 43, 46

- **Giovedì 23/11** (16:30-18:30)

  Argomento Esercizi sul calcolo di limiti di funzioni. Limiti notevoli e gerarchia degli infiniti per funzioni.

- **Venerdì 24/11** (12:30-14:30)

  Argomento Discontinuità (e "singolarità") di prima specie, seconda specie, eliminabili. Definizione di rapporto incrementale, relativo a due punti del dominio, per una funzione. Definizione di derivata $f'(x_0)$ di $f : (a,b) \to R$ in un punto $x_0 \in (a,b)$. Significato geometrico della derivata. Retta tangente al grafico di una funzione in un punto.
  Teoremi (derivabilità implica continuità; derivabilità di somma, prodotto, quoziente, composizione, funzione inversa di funzioni derivabili):
  - se $f : (a,b) \to R$ è derivabile in $x_0 \in (a,b)$, allora f è continua in x_0 (con dim.)
  - se $f, g : (a,b) \to R$ sono derivabili in $x_0 \in (a,b)$, allora $f+g$ e $f{\cdot}g$ sono derivabili in x_0, e vale $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$, $(f{\cdot}g)'(x_0) = f'(x_0){\cdot}g(x_0) + g'(x_0){\cdot}f(x_0)$ (con dim.)
  - se $f : (a,b) \to (c,d) \subseteq R$ derivabile in $x_0 \in (a,b)$, e $g : (c,d) \to R$ derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f : (a,b) \to R$ è derivabile in x_0 e vale $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ (con dimostrazione nel caso in cui $f(x) \neq f(x_0)$ per $x \neq x_0$)
  - Proposizione: la funzione $f : R - \{0\} \to R$ definita da $f(x) = 1/x$ è derivabile in tutto il suo dominio, con $f'(x) = -1/x^2$ per ogni $x \neq 0$ (con dimostrazione)
  - Corollario: se $f, g : (a,b) \to R$ sono derivabili in $x_0 \in (a,b)$ e vale $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è derivabile in x_0 e vale $(f/g)'(x_0) = [f'(x_0){\cdot}g(x_0) - f(x_0){\cdot}g'(x_0)]/[g(x_0)]^2$
  - se $f : (a,b) \to R$ è continua e invertibile, e derivabile in $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$, con derivata $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 4, sezione 45;   capitolo 5, sezioni 53, 54, 55, 57
  [G] capitolo 4, sezioni 6, 7;   capitolo 5, sezione 1

- **Mercoledì 29/11** (8:30-10:30)

  Argomento Dimostrazione della formula della derivata della funzione composta nel caso generale. Definizione di funzione derivata. Derivata prima, derivata seconda e derivate successive. Espressioni delle derivate delle funzioni elementari (con dimostrazione). Esempi semplici di calcolo di derivate.
  Punti di massimo e minimo assoluto, punti di massimo e minimo relativo (o locale). Teorema di Fermat (con dimostrazione). Teorema di Rolle (con dimostrazione). Teorema di Lagrange (con dimostrazione).

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 5, sezioni 55, 56; capitolo 6, sezioni 60, 61
  [G] capitolo 4, sezioni 7, 8; capitolo 5, sezioni 1, 2

- **Giovedì 30/11** (16:30-18:30)

  Argomento Applicazioni del teorema di Lagrange:
  - Teorema: criterio di monotonia per una funzione continua in un intervallo [a,b] e derivabile in (a,b) (con dimostrazione)
  - Corollario: caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo
  - Corollario: criterio di stretta monotonia per una funzione derivabile in un intervallo

  Applicazione: individuazione di intervalli di monotonia e punti di massimo e minimo relativo per una funzione derivabile su un intervallo.
  Derivata destra e sinistra in un punto. Relazione tra esistenza del limite destro/sinistro della derivata in un punto ed esistenza del limite destro/sinistro del rapporto incrementale centrato nel punto. Derivabilità di funzioni definite a tratti. Classificazione di alcuni punti di non derivabilità: punti angolosi, cuspidi, punti a tangente verticale.
  Schema generale per lo studio di una funzione, fino allo studio della monotonia incluso.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 6, sezioni 62, 65, 68
  [G] capitolo 4, sezione 8; capitolo 6, sezione 4

- **Venerdì 01/12** (12:30-14:30)

  Argomento Definizione di asintoto verticale, orizzontale, obliquo al grafico di una funzione. Studio di funzione. Teorema di Cauchy (con dimostrazione). Teorema di de l'Hôpital (enunciato nel caso particolare di un limite destro al finito in cui si presenta la forma di indecisione [0/0]). Esempio di calcolo di limiti usando il teorema di de l'Hôpital.

Riferimenti:
[MS] capitolo 6, sezioni 64, 65, 67
[G] capitolo 4, sezione 8;   capitolo 6, sezioni 1, 4

- **Mercoledì 06/12** (8:30-10:30)

  Argomento Teorema di de l'Hôpital: enunciato nel caso generale (con dimostrazione nel caso della forma indeterminata [0/0] per un limite destro "al finito"). Esempio di calcolo di limite con applicazione ripetuta del teorema di de l'Hôpital.
  Definizione di funzione derivabile n volte in un intervallo o in un punto. Definizione di polinomio di Taylor $P_n(x)$ (di ordine n e centro x_0) di una funzione f derivabile n volte in un punto x_0. Resto $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.
  Teorema di Taylor: se $f : (a,b) \to R$ è derivabile n volte in un punto $x_0 \in (a,b)$, allora il resto $R_n(x)$ soddisfa $R_n(x)/(x-x_0)^n \to 0$ per $x \to x_0$.
  Notazione di o-piccolo: dati un insieme $D \subseteq R$, un punto di accumulazione $x_0 \in R$ per D, e due funzioni $f, g : D \to R$ con $g(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$, si scrive $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se vale $f(x)/g(x) \to 0$ per $x \to x_0$.
  Formula di Taylor con il resto in forma di Peano: se $f : (a,b) \to R$ è derivabile n volte in un punto $x_0 \in (a,b)$, allora $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$. Sviluppi di Taylor-MacLaurin (formule di Taylor con centro $x_0 = 0$ e resto in forma di Peano) di alcune funzioni.
  Esempio di calcolo di limite usando gli sviluppi di Taylor con resto in forma di Peano.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 6, sezioni 64, 66, 67;   capitolo 10, sezioni 98, 99
  [G] capitolo 6, sezioni 2, 5, 6

- **Giovedì 07/12** (16:30-18:30)

  Argomento Regole di calcolo con o-piccoli. Calcolo di limiti con sviluppi di Taylor.

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 10, sezione 99

- **Mercoledì 13/12** (8:30-10:30)

  Argomento Convessità. Definizione di insieme convesso (nel piano Euclideo R^2).
  Definizione di funzione convessa su un intervallo. Caratterizzazione della convessità attraverso la monotonia del rapporto incrementale relativo a un punto fissato.
  Teorema (di "regolarità"): una funzione convessa in un intervallo aperto è continua in

tutto l'intervallo e ammette derivata destra e derivata sinistra in ogni punto dell'intervallo.
Criteri di convessità per funzioni derivabili:

- una funzione f : (a,b) → R derivabile è convessa se e solo se f' è non decrescente
- una funzione f : (a,b) → R due volte derivabile è convessa se e solo se f'' ≥ 0

Caratterizzazione della convessità per funzioni derivabili:

- una funzione derivabile f : (a,b) → R derivabile è convessa se e solo se per ogni $x_0 \in (a,b)$ si ha $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ per ogni altro $x \in (a,b)$.

(di tutti i teoremi menzionati: solo cenno di dimostrazione, non richiesta per l'esame).
Definizione di funzione concava e di punto di flesso. Esempio di studio di funzione comprensivo dello studio della convessità.
Calcolo integrale. Definizione di primitiva di una funzione su un intervallo. Caratterizzazione dell'insieme delle primitive di una funzione. Definizione di integrale indefinito di una funzione su un intervallo (= insieme delle primitive della funzione). Primitive delle funzioni elementari.

Riferimenti:
[MS] capitolo 6, sezioni 63, 69;   capitolo 9, sezioni 87, 88
[G] capitolo 6, sezione 3;   capitolo 5, sezione 2

- **Giovedì 14/12** (16:30-18:30)

  Argomento Integrazione per decomposizione in somma. Esempi di calcolo di integrali indefiniti per decomposizione in somma. Integrazione delle funzioni razionali: divisione tra polinomi e riduzione al caso dell'integrazione di una funzione razionale con numeratore di grado minore del denominatore. Integrazione delle funzioni 1/(x+a) e delle funzioni $(Ax+B)/(ax^2+bx+c)$ nei casi $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$ (dove $\Delta = b^2 - 4ac$).

  Riferimenti:
  [MS] capitolo 9, sezioni 89, 90
  [G] capitolo 5, sezioni 3, 4

- **Venerdì 15/12** (12:30-14:30)

  Argomento Integrazione delle funzioni $(Ax+B)/(x+a)^2$ (corrispondente al caso di un denominatore di secondo grado con $\Delta = 0$). Teorema fondamentale dell'algebra per polinomi a coefficienti reali. Decomposizione in fratti semplici: enunciato generale ed esempi. Applicazione al calcolo dell'integrale di funzioni razionali con denominatore di grado maggiore di 2. Cenno alla formula di Hermite per la decomposizione di funzioni razionali con radici multiple.
  Integrale definito (secondo Riemann) per una funzione f : [a,b] → R limitata su un intervallo chiuso e limitato. Teoremi e proprietà relativi agli integrali definiti (senza dim.):

- Teorema fondamentale del calcolo integrale: se f : [a,b] → R è integrabile secondo Riemann ed esiste F : [a,b] → R continua in [a,b] e derivabile in (a,b) tale che F' = f in (a,b), allora l'integrale definito di f su [a,b] è uguale a F(b) - F(a)
- Teorema: se f : [a,b] → R è continua allora è integrabile
- Teoremi di additività e linearità per integrali, teorema della media integrale
- Teorema: se f : [a,b] → R è integrabile secondo Riemann, allora la funzione integrale F : [a,b] → R (definita da F(x) = integrale di f su [a,x] per ogni x in [a,b]) è continua in tutto [a,b], e derivabile nei punti di continuità di f, con derivata F' = f in tali punti
- Corollario: se f : [a,b] → R è continua, allora ammette primitiva in [a,b]
- Corollario: se f : [a,b] → R è continua, allora il suo integrale definito su [a,b] è uguale a F(b) - F(a) per una qualsiasi primitiva F di f

Integrazione per parti. Integrazione per sostituzione.

Riferimenti:
[MS] capitolo 8, sezioni 79, 80, 82, 83;   capitolo 9, sezioni 86, 87, 91, 92
[G] capitolo 4, sezioni 2, 3, 4, 5, 9;   capitolo 5, sezioni 3, 4, 5, 6