

Gabriele Cricri

Appunti di

Meccanica della Frattura Elastica Lineare

Per il corso di Costruzione di Macchine
del CDL in Ingegneria Meccanica
presso l'Università degli Studi di Napoli Federico II

Introduzione

I metodi di progetto o verifica di elementi meccanici e strutture di ogni tipo si basano, com'è noto, sul calcolo delle tensioni agenti nel materiale causate dall'applicazione di carichi esterni. Tutti i manuali tecnici forniscono dati caratterizzanti la resistenza dei vari materiali strutturali, raccolti in anni di prove sperimentali e sintetizzati in grafici e tabelle.

A vari livelli di sofisticazione, e per tutti i metodi, il progetto o la verifica di strutture hanno quale fase decisiva il confronto tra la sollecitazione cui è sottoposto il materiale e la sua resistenza.

Nelle metodologie elementari per il calcolo delle sollecitazioni si assume che il materiale costituente la struttura sia omogeneo o composto da parti omogenee. Tale modello risulta essere sufficientemente accurato per molte applicazioni, ed è stato al lungo l'unico modello scientifico del comportamento dei materiali sotto carico. Con l'evoluzione delle tecnologie dei materiali e delle esigenze costruttive sono emersi nuovi problemi, che hanno richiesto l'attenzione di progettisti e ricercatori.

Nel corso del ventesimo secolo si sono verificati centinaia di gravi incidenti per la rottura di navi, aerei, ponti ed altre grandi strutture sottoposte a sollecitazioni ritenute del tutto accettabili secondo i tradizionali metodi di calcolo. Queste rotture erano per lo più improvvise e si manifestavano senza alcuna deformazione macroscopica che le preannunciasse.

Il ripetersi di simili incidenti ha condotto i ricercatori allo studio di modelli di comportamento dei materiali impiegati per quelle costruzioni che tenessero esplicitamente conto dei difetti che nel modello continuo non compaiono perché considerati ininfluenti o poco trattabili matematicamente e nelle scienze progettuali.

Tutti i materiali tecnologici, su scala sufficientemente piccola, contengono difetti di continuità volumetrici o microscopiche cricche – cioè soluzioni di continuità superficiali – che creano concentrazioni di tensioni invisibili nei modelli omogenei. Su scala ancora inferiore, poi, la struttura del materiale (microstruttura) è talmente disomogenea da rendere inapplicabile addirittura il modello di continuo ed il concetto stesso di tensione. La meccanica della frattura è un modello della rottura dei materiali che tiene esplicitamente conto della possibile presenza di cricche in un volume altrimenti continuo ed è applicata nella pratica ingegneristica per ricavarne criteri di progettazione e verifica.

Si consideri, ad esempio, un pezzo meccanico o una parte strutturale in cui è presente una piccola fessura ad intaglio acuto (cricca). Si osserva che a causa dell'applicazione di carichi eccezionali, o carichi ciclici, o della contemporanea presenza di carichi ed attacchi ambientali, la cricca al passare del tempo crescerà. All'aumentare della sua superficie, la cricca indurrà nel pezzo concentrazioni di tensione sempre maggiori, diminuendone drasticamente la capacità di resistenza.

Dopo un certo periodo, la resistenza residua sarà divenuta talmente bassa da non consentire più alla struttura di sopportare carichi accidentali, e, infine, neppure i normali carichi di servizio. A questo punto, essa certamente si romperà.

Molte strutture sono progettate per sostenere carichi di servizio sufficientemente elevati da provocare l'iniziazione di cricche. Il progettista deve tener conto di questa eventualità, prevedendo la

velocità di crescita della cricca e quindi la durata della vita della struttura.

L'obiettivo della meccanica della frattura è lo sviluppo e lo studio di metodi per effettuare queste valutazioni. Essa deve, quindi, fornire una risposta alle seguenti domande:

- Qual è la resistenza residua in funzione delle dimensioni della cricca.
- Quale dimensione della cricca (dimensione critica) può essere tollerata in condizioni di servizio.
- Quanto tempo occorre perché la cricca aumenti da una certa dimensione iniziale ad una critica.
- Quanto spesso e con quali modalità la struttura deve essere ispezionata.

La meccanica della frattura è in grado di rispondere a tali domande, attingendo conoscenza e metodologie da diverse discipline (fig. 1) e giungendo a stabilire criteri e procedure di progettazione, verifica e manutenzione.

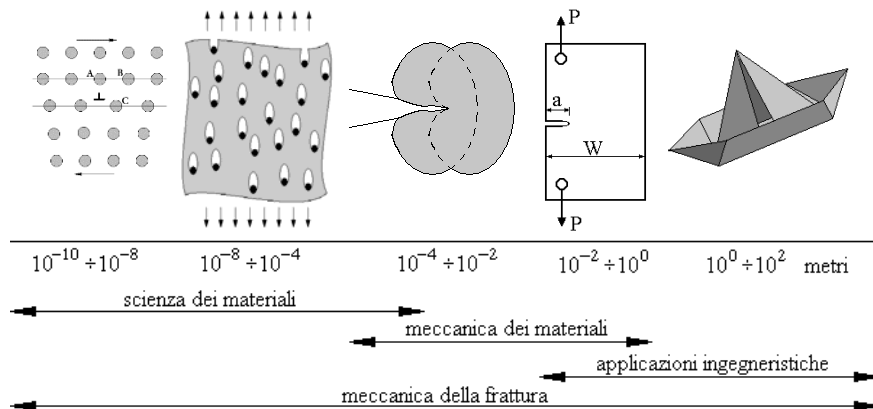


Figura 1

1 Fattori di intensità della tensione

1.1. Campo tensionale all'apice della cricca

Si consideri un continuo piano di geometria generica \mathcal{G} con vincoli e carichi \mathcal{C} (condizioni al contorno), contenente una cricca di lunghezza data.

Nell'ipotesi di materiale omogeneo e isotropo ed elasticità lineare è possibile ricavare un'espressione generale delle tensioni valida nell'intorno dell'apice della cricca.

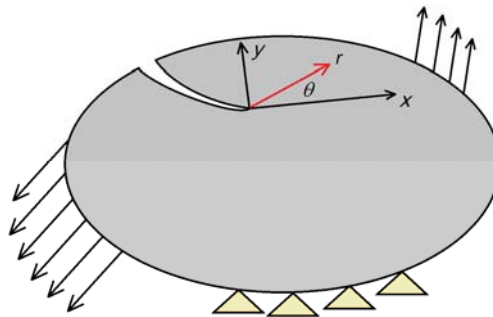


Figura 1 – Continuo piano con cricca

Con riferimento alle coordinate polari r, θ di fig. 1, aventi origine nell'apice della cricca ed orientate in modo che l'asse $\theta = 0$ (o asse x) abbia direzione tangente alla cricca, l'espressione delle tensioni, dovuta al Westergaard, è la seguente:

$$\sigma_{ij} = \frac{F_{ij}(\theta; G, \mathcal{C})}{\sqrt{2\pi r}} + T_{ij} + \omega(r) \quad i = x, y, j = x, y. \quad (1)$$

I tre termini della tensione evidenziati nella formula precedente hanno peso decrescente nella zona di piano intorno all'apice della cricca (che è il punto di coordinata $r = 0$). Il primo, il più importante, è un termine singolare con potenza $1/2$; il secondo è un termine costante che viene considerato in applicazioni di meccanica della frattura più avanzate (T-stress); il terzo contiene contributi di ordine superiore in r . Nella presente trattazione verrà considerato solo il primo termine.

È possibile suddividere il termine singolare del campo tensionale intorno all'apice della cricca in una parte simmetrica rispetto all'asse x ed una antisimmetrica. Il risultato della partizione è la seguente espressione:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I(G, \mathcal{C})}{\sqrt{2\pi r}} f_{Iij}(\theta) + \frac{K_{II}(G, \mathcal{C})}{\sqrt{2\pi r}} f_{IIij}(\theta) \quad (2)$$

dove le funzioni di θ assumono i seguenti valori:

$f_{Ixx} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$	$f_{IIxx} = -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$
$f_{Iyy} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$	$f_{IIyy} = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$
$f_{Ixy} = \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}$	$f_{IIxy} = \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right)$

Nell'equazione (2) K_I e K_{II} sono costanti dipendenti dalle condizioni al contorno e dalla geometria. Tali costanti sono i fattori moltiplicativi rispettivamente della parte simmetrica (K_I) e di quella antisimmetrica (K_{II}) del termine singolare del campo di tensioni intorno all'apice della cricca. Ciascuna di esse prende il nome di

fattore di intensità della tensione (*Stress Intensity Factor*), abbreviato in SIF.

Com'è evidente dalla (2), se sono noti i SIF è anche noto l'intero campo tensionale intorno all'apice della cricca in tutta la zona in cui esso è dominato dalla singolarità.

In particolare, la costante K_I regola il modo di sollecitazione della cricca che tende a separarne i lembi caricando a trazione la parte adiacente all'apice, che è detto *modo di apertura* (opening mode) o *modo I*. Invece, la costante K_{II} regola il modo di sollecitazione della cricca che tende a far scorrere i lembi l'uno rispetto all'altro caricando a taglio la parte adiacente all'apice, detto *modo di scorrimento* (sliding mode) o *modo II*.

È riportata in letteratura anche una soluzione elastica simile alla (2) relativa alla sollecitazione della cricca mediante tensioni tangenziali fuori piano, che è indicata come *modo di strappamento* (tearing mode) o *modo III* (vedi figura 2). Anche questa soluzione è caratterizzata dalla stessa singolarità $r^{0.5}$ nell'apice della cricca e da un fattore di intensità della tensione, detto K_{III} . A differenza degli altri due, il modo III si può realizzare in pratica solo in domini tridimensionali, il cui studio non sarà affrontato nella presente trattazione.

Dei tre modi, il modo I è il più gravoso ai fini della resistenza, e nel seguito si farà riferimento principalmente ad esso.

Secondo le equazioni (2), tutte le tensioni tendono all'infinito all'apice della cricca (cioè nel punto $r = 0$). Per un materiale reale ciò non è possibile, ed infatti, superato un certo limite di tensione, non si può più ritenere che esista proporzionalità tra le tensioni e le deformazioni, poiché intervengono fenomeni di plasticizzazione, danneggiamento, e modifica della microstruttura che vanificano le ipotesi di elasticità lineare.

In effetti, si può dimostrare che in generale, anche se si modella il continuo criccato con un materiale elastico non lineare o

elastoplastico, il campo tensionale all'apice della cricca continua ad essere affetto da singolarità (anche se di potenza diversa da $\frac{1}{2}$).

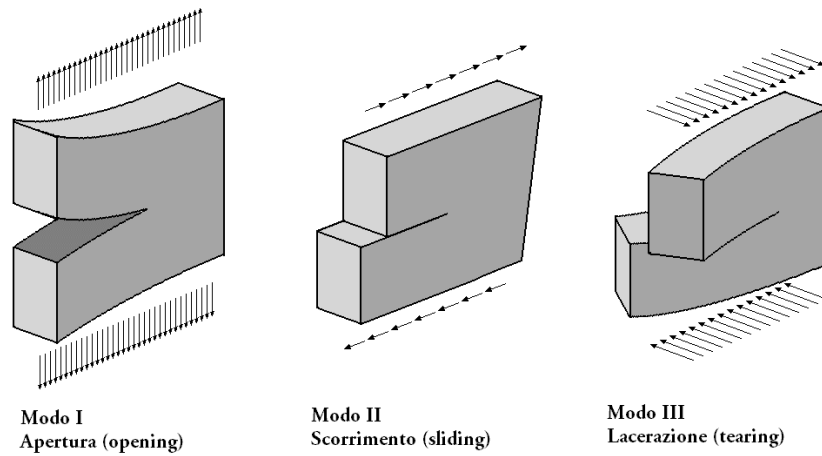


Figura 2 – Modi di frattura elementari

Per quanto osservato, è evidente che il modello di materiale elastico e omogeneo non consente di descrivere rigorosamente lo stato tensionale nell'apice della cricca di una struttura reale. Tuttavia si ritiene che, se la dimensione dell'area di continuo in cui il materiale si porta al di fuori del campo elastico rimane sufficientemente piccola durante il processo di frattura (cioè se il materiale si comporta in maniera fragile) le equazioni (2) descrivano comunque abbastanza fedelmente lo stato tensionale in prossimità dell'apice della cricca, tranne che nella zona immediatamente adiacente ad esso (vedasi fig. 3). Se ciò si verifica, si ricade nel campo della cosiddetta meccanica della frattura elastica lineare (MFEL).

In ogni caso, ammesso che lo stato tensionale del materiale in esame possa essere descritto in questo modo, tale descrizione non può essere utilizzata per definire un criterio di resistenza di tipo *locale* (o

puntuale) come quelli tradizionali. Infatti i criteri locali prevedono il calcolo di una tensione di confronto σ_{eq} in ogni punto del dominio con l'obiettivo di trovare il punto esatto in cui essa è massima e quindi confrontarlo con un valore critico σ_c .

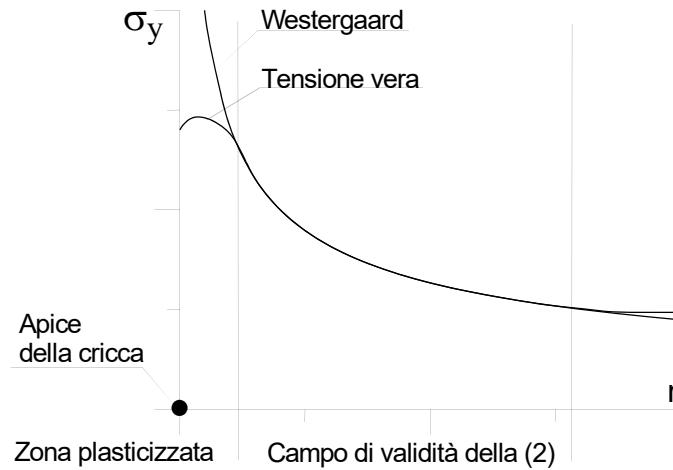


Figura 3 – Tensione intorno all'apice della cricca

In meccanica della frattura il punto più sollecitato è l'apice della cricca, in cui certamente non siamo in grado di calcolare la tensione. Allora, per valutare la resistenza alla frattura si confronta l'intero stato tensionale intorno all'apice della cricca con l'intero stato tensionale di un caso critico; si devono utilizzare pertanto criteri di resistenza *non locali*.

Nell'ambito della MFEL valgono le equazioni (2) le quali stabiliscono che lo stato di tensione intorno all'apice della cricca è (sostanzialmente) descritto dai SIF.

In conclusione, i criteri di resistenza alla frattura dovranno essere definiti in funzione dei parametri non locali K_I , K_{II} .

1.2. Calcolo degli Stress Intensity Factor

Per quanto scritto nel paragrafo precedente, nel modello della MFEL lo stato di sollecitazione della cricca in ogni suo apice è definito dagli stress intensity factor. Lo stesso Westergaard calcolò il SIF relativo al caso di un continuo piano infinito con una cricca di lunghezza $2a$ sollecitato all'infinito con una tensione σ (tensione remota) normale all'asse della cricca (modo I di sollecitazione).

Con riferimento alla figura 4, il SIF assume, in ognuno degli apici, il valore:

$$K_I(G, C) = K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (3)$$

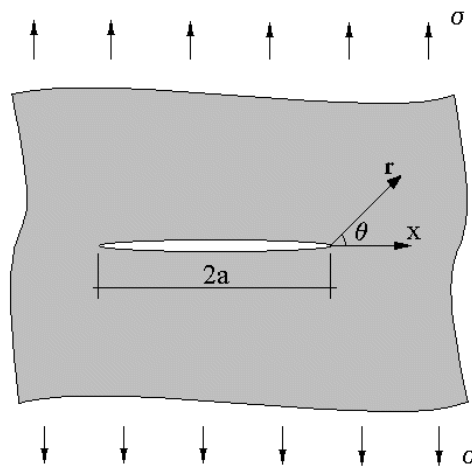
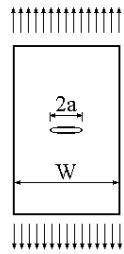


Figura 4 – Dominio infinito con cricca sollecitata in modo I

Questo parametro, com'era peraltro da aspettarsi, combina in un'unica espressione la sollecitazione "lontana" dall'apice (nel caso in esame la σ all'infinito) e la geometria del dominio (ovvero la semilunghezza a della cricca).

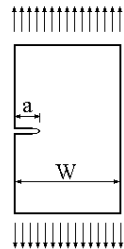
Se rimane valida l'ipotesi di elasticità lineare, è possibile ricavare i SIF per le più diverse configurazioni geometriche e carichi applicati, usando sia metodi analitici o semianalitici, sia metodi puramente numerici (metodo degli elementi finiti, FEM, o degli elementi di contorno, BEM). Alcuni esempi sono riportati nelle tabelle Ia, Ib; molti altri si possono trovare in appositi manuali. In tutti questi casi, il SIF ha sempre il significato di misura (non locale) del grado di sollecitazione dell'apice della cricca.

Si noti che se la cricca non è definita su un dominio piano, il suo percorso non è monodimensionale (una linea) ma bidimensionale (una superficie). Si definisce in tal caso uno stress intensity factor diverso per ogni punto della linea che delimita la discontinuità, che si chiama *fronte della cricca* (ad es. si veda l'ultimo caso della Tab. Ia).



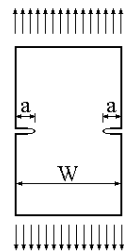
$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$\beta = \sec\left(\frac{\pi a}{W}\right)$$



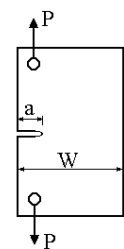
$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$\beta = 1.99 - 0.41\left(\frac{a}{W}\right) + 18.7\left(\frac{a}{W}\right)^2 - 38.48\left(\frac{a}{W}\right)^3 + 53.85\left(\frac{a}{W}\right)^4$$



$$K_I = \beta \sigma \sqrt{\pi a}$$

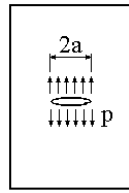
$$\beta = 1.99 + 0.76\left(\frac{a}{W}\right) - 8.48\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 27.36\left(\frac{a}{W}\right)^3$$



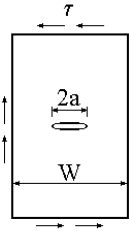
$$K_I = \frac{\beta P}{B W^{1/2}}$$

$$\beta = 29.6\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{1}{2}} - 185.5\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{3}{2}} + 655.7\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{5}{2}} - 1017\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{7}{2}} + 63.9\left(\frac{a}{W}\right)^{\frac{9}{2}}$$

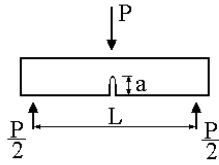
Tabella Ia



$$K_I = p\sqrt{\pi a}$$



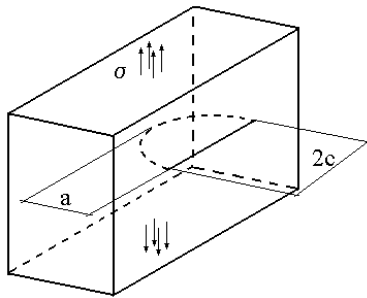
$$K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$$



$$K_I = \frac{\beta PL}{BW^{3/2}}$$

$$\beta = 2.9\left(\frac{a}{W}\right)^{1/2} - 4.6\left(\frac{a}{W}\right)^{3/2} +$$

$$21.8\left(\frac{a}{W}\right)^{5/2} - 37.6\left(\frac{a}{W}\right)^{7/2} + 38.7\left(\frac{a}{W}\right)^{9/2}$$



$$K_{I,\max} = 1.12 \frac{\sigma}{\chi} \sqrt{\pi a}$$

$$K_{I,\min} = 1.12 \frac{\sigma}{\chi} \sqrt{\pi \frac{a^2}{c}}$$

$$\chi = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{1/2} d\vartheta \cong \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi a^2}{8c^2}$$

Tabella Ib

1.3. Criteri di resistenza alla frattura

Criterio per modo puro

Consideriamo in primo luogo elementi piani con cricca sollecitata in modo I (di apertura). Nel campo di validità della MFEL il criterio di resistenza sarà, ovviamente,

$$K_I \leq K_{IC}$$

Nell'equazione precedente, il K_I va calcolato in funzione di carico e geometria (in particolare della lunghezza della cricca). Il SIF critico K_{IC} , che si chiama *tenacità alla frattura* ed è una caratteristica del materiale, si determina mediante prove sperimentali e, analogamente alle tensioni di snervamento o di rottura, è tabellato per i materiali più comuni (ad esempio, vedi Tab. 2).

Material	Fracture Toughness		Strength* (MPa)
	MPa√m	ksi√in.	
METALS AND METAL ALLOYS			
Plain Carbon and Low-Alloy Steels			
Steel alloy 1040	54.0	49.0	260
Steel alloy 4140			
• Tempered @ 370°C	55–65	50–59	1375–1585
• Tempered @ 482°C	75–93	68.3–84.6	1100–1200
Steel alloy 4340			
• Tempered @ 260°C	50.0	45.8	1640
• Tempered @ 425°C	87.4	80.0	1420
Stainless Steels			
Stainless alloy 17-7PH			
• Precipitation hardened @ 510°C	76	69	1310
Aluminum Alloys			
Alloy 2024-T3	44	40	345
Alloy 7075-T651	24	22	495

Tabella II

Se si verificano le condizioni di crisi ($K_I = K_{IC}$) la lunghezza della cricca tende ad aumentare. Questo evento può portare alla propagazione instabile della cricca e quindi alla rottura improvvisa dell'elemento.

Nel caso di una piastra infinita con cricca di lunghezza $2a$, sollecitata in modo I con tensione remota σ , per l'equazione (3) il criterio di resistenza alla frattura si scrive:

$$\sigma\sqrt{\pi a} \leq K_{IC} \quad (4)$$

La formula (4) può essere utilizzata in due modi:

- 1) Nota la semilunghezza $a=a^*$ della cricca, confrontare il carico remoto con quello critico, ricavando così il criterio:

$$\sigma \leq \sigma_c = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a^*}} \quad (5)$$

- 2) Noto il carico remoto $\sigma = \sigma^*$, confrontare la lunghezza della cricca con quella critica, ottenendo il criterio seguente:

$$a \leq a_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma^*} \right)^2 \quad (6)$$

Nel primo caso, similmente ai criteri di resistenza basati sulle tensioni ammissibili, la (5) rappresenta una condizione basata sulla tensione remota, per cui si considera la lunghezza della cricca una caratteristica geometrica perfettamente nota come le altre.

Nel secondo caso, si considera il carico massimo noto e limitato al valore σ^* ma si ammette la possibilità che la cricca cresca per altri motivi (fatica, sovraccarichi limitati nel tempo, attacchi ambientali, et c.), purché tale lunghezza risulti sempre inferiore al valore critico a_c (criterio basato sulla tolleranza del danno – *damage tolerance*).

Ragionamenti del tutto analoghi si fanno per il modo II e si ottengono relazioni simili alle (5, 6).

Criterio sperimentale per modo misto

Più in generale, se un elemento piano con cricca è sottoposto a un carico generico, l'apice sopporta un carico di *modo misto* (modo I + modo II). Nel caso di fig. 5, ad esempio, gli stress intensity factor valgono:

$$K_I = \sigma_y \sqrt{\pi a}; \quad K_{II} = \tau_{xy} \sqrt{\pi a}$$

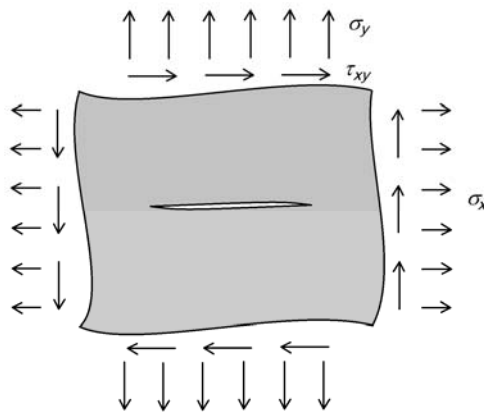


Figura 5 – Dominio infinito con cricca sollecitata in modo misto

Anche in questo caso esisteranno combinazioni di modi misti apertura + scorrimento che portano alla crisi. Se si raccolgono i dati sperimentali relativi alle crisi per frattura per vari rapporti K_{II}/K_I tra i SIF (mixity ratio) si può ottenere una superficie critica sperimentale come quella di fig. 6.

In molti casi pratici si possono interpolare senza grandi errori i dati sperimentali mediante la seguente curva quadratica:

$$\left(\frac{K_I}{K_{IC}}\right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}}\right)^2 = 1 \quad (7)$$

In tal caso, per definire il criterio di crisi fragile basta conoscere le tenacità alla frattura nei modi puri K_{IC} e K_{IIC} .

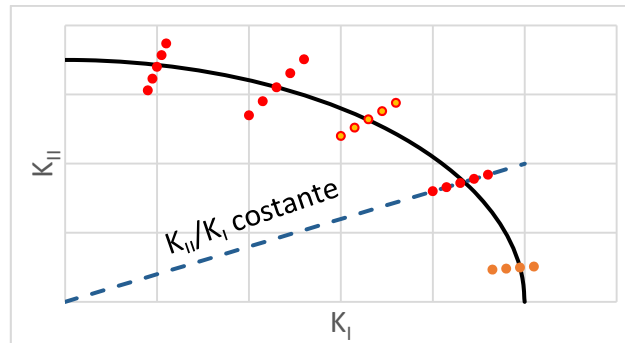


Figura 6 – Superficie critica sperimentale per modo misto

1.4. Principio di sovrapposizione degli effetti

Poiché per uno stesso modo di sollecitazione (I, II o III) l'espressione dello stato tensionale (2) non cambia, e per la linearità del problema dell'equilibrio in campo elastico, è possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per ricavare il SIF relativo ad una data combinazione di carichi $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ sommando i SIF relativi ai singoli carichi componenti:

$$K_I(c_1\sigma_1 + \dots + c_n\sigma_n) = c_1K_I(\sigma_1) + \dots + c_nK_I(\sigma_n)$$

Cricca con pressione di apertura sui bordi

Consideriamo, ad esempio, il caso di una cricca sollecitata mediante una pressione interna p (Tab. Ib, primo caso).

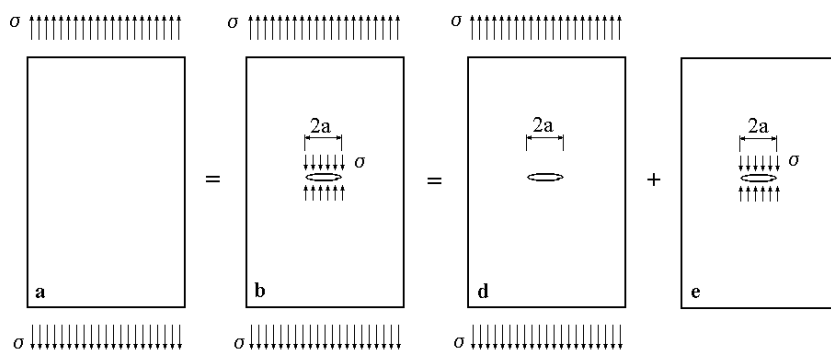


Figura 7 – Principio di sovrapposizione

In fig. 7 è illustrata l'applicazione del principio di sovrapposizione per ricavare il SIF incognito K_{Ix} relativo a tale condizione di carico. Nel caso in esame risulta:

- $K_{Ia} = 0$ poiché $a = 0$;
- $K_{Ib} = 0$ perché l'applicazione della trazione σ ai bordi della cricca riproduce lo stato tensionale uniforme $\sigma(x, y) = \sigma$ presente nel caso (a);
- $K_{Id} + K_{Ie} = K_{Ib} = 0 \Rightarrow K_{Ie} = -K_{Id}$ per il principio di sovrapposizione.

Il SIF incognito è perciò dato da:

$$K_{Ix} = -K_{Ie} = K_{Id} = \sigma\sqrt{\pi a} = p\sqrt{\pi a}.$$

Cricca caricata con forza concentrata

Un altro caso di applicazione del principio di sovrapposizione è descritto nel seguito.

Sono noti i SIF relativi a ciascun vertice della cricca per il caso definito in fig. 8, che sono:

$$K_{IA} = \frac{P}{B\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}; \quad K_{IB} = \frac{P}{B\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad (8)$$

Si mostra quindi, con riferimento stavolta alla figura 9, come ricavare il SIF incognito relativo al caso (a).

Il problema (a) potrebbe rappresentare, ad esempio, un componente strutturale rivettato e sottoposto a trazione, dal cui foro partono simmetricamente due cricche.

Dalle formule (8) si ricava, per $x = 0$:

$$K_{Id} = \frac{P}{B\sqrt{\pi a}};$$

inoltre è noto che, per $a/W \rightarrow 0$, $K_{Ib} = \sigma\sqrt{\pi a}$ ed è, evidentemente, $K_{Ia} = K_{Ie}$ per simmetria.

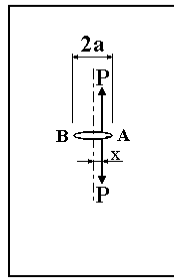


Figura 8 – Riferimento per i SIF (8). B è lo spessore della piastra.

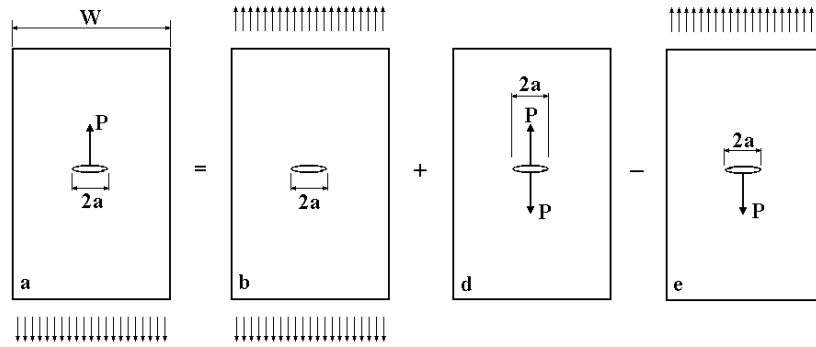


Figura 9 – Principio di sovrapposizione

Allora, applicando il principio di sovrapposizione, si ottiene:

$$K_{Ia} + K_{Ie} = 2K_{Ia} = K_{Id} + K_{Ib} = \frac{P}{B\sqrt{\pi a}} + \sigma\sqrt{\pi a}$$

Poiché, per l'equilibrio, risulta $P = \sigma BW$, lo stress intensity factor incognito vale:

$$K_{Ia} = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{W}{\sqrt{\pi a}} + \sqrt{\pi a} \right). \quad (9)$$

Nella maggior parte dei casi tabellati (vedi Tab. Ia, Ib), all'aumentare della lunghezza a aumenta anche il valore del SIF. Ciò vuol dire che, nel momento in cui si raggiunge il valore critico del carico o della lunghezza di cricca, la cricca stessa si propaga *senza nessun ulteriore aumento del carico*, e la rottura avviene in maniera quasi istantanea. Esistono però delle eccezioni, come ad esempio il problema del rivetto caricato appena trattato. In questo caso risulta:

$$\frac{dK_I}{da} = \frac{\sigma}{4\sqrt{a}} \cdot \left(1 - \frac{w}{\pi a} \right) < 0 \quad \text{se} \quad \frac{a}{w} < \frac{1}{\pi}$$

Allora, una volta raggiunto il valore critico del SIF, la lunghezza della cricca tende ad aumentare; ma se è verificata anche la condizione

$$\frac{a}{w} < \frac{1}{\pi}$$

K_I tende a diminuire all'aumentare di a , riportandosi al di sotto del valore critico: la propagazione della cricca è perciò *stabile*, pur essendo la frattura di tipo fragile, e perciò la cricca si propaga solo se aumenta ulteriormente il carico P . Questo esempio evidenzia che il comportamento fragile non necessariamente conduce a rotture (quasi) istantanee.

1.5. *Correzione plastica*

Com'è stato precedentemente esposto, la tensione in campo elastico presenta una singolarità all'apice della cricca. Adottando un modello di comportamento più aderente alla realtà sperimentale, in quella zona il materiale non segue più una legge costitutiva elastica lineare, ma entra nel campo plastico.

Ipotizzando un modello con legge costitutiva elastica-perfettamente plastica come quella di fig. 10, si può valutare approssimativamente, ma semplicemente, l'entità della plasticizzazione. Ciò si fa per due motivi:

1. Il calcolo delle dimensioni della cosiddetta *zona plastica* consente di valutare se si può ritenere valida l'approssimazione della MFEL;
2. Considerando il nuovo stato tensionale indotto da essa, si può ottenere una valutazione del parametro K che in qualche modo ne tenga conto correggendo quella ottenuta nell'ipotesi di materiale puramente elastico.

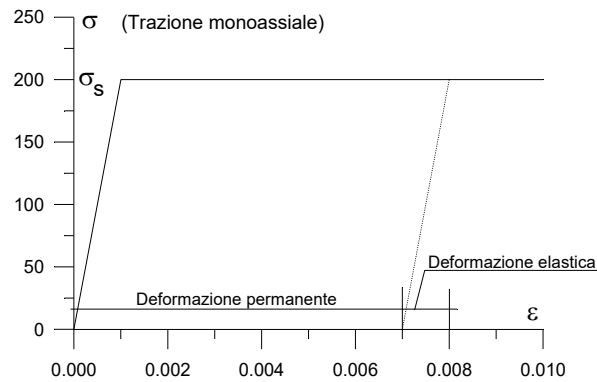


Figura 10 – Legge costitutiva elastica-perfettamente plastica

Raggio plastico secondo Irwin

Una prima valutazione della zona plastica per il modo I fu effettuata da Irwin.

Il suo modello si basa su assunzioni semplificative piuttosto forti:

- Per valutare la zona plastica, si considera solo la tensione σ_y (e non la σ_x) calcolata sull'asse di riferimento locale x con origine nell'apice della cricca, per cui la crisi plastica avviene nei punti dell'asse x per cui σ_y eguaglia la tensione di snervamento σ_s della prova monoassiale.
- Le tensioni σ_y fuori dalla zona plastica si ottengono traslando di una certa lunghezza δ in direzione x quelle calcolate con le formule elastiche (2).

Nella figura 11 si mostra come si redistribuiscono le tensioni di apertura per $\theta = 0$ in seguito alla plasticizzazione intorno all'apice della cricca secondo la teoria di Irwin.

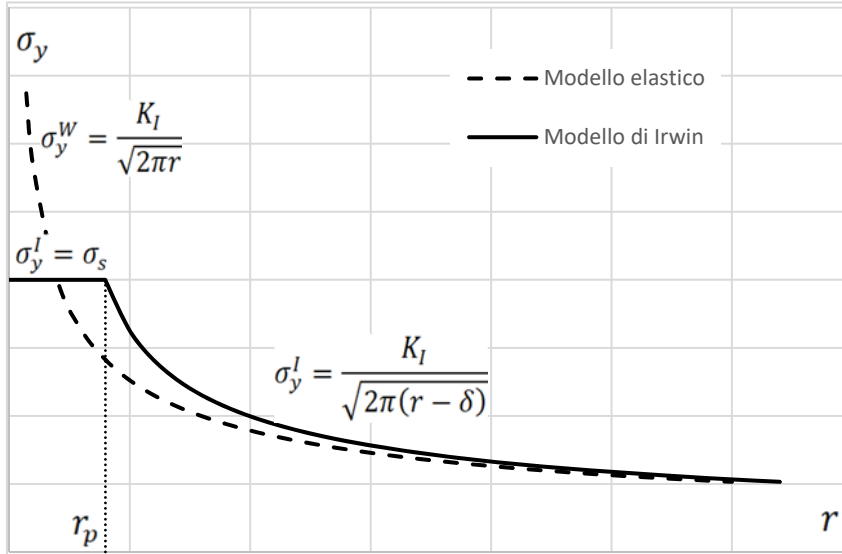


Figura 11 – Tensioni intorno all'apice della cricca secondo Irwin

Dalle equazioni del Westergaard per il modo I si ricava, per $\theta = 0$,

$$\sigma_y^W = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (10)$$

D'altro canto, il modello di Irwin è caratterizzato dalla seguente tensione:

$$\sigma_y^I = \begin{cases} \sigma_s & \text{se } r \leq r_p \\ \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-\delta)}} & \text{se } r > r_p \end{cases} \quad (11)$$

Per assicurare la continuità delle tensioni redistribute nel punto (r_p, σ_s) dev'essere, inoltre:

$$\frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r_p-\delta)}} = \sigma_s \quad (12)$$

Il valore del raggio plastico r_p si ricava imponendo che la forza interna totale calcolata sull'asse x nel modello di Irwin sia pari alla forza interna totale corrispondente al modello elastico di Westergaard (figura 12).

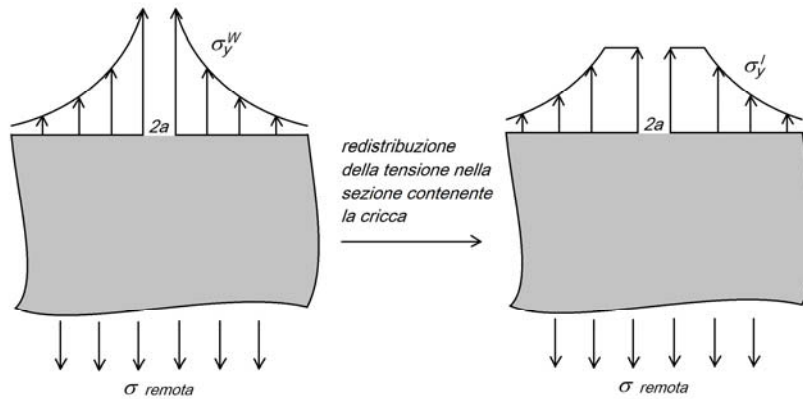


Figura 12 – Imposizione dell'equilibrio della semipiastra

Poiché quest'ultima forza è certamente equilibrata con i carichi esterni, l'operazione che descriveremo equivale ad imporre l'equilibrio della distribuzione di tensioni ipotizzata da Irwin con i carichi esterni. Per quanto scritto, dev'essere:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sigma_{remota} dr &= \int_0^\infty \sigma_y^W dr = \int_0^\infty \sigma_y^I dr \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_0^\infty \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr &= \int_0^{r_p} \sigma_s dr + \int_{r_p}^\infty \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-\delta)}} dr \end{aligned} \quad (13)$$

È possibile valutare l'ultimo termine della equazione precedente nel modo seguente:

$$\int_{r_p}^{\infty} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-\delta)}} dr = \int_{r_p}^{\delta} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-\delta)}} dr + \int_{\delta}^{\infty} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-\delta)}} dr =$$

$$- \int_{\delta}^{r_p} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-\delta)}} dr + \int_0^{\infty} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} dr \quad (14)$$

Sostituendo il risultato (14) nell'equazione di equilibrio (13), si ottiene:

$$\int_0^{r_p} \sigma_s dr - \int_{\delta}^{r_p} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(r-\delta)}} dr = 0 \quad (15)$$

L'integrazione della (15) fornisce:

$$\sigma_s r_p - \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r_p - \delta} = 0 \quad (16)$$

Infine, imponendo nella (16) la condizione di continuità (12) si ottiene il raggio plastico secondo Irwin:

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 = 0 \quad (17)$$

L'equazione (17) si usa anzitutto per verificare se il raggio plastico è sufficientemente piccolo da poter ritenere valido il modello MFEL. In pratica, secondo Irwin, questo modello è applicabile se risulta:

$$\frac{r_p}{a} < \frac{1}{10} \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^2 < \frac{1}{10} \quad (18)$$

Applicando ancora l'equazione (12) si ricava anche il valore della traslazione δ :

$$\delta = \frac{r_p}{2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \quad (19)$$

Ricordiamo ancora che l'andamento (11) delle tensioni in campo elastico si ottiene per traslazione in direzione x della quantità δ della soluzione di Westergaard; la stessa soluzione si può far derivare anche da un modello continuo di materiale puramente elastico con una cricca di semilunghezza $a_{eq} = a + \delta$. Tale cricca (virtuale) è detta cricca equivalente elastica e ad essa corrisponderà un SIF valutato nel modo seguente:

$$K_{Ieq} = \sigma \sqrt{\pi a_{eq}}; \quad a_{eq} = a + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2 \quad (20)$$

In conclusione, il modello di Irwin fornisce sia il limite di applicabilità (18) della MFEL sia lo stress intensity factor modificato mediante la correzione plastica (20).

Raggio plastico secondo Dugdale

Un approccio differente, e un po' più rigoroso, al problema fu adottato da Dugdale sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Egli applicò la teoria della cricca elastica ad una cricca virtuale di lunghezza $a' = a + \rho > a$ caricata sia con la tensione all'infinito σ , sia con una tensione di chiusura σ_s , che rappresenta l'azione della zona plastica presente intorno all'apice della cricca vera sulla cricca virtuale (fig. 13).

In altre parole, la parte plasticizzata viene esclusa dal dominio del problema, che perciò risulta interamente elastico, e la sua azione viene considerata come un carico esterno di trazione agente sui bordi della cricca virtuale.

Si noti che ciò equivale ad assumere solo la prima delle due semplificazioni adottate dall'Irwin.

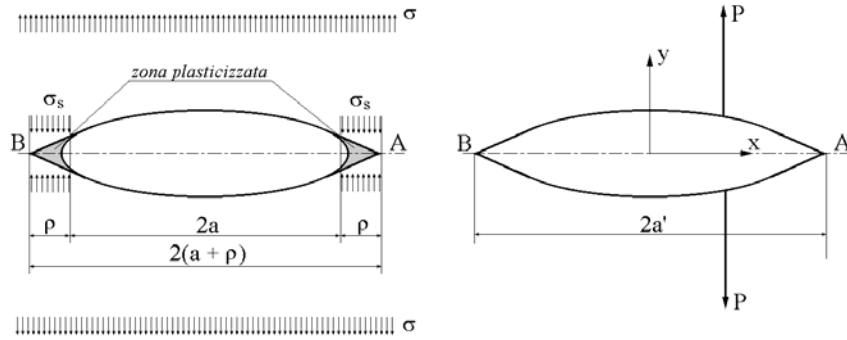


Figura 13a – Sovrapposizione degli effetti sulla cricca virtuale Figura 13b – Cricca virtuale sottoposta a carico concentrato

A causa dell'azione di chiusura nel tratto plasticizzato, all'apice della cricca virtuale $a + \rho$ la tensione σ_y vale proprio σ_s e pertanto *non è infinita*. Considerando la definizione di stress intensity factor, dev'essere, quindi, $K_A = K_B = 0$.

Lo stress intensity factor K_A è dato dalla somma dei SIF:

$$K_A = K_\sigma + K_p = 0 \quad (21)$$

Il primo SIF dipende dall'azione della tensione all'infinito; il secondo, dall'azione delle tensioni di chiusura σ_s .

Abbiamo già mostrato (eq. 8) che il SIF relativo al problema della figura 13b è dato da:

$$K_{IA} = \frac{P}{B\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a' + x}{a' - x}}; \quad K_{IB} = \frac{P}{B\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a' - x}{a' + x}}$$

Possiamo quindi ricavare il SIF K_p ponendo nelle equazioni precedenti:

$$P = -\sigma_s B dx; \quad a' = a + \rho$$

ed integrando il SIF elementare dK_ρ così ottenuto negli intervalli $[-(a + \rho), -a]$ e $[a, (a + \rho)]$. Si ha dunque, in successione:

$$\begin{aligned} K_\rho &= \int_a^{a+\rho} -\frac{\sigma_s}{\sqrt{\pi(a+\rho)}} \cdot \sqrt{\frac{(a+\rho)+x}{(a+\rho)-x}} \cdot dx + \\ &+ \int_{-(a+\rho)}^{-a} -\frac{\sigma_s}{\sqrt{\pi(a+\rho)}} \cdot \sqrt{\frac{(a+\rho)+x}{(a+\rho)-x}} \cdot dx = \\ &= -\frac{\sigma_s}{\sqrt{\pi a'}} \cdot \int_a^{a+\rho} \left\{ \sqrt{\frac{(a+\rho)+x}{(a+\rho)-x}} + \sqrt{\frac{(a+\rho)-x}{(a+\rho)+x}} \right\} \cdot dx = \\ &= -2\sigma_s \sqrt{\frac{a+\rho}{\pi}} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{a}{a+\rho}\right) \end{aligned}$$

D'altra parte, risulta:

$$K_\sigma = \sigma \sqrt{\pi(a + \rho)},$$

e quindi, per la (21):

$$K_\sigma = -K_\rho \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \sqrt{\pi(a + \rho)} = 2\sigma_s \sqrt{\frac{a + \rho}{\pi}} \cdot \cos^{-1}\left(\frac{a}{a + \rho}\right)$$

Risolvendo rispetto a ρ , si ricava il raggio plastico secondo Dugdale:

$$\cos\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right) = \frac{a}{a+\rho} \Rightarrow \rho = a \left[\sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right) - 1 \right] \quad (22)$$

Se risulta $\sigma / \sigma_s \ll 1$ possiamo valutare, espandendo la (22) in serie di Taylor e trascurando i termini di ordine superiore al primo, il raggio plastico con la formula seguente:

$$\rho \cong \frac{\pi^2 \sigma^2 a}{8\sigma_s^2} = \frac{\pi}{8} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

Confrontando questo risultato con il raggio plastico di Irwin, si può notare che quest'ultimo risulta inferiore di circa un quarto:

$$\rho \cong \frac{\pi^2}{8} r_p \cong 1.23 r_p.$$

Utilizzando il raggio plastico di Dugdale per una correzione plastica del SIF analoga a quella proposta da Irwin, mediante la cricca equivalente $a_{eq} = a + \rho$ si ottiene il SIF equivalente:

$$K_{Ieq} = \sigma \sqrt{\pi a \sec\left(\frac{\pi\sigma}{2\sigma_s}\right)} \quad (23)$$

Ulteriori considerazioni sul raggio plastico

Le equazioni (2) si possono ritenere valide sia per descrivere uno stato piano di tensione (SPT), sia per uno stato piano di deformazione (SPD). Nei due casi, la tensione σ_z sarà data da:

SPT:	$\sigma_z = 0$
SPD:	$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y).$

Utilizzando le equazioni (2) ed un criterio di plasticizzazione, si può ricavare approssimativamente la forma della zona plastica. In fig. 14 è riportato a titolo di esempio il risultato di tale calcolo per il modo I su piastra infinita (con il criterio di Von Mises).

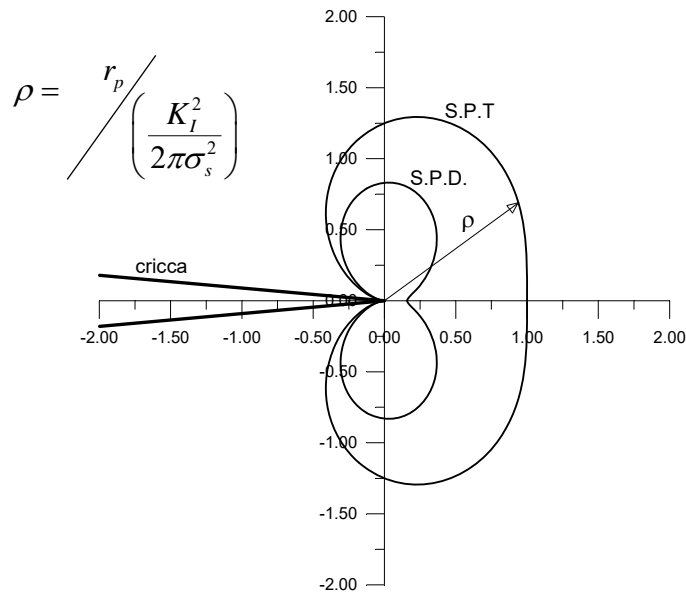


Figura 14 – Forma approssimativa della zona plastica in condizioni SPT e SPD

Si può notare che essa cambia notevolmente se ci si pone nell'ipotesi di stato piano di tensione o di deformazione, rimanendo, in quest'ultimo caso, di entità molto più modesta.

Ricordando l'espressione del il criterio di Von Mises:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_{eq}^2 = 2\sigma_s^2 \quad (24)$$

dove σ_1 , σ_2 e σ_3 sono le tensioni principali, possiamo, in particolare, valutare il rapporto tra i raggi plastici nelle due condizioni SPT e SPD.

Per $\vartheta = 0$ le tensioni σ_x , σ_y e σ_z definite nelle equazioni (2) per il modo I sono tensioni principali, e risulta:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y \quad \sigma_3 = 0 \quad (\text{SPT})$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y \quad \sigma_3 = 2\nu\sigma_1 \quad (\text{SPD})$$

Applicando nei due casi il criterio (24), e ponendo $\nu \cong 1/3$, si ha:

$$\text{SPT: } 2\sigma_{eq}^2 = 2\sigma_y^2 = 2\sigma_s^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = \sigma_s$$

$$\text{SPD: } 2\sigma_{eq}^2 = 2\sigma_y^2(1-2\nu)^2 = 2\sigma_s^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_y = \frac{\sigma_s}{1-2\nu} \cong 3\sigma_s$$

Si ricordi che le espressioni (17) e (22) del raggio plastico sono state ricavate imponendo la condizione di plasticizzazione monoassiale $\sigma_y = \sigma_s$, e cioè ipotizzando lo stato piano di tensione. Se si impone invece lo stato piano di deformazione, e quindi la seconda condizione di plasticizzazione, le corrispondenti valutazioni del raggio plastico si ottengono ponendo nelle relative espressioni al posto della tensione di snervamento monoassiale σ_s la *tensione di snervamento a contrazione laterale impedita*:

$$\sigma_{sci} = \frac{\sigma_s}{1-2\nu}$$

Ad esempio, il raggio plastico secondo Irwin in condizioni di deformazione piana, vale:

$$r_p(SPD) = \frac{K_I^2}{\pi \left(\frac{\sigma_s}{1-2\nu} \right)^2} \cong \frac{1}{9\pi} \frac{K_I^2}{\sigma_s^2} = \frac{1}{9} r_p(SPT)$$

Tale valutazione è limitata al raggio plastico calcolato per $\theta = 0$, lo stato tensionale, però, è influenzato dalla zona plastica in tutta la sua estensione piana (fig. 14).

Per θ generico, le equazioni del Westergaard conducono alle seguenti valutazioni del raggio plastico, già utilizzate per ricavare il diagramma di fig. 14:

$$\text{SPT: } \rho = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \left[1 + 3\text{sen}^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right] \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$\text{SPD: } \rho = \frac{K_I^2}{2\pi\sigma_s^2} \left[(1-2\nu)^2 + 3\text{sen}^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \right] \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Il valore medio del raggio vettore ρ nei due casi vale:

$$\text{SPT: } \rho_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\vartheta = \frac{7}{16\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

$$\text{SPD: } \rho_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho d\vartheta = \left(\frac{(1-2\nu)^2}{4\pi} + \frac{3}{16\pi} \right) \left(\frac{K_I}{\sigma_s} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{m,SPT}}{\rho_{m,SPD}} \cong 2$$

Tale rapporto è, evidentemente, molto minore del valore pari a 9 precedentemente calcolato.

Se, inoltre, si tiene conto che la plasticizzazione comporta la redistribuzione delle tensioni anche al di fuori della zona plastica, è evidente che la valutazione dei raggi plastici e del loro effetto sullo stato tensionale deve essere condotta con metodi più precisi.

In figura 15 sono riportati i risultati di due simulazioni agli elementi finiti, per SPT e SPD, della formazione della zona plastica su un dominio piano caratterizzato dalla dimensione $a/W = 0.025$ e dal carico $\sigma/\sigma_s = 0.5$.

Si noti come le zone plastiche, di colore grigio, hanno forme abbastanza diverse da quelle di fig. 13, e ciò a causa della redistribuzione delle tensioni su tutto il dominio piano.

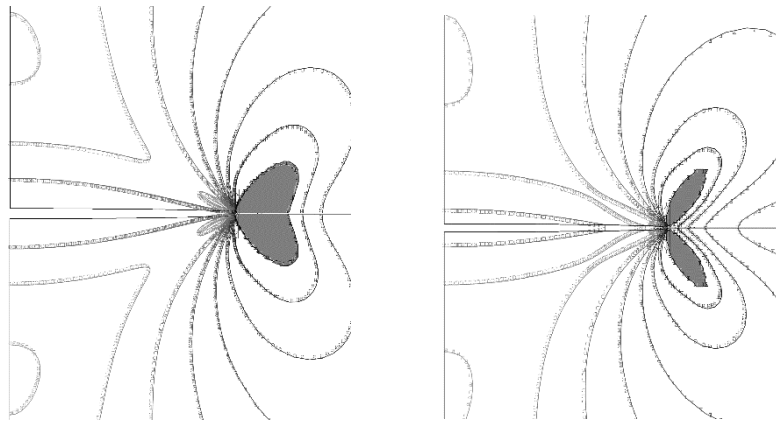


Figura 15 – Forma della zona plastica calcolata mediante un modello FEM in condizioni SPT e SPD

Nelle figure 16, 17 la tensione σ_y risultante dalla simulazione viene confrontata con le soluzioni elastiche con e senza correzione plastica.

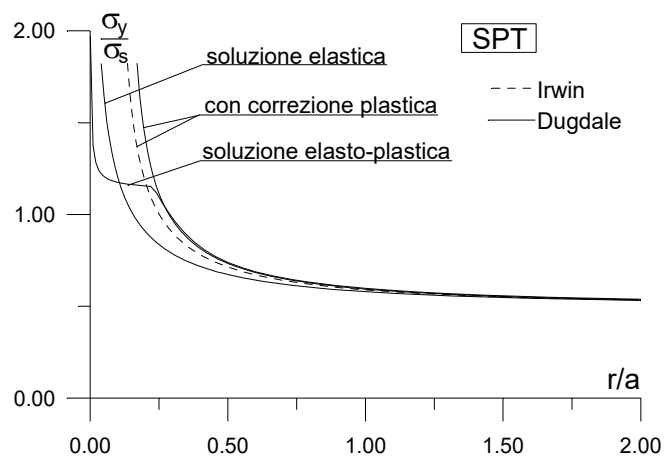


Figura 16 – Tensione in prossimità della cricca per SPT

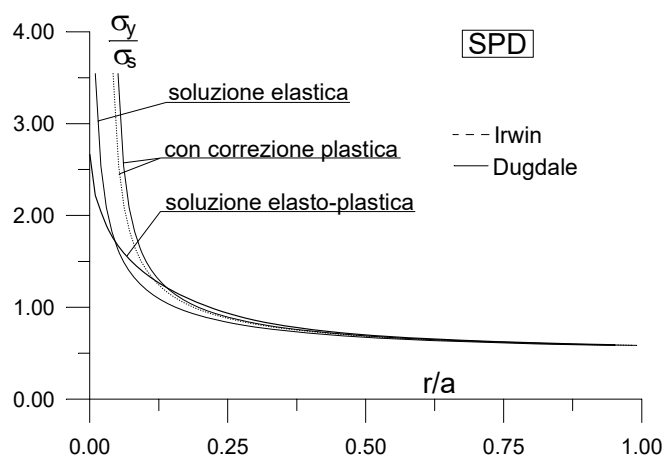


Figura 17 – Tensione in prossimità della cricca per SPD

Si può notare che non è corretto porre nella zona plastica:

$$\sigma_y = \sigma_s \text{ per SPT e } \sigma_y = \frac{\sigma_s}{1-2\nu} \cong 3\sigma_s \text{ per SPD}$$

Risulta infatti, dall'esame dei dati numerici, che la tensione σ_y vale in media, nella zona plastica e per $\theta = 0$:

$$\sigma_y \cong 1.2\sigma_s \text{ per SPT} \quad \sigma_y \cong 2.1\sigma_s \text{ per SPD}$$

Impiegando tali valori nelle relazioni che forniscono il raggio plastico secondo le teorie di Irwin e Dugdale, risultano rispettivamente, per il caso studiato numericamente,

SPT	SPD
$\frac{r_p}{a} = \frac{K_I^2}{\pi a (1.2\sigma_s)^2} \cong 0.19$	$\frac{r_p}{a} = \frac{K_I^2}{\pi a (2.1\sigma_s)^2} \cong 0.058$
$\frac{\rho}{a} = \cos^{-1}\left(\frac{\pi\sigma}{2(1.2\sigma_s)}\right) - 1 \cong 0.26$	$\frac{\rho}{a} = \cos^{-1}\left(\frac{\pi\sigma}{2(2.1\sigma_s)}\right) - 1 \cong 0.074$

Utilizzando tali valori per calcolare la lunghezza della cricca virtuale ed applicare la correzione plastica alla soluzione elastica, si ricavano i diagrammi delle tensioni σ_y riportati nelle figure 16, 17 che sono molto simili, al di fuori della zona plastica, alla soluzione elasto-plastica ricavata con gli elementi finiti. In particolare, la soluzione corrispondente alla cricca virtuale di Dugdale è sostanzialmente coincidente con la soluzione numerica.

Dal punto di vista fisico, gli stati piani, siano essi di tensione o di deformazione, sono modelli matematici che non descrivono, se non

approssimativamente, l'andamento di un certo stato tensionale che è intrinsecamente triassiale. Se lo spessore B della piastra è piccolo confrontato con la lunghezza del raggio plastico, si ritiene che nella zona adiacente all'apice della cricca sussista uno stato piano di tensione. Se invece lo spessore è tanto grande che in prossimità della cricca, in una consistente zona interna della piastra il materiale circostante impedisca la contrazione laterale di tale zona, si può ritenere soddisfatta la condizione di stato piano di deformazione negli strati interni (figura 18).

È evidente, quindi, che essendo nel caso reale lo stato tensionale sempre triassiale, ci si può avvicinare più o meno agli stati tensionali ideali di tipo SPT o SPD senza però mai aderirvi completamente.

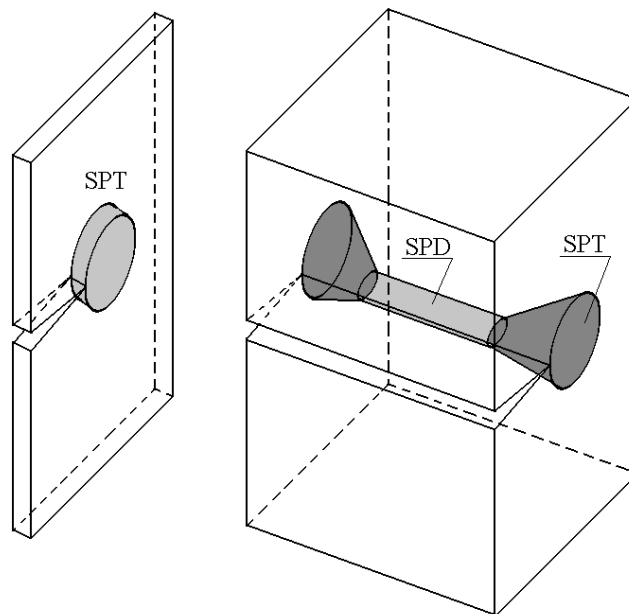


Figura 18 – Condizioni SPT e SPD in funzione dello spessore

Si introduce, a questo proposito, il cosiddetto *plastic constraint factor* α che misura, in un certo senso, il grado di aderenza del

problema reale all'uno o all'altro dei due modelli piani, ponendo come condizione di snervamento a contrazione laterale parzialmente impedita:

$$\sigma_y = \alpha \sigma_s$$

dove nei casi ideali di riferimento si ha rispettivamente

$$\text{SPT: } \alpha_{SPT} = 1$$

$$\text{SPD: } \alpha_{SPD} = \frac{1}{(1-2\nu)^2}$$

Nei casi più realistici α assume valori intermedi. Più propriamente conviene porre, come valutato in precedenza,

$$\alpha_{SPT} = 1.2; \quad \alpha_{SPD} = 2.1.$$

L'entità del raggio plastico vale dunque, in definitiva,

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\alpha \sigma_s} \right)^2 \quad (\text{modello di Irwin})$$

$$\rho = a \left(\frac{1}{\cos \left(\frac{\pi \sigma}{2 \alpha \sigma_s} \right)} - 1 \right) \quad (\text{modello di Dugdale})$$

1.6. Resistenza alla frattura

Abbiamo visto che il raggio plastico dipende fortemente dal grado di triassialità dello sforzo (definito da α), e che questo, *nel caso di problema piano*, dipende a sua volta dal rapporto tra il raggio plastico stesso e lo spessore della piastra (fig. 18).

Il fattore α influenza anche il meccanismo di frattura (duttile o fragile) poiché determina quanta energia di plasticizzazione viene assorbita all'apice della cricca.

Se le deformazioni plastiche sono costrette ad essere piccole (ovvero $\alpha \rightarrow \alpha_{SPD}$), l'energia fornita dai carichi esterni tende a riversarsi interamente, o quasi, nella formazione della cricca. Se invece si è più vicini alla condizione $\alpha \rightarrow \alpha_{SPT}$, la presenza di consistenti deformazioni plastiche locali assorbe una parte importante di questa energia, sottraendola a quella disponibile per formare la cricca. *Nel primo caso, allora, il valore critico della sollecitazione di frattura è minore che nel secondo.*

A causa di ciò, la maggior parte dei materiali metallici assume nei confronti della frattura un comportamento fragile o duttile in dipendenza dalla geometria (spessore della piastra).

Se si estende il concetto di stress intensity factor anche ai casi in cui l'avanzamento della cricca non è prevalentemente fragile, il valore critico del SIF non sarà più una costante del materiale, ma risulterà dipendente da α . Indicheremo tale valore critico con il simbolo K_{crit} . Poiché α dipende dal rapporto tra il raggio plastico e lo spessore della piastra, K_{crit} può essere messo in relazione con il rapporto B/r_{pc} , dove si pone:

$$r_{pc} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s} \right)^2$$

In figura 19 è riportata la variazione della tenacità alla frattura K_{crit} con lo spessore. Il grafico riproduce la seguente formula empirica dovuta a Irwin:

$$K_{crit} = K_{IC} \sqrt{1 + 14 \left(\frac{r_{pc}}{B}\right)^2}$$

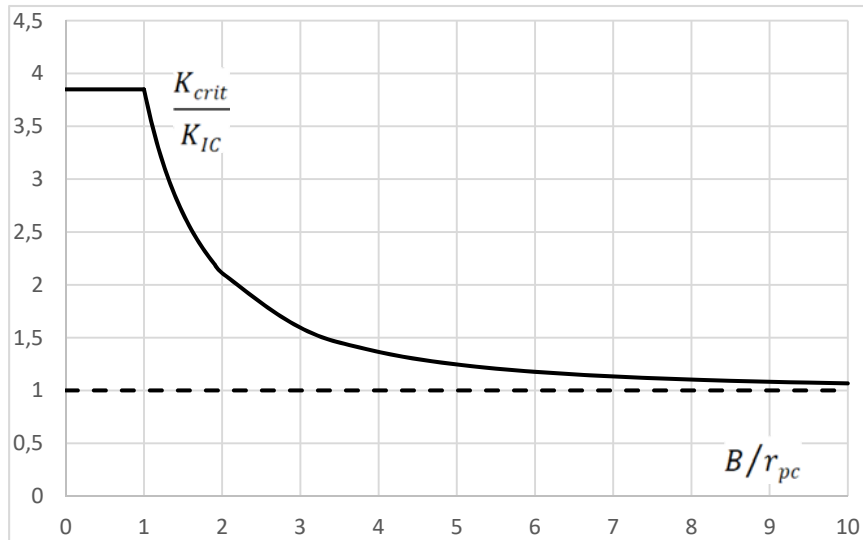


Figura 19 – SIF critico al variare dello spessore adimensionale

Per valori elevati del rapporto B/r_{pc} domina il meccanismo di rottura fragile ($\alpha \rightarrow \alpha_{SPD}$) e il valore K_{crit} tende al valore della tenacità in campo fragile K_{IC} che è una caratteristica del materiale. Per valori piccoli dello spessore α è fortemente variabile, e con esso il valore critico K_{crit} . Al di sotto di un certo spessore i risultati sperimentali sono molto dispersi e si utilizza un valore convenzionale della tenacità, oppure si passa a modelli di frattura più aderenti al fenomeno fisico.

Convenzionalmente, possiamo ritenere accettabili i seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \text{SPD: } & \frac{B}{r_{pc}} > \frac{B_1}{r_{pc}} = 10 \\ \text{SPT: } & \frac{B}{r_{pc}} < \frac{B_0}{r_{pc}} = 1 \end{aligned}$$

Nelle espressioni precedenti B_0 è lo spessore massimo corrispondente al pieno sviluppo dello stato piano di tensione e il corrispondente K_{crit} , generalmente indicato con K_{IC} , è il valore critico del SIF. Il valore B_1 , invece, è il minimo spessore per il quale si può ipotizzare la condizione SPD e rottura puramente fragile.

2 Energy release rate

In alternativa allo stress intensity factor è possibile definire un criterio di frattura, dovuto al Griffith, basato su un bilancio energetico piuttosto che sulla valutazione delle tensioni intorno all'apice della cricca.

Il criterio energetico di Griffith per la frattura stabilisce che la cricca si propaga se l'energia necessaria per aumentare le sue dimensioni (e quindi spezzare i legami coesivi alla scala atomico/molecolare adiacenti all'apice della cricca e creare nuove superfici) è disponibile nel sistema costituito dal continuo con le sue condizioni al contorno; in caso contrario, la cricca non si propaga.

Per esaminare le variazioni energetiche coinvolte nel modello di Griffith del processo di frattura, si consideri ad esempio il sistema elastico piano di fig. 20.

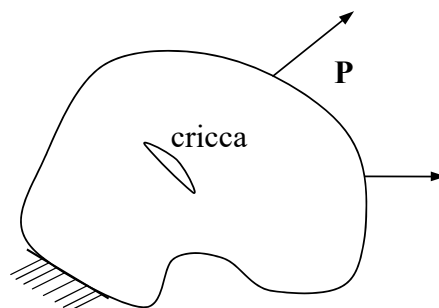


Figura 20 – Continuo piano con cricca

Per un dato valore delle condizioni al contorno \mathcal{C} , e per una data configurazione geometrica \mathcal{G} caratterizzata, in particolare, da una cricca di lunghezza a , il continuo sarà sede di un'energia potenziale

elastica funzione degli spostamenti s dei punti di applicazione del carico e data da:

$$U = U(s; a, \mathcal{G}, \mathcal{C}),$$

dove s è da considerarsi variabile mentre le quantità che seguono il punto e virgola sono parametri del problema. Inoltre, si potrà attribuire al sistema il seguente potenziale delle forze esterne:

$$E_{FE} = \sum_k \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{s}_k$$

dove \mathbf{P}_k è la k -esima forza applicata e \mathbf{s}_k lo spostamento del punto corrispondente. Supporremo d'ora in poi, per semplicità, che sia applicata una sola forza P associata allo spostamento scalare s . Il sistema meccanico è quindi sede della cosiddetta energia potenziale totale, o energia libera:

$$E_L = E_L(s) = U - E_{FE} \quad (25)$$

Com'è noto, la condizione di equilibrio statico corrisponde al minimo dell'energia potenziale totale (25).

A titolo di esempio, consideriamo il semplice sistema costituito da una molla di costante elastica (rigidezza) K caricata dalla forza P che provoca lo spostamento s del punto di applicazione (figura 21). L'energia potenziale totale come funzione della variabile s e con parametro P si esprime nel modo seguente:

$$E_L(s; P) = \frac{1}{2} K s^2 - P s \quad (26)$$

Il minimo della (26) si ottiene dalla condizione di annullamento della sua derivata rispetto a s , che conduce facilmente alla nota relazione di equilibrio:

$$\frac{dE_L}{ds} = 0 \Rightarrow Ks = P$$

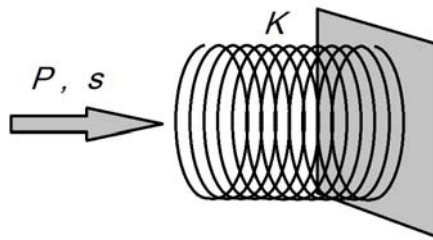


Figura 21 – Sistema elastico

In altre parole, in questo contesto l'energia libera rappresenta la quota di energia attribuibile al sistema che è capace di compiere lavoro meccanico; il principio di minimo stabilisce che il sistema raggiunge l'equilibrio quando ha ceduto tutta l'energia libera possibile e questa è diventata perciò minima.

Seguendo l'idea di Griffith, si deve aggiungere all'energia potenziale totale (25) la ulteriore possibilità di variazione che nasce dall'eventuale allungamento della cricca dal valore iniziale a al valore incrementato $a + \Delta a$. Per compiere questa operazione, occorre spendere (e quindi *aggiungere* al sistema) l'energia W che serve a formare una nuova soluzione di continuità con lunghezza Δa . In definitiva, l'energia libera così modificata diventa:

$$\begin{aligned} E_{LM} &= E_{LM}(s, \Delta a; a, P) = \\ &= E_L(s, \Delta a; a, P) + W(\Delta a; a) \end{aligned} \quad (27)$$

Rispetto alla (25), l'energia (27) può variare non soltanto variando la deformazione s ma anche incrementando la lunghezza della cricca di Δa ; sono però ammissibili solo variazioni di a che allungano la cricca (cioè $\Delta a \geq 0$).

Si precisa che gli allungamenti ammissibili possono avvenire in una direzione qualsiasi rispetto alla direzione attuale della tangente alla linea della cricca nel suo apice (cambiamento discontinuo della direzione, ovvero *crack kink*); comunque, nell'ambito della presente trattazione elementare, supporremo ammissibili solo allungamenti Δa aventi la stessa direzione della tangente.

Supponiamo quindi di conoscere l'energia potenziale totale in condizioni di equilibrio statico per a fissata. In tali condizioni, E_{LM} è minima rispetto alla variabile s , ma non rispetto alla variabile Δa . detta E_{LG} quest'energia, essa vale:

$$\begin{aligned} E_{LG}(\Delta a; a, P) &= \min_s E_{LM}(s, \Delta a; a, P) = \\ &= \min_s E_L(s, \Delta a; a, P) + W(\Delta a; a) = \\ &= E_{LS}(\Delta a; a, P) + W(\Delta a; a) \end{aligned} \quad (28)$$

La (28) implica che l'energia libera è ora dipendente soltanto dall'incremento Δa della cricca (con a, P parametri). In dettaglio, essa è composta dall'energia libera E_{LS} del sistema elastico in equilibrio statico per Δa fissato più l'energia superficiale W (o energia di legame) che verrebbe liberata incrementando la lunghezza della cricca della stessa quantità Δa .

A questo punto, possiamo cercare il minimo della (28) anche come funzione di Δa . Per fare ciò, calcoliamo la derivata:

$$DE_{LG} = \left. \frac{d}{d\Delta a} \right|_{\Delta a=0} E_{LG}(\Delta a; a, P)$$

Il segno di DE_{LG} indicherà la condizione di equilibrio rispetto al possibile allungamento della cricca:

- Se $DE_{LG} > 0$, un allungamento della cricca ($\Delta a > 0$) *aumenterebbe* l'energia disponibile E_{LG} . Allora, poiché la condizione $\Delta a < 0$ è proibita, il minimo della (28) si ha per $\Delta a = 0$.
- Se $DE_{LG} < 0$, un allungamento della cricca ($\Delta a > 0$) *diminuirebbe* l'energia disponibile $E_{\Delta a}$. Allora, per il principio di minimo, la cricca si allungherà effettivamente e sarà $\Delta a > 0$.
- Se $DE_{LG} = 0$ è verificata la condizione necessaria per minimizzare la (28), ma per avere informazioni sull'effettivo stato di equilibrio occorre valutare la derivata seconda di E_{LG} (condizione critica).

Tenendo conto della (28), possiamo scrivere le tre condizioni precedenti in una forma più comoda per le valutazioni numeriche. Detto B lo spessore (costante) del dominio modellato come piano, siano, anzitutto:

$$G = G(a, P) = - \left. \frac{d}{d(B\Delta a)} \right|_{\Delta a=0} E_{LS}(\Delta a; a, P) \quad (29)$$

$$R = R(a) = \left. \frac{d}{d(B\Delta a)} \right|_{\Delta a=0} W(\Delta a; a) \quad (30)$$

Allora si può definire il seguente criterio di Griffith:

- Se $G(a, P) < R(a)$ sarà $\Delta a = 0$ e quindi la cricca di lunghezza a non si propaga per il carico P .

- Se $G(a,P) > R(a)$ sarà $\Delta a > 0$ e quindi la cricca di lunghezza a per il carico P non è in condizioni di equilibrio e si propaga.
- Se $G(a,P) = R(a)$ il sistema è in condizioni critiche ed occorrono maggiori informazioni per valutarne la stabilità dell'equilibrio.

In altre parole, riprendendo la formulazione sintetica di Griffith data all'inizio del paragrafo, *la cricca si allunga se e solo se l'energia necessaria alla propagazione può essere fornita dal sistema.*

Il parametro G definito nella (29) prende il nome di *Energy release rate* (ERR) e si può calcolare nell'ambito della teoria dell'equilibrio statico. In particolare, nel limite di validità della MFEL, l'energy release rate si può calcolare nell'ambito della teoria elastica lineare. Il parametro R definito nella (30) rappresenta la resistenza alla propagazione e si determina mediante prove sperimentali. Se il materiale si comporta in maniera fragile, la resistenza R non dipende dalla lunghezza della cricca né dalla geometria o dalle condizioni al contorno, ma è una caratteristica del materiale ed è indicata col simbolo G_c (energy release rate critico).

L'ERR critico misura l'energia occorrente per incrementare la cricca di una superficie unitaria se il materiale è fragile, ovvero se la rottura avviene con trascurabili deformazioni non elastiche all'apice della cricca. Se invece per incrementare la superficie della cricca si verificano non trascurabili deformazioni plastiche, si deve aggiungere a G_c l'energia unitaria di plasticizzazione W_p che dipende da tutti i parametri del problema, e in particolare da a . In definitiva, la resistenza alla frattura si può scomporre nel modo seguente:

$$R(a) = G_c + W_p(a) \quad (31)$$

Si noti che nel metodo di Griffith non sono evidenziate distinzioni tra i modi di carico della cricca, per cui la trattazione vale per un generico modo misto.

Calcolo dell'Energy Release Rate

Sia data una piastra con cricca di lunghezza a , di forma qualunque e di spessore costante B , caricata con una forza P cui corrisponde uno spostamento s (fig. 22).

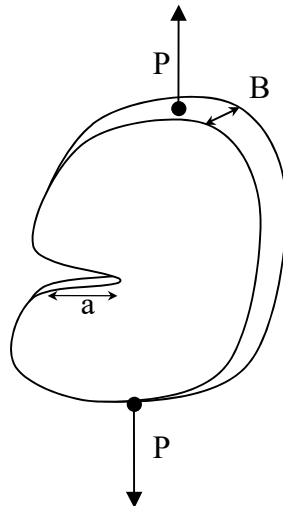


Figura 22

Se il materiale è elastico lineare e la cricca a è fissata, l'energia elastica contenuta nella piastra vale:

$$U = \frac{1}{2} K(a) s^2 \quad (32)$$

Sottraendo alla (32) il potenziale del carico P , si ricava l'energia libera (27):

$$\begin{aligned}
 E_L(s, \Delta a; a, P) &= U(s, a + \Delta a) - Ps \\
 &= \frac{1}{2} K(a + \Delta a)s^2 - Ps \quad (33)
 \end{aligned}$$

A cricca fissata, l'equilibrio elastico impone le seguenti relazioni:

$$P = Ks; \quad s = CP; \quad U = \frac{1}{2} Ps \quad (34)$$

Dove K è la rigidezza e C la cedevolezza del sistema per a fissata. Imponendo la (34) nella (33), si ricava:

$$E_{LS}(\Delta a; a, P) = -\frac{1}{2} C(a + \Delta a)P^2 \quad (35)$$

Dalla definizione (29) per l'ERR, si ricava ancora:

$$\begin{aligned}
 G = G(a, P) &= -\frac{d}{d(B\Delta a)} \Big|_{\Delta a=0} E_{LS}(\Delta a; a, P) = \\
 &= \frac{P^2}{2B} \frac{dC(a + \Delta a)}{d\Delta a} \Big|_{\Delta a=0} = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} \quad (36)
 \end{aligned}$$

La formula (36) consente di calcolare l'energy release rate se è nota la cedevolezza del sistema a cricca fissata; ciò equivale a conoscere la soluzione del problema elastico (34).

Si può pensare di calcolare la derivata della cedevolezza $C = s/P$ in due condizioni particolari:

- a) A carico fisso $P = \text{costante} \leftrightarrow dP = 0$
- b) A spostamento fisso $s = \text{costante} \leftrightarrow ds = 0$

Tenendo conto delle (34) e imponendo la condizione (a) si ricava, dall'equazione (36),

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{d(s/P)}{da} \Big|_{dP=0} = \frac{P}{2B} \frac{ds}{da} \Big|_{dP=0} = \frac{1}{B} \frac{dU}{da} \Big|_{dP=0} \quad (37)$$

Imponendo la condizione (b) si ricava, invece,

$$\begin{aligned} G &= \frac{P^2}{2B} \frac{d(s/P)}{da} \Big|_{ds=0} = -\frac{s}{2B} \frac{dP}{da} \Big|_{ds=0} \\ &= -\frac{1}{B} \frac{dU}{da} \Big|_{ds=0} \end{aligned} \quad (38)$$

Le espressioni (37), (38) dell'energy release rate dipendono esplicitamente soltanto dall'energia elastica U e rappresentano un utile strumento di valutazione di G alternativo alla (36).

A titolo di esempio, calcoliamo l'ERR del cosiddetto provino DCB (Double Cantilever Beam) rappresentato in figura 23.

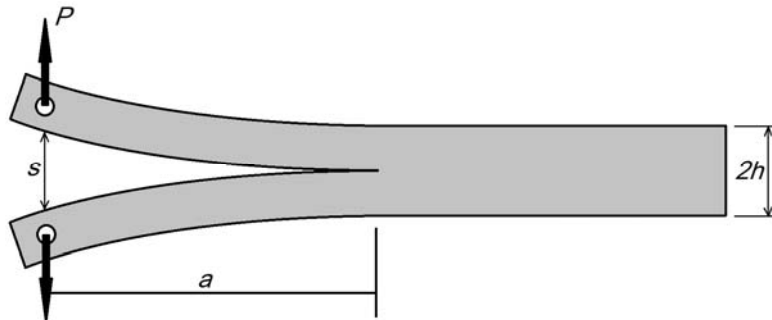


Figura 23 – Provino DCB caricato in modo I

Se la lunghezza a della cricca è maggiore della altezza $2h$ del provino (di spessore B), possiamo calcolare la sua cedevolezza rispetto al carico di apertura utilizzando la teoria elementare della trave:

$$C = \frac{s}{P} = \frac{2a^3}{3EI} = \frac{8a^3}{EBh^3} \quad (39)$$

Per la (36), l'energy release rate vale allora:

$$G = \frac{P^2}{2B} \frac{dC}{da} = \frac{12P^2 a^2}{EB^2 h^3} \quad (40)$$

Se il materiale è fragile, la condizione critica per la frattura si verifica quando $G = G_c$, ovvero:

$$\frac{12P^2 a^2}{EB^2 h^3} = G_c \Rightarrow P = \sqrt{\frac{G_c EB^2 h^3}{12a^2}} \quad (41)$$

Relazione tra K e G

Limitatamente ai problemi piani, Irwin dimostrò che esiste una relazione analitica tra l'energy release rate e lo stress intensity factor. La dimostrazione utilizza, oltre al campo di tensioni (2) all'apice della cricca, anche il campo di spostamenti relativo alla stessa soluzione elastica, riportato nelle formule seguenti:

$$u_i = \frac{K_I(G, C)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_{Ii}(\theta) + \frac{K_{II}(G, C)}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_{IIi}(\theta) \quad (42)$$

dove le funzioni di θ assumono i seguenti valori:

$g_{Ix} = \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right)$	$g_{IIx} = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$
$g_{Iy} = \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$	$g_{IIy} = \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \right)$
$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{per SPD} \\ \frac{3 - \nu}{1 + \nu} & \text{per SPT} \end{cases}$	

Con riferimento alla figura 24, e al modo I di sollecitazione, occorre calcolare la differenza di energia elastica dell'elemento piano nei due casi ivi raffigurati.

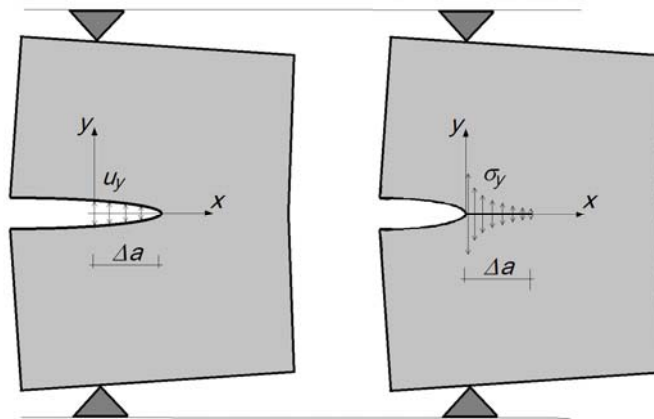


Figura 24

Nel primo caso la cricca è scarica ed ha lunghezza $a + \Delta a$; nel secondo, la cricca è stata chiusa per un tratto Δa , assumendo virtualmente la forma di una cricca più piccola, di lunghezza a . La tensione di chiusura σ_y che trasforma la prima configurazione nella seconda si può calcolare mediante l'espressione (2), mentre lo spostamento u_y dei bordi della cricca nella prima configurazione si calcola mediante la (42).

Poiché il carico remoto è applicato a spostamento imposto, e poiché tale spostamento è uguale nei due casi, la differenza di energia elastica tra il primo e il secondo caso è dovuta interamente al lavoro di chiusura della cricca. Osservando la figura (24) si deduce che tale lavoro non è altro che il lavoro compiuto dalle tensioni di chiusura σ_y per le distanze u_y dei lembi della cricca dall'asse di simmetria locale x . Pertanto, la differenza di energia elastica tra il primo caso (cricca di lunghezza $a + \Delta a$) ed il secondo (cricca di lunghezza a) è data da:

$$\Delta U_c = 2 \int_0^{\Delta a} \frac{1}{2} \sigma_y u_y B dx \quad (43)$$

Per le equazioni (2) particolarizzate per il modo I risulta, per $\theta = 0$,

$$\sigma_y = \frac{K_I[a]}{\sqrt{2\pi x}}$$

D'altra parte, le equazioni (42) particolarizzate per il modo I e per $\theta = \pi$, forniscono:

$$u_y = K_I[a + \Delta a] \frac{\kappa + 1}{2\mu} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{2\pi}}$$

Introducendo le espressioni precedenti nella (43) si ricava l'energia ΔU_c di chiusura della cricca nel tratto Δa :

$$\begin{aligned} \Delta U_c &= K_I[a] K_I[a + \Delta a] B \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int_0^{\Delta a} \sqrt{\frac{\Delta a - x}{x}} dx = \\ &= K_I[a] K_I[a + \Delta a] B \Delta a \frac{\kappa + 1}{8\mu} \end{aligned} \quad (44)$$

A questo punto è facile valutare G mediante la formula (38), notando che l'energia ΔU attribuibile all'avanzamento della cricca è opposta all'energia di chiusura (44):

$$G = -\frac{1}{B} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} \Big|_{ds=0} = +\frac{1}{B} \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U_c}{\Delta a} = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_I^2 \quad (45)$$

Questa espressione rappresenta il legame, valido nel campo della MFEL, tra l'energy release rate e lo stress intensity factor nel caso di modo I.

Con lo stesso procedimento si possono ricavare espressioni analoghe anche per gli altri modi di sollecitazione:

$$G = \frac{\kappa + 1}{8\mu} K_{II}^2 \quad G = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (46)$$

Si ricordi che gli ERR così calcolati si riferiscono ad un avanzamento della cricca diretto secondo l'asse di simmetria locale x , mentre in un materiale isotropo i modi di sollecitazione non simmetrici II e III producono un avanzamento della cricca deviato rispetto a x (*crack kink*). Per tale motivo le espressioni (46) non possono, in generale, essere utilizzate per ricavare criteri di rottura.

Tenendo conto di tale limitazione, poiché G deriva da un bilancio energetico, è possibile sommare gli ERR associati ai diversi modi di frattura; si ottiene quindi l'espressione composta:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu}; \quad E' = \begin{cases} E & \text{per SPT} \\ \frac{E}{(1 - \nu^2)} & \text{per SPD} \end{cases}$$

Tale espressione rappresenta l'energia rilasciata per unità di superficie di una cricca sottoposta a carico misto I + II + III, purché l'avanzamento avvenga nella direzione (simmetrica) x .

Stabilità dell'avanzamento della cricca

Nel paragrafo precedente si è mostrato che l'energy release rate G va confrontato con la resistenza:

$$R(a) = G_c + W_p(a),$$

e che il valore della resistenza R è costante (e pari a G_c) se l'energia assorbita nella plasticizzazione localizzata intorno all'apice della cricca è trascurabile rispetto all'energia di frattura vera e propria. Quando ciò non si verifica (per esempio per materiali metallici e spessori sottili), la resistenza dipenderà anche dalla geometria e dalla disposizione del carico.

Soffermandoci ancora su cricche che possono essere definite da un solo parametro (la lunghezza a), si possono costruire, per una data geometria, delle curve che rappresentano R in funzione di a (curve di resistenza), in base alle quali si può ricavare non soltanto la condizione critica, che è quella nella quale la cricca comincia a propagarsi, ma anche informazioni sulla stabilità della propagazione. I dati di resistenza vengono rappresentati su un particolare diagramma per visualizzare in maniera semplice questa seconda informazione (fig. 25).

In questa figura la curva di resistenza R è un dato del problema mentre le rette che partono dal punto a_i , che indica la lunghezza iniziale della cricca, rappresentano altrettante funzioni $G(a)$ a tensione costante. Il caso rappresentato, che è il più semplice, è riferito a cricca immersa in piastra infinita e sollecitata in modo I; perciò le $G(a)$ sono funzioni lineari, poiché vale la relazione:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E'} = \frac{\pi\sigma^2}{E'} (a + a_i) \quad (47)$$

Le curve $G(a)$ sono *virtuali* nel lato sinistro del diagramma, poiché non può esistere un $\Delta a < 0$, mentre rappresentano un valore di G realmente possibile per $\Delta a \geq 0$.

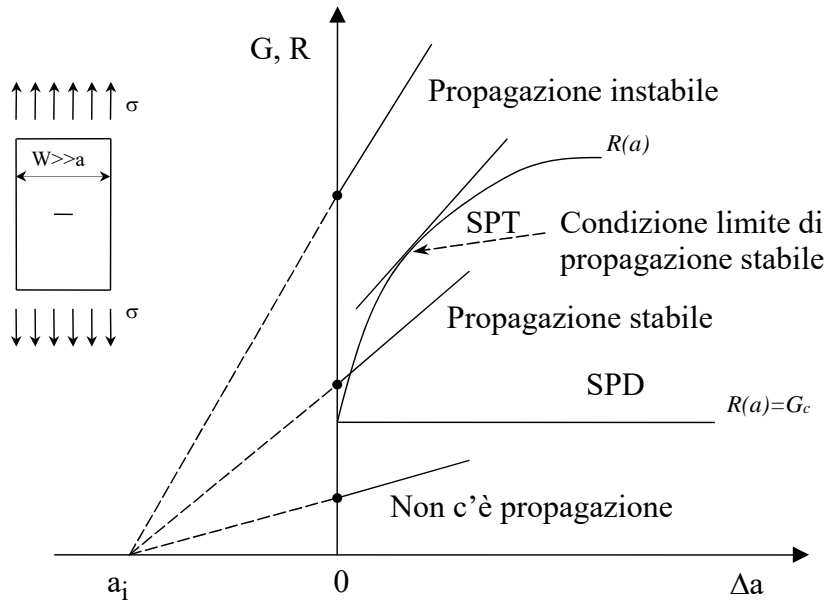


Figura 25 – Curva di resistenza per piastra in trazione

Se le rette intersecano l'asse delle ordinate in un punto $G(a_i)$ in cui il valore della resistenza R è maggiore, la propagazione non avviene. In caso contrario, la cricca si propaga finché risulta $G > R$; se la semiretta $G(a)$ interseca la curva di resistenza, la propagazione si ferma (condizione stabile); se ciò non avviene, la cricca cresce fino alla rottura del pezzo (condizione instabile).

Il punto limite di stabilità è definito dalle due condizioni:

$$R = G; \quad \frac{dR}{da} = \frac{dG}{da}$$

Se si considera un continuo con geometria o con sistema di carico differenti da quelli rappresentati in fig. 25, le curve $G(a)$ non saranno più, in generale, rettilinee e le curve R saranno ovviamente diverse, ma le considerazioni sulla stabilità rimangono ugualmente valide.

3 Propagazione della cricca per fatica

È ben noto che sollecitazioni applicate a un elemento meccanico inferiori alle sollecitazioni di rottura statica, ma variabili nel tempo, possono provocare la rottura dopo un certo numero di cicli. Tale fenomeno è noto come rottura per fatica.

Se si indaga un po' più a fondo, si rivela che le sollecitazioni cicliche, se sufficientemente elevate, causano la formazione di cricche microscopiche, le cui dimensioni aumentano finché qualche particolare insieme di cricche si trasforma in una cricca macroscopica che può essere modellata con la meccanica della frattura. In tale condizione, la sollecitazione applicata è sufficiente provocare una crescita della cricca con modalità abbastanza prevedibili e che prosegue fino alla completa rottura del pezzo.

Si supponga, in un primo momento, che la sollecitazione sia di ampiezza costante, e variabile tra i due estremi σ_{max} e σ_{min} . Tale sollecitazione potrebbe ad esempio essere espressa dalla funzione, già nota dallo studio della fatica classica:

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} + \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \cos(\omega t).$$

Si supponga inoltre che lo stato di sollecitazione locale all'apice della cricca sia definito mediante lo stress intensity factor K . Ciò significa ipotizzare che la plasticizzazione intorno all'apice della cricca sia di entità limitata.

Questo fatto rappresenta, in molti casi di interesse ingegneristico, una limitazione meno severa nel campo della propagazione per fatica che nel campo della frattura statica, poiché la sollecitazione critica, e quindi il SIF, è nel primo caso certamente minore che nel secondo. Come per la fatica classica, i meccanismi di rottura progressiva si possono descrivere correttamente solo alla scala microscopica, dove

il materiale non è omogeneo e isotropo, né continuo. Comunque, ad un primo livello di descrizione, che vive alla scala macroscopica, se si assume che la propagazione avvenga a causa delle sollecitazioni locali, i valori assunti da K durante la storia dei carichi contengono le informazioni sufficienti per studiare tale processo.

Considerando una propagazione che avvenga per sollecitazione di apertura (modo I), alle due tensioni estreme applicate corrispondono due valori del SIF dipendenti dalla lunghezza della cricca a :

$$K_{max} = K(\sigma_{max}, a); \quad K_{min} = K(\sigma_{min}, a).$$

Una prima descrizione matematica del fenomeno della propagazione mette in relazione la velocità di crescita della cricca con lo stato di sollecitazione locale nei momenti di massima e minima tensione, e quindi con i SIF K_{max} , K_{min} . Si pone, pertanto, con simbologia informale ma ampiamente attestata:

$$\frac{da}{dN} = f(K_{max}, K_{min}) = f_1(\Delta K, R) \quad (48)$$

dove:

da è l'allungamento della cricca dovuto all'applicazione di dN cicli;

$$\Delta K = K_{max} - K_{min};$$

$$R = \frac{K_{min}}{K_{max}} \cong \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}.$$

La relazione (48) si particularizza mediante campagne di prove di propagazione che si svolgono, in genere, imponendo carichi o spostamenti ad ampiezza e media costante, come avviene nelle prove

di fatica classica. In pratica, l'applicazione della (48) si estende in prima approssimazione al caso di sollecitazioni variabili in generale. Più rigorosamente, la velocità di propagazione dipende dall'intera storia del carico applicato, e ciò si indica con la relazione generica:

$$\left. \frac{da}{dN} \right|_t = f(K(\tau)) \quad \tau \in [0, t] \quad (49)$$

in cui si considera esplicitamente la dipendenza della velocità di propagazione al tempo t dall'intera storia dei carichi applicati fino a quel momento.

In particolare, la velocità di propagazione viene influenzata, oltre che dal $K(t)$ corrente, anche dall'entità della zona plastica all'apice della cricca e dalle deformazioni plastiche residue presenti sui bordi. In fig. 26 sono riportati alcuni esempi di deformazioni plastiche residue che hanno effetto sulla velocità di propagazione e di come la forma e l'entità di queste dipendano dalla storia dei carichi applicati.

Tornando alla formula semplificata (48), la sua prima e più nota particolarizzazione è costituita dalla seguente *legge di Paris*:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (50)$$

con C e m costanti dipendenti dal materiale e dal rapporto tra i SIF, R . Quindi, secondo la legge di Paris, le velocità di propagazione per valori diversi di R non sono legate da una relazione analitica esplicita. Questa formulazione, similmente alle curve di Wohler della fatica, rappresenta semplicemente il risultato dell'interpolazione di dati sperimentali ottenuti per carichi ciclici ad ampiezza e media costante.

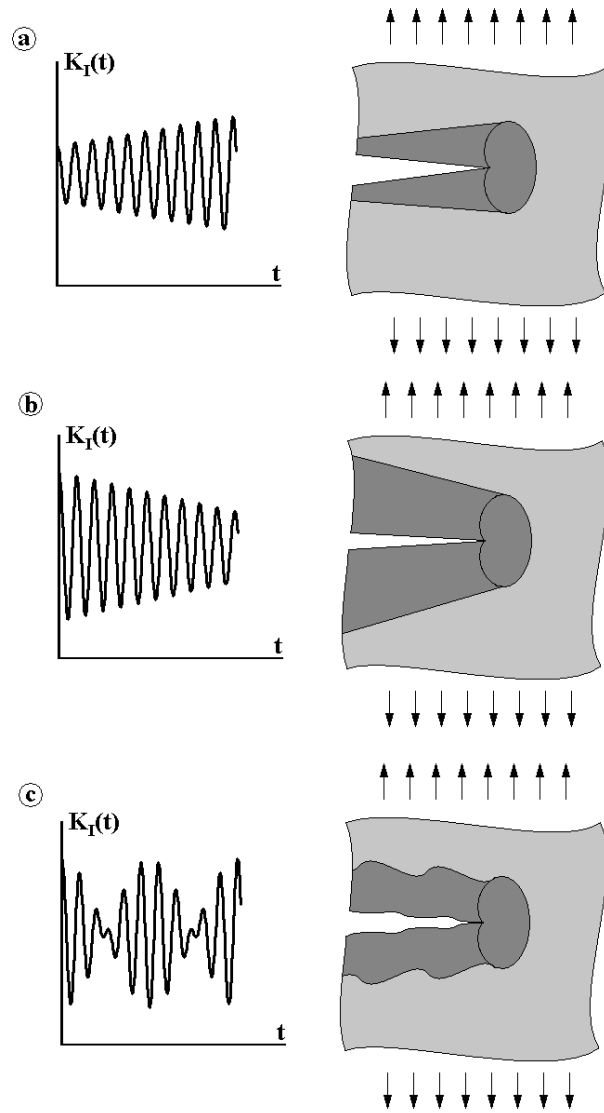


Figura 26 – Deformazioni residue dei bordi della cricca. (a): ΔK crescente; (b): decrescente; (c): variabile genericamente.

Un'interpolazione più precisa degli stessi dati porta a definire la curva rappresentata, in doppia scala logaritmica, per R costante, in fig. 27.

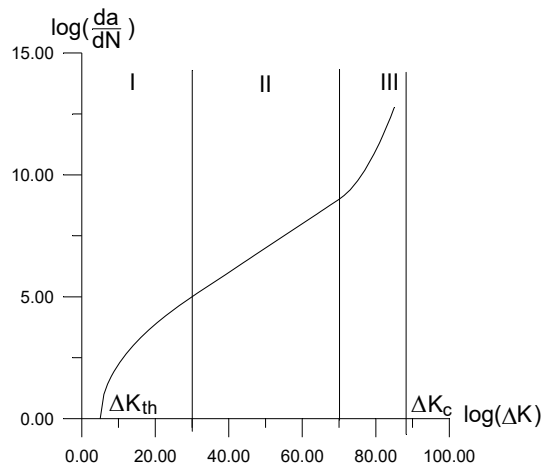


Figura 27 – Legge di propagazione per R costante

Nella curva di fig. 27 si evidenziano tre tratti. Il secondo tratto ha andamento sensibilmente lineare e rappresenta la zona in cui può considerarsi valida la legge di Paris per un dato R . Il primo tratto è caratterizzato da basse velocità di propagazione ed evidenzia l'esistenza di un valore di soglia ΔK_{th} al di sotto del quale la cricca non si propaga. Il terzo tratto è caratterizzato da un aumento esponenziale della velocità di propagazione, ed è limitato a destra dal valore critico ΔK_c per il quale avviene la rottura statica in seguito all'applicazione del carico massimo. Risulta quindi:

$$K_{max} = K_c \Rightarrow \Delta K_c = (1 - R)K_c \quad (51)$$

Sono state proposte in letteratura diverse funzioni per interpolare i dati rappresentati dalle curve di propagazione al variare di R e degli altri parametri.

Ad esempio Walker propose di interpolare i dati sperimentali nella regione II utilizzando, per tener conto esplicitamente della dipendenza dal rapporto R tra le tensioni di prova, la seguente relazione:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^m}{(1-R)^q} \quad (52)$$

Con C , m , q , costanti del materiale. Forman propose la seguente relazione, valida nelle regioni II e III:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^m}{(1-R)K_c - \Delta K} \quad (52)$$

Anche in questa formulazione viene evidenziata esplicitamente la dipendenza della velocità di propagazione dal rapporto R tra i SIF. Si noti che il denominatore della (52) può essere riscritto come:

$$(1-R)K_c - \Delta K = \Delta K \left(\frac{K_c}{K_{\max}} - 1 \right).$$

Questa espressione si annulla per $K_{\max} = K_c$, rendendo formalmente infinita la velocità di propagazione nelle condizioni di rottura statica, che perciò avviene in un solo semiciclo di carico. Inoltre, si evidenzia che l'asintoto verticale corrispondente alla K_c dipende da R , come richiesto dalla condizione (51).

Per concludere, Mc Evily propose un'equazione che segue l'intera curva di propagazione della cricca, compreso il tratto I:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K - \Delta K_{th})^m \cdot \left(1 + \frac{\Delta K}{K_c - K_{\max}} \right) \quad (54)$$

Nelle espressioni (52 - 54) C , m , q , ΔK_{th} , K_c sono costanti dipendenti dal materiale, e la legge di propagazione dipende, fissato il materiale, solo da ΔK e R . Non sono quindi considerati esplicitamente fattori, in realtà importanti, quali l'entità della zona plastica e le deformazioni residue sui bordi della cricca; per questo motivo, gli incrementi di a calcolati per il generico ciclo di carico non dipendono dalla storia della propagazione (se non, ovviamente, attraverso la a contenuta nel SIF) e rappresentano perciò un modello di danno cumulativo. Ciononostante, esse sono una valida base di partenza per lo studio della propagazione di cricche per fatica.

Ognuna delle formule precedenti può essere integrata separando le variabili N ed a :

$$N = \int_0^N dN = \int_{a_0}^a \frac{da}{f(\Delta K, R)} = N(a) \quad (55)$$

Si ricava in questo modo una funzione che lega il numero di cicli di fatica alla lunghezza della cricca. La vita totale prevista del pezzo è data ovviamente da:

$$N_{tot} = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{f(\Delta K, R)}$$

Ad esempio, applicando la legge di Paris, e ponendo $K = \sigma\sqrt{\pi a}$, si calcola in forma chiusa il numero di cicli occorrenti per la propagazione della cricca dalla lunghezza a_1 ad a_2 :

$$\Delta N = N(a_2) - N(a_1) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{C\Delta K^m} = \frac{1}{C(\sqrt{\pi}\Delta\sigma)^m} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a^{\frac{m}{2}}} =$$

$$= \frac{2}{(2-m)C(\sqrt{\pi}\Delta\sigma)^m} [a_2^{(1-m/2)} - a_1^{(1-m/2)}] \quad (56)$$

In casi meno semplici occorre effettuare un'integrazione numerica, peraltro non troppo difficoltosa.

Si noti che se $a_0=0$ (pezzo inizialmente senza cricche), risulterà sempre $K = 0$ e perciò, secondo le leggi di propagazione presentate in precedenza, $da/dN = 0$.

Ciò vuol dire che un pezzo inizialmente integro non si romperà mai per fatica, in contrasto con la realtà sperimentale. Questo risultato rispecchia quanto già esposto per la frattura statica e va interpretato semplicemente come un limite di validità dei modelli di frattura basati sullo stress intensity factor. Allo scopo di rendere più generale l'applicabilità dei modelli di propagazione a fatica, si deve tenere conto della cosiddetta fase di nucleazione della cricca. La nucleazione è il processo che porta alla formazione dei difetti macroscopici che possono poi essere trattati come cricche vere e proprie a partire da una dimensione convenzionale (ad es. 1 mm). Questa fase è trattata con modelli micromeccanici e metodi statistici che esulano dagli scopi di queste note.

Un esempio di approccio alla propagazione che tenga conto della evoluzione della zona plastica è rappresentato dal modello di *crack closure* proposto da Elber.

L'autore iniziò l'analisi dalla considerazione che la crescita della cricca avviene soltanto se al suo apice la tensione σ_y , calcolata tenendo conto delle tensioni residue, è positiva. Durante la propagazione, infatti, sui bordi della cricca si forma una striscia di deformazione residua dovuta alla plasticizzazione dell'apice durante i precedenti cicli di carico (*crack wake*, fig. 28).

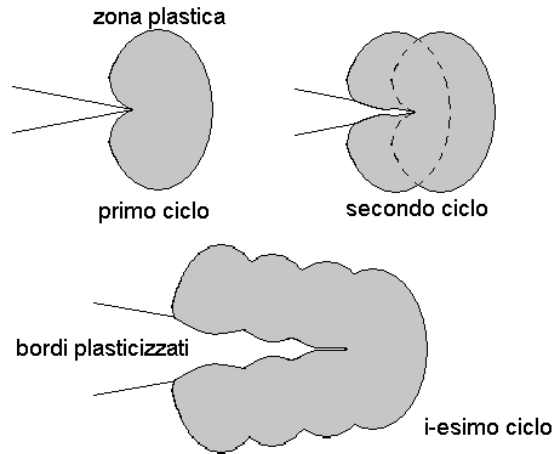


Figura 28 – Deformazioni residue intorno ai bordi della cricca

Allora, se si annullasse il carico, tali deformazioni residue si opporrebbero alla chiusura dei bordi, generando intorno all'apice della cricca una tensione addizionale *negativa*, detta tensione di chiusura. Esiste un valore del carico per il quale la tensione dovuta al carico stesso e la tensione di chiusura dovuta alla deformazione residua si eguagliano in valore assoluto, rendendo nulla la tensione totale all'apice della cricca. A tale carico corrisponde lo stress intensity factor K_{op} (opening), in generale diverso da zero, al di sotto del quale la cricca non si propaga (fig. 29).

In base a queste considerazioni, Elber sostenne che la velocità di propagazione dipende dalle seguenti quantità (*driving forces*):

$$\Delta K_{eff} = K_{max} - K_{op} \leq \Delta K, \quad U = \frac{\Delta K_{eff}}{\Delta K} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{da}{dN} = f(\Delta K_{eff}, U) \quad (57)$$

In particolare, proporre una legge di propagazione formalmente simile alla legge di Paris:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K_{eff}^m = C (K_{max} - K_{op})^m \quad (58)$$

Nel caso di carico ad ampiezza costante, risulta $K_{op} > 0$ e, per alcuni autori, tale parametro può essere considerato una costante del materiale.

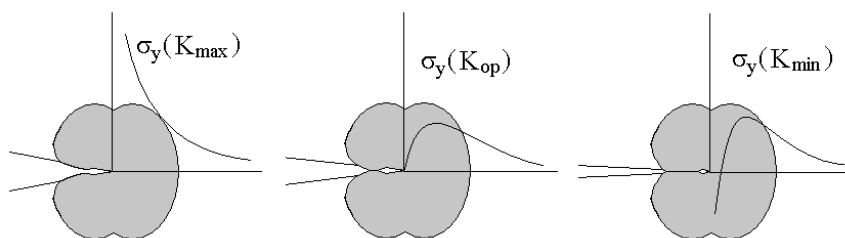


Figura 29 – Effetto della deformazione residua sulla tensione intorno all'apice della cricca

In questo modello, non è più necessario definire un valore di soglia ΔK_{th} , poiché risulta implicitamente dalla (58) che per $K_{max} \leq K_{op}$ la propagazione non avviene.

In realtà K_{op} dipende, come abbiamo detto, dalle deformazioni residue dei bordi della cricca, e quindi dall'intera storia dei carichi. È proprio questo fatto che distingue in maniera sostanziale la formula (57) dalla (50), poiché con il modello di Elber si tiene conto della storia dei carichi mediante la relazione funzionale:

$$K_{op} = K_{op}(\sigma, a, \varepsilon^p(N)).$$

D'altra parte, non è facile valutare il K_{op} quando il carico è variabile in modo generico. Esistono comunque diversi modelli semplificati dell'influenza delle deformazioni residue sul K_{op} che consentono di calcolare, per via necessariamente numerica, questo parametro, e quindi la generica storia della propagazione $N(a)$.