

Selezione di esercizi di Analisi Matematica 2

Prof. Fernando Farroni

Università degli Studi di Napoli Federico II

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"

Indice

1	Successioni e serie di funzioni	2
2	Continuità e differenziabilità	7
2.1	Studio della continuità e differenziabilità	7
2.2	Campi di esistenza per funzioni di più variabili	10
3	Ricerca degli estremi per funzioni di più variabili	12
4	Forme differenziali/campi vettoriali	15
5	Integrali multipli e su curve e superfici	18
6	Equazioni differenziali ordinarie	24

Introduzione

Il presente plico contiene materiale didattico destinato ai corsi di Analisi Matematica 2 di cui il Docente è attualmente titolare.

Prof. Fernando Farroni

Dipartimento di Matematica ed Applicazioni “R. Caccioppoli”

Università degli Studi di Napoli Federico II

Capitolo 1

Successioni e serie di funzioni

Esercizio 1.1. Si consideri la successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita come

$$f_n(x) = \log \left(\frac{n\sqrt{x}}{n+1} \right) \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

- Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, +\infty)$.
- Indicare se la serie di funzioni di termine generale $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge totalmente nell'intervallo $[2, 3]$.

Risultato. La successione proposta converge uniformemente alla funzione $f(x) = \log \sqrt{x}$ e la serie di funzioni di termine generale $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge totalmente nell'intervallo $[2, 3]$ \square

Esercizio 1.2. Per $x \in [0, \infty)$, studiare la convergenza totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n^4} \right) e^{-nx}$$

Esercizio 1.3. Studiare la convergenza delle seguenti successioni di funzioni:

$$f_n(x) = \log x - (\log x)^{3n} \quad \text{per } x \in (1, \sqrt{e}) \quad (1.1)$$

$$f_n(x) = (x^2 + nx)e^{-nx} \quad \text{per } x \in (0, \infty) \quad (1.2)$$

Esercizio 1.4. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{n^2-n+5} x^n \quad (1.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+5} \right)^{n^2} x^n \quad (1.4)$$

Esercizio 1.5. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)e^{-5n}x^n \quad (1.5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n^5} \right) x^n \quad (1.6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^n}{7^n} \quad (1.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(5^{\frac{1}{n}} - 1 \right) x^n \quad (1.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5x}{8^n + \log n} \right)^n \quad (1.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n^3+n+1)5^n} \quad (1.10)$$

Esercizio 1.6. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos \frac{x^4}{\sqrt{n^2+x^6}} \right) \quad \text{per } x \in [-1, 1] \quad (1.11)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \arctan \frac{x}{n^7+n^5} \quad \text{per } x \in [0, +\infty) \quad (1.12)$$

Esercizio 1.7. Per $x > 0$, si studi la convergenza puntuale delle seguenti serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^x}{n^6 + n^3} \quad (1.13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \log \left(\frac{n^3 + 2n + 2}{n^3 + 4n^2 + 1} \right) \quad (1.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^2} - n^2}{n^x} \quad (1.15)$$

Esercizio 1.8. Determinare l'insieme di convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{3n}}{4^n(n^2 + 4)}. \quad (1.16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{3^n} (2x - x^2)^n \quad (1.17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{7^n + 9^n} (\sqrt{x} - x)^n \quad (1.18)$$

Esercizio 1.9. Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = n \left(1 - e^{-\frac{x}{n}} \right)$$

- dimostrare che $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sull'intervallo $[0, 3]$ e calcolare il limite uniforme f di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- indicare se sussiste la seguente identità

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^2 f_n(x) dx = \int_1^2 f(x) dx$$

Esercizio 1.10. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \left(1 - \cos \frac{x}{n} \right).$$

Detta s la somma della serie, mostrare che $s \in C^1(-\delta, \delta)$ con $\delta > 0$ arbitrario.

Infine, calcolare $f'(0)$.

Suggerimento: si ricordi per ogni $\theta \geq 0$ sussistono le relazioni:

$$|\sin \theta| \leq |\theta| \quad (1.19)$$

$$1 - \cos \theta \leq \frac{1}{2}\theta^2 \quad (1.20)$$

Esercizio 1.11. Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{\sqrt{n}} \log \left(1 + \frac{x^4}{\sqrt{n}} \right)$$

dimostrare che

- (i) converge puntualmente ma non uniformemente in $(-1, 1)$;
- (ii) converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subset (-1, 1)$.

Esercizio 1.12. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\pi - 2 \arctan(nx^n)}{\log^2 n}$$

al variare di $x \in [0, +\infty)$.

Esercizio 1.13. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2 x^2 + 1}{x^2 + n^2}$$

- individuare il limite puntuale f di $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} ;
- indicare se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente verso f in $[0, \frac{3}{2}]$;

Risultato. Il limite puntuale in \mathbb{R} per la successione proposta è la funzione $f(x) = x^2$. Nell'intervallo $[0, \frac{3}{2}]$ la funzione f è anche limite uniforme.

Esercizio 1.14. Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) := \sqrt{n}x^2(1-x)^n \quad \text{per } x \in [0, 1] \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

Discutere la convergenza puntuale ed uniforme di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ su \mathbb{R} . Discutere inoltre se la serie di funzioni di termine generale $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge totalmente sull'intervallo $[0, 1]$.

Esercizio 1.15. Studiare la convergenza uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{n} + \frac{1}{n^2} \right) e^{-x} \quad \text{con } x \in [0, \infty), n \in \mathbb{N}.$$

La serie di funzioni di termine generale $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge totalmente in $[0, \infty)$?

Capitolo 2

Continuità e differenziabilità

2.1 Studio della continuità e differenziabilità

Esercizio 2.1. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

- calcolare (se possibile) la derivata direzionale di f in $(0, 0)$ lungo la direzione $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
- discutere la continuità di f in $(0, 0)$;
- dimostrare che f non è differenziabile in $(0, 0)$.

Esercizio 2.2. Al variare di $\alpha > 0$, discutere la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha (e^{\sqrt{|xy|}} - 1)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Esercizio 2.3. Studiare continuità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 + y^4)(x - \sin x)}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Esercizio 2.4. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcolare il valore della derivata di f in $(0, 0)$ lungo la direzione $\lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Esercizio 2.5. Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1 + |x|^\alpha y^2)}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 2.6. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^2}{[(x-1)^2 + y^4]^\beta} & \text{se } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

è continua se e solo se $\beta \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ ed è differenziabile se e solo se $\beta \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$.

Esercizio 2.7. Studiare la continuità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^4 y^2} - 1}{x^6 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcolare (se possibile) il valore della derivata di f in $(0, 0)$ lungo la direzione $\lambda = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Esercizio 2.8. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^4 y^2)}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

- Discutere la continuità e la differenziabilità di f in $(0, 0)$.
- Calcolare (se possibile) la derivata di f in $(0, 0)$ lungo la direzione $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Esercizio 2.9. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 + x^2 y^4} - 1}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

- Discutere la continuità e la differenziabilità di f in $(0, 0)$.
- Calcolare (se possibile) la derivata di f in $(0, 0)$ lungo la direzione $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Esercizio 2.10. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^4 y^2)}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

- Discutere la continuità e la differenziabilità di f in $(0, 0)$.
- Calcolare (se possibile) la derivata di f in $(0, 0)$ lungo la direzione $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Esercizio 2.11. Fissato $\alpha > 0$, si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita alla maniera seguente

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(e^{x^2} - 1) \log(1 + |y|^\alpha)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

- dimostrare che f è continua in $(0, 0)$ per ogni $\alpha > 0$;
- determinare i valori di α affinché la funzione risulti differenziabile nell'origine.

Esercizio 2.12. Studiare la differenziabilità in $(0, 0)$ per la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(1 - \cos x)(1 - \cos y) \sin(xy)}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2.2 Campi di esistenza per funzioni di più variabili

Esercizio 2.13. Disegnare nel piano cartesiano il campo di esistenza della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1 - x - y}{x + 3}}$$

Esercizio 2.14. Disegnare nel piano cartesiano il campo di esistenza D della funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{y - x^2}{1 - 3x - y}\right)$$

Disegnare inoltre l'insieme $\{(x, y) \in D: f(x, y) \geq 0\}$

Esercizio 2.15. Disegnare nel piano cartesiano il campo di esistenza D della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 9}{y - x}}$$

Disegnare inoltre gli insiemi di livello $\Lambda_f(k) := \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$ per i valori di $k \in \mathbb{R}$ che rendono $\Lambda_f(k)$ non vuoto.

Esercizio 2.16. Disegnare nel piano cartesiano il campo di esistenza D della funzione

$$f(x, y) = \sqrt{e^{4x^2+9y^2-36} - 1}$$

Disegnare inoltre il sottolivello $\{(x, y) \in D : f(x, y) \leq \sqrt{e^{13} - 1}\}$.

Capitolo 3

Ricerca degli estremi per funzioni di più variabili

Esercizio 3.1. Calcolare gli eventuali massimi e minimi relativi per la funzione

$$f(x, y) = x^4 y^3 - x^6 y^2$$

Calcolare inoltre la derivata di f in $(1, 3)$ lungo la direzione $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Esercizio 3.2. Determinare su \mathbb{R}^2 gli eventuali massimi o minimi relativi e assoluti della funzione

$$f(x, y) = (e^{x+2} - 1)^2 \log(1 + y^2) + x^2 + x$$

[*Soluzione:* la funzione possiede un unico punto critico $(-\frac{1}{2}, 0)$ che è minimo assoluto su tutto \mathbb{R}^2 .]

Esercizio 3.3. Calcolare massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x, y) = x^2 + \sqrt{3}xy^2 + y^2$$

nel semicerchio unitario contenuto nel primo e secondo quadrante del piano.

Esercizio 3.4. Determinare massimo e minimo assoluto per la funzione

$$f(x, y) = (y^3 + y)e^{-x^2}$$

sull'insieme $T = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 - |x|\}$.

Esercizio 3.5. Data la funzione $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2 - 6y^2 + 1$, determinarne gli eventuali punti di minimo e massimo relativi e assoluti in tutto il piano.

Esercizio 3.6. Studiare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y - 4xy^2 - 8y^3$$

e determinare massimo e il minimo assoluto assunti da f nel triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 2)$.

Esercizio 3.7. Data la funzione

$$f(x, y) = 2x^2y - \log(1 + x^4 + y^2)$$

determinarne minimo e massimo nel quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Esercizio 3.8. Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = y^2 - x^2 + 3x$$

nella corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.

Esercizio 3.9. Determinare i punti di minimo e massimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = e^{\frac{x^2+y^2}{2}}(2 - x^2y^2)$$

nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1.

Esercizio 3.10. Calcolare massimo e minimo assoluti per la funzione

$$f(x, y) = x^2 + \sqrt{3}xy^2 + y^2$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \in [-1, 1], \quad 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$

Esercizio 3.11. Dimostrare che i punti a distanza minima dall'origine per l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a \neq b$, sono rispettivamente $(\pm a, 0)$ se $a < b$ e $(0, \pm b)$ se $a > b$.

Esercizio 3.12. Dimostrare che la funzione $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + x^2y$ ammette un unico punto critico che non è di estremo relativo.

Esercizio 3.13. Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy(x^2 + y^2)$$

nella porzione di cerchio di centro l'origine e raggio 2 contenuta nel primo quadrante del piano xy .

Esercizio 3.14. Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x(1 + x^2 + y^2)$$

nella porzione di cerchio di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel primo quadrante del piano xy .

Esercizio 3.15. Determinare gli estremi assoluti della funzione $f(x, y) = xy - x^2$ sul triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 2)$.

Esercizio 3.16. Dimostrare che $(0, 0)$ è un punto critico per la funzione $f(x, y) = xy(e^x - e^y)$. Si stabilisca inoltre se $(0, 0)$ è un estremo relativo per f .

Capitolo 4

Forme differenziali/campi vettoriali

Esercizio 4.1. Sia

$$\omega = \left(\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) dx + \frac{xy}{x^2 + y^2} dy$$

Dire se la forma ω è esatta ed in caso affermativo determinare la primitiva di ω che vale zero nel punto $(1, 0)$.

Esercizio 4.2. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = (3x^2y^2 + 2xy, 2x^3y + x^2 + 3y^2)$$

Dire se F è conservativo e calcolare il lavoro compiuto da F lungo curva $\gamma(t) = (t^2 + e^t, t + \log t)$ con $t \in [1, e^5]$.

Esercizio 4.3. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy^3}{x^2 + y^2} dx + \frac{x^2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} dy$$

sulla curva γ definita come la porzione di ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ contenuta nel primo quadrante e compresa fra le rette $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e $y = \sqrt{3}x$.

Esercizio 4.4. Provare che la forma differenziale

$$\omega = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} dy,$$

è esatta e dimostrare che esiste una primitiva che assume massimo assoluto uguale a 1 sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Esercizio 4.5. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = x\sqrt{\frac{1+y^2}{1+x^2}}dx + y\left(e^y + \sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}\right)dy,$$

lungo il segmento che ha per estremi $(0, 0)$ e $(1, 2)$.

Esercizio 4.6. Sia ω la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{xy}{(1 - x^2 + y^2)\sqrt{1 - x^2}}dx + \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2 + y^2}dy$$

Determinare il dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ di ω e stabilire se la forma in esame è esatta in D . In caso affermativo, indicata con $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ la primitiva di ω che vale zero nell'origine, si determini l'insieme di livello

$$\left\{ (x, y) \in D : f(x, y) = \frac{\pi}{4} \right\}$$

Esercizio 4.7. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = (a(x, y), xe^{-y} + ye^{-x})$$

Fornire almeno un esempio di funzione $a \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che F sia conservativo in \mathbb{R}^2 . In corrispondenza di tale scelta, determinare tutti i potenziali di F .

Esercizio 4.8. Calcolare il lavoro dal campo vettoriale $F(x, y) := (xy^2, x^2y)$ compiuto sulla curva di equazione polare $\rho = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio 4.9. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{e^x}{1 + e^y}, -\frac{e^{x+y}}{(1 + e^y)^2} \right)$$

Indicare se F è conservativo su tutto \mathbb{R}^2 ed in caso affermativo calcolare tutti i potenziali di F .

Esercizio 4.10. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{xy^2}{1 + x^2y^2}, \frac{x^2y}{1 + x^2y^2} \right)$$

Indicare se F è conservativo su tutto \mathbb{R}^2 ed in caso affermativo calcolare tutti i potenziali di F . Calcolare infine l'integrale curvilineo lungo la curva grafico della funzione $h(x) = x^2 - x$ con $x \in [1, 2]$.

Capitolo 5

Integrali multipli e su curve e superfici

Esercizio 5.1. Calcolare il volume del solido E ottenuto ruotando attorno all'asse delle z il dominio D del piano yz definito come segue

$$D = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq y \leq 4, \quad 1 \leq yz \leq 8\}$$

Esercizio 5.2. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \frac{1}{2} (x^2 e_1 + y^2 e_2 + z^2 e_3)$$

uscite dalla frontiera del solido E dell'esercizio precedente.

Esercizio 5.3. Nel piano yz si consideri la curva grafico γ della funzione $z = e^{-y}$ con $y \in [\log 3, \log 5]$ e sia S la superficie che si ottiene ruotando γ di un giro completo attorno all'asse delle y orientata in modo che la seconda componente del campo versore normale sia positiva.

- Calcolare l'area di S ;

- Calcolare il flusso del campo vettoriale $F(x, y, z) = (xz, xy, yz)$ attraverso S .

Esercizio 5.4. Nel piano xy , sia D l'intersezione della porzione di corona circolare di raggi 1 e 3 centrata nell'origine contenuta nel semipiano $y \geq 0$ con la parte di piano compresa fra le rette $y = \sqrt{3}x$ e $y = -x$. Calcolare

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Esercizio 5.5. Sia $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq e^u\}$. Si consideri la superficie $\varphi(u, v) = (u, \sqrt{2} \log v, u)$ con $(u, v) \in D$. Si dimostri che φ è una superficie regolare. Indicato con S il sostegno di φ , calcolare

$$\int_S xz d\sigma$$

Esercizio 5.6. Sia D la porzione di piano racchiusa dalla curva di equazione

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

Calcolare il volume dell'intersezione del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in D, z \geq 0\}$ con la palla di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 1.

Esercizio 5.7. Dato l'insieme $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x - y \leq 0\}$, calcolare

$$\iint_C (x^2 + y^2 - y) dx dy.$$

Esercizio 5.8. Calcolare l'integrale

$$\int_{\Sigma} x^2 d\sigma,$$

dove Σ è la superficie ottenuta ruotando di un giro completo intorno all'asse x la curva del piano xy di equazione parametrica $\gamma(u) = (\sin^3 u, \cos^3 u)$, $u \in (0, \pi/2)$.

Esercizio 5.9. Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = \sqrt{2} \sin t \cos t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Dimostrare che γ è una curva regolare, semplice e non interseca la retta orizzontale r di equazione $y = \sqrt{2}$. Determinare l'area della superficie ottenuta ruotando di un angolo retto il sostegno di γ attorno ad r .

Esercizio 5.10. Siano B la palla di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$ e P il paraboloido

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2z\}$$

Calcolare il volume dell'insieme $B \setminus P$.

Esercizio 5.11. Calcolare

$$\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2} dx dy,$$

dove D è il dominio compreso fra l'intervallo $[0, 1]$ dell'asse delle x e il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Esercizio 5.12. Sia D il dominio del piano compreso fra la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t - t^3 \\ y(t) = 2t - t^2 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

e l'asse delle y . Calcolare

$$\iint_D \frac{1}{x+6} dx dy.$$

Esercizio 5.13. Sia C il cerchio di centro $(1/2, 0)$ e raggio 1 e D l'intersezione di questo cerchio con il primo quadrante del piano xy . Calcolare il volume dei due solidi che si ottengono ruotando D una volta rispetto all'asse x e una volta rispetto all'asse y .

Esercizio 5.14. Calcolare il volume di $B \setminus E$ e di $E \setminus B$, dove

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \\ E &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + 4z^2 \leq 1 \right\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Suggerimento: ricordare che l'ellissoide di semiassi $a, b, c > 0$ ha volume pari a $\frac{4\pi}{3}abc$.

Esercizio 5.15. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} x^2 ds$$

dove γ rappresenta nel piano xy la curva di equazione cartesiana

$$y = -\log(1 - x^2)$$

con $x \in [0, \frac{1}{2}]$

Esercizio 5.16. Sia C il cono circolare retto avente come base il cerchio di centro l'origine e raggio 1 contenuto nel piano xy e il vertice in $(0, 0, 1)$. Calcolare il flusso attraverso la superficie laterale di C del campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z \right)$$

Esercizio 5.17. Sia D l'intersezione del cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1 con il semipiano $\{y \leq x\}$. Calcolare il volume e l'area della superficie del solido ottenuto ruotando D di un giro completo intorno alla bisettrice del primo quadrante.

Esercizio 5.18. Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \log 5 \leq x \leq \log 6, \quad e^x \leq y \leq 3e^x\}$$

- Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando D di un giro completo attorno alla retta $y = 1$.
- Calcolare il lavoro del campo vettoriale bidimensionale $F(x, y) = (x^2y, xy^3)$ lungo la frontiera di D .

Esercizio 5.19. Calcolare il baricentro del dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: \frac{1}{2}x \leq y \leq \frac{3}{2}x, \quad e^{-x} \leq y \leq 2e^{-x} \right\}$$

Esercizio 5.20. Sia $P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 4(x^2 + y^2) \leq z \leq 4\}$. Calcolare il flusso uscente dalla frontiera di P del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{12}, \frac{y^3}{12}, \frac{(x^2 + y^2)z}{2} \right)$$

.

Esercizio 5.21. Sia

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: e \leq y \leq e^3, \quad \log y \leq x \leq 2 \log y\}$$

Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $F(x, y) = (xy^2, xy)$ lungo la frontiera di D percorsa in senso antiorario.

Esercizio 5.22. Sia

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}$$

Calcolare il flusso uscente dalla frontiera di E del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{12}, \frac{y^3}{12}, \frac{(x^2 + y^2)z}{2} \right)$$

.

Esercizio 5.23. Nel piano xy , si consideri il dominio D compreso le rette di equazione $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3}{4}\pi$ e le curve di equazione $y = \sin x$ e $y = 2 \sin x$. Determinare il volume del solido ottenuto ruotando D attorno all'asse delle ordinate.

Esercizio 5.24. Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{x}{y} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq \log 3, \frac{1}{9} \leq y \leq e^{-2x}\}$.

Esercizio 5.25. Determinare il volume del solido

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{4} - \arctan(x^2 + y^2) \right\}$$

Capitolo 6

Equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 6.1. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'' - 5u' + 6u = e^{2t} \sin(3t) \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 6.2. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = tu + t \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

Esercizio 6.3. Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$u'' + 16u = \cos(4t)$$

Determinare inoltre l'unica soluzione tale che $u(\pi) = 3$ e $u'(\pi) = 0$.

Esercizio 6.4. Risolvere il problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + 2u' + 2u = -\frac{e^{-t}}{\cos(t)} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Suggerimento: adoperare il metodo di variazione delle costanti nella ricerca di un integrale particolare.

Esercizio 6.5. Risolvere il problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + u' - 12u = 2e^{-t} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{array} \right.$$

Esercizio 6.6. Risolvere il problema di Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u'' + 4u = 3t \\ u(\pi) = 1 \\ u'(\pi) = 0 \end{array} \right.$$