UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI NAPOLI

"Federico II"

Scuola Politecnica e delle Scienze di Base

Esercitazioni di Metodi Matematici per l'Ingegneria

Luigi Greco

Anno Accademico 2024-2025

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI

"R. Caccioppoli"

PIAZZALE TECCHIO - 80125 NAPOLI

Indice

Capitolo I. Numeri complessi 2

Capitolo II. Funzioni olomorfe 4

Capitolo III. Polinomi e funzioni razionali 8

Capitolo IV. $\mathcal{Z}$-Trasformazione 9

Capitolo V. Integrali con i residui 12

Capitolo VI. Trasformazione di Laplace 14

Capitolo VII. Serie e Trasformazione di Fourier 17

Capitolo VIII. Svolgimenti Numeri complessi 20

Capitolo IX. Svolgimenti Funzioni Olomorfe 24

Capitolo X. Svolgimenti Polinomi e funzioni razionali 34

Capitolo XI. Svolgimenti $\mathcal{Z}$-Trasformazione 37

Capitolo XII. Svolgimenti Integrali con i residui 47

Capitolo XIII. Svolgimenti Trasformazione di Laplace 67

Capitolo XIV. Svolgimenti Serie e Trasformazione di Fourier 83

CAPITOLO I

Numeri complessi

1) Calcolare: j^{125}, j^{-301}, $(7+j)(5-2j)$, $(2+j)^3$, $\dfrac{3-j}{7+3j}$.

2) Rappresentare geometricamente e porre in forma trigonometrica i seguenti numeri complessi: 2, -3, j, $-4j$, $1+j$, $-2+j\sqrt{12}$, $\sqrt{6}-j\sqrt{2}$, $-1/2-j/2$. Determinare l'argomento principale di ciascuno di essi.

3) Calcolare le radici quadrate di

a) $-2+j$	b) $2-3j$	c) $1+4j$	d) $-3-5j$
e) $5+j$	f) $-2-\sqrt{5}\,j$	g) $-\pi-j$	h) $-1-5\,j$

4) Calcolare: $\sqrt[4]{j}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[3]{-1-j}$, $\sqrt[4]{-1-j}$, $\sqrt{3+6j}$.

5) Provare che le radici n-sime di $\bar{z}$ sono coniugate a quelle di z.

6) Verificare che, per $m \in \mathbb{R}$ fissato, l'equazione $\operatorname{Im} z = m \operatorname{Re} z$ rappresenta una retta non verticale per l'origine.

7) Scrivere l'equazione della retta per due punti complessi z_1 e z_2 distinti.

8) Determinare e rappresentare sul piano gli insiemi di numeri complessi verificanti ciascuna delle seguenti relazioni:

a) $\lvert z+3\rvert > \lvert z+2-j\rvert$	b) $\lvert jz+3\rvert < \lvert\bar{z}+1\rvert$
c) $z^2 = \bar{z}^2$	d) $6z\bar{z} - 19\lvert z\rvert + 15 > 0$
e) $\operatorname{Re}(z^2) > 0$	f) $\arg(2z+1) \in \,]0, \pi/4[$
g) $\arg(\bar{z}+j) \in \,]\pi/2, \pi[$	

9) Dimostrare analiticamente la disuguaglianza triangolare

$$\big|\lvert z_1\rvert - \lvert z_2\rvert\big| \le \lvert z_1+z_2\rvert \le \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert\,, \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Discutere il caso dell'uguaglianza.

10) Dimostrare il teorema di Carnot: dette a, b e c le lunghezze dei lati di un triangolo e α l'ampiezza dell'angolo opposto al lato di lunghezza a, risulta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. (Per $\alpha = \pi/2$ il teorema si riduce a quello di Pitagora.)

11) Dimostrare la seguente *identità del parallelogramma* (interpretare geometricamente): $\forall z,\, w \in \mathbb{C}$, risulta

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)\,.$$

12) Sia $z = x + jy \in \mathbb{C}$, con $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Mostrare che una determinazione ϑ dell'argomento di z può essere ottenuta come segue

$$\vartheta = \begin{cases} \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } y > 0; \\[2ex] \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \pi\,, & \text{se } y < 0; \end{cases}$$

oppure

$$\vartheta = \begin{cases} \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & \text{se } x > 0; \\[2ex] \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \pi\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

13) Cosa c'è di sbagliato?

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1}\,\sqrt{-1} = j \cdot j = -1\,.$$

14) Siano $w_0, \dots, w_{n-1}$ le radici n-sime ($n > 1$) di $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Mostrare che, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $w_0^m, \dots, w_{n-1}^m$ sono radici n-sime di z^m. Mostrare inoltre che esse sono a due a due distinte se e solo se n e m sono primi tra loro.

15) Discutere la validità delle uguaglianze

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}\,, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\,n]{a}\,.$$

16) Siano $z, w \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} w \neq 0$. Mostrare con un esempio che, in generale, non vale l'uguaglianza

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Re} w}\,.$$

Provare che condizione sufficiente per la validità dell'uguaglianza è che $z/w \in \mathbb{R}$. Tale condizione è anche necessaria?

CAPITOLO II

Funzioni olomorfe

17) Calcolare le espressioni

a) $\cos j$ b) $\sin j$ c) $\operatorname{Log}(-1)$

d) $\operatorname{Log}(-1+j)$ e) $\log(\exp(z))$ f) $\operatorname{Log}(\exp(z))$

18) Osservare che $\operatorname{Log} z$ non è continua nei punti del semiasse reale negativo.

19) Mostrare che $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$ sono funzioni hermitiane. (Vedere anche l'esercizio 36.)

20) Mostrare che tutte e sole le determinazioni di $\log(zw)$ si ottengono sommando una determinazione di $\log z$ e una di $\log w$.

21) Mostrare che $\log \bar{z} = \overline{\log z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. È anche vero che $\operatorname{Log} \bar{z} = \overline{\operatorname{Log} z}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$? ($\overline{\log z}$ è l'insieme dei coniugati delle determinazioni di $\log z$.)

22) Risolvere in $\mathbb{C}$ le equazioni

a) $\mathrm{e}^z = j$ b) $|\,\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{|z|}$ c) $\sin z = j$

d) $\cos z = 5$

23) Scrivere in forma algebrica il numero complesso $\exp(\pi + 15j)$. Indicare modulo e argomento principale. Rappresentare sul piano complesso.

24) Descrivere l'immagine mediante la funzione esponenziale della retta di equazione $\operatorname{Im} z = m \operatorname{Re} z$, con $m \in \mathbb{R}$ fissato. (Cfr. esercizio 6.)

25) Dove è l'errore: per ogni risuklta $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{jz} = \cos z + j \sin z$ e quindi $|\,\mathrm{e}^{jz}| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1$?

26) Per quali $z \in \mathbb{C}$, $\cos z$ e $\sin z$ sono simultaneamente reali?

27) Calcolare

$$\lim_{z \to 0} \left(8\, \frac{\sin z}{z^3} - \frac{3 + 5 \cos z}{z^2} \right)$$

usando gli sviluppi di Mac Laurin di $\sin z$ e $\cos z$.

28) Scrivere gli sviluppi di Taylor delle seguenti funzioni nei punti indicati, specificando la regione in cui questi sussistono:

a) $\dfrac{1+z}{1-z}\,;\ z_0 = 0$ b) $\sin z\,;\ z_0 = \pi$ c) $\mathrm{e}^z\,;\ z_0 = 1$

d) $z\,\mathrm{e}^z\,;\ z_0 = 1$

29) Scrivere gli sviluppi di Laurent delle seguenti funzioni nei punti indicati, specificando la regione di convergenza:

a) $\dfrac{1}{1-z}\,;\ z_0 = 0\,,\ z_0 = 1$ b) $\dfrac{\exp(z^2)}{z^3}\,;\ z_0 = 0$ c) $\dfrac{1}{z^2 - 3\,z + 2}\,;\ z_0 = 0$

30) Studiare gli zeri e le singolarità isolate delle seguenti funzioni (anche eventualmente nel punto ∞):

a) $\dfrac{\sin z}{1-\cos z}$ b) $\dfrac{z\,\sin z}{1-\cos z}$ c) $\dfrac{\mathrm{e}^{2jz}-1}{2\,z^2 + \pi\,z - \pi^2}$

d) $\dfrac{\cos\pi\,z}{2\,z^2 + z - 6}$ e) $\dfrac{\cos\pi\,z - 1}{z^2 - 7\,z + 6}$ f) $\dfrac{z}{\mathrm{e}^{j\pi z^2} - 1}$

31) Calcolare i residui delle seguenti funzioni nei punti indicati:

a) $\dfrac{1}{z}\,;\ z_0 = 0\,,\ z_1 = \infty$ b) $\dfrac{1}{z^2}\,;\ z_0 = 0$

c) $\dfrac{1}{z^2+1}\,;\ z_0 = j$ d) $\dfrac{z^2+1}{(z^2-3z+2)\,\cos z}\,;\ z_0 = \dfrac{\pi}{2}\,,\ z_1 = 1\,,\ z_2 = 2$

e) $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}\,;\ z_0 = j$ f) $\dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z\,\sin z}\,;\ z_0 = 0$

g) $\dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^2\,\sin z}\,;\ z_0 = 0$ h) $z^2(z-1)\sin\dfrac{1}{z-1}\,;\ z_0 = 1$

32) Sia f una funzione olomorfa in una corona circolare di centro 0 e sia $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n\,z^n$ la sua serie di Laurent nella corona. Mostrare che, se f è una funzione dispari (cioè $f(-z) = -f(z)$, $\forall z$), risulta $c_n = 0$ per n pari, e se f è pari ($f(-z) = f(z)$, $\forall z$), risulta $c_n = 0$ per n dispari. Più in generale, se $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z-z_0)^n$ è lo sviluppo di Laurent di f in una corona circolare di centro z_0 e $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n\,(z+z_0)^n$ è lo sviluppo nella corona simmetrica rispetto all'origine, di centro $-z_0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ risulta $d_n = c_n\,(-1)^n$ se f è pari, e $d_n = c_n\,(-1)^{n+1}$ se f è dispari; in particolare, se $\mp z_0$ sono singolarità isolate, è $R[-z_0] = -R[z_0]$ se f è pari, $R[-z_0] = R[z_0]$ se f è dispari.

33) Sia f una funzione olomorfa in un aperto Ω simmetrico rispetto all'asse reale, in modo che valga l'implicazione $z \in \Omega \Rightarrow \bar{z} \in \Omega$. Supponiamo che f sia hermitiana, cioè risulti $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, $\forall z \in \Omega$. Supponiamo inoltre che, fissati $z_0 \in \mathbb{C}$ e r e ρ numeri reali tali che $0 \le r < \rho$, Ω contenga le corone circolari descritte dalle limitazioni $r < |z - z_0| < \rho$ e $r < |z - \overline{z_0}| < \rho$. Mostrare che i coefficienti dello sviluppo di Laurent di f nella prima corona sono coniugati ai corrispondenti coefficienti dello sviluppo di Laurent di f nella seconda corona. In particolare, (se si può scegliere $r = 0$) risulta $R[\overline{z_0}] = \overline{R[z_0]}$.

34) Determinare le singolarità e calcolare i residui della funzione
$$\frac{z}{z^4 - 625}\,.$$
Osservare che i residui sono legati dalle proprietà messe in luce negli Ex. 32 e Ex. 33; inoltre basta conoscerne uno, per calcolare tutti gli altri.

35) Sia f olomorfa in una corona circolare di centro 0 (eventualmente un cerchio, o un intorno di ∞), verificante
$$f(\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}j}z) = f(z)\,, \qquad \forall z\,, \tag{1}$$
dove $n \in \mathbb{N}$ è fissato. Mostrare che esiste g olomorfa tale che
$$f(z) = g(z^n)\,, \qquad \forall z\,.$$
In particolare, se $n = 2$, la (1) significa che f è pari; la tesi è che essa è in realtà funzione di z^2. (Cfr. Ex. 32.)

36) Sia f olomorfa in un aperto Ω.
- Mostrare che $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ è olomorfa in $\Omega^* = \{z : \bar{z} \in \Omega\}$.
- Sia $\Omega = \Omega^*$ connesso. Mostrare che Ω interseca l'asse reale e che f è hermitiana se e solo se assume valori reali nei punti di Ω sull'asse reale.

37) Mostrare che $-\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z} = -\operatorname{Log}(1-1/z)$ in $|z| > 1$ è olomorfa e vale il seguente sviluppo di Laurent intorno all'∞:
$$-\operatorname{Log}\frac{z-1}{z} = -\operatorname{Log}(1-1/z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2\,z^2} + \cdots + \frac{1}{n\,z^n} + \cdots\,.$$

38) Considerando la funzione $f(t) = \mathrm{e}^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, osservare che per le funzioni complesse non vale il teorema di Rolle (o Lagrange). Mostrare la seguente versione: se f è continua in $[a, b]$ e derivabile nei punti interni, risulta
$$|f(b) - f(a)| \le (b-a) \sup_{(a,b)} |f'|\,.$$

39) Considerando la funzione $f(t) = \mathrm{e}^{jt}$, $t \in [0, 2\pi]$, osservare che per le funzioni complesse non vale il teorema della media integrale; risulta $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ e quindi non esiste alcun punto in cui f assume valore uguale alla media integrale.

40) Sia u una funzione reale di classe C^2 in un aperto di $\mathbb{R}^2$. Mostrare l'equivalenza
$$u \text{ armonica} \iff f = u_x - ju_y \text{ olomorfa.}$$

41) Siano $\zeta = \xi + j\eta = f(z) = f(x, y)$ una funzione olomorfa in un aperto Ω di $\mathbb{C}$ e $u = u(\xi, \eta) = u(\zeta)$ una funzione di classe C^2 in un aperto che contiene $f(\Omega)$. Mostrare la seguente uguaglianza per la funzione composta $v(x, y) = v(z) = u(f(z))$:
$$\Delta v(z) = \Delta u(f(z))\,|f'(z)|^2\,.$$
In particolare, v risulta armonica se tale è u.

42) Mostrare che la funzione $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{z\,(1-z^2)}$ ha nei punti 0, ∓ 1 singolarità eliminabili. Calcolare la derivata del prolungamento in tali punti.

43) Due primitive di una stessa funzione in un aperto connesso differiscono per una costante.

44) Sia f olomorfa intorno a $z_0 \in \mathbb{C}$, escluso z_0. Mostrare che $R_{f'}[z_0] = 0$. Inoltre, mostrare che f è dotata di primitiva nell'intorno bucato se e solo se $R_f[z_0] = 0$. Calcolare

$$R\left[0\,,\,\frac{\sin z}{(1-\cos z)^2}\right], \qquad R\left[0\,,\,\frac{z}{(1-\cos z)^2}\right].$$

CAPITOLO III

Polinomi e funzioni razionali

45) Decomporre in fratti semplici le seguenti funzioni razionali:

a) $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)(x-2)}$ b) $\dfrac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

d) $\dfrac{1}{1+x^3}$ e) $\dfrac{1}{t^3+t-2}$ f) $\dfrac{1}{1+x^4}$

g) $\dfrac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}$ h) $\dfrac{1}{(x+1)^2(x^3-1)}$ i) $\dfrac{1}{p^2(p+1)(p-2)}$

j) $\dfrac{1}{s\,(s^2+1)^2}$ k) $\dfrac{1}{s\,(s^2+\omega^2)^2}$ $(\omega\neq 0)$ l) $\dfrac{1}{(s-7)\,(s^2+25)^2}$

46) Decomporre mediante la formula di Hermite le seguenti funzioni razionali:

a) $\dfrac{x^3}{(1+x^2)^2}$ b) $\dfrac{1}{(x+1)(x^2+4)^2}$

47) Sia $Q(z)=a_0+a_1\,z+\cdots+a_N\,z^N$ un polinomio di grado positivo e siano $z_1,\ldots,z_N$ gli zeri (non necessariamente a due a due distinti). Mostrare che

$$z_1+\cdots+z_N=-\frac{a_{N-1}}{a_N}\,,\qquad z_1\cdots z_N=(-1)^N\,\frac{a_0}{a_N}\,.$$

In particolare, la somma delle radici N-sime $(N>1)$ di un assegnato numero complesso è nulla.

CAPITOLO IV

$\mathcal{Z}$-Trasformazione

48) Calcolare la $\mathcal{Z}_u$-trasformata delle seguenti espressioni:

a) $\dfrac{n^2+3n}{(n+2)!}$

49) $\mathcal{Z}$-antitrasformare le seguenti espressioni:

a) $\dfrac{(z-1)^2(z+1)}{z^3-8}$

b) $\dfrac{1}{(z+\alpha)^2+\beta^2}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$

c) $\dfrac{1}{z^2+z+1}$

d) $\dfrac{1}{(z^2+z+1)^2}$

e) $\dfrac{z}{(z^2+z+1)^2}$

f) $\dfrac{z+1}{(z^2+z+1)^2}$

g) $\dfrac{z^2}{(z^2-2z+2)^2}$

h) $\dfrac{z^2-1}{(z^2-2z+2)^2}$

i) $\dfrac{z\,(z-1)}{(z^2+2z+4)^2}$

j) $\dfrac{2z^2+z}{(z^2-1)(z^2+1)}$

k) $\dfrac{1}{z^3+1}$

50) Usando la $\mathcal{Z}$-trasformazione, risolvere i seguenti problemi a valori iniziali per equazioni ricorrenti:

a) $\begin{cases} y(n+2)+y(n+1)+y(n)=3\cos^4\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(0)=2\,,\ y(1)=-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2y(n+2)+3y(n+1)-2y(n)=2^{n-1} \\ y(0)=1\,,\ y(1)=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y(n+2)-2y(n+1)+4y(n)=2^{n-1}\cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right) \\ y(0)=0\,,\ y(1)=1 \end{cases}$

d) $$\begin{cases} y(n+2) - 6y(n+1) + 18y(n) = \left(3\sqrt{2}\right)^{n+1} \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right) \\ y(0) = 1\,,\ y(1) = 0 \end{cases}$$

e) $$\begin{cases} y(n+2) - y(n+1) + y(n) = (-1)^n\, a(n) \\ \quad a(n) \text{ periodica di p. 3,} \\ \quad a(0) = 1,\, a(1) = 0,\, a(2) = -1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

f) $$\begin{cases} 4\,y(n+2) - y(n) = 2^{-n}\left(\cos n\dfrac{\pi}{2} + \sin n\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(0) = 0\,,\ y(1) = 1/2 \end{cases}$$

g) $$\begin{cases} y(n+2) + 4\,y(n) = 2^n \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

h) $$\begin{cases} y(n+2) - y(n+1) + y(n) = \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

i) $$\begin{cases} y(n+2) + y(n+1) + y(n) = \cos\left(n\,\dfrac{2}{3}\,\pi\right) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

j) $$\begin{cases} 2\,y(n+2) + 7\,y(n+1) + 3\,y(n) = a(n) \\ \quad a(n) \text{ periodica di p. 3,} \\ \quad a(0) = 1,\, a(1) = 2,\, a(2) = -3 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

k) $$\begin{cases} y(n+2) + 2\,y(n+1) + 4\,y(n) = a(n) \\ \quad a(n) \text{ periodica di p. 3,} \\ \quad a(0) = 1,\, a(1) = 2,\, a(2) = 4 \\ y(0) = 0\,,\ y(1) = \sqrt{3} \end{cases}$$

l) $$\begin{cases} y(n+2) + y(n) = a(n) \\ \quad a(n) \text{ vale 2 per } n \text{ pari} \\ \quad \text{e 1 per } n \text{ dispari} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

51) Ricavare la formula per la trasformata di una successione periodica, risolvendo (formalmente) l'equazione ricorrente $y(n+k) - y(n) = 0$, dove k è il periodo.

52) Mostrare che $\mathcal{Z}[1/n\,u(n-1)] = -\operatorname{Log}\dfrac{z-1}{z} = -\operatorname{Log}(1-1/z)$, con dominio $|z| > 1$.

53) Risolvere

$$\begin{cases} y(n+2) = y(n+1) + y(n) \\ y(0) = 0\,,\ y(1) = 1 \end{cases}$$

La soluzione $y(n)$ è la successione di Fibonacci.

54) È noto che

$$\mathcal{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1}\,, \qquad \mathcal{Z}[u(-n-1)] = -\frac{z}{z-1}\,.$$

Possiamo dedurre sommando $\mathcal{Z}[1] = 0$?

55) Posto $f(z) = \mathcal{Z}_u[a(n)]$, mostrare che, per $k \in \mathbb{N}$, risulta $\mathcal{Z}_u^{-1}[f(z^k)] = b(n)$, con

$$b(n) = \begin{cases} a(n/k)\,, & \text{se } n \text{ è divisibile per } k, \\ 0\,, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

56) Mostrare che, se $a(n)$ è periodica di periodo $k \in \mathbb{N}$ e $b(n)$ è periodica di periodo $h \in \mathbb{N}$, $a(n) + b(n)$ e $a(n) \cdot b(n)$ sono periodiche di periodo kh.

CAPITOLO V

Integrali con i residui

57) Usando i teoremi dei residui, calcolare gli integrali:

a) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{2z+1}{z^2-z}\,dz$ b) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z\,(z-2)^2}\,dz$ c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \operatorname{tg} z\,dz$

d) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{1-\cos z}\,dz$ e) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\exp(z^2)-1}{z^3}\,dz$ f) $\displaystyle\int_{|z|=10} \frac{z\,\sin z}{1-\cos z}\,dz$

58) Per gli integrali del tipo $\int_0^{2\pi}\mathscr{R}(\sin x)\,dx$ e $\int_0^{2\pi}\mathscr{R}(\cos x)\,dx$, con $\mathscr{R}$ funzione razionale, può convenire decomporre $\mathscr{R}$ in fratti semplici. Ad esempio, se i poli w_k di $\mathscr{R}(w)$ sono tutti reali semplici e in valore assoluto maggiori di 1, mostrare la formula

$$\int_0^{2\pi}\mathscr{R}(\sin x)\,dx = -2\pi\sum_k R[w_k]\,\frac{\operatorname{sgn} w_k}{\sqrt{w_k^2-1}}\,,$$

i residui essendo relativi a $\mathscr{R}$. Valutare

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{12\sin^2 x-35\sin x+25}\,.$$

59) Calcolare mediante la teoria dei residui i seguenti integrali (specificando il tipo di convergenza):

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2-3\pi x+2\pi^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi x}{2x^2+x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x+\cos x}{(4x+\pi)\,(x^2+\pi^2)}\,dx$ d) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(5+4\cos x)^2}$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+\cos x}{x^4+4}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2+\cos x}{1+x^4}\,dx$

g) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2+\cos\pi x}{x^4-1}\,dx$ h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x^2-x\sin\pi x}{16x^4-1}\,dx$

i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+e^{-i\pi x}}{1-x^4}\,dx$ j) v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^3}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\sin\pi\,x}{x^3-1}\,dx$ l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\sin\frac{\pi}{2}x}{x^3-1}\,dx$

m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^4+x^2}\,dx$ n) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\pi\,x}{8\,x^3-1}\,dx$

o) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3}{4}\,\pi$ p) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}\sin 2x}{1+x^2}\,dx$

q) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{1+\sin x\,\cos x}{1+\cos^2 x}\,dx$ r) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x + x\sin x}{x^4+x^2}\,dx$

s) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x\,(1+x^2)^2}\,dx$ t) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{4\sin^2 x+\,\mathrm{e}^{2ix}}{2+\cos x}\,dx$

u) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-\,\mathrm{e}^{2ix}}\,dx$ v) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\pi\,x}{(2x+5)\,(x^2+2x+2)}\,dx$

w) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\,x}{(x+3)\,(x^2+6\,x+10)}\,dx$ x) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos\pi x}{(x-1)^2\,(x^2+1)}\,dx$

y) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\sin\pi\,x}{(2\,x-3)^2\,(x^2+1)}\,dx$ z) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4-6\,x^2+25}\,dx$

a_1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4-16\,x^2+100}\,dx$ b_1) $\displaystyle\int_{0}^{2\,\pi} \frac{\sin x+\cos x}{(5-4\sin x)^2}\,dx$

c_1) $\displaystyle\int_{0}^{2\,\pi} \frac{1+\cos x}{1+3\sin^2 x}\,dx$ d_1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\pi\,x}{x\,(x^4-10\,x^2+169)}\,dx$

e_1) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{(5-3\,\cos x)\,(5-4\,\cos x)}$ f_1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\pi x}{x^3+8}\,dx$

g_1) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1+\sin x}{4+21\cos^2 x}\,dx$

60) Mostrare che $F(w)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+w)^2}\,dx$ è costante.

CAPITOLO VI

Trasformazione di Laplace

61) Calcolare

a) $\mathscr{L}_u^{-1}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi s}}{(s-3)^2+4}\right]$

b) $\mathscr{L}_u^{-1}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi(s-3)}}{(s-3)^2+4}\right]$

c) $\mathscr{L}_u^{-1}\left[\dfrac{s}{(s^2+4)^2(s^2+16)}\right]$

62) Usando la trasformazione di Laplace, risolvere i seguenti problemi di Cauchy in $[0,+\infty[$:

a) $\begin{cases} y''-2\,y'+2\,y=\mathrm{e}^{t}\,\sin t \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y''-6\,y'+13\,y=4\,\mathrm{e}^{3\,t}\,u(t-5) \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y''-10\,y'+21\,y=\mathrm{e}^{7\,t}-\mathrm{e}^{3\,t} \\ y(0)=0\,,\ y'(0)=4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y''-14\,y'+65\,y=16\,t\,\mathrm{e}^{7\,t} \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y''-2\,y'+y=2\,(\sin t+t\,\cos t) \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y''-\dfrac{5}{\sqrt{3}}\,y'+2\,y=\dfrac{7}{\sqrt{3}}\,u\Big(t-\dfrac{\pi}{3}\Big)\,\sin 2\,t \\ y(0)=5\,,\ y'(0)=\sqrt{3} \end{cases}$

g) $\begin{cases} y''+2\,y'+5\,y=\mathrm{e}^{-t}\,\sin 2\,t \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=-1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 4\,y''-4\,y'+5\,y=4\,\mathrm{e}^{t/2}\,\sin t \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=1/2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 4\,y''+12\,y'+13\,y=4\,\mathrm{e}^{-3\,t/2}\,\cos t \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=-1/2 \end{cases}$

j) $\begin{cases} y''-6\,y'+25\,y=\mathrm{e}^{3\,t}\,\cos 4\,t \\ y(0)=2\,,\ y'(0)=6 \end{cases}$

k) $\begin{cases} y''+10\,y'+74\,y=\mathrm{e}^{-5\,t}\,\cos 7\,t \\ y(0)=2\,,\ y'(0)=4 \end{cases}$

l) $\begin{cases} y''-y'-2\,y=18\,\mathrm{e}^{2\,t}\cos 3\,t \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=2 \end{cases}$

m) $\begin{cases} y''-6\,y'+5\,y=\mathrm{e}^{t}\,u(t-1) \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2\,y''+5\,y'+2\,y=t\,u(t-2) \\ y(0)=1\,,\ y'(0)=-2 \end{cases}$

o) $\begin{cases} y''-6\,y'+34\,y=\mathrm{e}^{3\,t}\sin 5\,t \\ y(0)=y'(0)=1 \end{cases}$

p) $\begin{cases} 4\,y'' - 32\,y' + 73\,y = 4\,\mathrm{e}^{4\,t} \sin \dfrac{3}{2}\,t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 4 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2\,y'' - 20\,y' + 51\,y = 2\,\mathrm{e}^{5\,t} \sin \dfrac{t}{\sqrt{2}} \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 5 \end{cases}$

r) $\begin{cases} 5\,y'' - 10\,y' + 9\,y = 8\,\mathrm{e}^{t} \sin \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 16\,y'' + 16\,y' - 5\,y = t\,\mathrm{e}^{-t/2} \cos \dfrac{3}{4}\,t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

t) $\begin{cases} y'' - 10\,y' - 24\,y = 98\,t\,\mathrm{e}^{5\,t} \cos 7\,t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -2 \end{cases}$

u) $\begin{cases} y'' - 3\,y' + 2\,y = 10\,\mathrm{e}^{2\,t} \cos 3\,t \\ y(0) = 2\,,\ y'(0) = 3 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 4\,y'' + 8\,y' - 5\,y = 25\,\mathrm{e}^{t/2} \cos 4\,t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

w) $\begin{cases} y'' + 4\,y' + 4\,y = 27\,t\,\mathrm{e}^{t} \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -2 \end{cases}$

x) $\begin{cases} y'' + 3\,y' + 2\,y = 4\,t\,u(t-1) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -1 \end{cases}$

y) $\begin{cases} y'' - 6\,y' + 45\,y = \mathrm{e}^{3\,t} \sin 6\,t\,u(t-\pi) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 9 \end{cases}$

z) $\begin{cases} y'' - 8\,y' + 25\,y = \mathrm{e}^{4\,t} \sin 3\,t\,u\Big(t - \dfrac{\pi}{3}\Big) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 7 \end{cases}$

a_1) $\begin{cases} y'' - 8\,y' + 52\,y = \mathrm{e}^{4\,t} \sin 6\,t\,u\Big(t - \dfrac{\pi}{2}\Big) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 10 \end{cases}$

b_1) $\begin{cases} y'' + 4\,y' + 53\,y = \mathrm{e}^{-2\,t} \sin 7\,t\,u(t-\pi) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 5 \end{cases}$

c_1) $\begin{cases} y'' - 10\,y' + 21\,y = \mathrm{e}^{3\,t} \cos 4\,t \\ y(0) = 2\,,\ y'(0) = 10 \end{cases}$

d_1) $\begin{cases} y'' - 5\,y' + 6\,y = \mathrm{e}^{2\,t} \cos 5\,t \\ y(0) = 2\,,\ y'(0) = 5 \end{cases}$

e_1) $\begin{cases} y'' - 14\,y' + 49\,y = \mathrm{e}^{7\,t} \sin 3\,t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

f_1) $\begin{cases} y'' - 10\,y' + 25\,y = \mathrm{e}^{5\,t} \sin 6\,t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 2 \end{cases}$

g_1) $\begin{cases} 12\,y'' - 35\,y' + 25\,y = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\,t}(12 \cos 5\,t + \sin 5\,t) \\ y(0) = 3\,,\ y'(0) = \dfrac{15}{4} \end{cases}$

h_1) $\begin{cases} 6\,y'' - 17\,y' + 12\,y = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}\,t} \left(3 \cos \dfrac{t}{2} + \sin \dfrac{t}{2}\right) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \dfrac{4}{3} \end{cases}$

i_1) $\begin{cases} y'' - 5\,y' + 6\,y = \mathrm{e}^{3\,t} \sin t\,u\Big(t - \dfrac{\pi}{4}\Big) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

j_1) $\begin{cases} y'' + y = t \sin t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

k_1) $\begin{cases} 12\,y'' - 31\,y' + 20\,y = \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\,t} \left(2 \cos \dfrac{t}{6} + \sin \dfrac{t}{6}\right) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \dfrac{5}{4} \end{cases}$

l$_1$) $\begin{cases} 6\,y'' - 19\,y' + 15\,y = \mathrm{e}^{\frac{5}{3}\,t}\left(\cos\dfrac{t}{3} + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{3}\right) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

m$_1$) $\begin{cases} 9\,y'' - 18\,y' + 10\,y = 9\ \mathrm{e}^{t}\,\cos\dfrac{t}{3} \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 4/3 \end{cases}$

n$_1$) $\begin{cases} y'' - 2\,y' + y = \mathrm{e}^{t}\,\big[u(t) - u(t-1)\big] \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

o$_1$) $\begin{cases} y'' + 2\,y = u(t-\pi)\,\sin 2\,t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = \sqrt{2} \end{cases}$

p$_1$) $\begin{cases} y'' - 3\,y' + 2\,y = 10\,u\Big(t - \dfrac{\pi}{2}\Big)\cos t \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

q$_1$) $\begin{cases} 2\,y'' - 2\,y' + y = t\,(\mathrm{e}^{t} + 1) \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1/2 \end{cases}$

r$_1$) $\begin{cases} y''' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

s$_1$) $\begin{cases} y''' + 8\,y = 1 \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -2\,,\ y''(0) = 4 \end{cases}$

t$_1$) $\begin{cases} y'' + 25\,y = t\sin 5t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = -5 \end{cases}$

u$_1$) $\begin{cases} y''' - y = \mathrm{e}^{t} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 1 \end{cases}$

v$_1$) $\begin{cases} y'' - 6\,y' + 9\,y = \cos 3t \\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 3 \end{cases}$

CAPITOLO VII

Serie e Trasformazione di Fourier

63) Calcolare

a) $\mathscr{F}\left[\dfrac{\sin \pi t}{t^2-1}\right]$ b) $\mathscr{F}\left[\dfrac{\cos \frac{\pi}{2} t}{t^2-1}\right]$

64) Calcolare la trasformata di Fourier del prolungamento periodico (o della replica periodica), con periodo specificato, di ciascuna delle seguenti funzioni (disegnare il diagramma del prolungamento periodico); per ciascuna di esse, scrivere serie esponenziale e serie trigonometrica di Fourier.

a) $x_0(t) = \big[u(t) - u(t-\pi)\big]\, \sin t$
periodo $2\,\pi$

b) $x_0(t) = \big[u(t) - u(t-\pi)\big]\, \sin t$
periodo π

c) $x_0(t) = \big[u(t+\pi/2) - u(t-\pi/2)\big]\, \sin t$
periodo π

d) $x_0(t) = \big[u(t) - u(t+\pi)\big]\, \sin t$
periodo $2\,\pi$

e) $x_0(t) = \big[u\big(t+\pi/2\big) - u\big(t-\pi/2\big)\big]\, \cos t$
periodo $2\,\pi$

f) $x(t) = \begin{cases} 1\,, & \text{per } t \in (-1\,,\,0); \\ \mathrm{e}^t\,, & \text{per } t \in (0\,,\,1). \end{cases}$
periodo 2

g) $x(t) = \begin{cases} 2^t\,, & \text{per } -1 < t < 0; \\ \cos\frac{\pi}{3}\, t\,, & \text{per } 0 < t < 1. \end{cases}$
periodo 2

h) $x(t) = \begin{cases} t^2 + 3\,t\,, & \text{per } -3 < t < 0; \\ 3\,t - 3\,t^2\,, & \text{per } 0 < t < 1. \end{cases}$
periodo 4

i) $x_0(t) = \mathrm{e}^{-|t|}\, \big[u(t+1) - u(t-1)\big]$
periodo 2

j) $x(t) = \begin{cases} t^2 - 2\,|t|\,, & \text{per } 1 < |t| < 2; \\ \cos \pi\, t\,, & \text{per } |t| < 1. \end{cases}$
periodo 4

k) $x_0(t) = t\, \cos t\, \big[u(t+\pi/2) - u(t-\pi/2)\big]$
periodo π

l) $x(t) = \begin{cases} t\,(1-\mathrm{e}^t)\,, & \text{per } 0 < t < 1; \\ t^2\,, & \text{per } -1 < t < 0. \end{cases}$
periodo 2

m) $x(t) = \begin{cases} 1\,, & |t| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\sin t|\,, & \dfrac{\pi}{2} < |t| < \pi \end{cases}$
periodo $2\,\pi$

n) $x(t) = \begin{cases} -\cos t\,, & |t| < \dfrac{\pi}{2} \\ |t| - \frac{\pi}{2}\,, & \dfrac{\pi}{2} < |t| < \pi \end{cases}$
periodo $2\,\pi$

o) $x(t) = 2\,|t| - t\,, \qquad -1 \le t < 3$
periodo 4

p) $x(t) = |t^2 - 1|\,, \qquad -2 < t < 2$
periodo 4

q) $x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t & , -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & , \frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{2}\,\pi \end{cases}$
periodo $2\,\pi$

r) $x(t) = \begin{cases} t^2 & , 0 < t < 1 \\ 2 - t & , 1 < t < 2 \end{cases}$
periodo 2

s) $x(t) = \begin{cases} t + 1 & , -1 < t < 0 \\ -t & , 0 < t < 1 \end{cases}$
periodo 2

t) $x(t) = (1 - t)\,(\mathrm{e}^t - 1)\,, \quad 0 < t < 1$
periodo 1

u) $x(t) = \begin{cases} t & , 0 < t < 1 \\ 1 & , 1 < t < 2 \\ 3 - t & , 2 < t < 3 \end{cases}$
periodo 3

v) $x(t) = \begin{cases} \cos t & , -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}\,t & , 0 < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
periodo π

w) $x(t) = \begin{cases} t^2 & , 0 < t < 1 \\ 1 & , 1 < t < 2 \end{cases}$
periodo 2

x) $x(t) = \begin{cases} t & , 0 < t < 1 \\ \sin \frac{\pi}{2}\,t & , 1 < t < 2 \end{cases}$
periodo 2

y) $x_0(t) = t^2\big[u(t+1) - u(t-1)\big]$
periodo 4

z) $x(t) = \begin{cases} -t & , -1 < t < 0 \\ 2\,t - t^2 & , 0 < t < 1 \end{cases}$
periodo 2

a_1) $x(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}\,t & , -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ \sin t & , 0 < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
periodo π

b_1) $x(t) = \mathrm{e}^t \cos t\,, \quad -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$
periodo π

c_1) $x_0(t) = (1 + \cos t)\,\big[u(t+\pi) - u(t-\pi)\big]$
periodo $3\,\pi$

d_1) $x(t) = \begin{cases} 0 & , -\frac{\pi}{2} < t < 0 \\ t\,\cos t & , 0 < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
periodo π

e_1) $\begin{aligned} x_0(t) = (1 + \sin t)&\big[u(t + \pi/2) - u(t)\big] \\ + \cos t&\,\big[u(t) - u(t - \pi/2)\big] \end{aligned}$
periodo $2\,\pi$

f_1) $x_0(t) = \mathrm{e}^{-|t|}(1 + |t|)\,, \ \forall t \in \mathbb{R}$
periodo 2π

g_1) $x(t) = t - t^3\,, \ t \in (-1, 1)$
periodo 2

h_1) $x(t) = (\pi^2 - t^2)\cos t\,, \ t \in (-\pi, \pi)$
periodo 2π

i_1) $x(t) = (\operatorname{sgn} t)\sin^2 t\,, \ t \in (-\pi, \pi)$
periodo 2π

j_1) $x(t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{t^2}{\pi} & , |t| < \dfrac{\pi}{2}, \\ \cos t & , \dfrac{\pi}{2} < |t| < \pi \end{cases}$
periodo 2π

k$_1$) $x(t) = \begin{cases} \cos 3\,t & , -\dfrac{\pi}{2} < t < 0, \\ \cos t & , 0 < t < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$
periodo π

l$_1$) $x_0(t) = \mathrm{e}^t \sin t \, [u(t) - u(t-\pi)]$
periodo π

m$_1$) $x(t) = \begin{cases} t^2 - t & , 0 < t < 1, \\ 3\,t - t^2 - 2 & , 1 < t < 2 \end{cases}$
periodo 2

n$_1$) $x(t) = t\,(1 + \cos t)\,, \;\; t \in (-\pi, \pi)$
periodo 2π

65) Calcolare $\mathscr{F}[\sin t \sin 3t]$.

CAPITOLO VIII

Svolgimenti Numeri complessi

Ex. 3a Le due radici quadrate sono opposte. Chiaramente $|-2+j| = \sqrt{5}$. Se $\vartheta = \arg(-2+j)$ è una determinazione dell'argomento, abbiamo $\cos\vartheta = -2/\sqrt{5}$, $\sin\vartheta = 1/\sqrt{5}$ e $\sqrt{-2+j} = \pm\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + j\sin\frac{\vartheta}{2}\right)$. Dobbiamo quindi calcolare $\cos\frac{\vartheta}{2}$ e $\sin\frac{\vartheta}{2}$. Le formule di bisezione danno $\cos\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-2/\sqrt{5}}{2}}$ e $\sin\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+2/\sqrt{5}}{2}}$. Dai valori di $\cos\vartheta$ e $\sin\vartheta$ vediamo che esiste una determinazione ϑ tale che $\pi/2 < \vartheta < \pi$ (l'immagine di $-2+j$ appartiene al II quadrante), quindi $0 < \vartheta/2 < \pi/2$ e $\cos\frac{\vartheta}{2}$ e $\sin\frac{\vartheta}{2}$ sono positivi. In definitiva

$$\sqrt{-2+j} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2}} + j\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{2}}\right).$$

Ex. 3d Il procedimento è analogo a quello seguito nell'Ex. 3a. Osserviamo però che questa volta l'immagine di $-3-5j$ cade nel III quadrante, quindi esiste una determinazione dell'argomento ϑ compresa tra π e $3\pi/2$ e quindi tale che $\pi/2 < \vartheta/2 < \pi$. Dunque $\cos\frac{\vartheta}{2} < 0$ e $\sin\frac{\vartheta}{2} > 0$. Infine abbiamo

$$\sqrt{-3-5j} = \pm\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{34}-3}{2}} + j\sqrt{\frac{\sqrt{34}+3}{2}}\right).$$

Ex. 5 L'affermazione è ovvia per $z \in \mathbb{R}$, poiché $\overline{z} = z$. Per z non reale, dette $w_0, \dots, w_{n-1}$ le radici n-sime, a due a due distinte, di z, è chiaro che

$$\overline{w}_0, \dots, \overline{w}_{n-1}$$

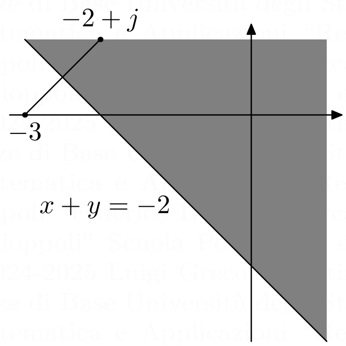
sono radici n-sime di $\overline{z}$, poiché il passaggio al coniugato commuta con le operazioni razionali:

$$(\overline{w}_k)^n = \overline{w_k^n} = \overline{z}\,.$$

Essendo poi a due a due distinte, esse forniscono le n radici n-sime di $\overline{z}$.

Ex. 6 Scrivendo $z = x + jy$ in forma algebrica, l'equazione diventa $y = mx$ e la conclusione è ovvia.

Ex. 8a Poiché il modulo è non-negativo, elevando al quadrato (e lasciando inalterato il verso della disuguaglianza) otteniamo una relazione equivalente. Rappresentando $z = x+iy$ in forma algebrica, tale relazione si scrive $(x+3)^2 + y^2 > (x+2)^2 + (y-1)^2$, ovvero $x+y > -2$. Geometricamente, l'insieme delle soluzioni è il semipiano superiore dei due in cui il piano è diviso dalla retta di equazione $x+y = -2$. Il risultato si ottiene facilmente con un ragionamento di natura interamente geometrica, ricordando che il modulo ha significato di distanza. In effetti, $|z+3|$ rappresenta la distanza di z dal punto -3, mentre $|z+2-i|$ è la distanza dal punto $-2+i$; il luogo dei punti equidistanti dai due è l'asse del segmento che li ha per estremi, ovvero, la perpendicolare a tale segmento nel punto medio. È chiaro che il semipiano dei due in cui il piano è diviso dall'asse, contenente $-2+i$ è formato dai punti per i quali la distanza da questo è minore della distanza da -3, dunque costituisce l'insieme delle soluzioni.

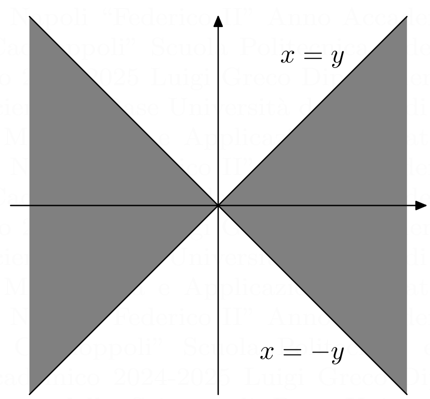


Ex. 8b Risulta

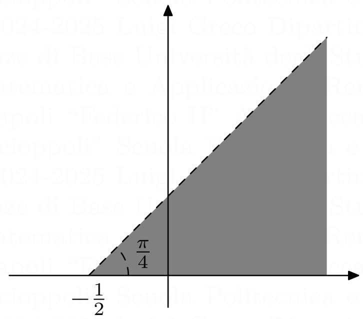
$$|jz+3| = |j(z-3j)| = |z-3j|\,, \qquad |\overline{z}+1| = |\overline{z+1}| = |z+1|\,,$$

quindi la relazione si riscrive $|z-3j| < |z+1|$ e si può ragionare come per l'esercizio 8a.

Ex. 8e Rappresentando $z = x+iy$ in forma algebrica, troviamo $\operatorname{Re} z^2 = x^2 - y^2$, quindi $\operatorname{Re} z^2 > 0$ equivale a $|x| > |y|$. Alternativamente, osserviamo innanzitutto che è $z \neq 0$. Inoltre, se ϑ è una determinazione dell'argomento di z, 2ϑ è argomento di z^2 e la condizione $\operatorname{Re} z^2 > 0$ equivale a $-\pi/2 < 2\vartheta - 2k\pi < \pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$; dunque $-\pi/4 + k\pi < \vartheta < \pi/4 + k\pi$.



Ex. 8f Basta osservare che $\arg(2z+1) = \arg\big(z+1/2\big) = \arg\big(z - \big(-\frac{1}{2}\big)\big)$. L'insieme delle soluzioni è rappresentato in figura:



Ex. 8g Abbiamo $\arg(\bar{z}+j) = \arg(\overline{z-j}) = -\arg(z-j) \in \,]\pi/2, \pi[$ se e solo se $\arg(z-j) \in \,]-\pi, -\pi/2[$, ovvero, posto come al solito $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, se e solo se risulta $y < 1$ e $x < 0$.

Ex. 9 Consideriamo inizialmente $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Questa è equivalente a

$$|z_1 + z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2\,.$$

Essendo

$$\begin{aligned}(z_1+z_2)\,(z_1+z_2)^* &= (z_1+z_2)\,(\overline{z}_1+\overline{z}_2)\\ &= |z_1|^2 + z_1\,\overline{z}_2 + \overline{z}_1\,z_2 + |z_2|^2\\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\,\overline{z}_2) + |z_2|^2\end{aligned}$$

la disuguaglianza segue poiché

$$\operatorname{Re}(z_1\,\overline{z}_2) \le |z_1\,\overline{z}_2| = |z_1|\,|z_2|\,.$$

L'uguaglianza vale se e solo se

$$\operatorname{Re}(z_1\,\overline{z}_2) = |z_1\,\overline{z}_2|$$

ovvero $z_1\,\overline{z}_2$ è un numero reale non negativo. Questo vale banalmente se $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$. Nel caso $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$, posto $r = z_1\,\overline{z}_2 > 0$, risulta

$$z_1 = \frac{r}{|z_2|^2}\,z_2\,,$$

ovvero esiste $\lambda > 0$ tale che $z_1 = \lambda\,z_2$. Geometricamente, z_1 e z_2 sono su una stessa semiretta uscente dall'origine.

La seconda parte della disuguaglianza $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|$, che è equivalente a

$$(|z_1| - |z_2|)^2 \le |z_1 + z_2|^2\,,$$

si ottiene analogamente. Similmente a prima si perviene a

$$-|z_1|\,|z_2| \le \operatorname{Re}(z_1\,\overline{z}_2)\,.$$

L'uguaglianza vale se e solo se uno dei due numeri (almeno) è nullo, o esiste $\lambda > 0$ tale che

$$z_1 = -\lambda\,z_2\,.$$

Osserviamo pure che la seconda parte della disuguaglianza segue dalla prima:

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \le |z_1 + z_2| + |z_2|$$

e quindi

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|\,.$$

Concludiamo scambiando il ruolo dei due numeri.

Ex. 10 Non è restrittivo supporre che il vertice opposto al lato di lunghezza a sia l'origine, un altro sia (l'immagine di) b e il terzo sia (l'immagine di) $c\,\mathrm{e}^{j\alpha}$. Dunque

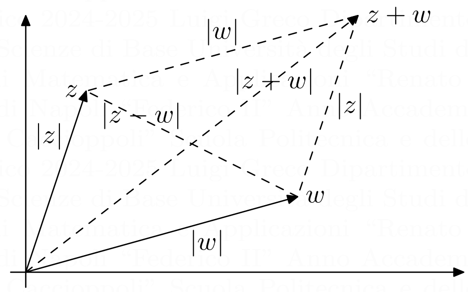
$$\begin{aligned} a^2 &= |c\,\mathrm{e}^{j\alpha} - b|^2 = (c\,\mathrm{e}^{j\alpha} - b)\,\overline{c\,\mathrm{e}^{j\alpha} - b} = (c\,\mathrm{e}^{j\alpha} - b)\,(c\,\mathrm{e}^{-j\alpha} - b) \\ &= c^2 + b^2 - bc\,(\mathrm{e}^{j\alpha} + \mathrm{e}^{-j\alpha}) \end{aligned}$$

e quindi la tesi.

Ex. 11 Risulta

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\,(z+w)^* = (z+w)\,(\overline{z}+\overline{w}) = |z|^2 + z\,\overline{w} + \overline{z}\,w + |w|^2\,, \\ |z-w|^2 &= (z-w)\,(z-w)^* = (z-w)\,(\overline{z}-\overline{w}) = |z|^2 - z\,\overline{w} - \overline{z}\,w + |w|^2 \end{aligned}$$

e quindi basta sommare membro a membro. Geometricamente l'identità esprime il fatto che in un parallelogramma la somma dei quadrati delle lunghezze delle diagonali è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze dei lati.



Ex. 13 Il problema è nel doppio significato del simbolo $\sqrt{\ }$: per scrivere le uguaglianze $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)^2}$ intendiamo la radice aritmetica, mentre per scrivere $\sqrt{-1}$ necessariamente dobbiamo intendere la radice in $\mathbb{C}$, che ammette due determinazioni. Non è chiaro allora cosa significhi il prodotto $\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}$. Volendo interpretarlo come l'insieme dei valori che si ottengono moltiplicando una determinazione di ciascuna radice, otteniamo i due valori ± 1.

Ex. 14 È chiaro che $w^n = z \Rightarrow (w^m)^n = z^m$. Posto, come al solito, $w_k = w_0\,\mathrm{e}^{j\,\frac{2k\pi}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$, le potenze di due radici distinte coincidono se e solo se esistono h e k verificanti $0 \le k < h \le n-1$ e tali che n divida $(h-k)m$. Essendo $0 < h-k < n$, questo accade se e solo se n e m hanno un divisore comune diverso da 1.

Ex. 16 L'uguaglianza risulta falsa per $z = 1$ e $w = 1 + j$:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{1+j} = \operatorname{Re}\frac{1-j}{2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right) = \frac{1}{2}\,; \qquad \frac{\operatorname{Re} 1}{\operatorname{Re}(1+j)} = 1\,.$$

Sia $z/w \in \mathbb{R}$. Il caso $z = 0$ è chiaro; sia $z \neq 0$. Dunque esiste $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $z/w = r$, ovvero $z = r\,w$. Ne segue $\operatorname{Re} z = r \operatorname{Re} w$ e quindi l'uguaglianza vale. La condizione $z/w \in \mathbb{R}$ non è necessaria, poiché l'uguaglianza vale ad esempio per $z = j$ e $w = 1$.

CAPITOLO IX

Svolgimenti Funzioni Olomorfe

Ex. 17c $\operatorname{Log}(-1) = \log_* |-1| + j \operatorname{Arg}(-1) = 0 + \pi j = \pi j$.

Ex. 17d $\operatorname{Log}(-1+j) = \log_* \sqrt{2} + \frac{3}{4}\pi j$.

Ex. 17e $\log(\exp(z)) = \{z + 2k\pi j : k \in \mathbb{Z}\}$.

Ex. 17f $\operatorname{Log}(\exp(z))$ è l'unico tra i valori trovati nell'esercizio 17e a verificare

$$-\pi < \operatorname{Im} z + 2k\pi \leq \pi .$$

La scelta di k dipende da z.

Ex. 19 Posto $z = x + jy$ in forma algebrica, risulta

$$\begin{aligned}
\exp(\overline{z}) = \exp(x - jy) &= \mathrm{e}^x[\cos(-y) + j\sin(-y)] \\
&= \mathrm{e}^x(\cos y - j \sin y) = \overline{\exp(z)} \,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\overline{z}) &= \frac{\exp(j\overline{z}) + \exp(-j\overline{z})}{2} = \frac{\exp(\overline{-jz}) + \exp(\overline{jz})}{2} \\
&= \frac{\overline{\exp(-jz)} + \overline{\exp(jz)}}{2} = \overline{\cos z} \,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\overline{z}) &= \frac{\exp(j\overline{z}) - \exp(-j\overline{z})}{2j} = \frac{\exp(\overline{-jz}) - \exp(\overline{jz})}{2j} \\
&= \frac{\overline{\exp(-jz)} - \overline{\exp(jz)}}{2j} = \frac{\overline{\exp(jz)} - \overline{\exp(-jz)}}{2\overline{j}} = \overline{\sin z} \,.
\end{aligned}$$

Ex. 21 L'uguaglianza $\log \overline{z} = \overline{\log z}$ vale perché l'esponenziale è hermitiana, quindi $\exp(\overline{\log z}) = \overline{z}$. Riguardo all'uguaglianza $\operatorname{Log} \overline{z} = \overline{\operatorname{Log} z}$, per quanto appena detto,

$$\overline{\operatorname{Log} z} = \log_* |z| - j \operatorname{Arg} z$$

è una determinazione di $\log \overline{z}$, ma non risulta sempre quella principale. L'uguaglianza fallisce quando z è reale negativo, poiché in tal caso

$$\operatorname{Log} \overline{z} = \operatorname{Log} z = \log_* |z| + j\pi \,, \quad \overline{\operatorname{Log} z} = \log_* |z| - j\pi \,.$$

In particolare, $\overline{\operatorname{Log} z}$ non è la determinazione principale del logaritmo di alcun numero complesso. In ogni altro caso l'uguaglianza vale, poiché $-\pi < \operatorname{Im}(\operatorname{Log} z) < \pi$.

Ex. 22b Poiché $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, l'equazione diviene $\mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} = \mathrm{e}^{|z|}$; essendo questi esponenziali nel campo reale, l'uguaglianza equivale all'uguaglianza tra gli esponenti $\operatorname{Re} z = |z|$, cioè z è reale non negativo.

Ex. 22c Ricordando la definizione di $\sin z$, riscriviamo l'equazione $\mathrm{e}^{jz} - \mathrm{e}^{-jz} = -2$, ovvero moltiplicando per e^{jz}, $\mathrm{e}^{2jz} + 2\,\mathrm{e}^{z} - 1 = 0$, che è un'equazione di secondo grado in $w = \mathrm{e}^{jz}$. Le soluzioni sono $w = -1 \mp \sqrt{2}$. In corrispondenza di queste, troviamo $z = -j\log(-1 \mp \sqrt{2})$, quindi le due famiglie di soluzioni

$$\begin{aligned} &z = -j\big(\log_*(\sqrt{2}+1) + j(\pi + 2k\pi)\big) = \pi + 2k\pi - j\log_*(\sqrt{2}+1)\,, \\ &z = 2k\pi - j\log_*(\sqrt{2}-1)\,; \qquad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Ex. 22d In base alla definizione di $\cos z$, l'equazione si riscrive $\mathrm{e}^{jz} + \mathrm{e}^{-jz} = 10$, ovvero, ponendo $w = \mathrm{e}^{jz}$,

$$w^2 - 10w + 1 = 0\,.$$

Ricaviamo $w = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Osserviamo che le due soluzioni sono reali positive. Ne segue

$$z = \frac{1}{j}\log(5 + 2\sqrt{6})\,, \qquad z = \frac{1}{j}\log(5 - 2\sqrt{6})\,.$$

Pertanto

$$z = 2k\pi - j\log_*(5 + 2\sqrt{6})\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,,$$

e

$$z = 2h\pi - j\log_*(5 - 2\sqrt{6})\,, \qquad h \in \mathbb{Z}\,.$$

Notiamo che l'insieme delle soluzioni è simmetrico rispetto all'asse reale, come si vede scegliendo $h = k$ poiché $\log_*(5 + 2\sqrt{6}) = -\log_*(5 - 2\sqrt{6})$, in accordo col fatto che il coseno è hermitiana, ed è simmetrico rispetto all'origine, come si vede scegliendo $h = -k$, in accordo col fatto che il coseno è pari.

Ex. 23 In base alla definizione di esponenziale, risulta

$$\exp(\pi + 15j) = \mathrm{e}^{\pi}(\cos 15 + j\sin 15)\,,$$

cioè

$$\mathrm{Re}[\exp(\pi + 15j)] = \mathrm{e}^{\pi}\cos 15\,; \qquad \mathrm{Im}[\exp(\pi + 15j)] = \mathrm{e}^{\pi}\sin 15\,.$$

Inoltre

$$|\exp(\pi + 15j)| = \exp[\mathrm{Re}(\pi + 15j)] = \mathrm{e}^{\pi}$$

e

$$\arg[\exp(\pi + 15j)] = \mathrm{Im}(\pi + 15j) + 2k\pi = 15 + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Per trovare $\mathrm{Arg}[\exp(\pi + 15j)]$ dobbiamo determinare $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$-\pi < 15 + 2k\pi \leq \pi\,.$$

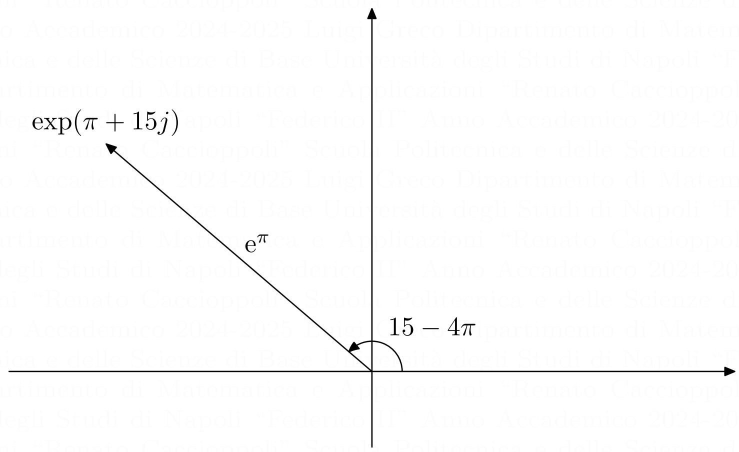
È chiaro che 15 è minore di 5π, ma prossimo a tale valore. In effetti risulta

$$15 > 5\pi - \frac{\pi}{2} \iff 30 > 9\pi \iff 10 > 3\pi$$

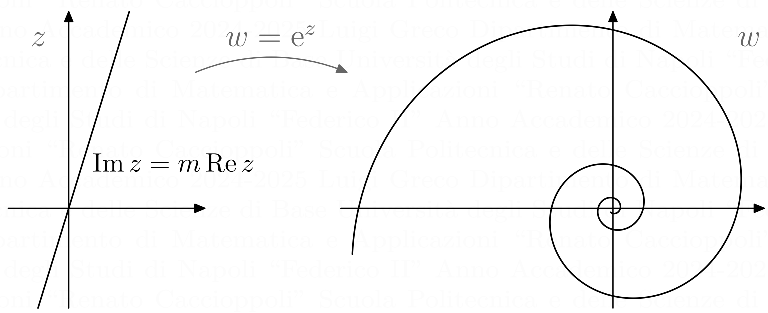
e l'ultima disuguaglianza è vera, poiché $\pi < 3,2$. Dobbiamo quindi scegliere $k = -2$:

$$\pi = 5\pi - 4\pi > 15 - 4\pi > 5\pi - \frac{\pi}{2} - 4\pi = \frac{\pi}{2}\,.$$

È chiaro a questo punto anche che l'immagine di $\exp(\pi + 15j)$ cade nel II quadrante.



Ex. 24 Dobbiamo descrivere l'immagine di $x \in \mathbb{R} \to w = \exp(x + jmx)$. Consideriamo prima il caso $m \neq 0$. Usando le coordinate polari ρ, ϑ, nel piano w, l'immagine si rappresenta mediante l'equazione $\rho = \exp(\vartheta/m)$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, quindi è una spirale logaritmica.



Per $m = 0$, abbiamo l'immagine di $x \in \mathbb{R} \to w = \exp(x)$, che è il semiasse reale positivo.

Ex. 25 L'uguaglianza $\exp(jz) = \cos z + j \sin z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, è valida: per $z = x \in \mathbb{R}$ è la formula di Eulero; per $z \in \mathbb{C}$ generico

$$\cos z + j \sin z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} + j\, \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} = e^{jz}\,.$$

Notiamo che è possibile anche dedurre il caso generale dalla formula di Eulero mediante il principio di permanenza delle proprietà analitiche.

L'affermazione

$$|\exp(jz)| = 1$$

per z complesso generico è palesemente falsa, poiché pure jz è generico e l'esponenziale non è limitato. (Non è limitato già in $\mathbb{R}$.) L'errore è nel modo di calcolarne il modulo: pur essendo come visto $\exp(jz) = \cos z + j \sin z$, il secondo membro costituisce la forma algebrica del primo se e solo se $\cos z$ e $\sin z$ sono entrambi reali e questo, per l'esercizio 26, accade se e solo se z è reale. In questo caso, l'affermazione è corretta.

Ex. 26 Ovviamente, se z è reale, tali sono pure $\cos z$ e $\sin z$. Mostriamo che non ci sono altre possibilità. Se $\cos z$ e $\sin z$ sono entrambi reali, dovendo valere la relazione fondamentale $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, risulta in particolare

$$-1 \le \cos z \le 1$$

e, come è noto, questo implica z reale.

Ex. 27 Mediante gli sviluppi di Mac Laurin, troviamo

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + o(z^3)\,, \qquad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2)\,.$$

Quindi il limite cercato coincide con

$$\lim_{z\to 0} \left[8\,\frac{z - \frac{z^3}{6}}{z^3} - \frac{3 + 5(1 - \frac{z^2}{2})}{z^2} \right] = \lim_{z\to 0} \frac{8 - \frac{8}{6}z^2 - 8 + \frac{5}{2}z^2}{z^2}$$
$$= -\frac{8}{6} + \frac{5}{2} = \frac{7}{6}\,.$$

Ex. 28a Non è necessario usare la definizione e valutare le derivate successive. Lo sviluppo cercato sarà costituito da una serie di potenze in z, convergente in un intorno di 0. Per ottenere uno sviluppo di questo tipo, che risulterà *necessariamente* quello di Mac Laurin per il principio di identità delle serie di potenze, basta ricordare la serie geometrica: per $|z| < 1$, abbiamo

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n+1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} z^n\,.$$

Ex. 28c Lo scopo è rappresentare e^z come somma di una serie di potenze in $z-1$; ricordando lo sviluppo di Mac Laurin dell'esponenziale, scriviamo $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{z-1} = \mathrm{e}\sum_0^\infty (z-1)^n/n!$. Ovviamente lo sviluppo si può scrivere direttamente, poiché $[D^n\,\mathrm{e}^z]_{z=1} = \mathrm{e}$.

Ex. 28d Lo sviluppo si ottiene direttamente. D'altra parte, possiamo anche usare l'esercizio 28c nel modo seguente

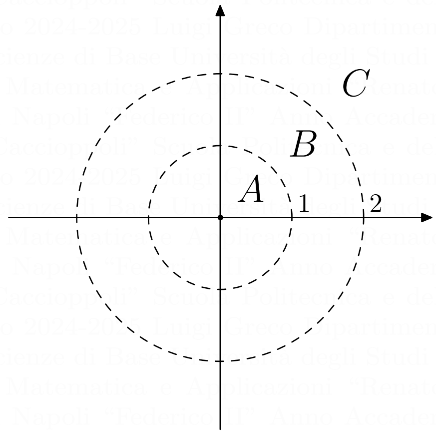
$$z\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^z + (z-1)\,\mathrm{e}^z = \mathrm{e}\left[\sum_{n=0}^\infty \frac{(z-1)^n}{n!} + (z-1)\sum_{n=0}^\infty \frac{(z-1)^n}{n!}\right]$$
$$= \mathrm{e}\left[1 + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right)(z-1)^n\right]$$
$$= \mathrm{e}\left[1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{n+1}{n!}\,(z-1)^n\right]$$

Ex. 29c Per la funzione

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3\,z + 2}\,,$$

olomorfa in $\mathbb{C} - \{1, 2\}$, ci sono tre corone circolari di centro $z_0 = 0$:

$$A = \{z \;:\; |z| < 1\}\,, \quad B = \{z \;:\; 1 < |z| < 2\}\,, \quad C = \{z \;:\; |z| > 2\}\,.$$



Essendo $z^2 - 3\,z + 2 = (z-1)\,(z-2)$ e

$$g(z) = \frac{1}{z^2 - 3\,z + 2} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}\,,$$

gli sviluppi si ottengono facilmente da quelli noti della funzione $f(z) = 1/(1-z)$, ottenuti mediante la serie gemetrica. In effetti, il primo addendo è esattamente $f(z)$, mentre per il secondo abbiamo

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z/2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\,, \text{ per } |z| < 2 \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{2^{n+1}}\,, \text{ per } |z| > 2 \end{cases}$$

Pertanto

$$g(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n\,, \text{ per } |z| < 1 \\[3ex] \displaystyle -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}\,, \text{ per } 1 < |z| < 2 \\[3ex] \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n = \sum_{n=-\infty}^{-2} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n\,, \text{ per } |z| > 2 \end{cases}$$

Ex. 30b Gli zeri del numeratore sono $z = 0$, di ordine 2, e $z = k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, semplici. Gli zeri del denominatore sono $z = 2\,k\,\pi$, doppi. Pertanto $z = 0$ è singolarità eliminabile, con $f(0) = 2$, i punti $z = (2\,k+1)\,\pi$ sono zeri semplici, mentre i punti $z = 2\,k\,\pi$ con $k \neq 0$ sono poli semplici.

Ex. 30f Numeratore e denominatore sono funzioni intere (non identicamente nulle), quindi le singolarità del rapporto sono tra gli zeri del denominatore. Poiché $e^{i\pi z^2} - 1 = 0$ equivale a $z^2 = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$, troviamo 0 e i punti del tipo $\mp\sqrt{2k}i$ e $\mp\sqrt{2k}$, con $k \in \mathbb{N}$. Il punto 0 è zero di ordine 2 del denominatore e zero semplice del numeratore, quindi polo di ordine 1 del rapporto. Gli altri punti sono zeri semplici del denominatore e non annullano il numeratore, quindi sono anch'essi poli di ordine 1.

Ex. 31h La funzione $f(z) = z^2(z-1)\sin\frac{1}{z-1}$ ha in $z_0 = 1$ una singolarità essenziale, poiché tale è z_0 per $\sin\frac{1}{z-1}$. Inoltre z_0 è l'unica singolarità al finito. Una possibilità per calcolare il residuo è quella di scrivere lo sviluppo di Laurent, essendo $R[1] = c_{-1}[1]$. Ricordando lo sviluppo di Mac Laurin del seno, abbiamo subito

$$(z-1)\sin\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n}\,.$$

Poiché inoltre $z^2 = [(z-1)+1]^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$, moltiplicando abbiamo

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n+2} &+ 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n+1} \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(z-1)^{-2n}\,. \end{aligned}$$

Ciascuno degli sviluppi a secondo membro converge $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$; è chiaro che il primo e il terzo non contribuiscono al residuo, poiché contengono solo potenze con esponente pari. Pertanto, considerando il termine in $(z-1)^{-1}$ nel secondo sviluppo (che si ottiene per $n = 1$), concludiamo $R[1] = -1/3$.

Un'altra possibilità per il calcolo del residuo è quella di osservare che $R[1]+R[\infty] = 0$ per il teorema dei residui, quindi $R[1] = -R[\infty]$. Per calcolare $R[\infty]$ non possiamo procedere direttamente mediante il lemma V.1.3 delle Lezioni, poiché

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} z^2 \frac{\sin\frac{1}{z-1}}{\frac{1}{z-1}} = \infty\,.$$

Osserviamo invece che la funzione intera

$$g(z) = z^2 = z^2(z-1)\frac{1}{z-1}$$

ha evidentemente residuo nullo all'∞. Pertanto, $R[\infty; f] = R[\infty; f-g]$. Poiché inoltre

$$\lim_{z\to\infty}[f(z)-g(z)] = \lim_{z\to\infty} z^2(z-1)\left[\sin\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-1}\right] = -\frac{1}{6}\lim_{z\to\infty}\frac{z^2(z-1)}{(z-1)^3} = -\frac{1}{6}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} R[\infty; f] &= R[\infty; f-g] = \lim_{z\to\infty} z\left[-\frac{1}{6} - f(z) + g(z)\right] \\ &= \lim_{z\to\infty} z\left\{-\frac{1}{6} + z^2(z-1)\left[\frac{1}{z-1} - \sin\frac{1}{z-1}\right]\right\} \\ &= \lim_{z\to\infty} z\left\{-\frac{1}{6} + \frac{z^2(z-1)}{6(z-1)^3}\right\} = \lim_{z\to\infty}\frac{z}{6(z-1)^2}\left[z^2-(z-1)^2\right] \end{aligned}$$

e ritroviamo il risultato precedente.

Ex. 32 Supponiamo per esempio f funzione dispari e $n \in \mathbb{Z}$ pari. In base alla definizione, risulta

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz\,,$$

essendo Γ una circonferenza di centro 0 contenuta (internamente) nella corona circolare, percorsa in verso antiorario. Calcoliamo l'integrale usando due rappresentazioni parametriche di Γ. Poniamo inizialmente $z(t) = \rho\, e^{i\,t}$, con $t \in [0, 2\pi]$, essendo ρ il raggio di Γ. Notiamo che il verso di percorrenza indotto su Γ dalla rappresentazione è quello antiorario, quindi

$$c_n = \frac{1}{2\pi\, i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\rho\, e^{i\,t})}{(\rho\, e^{i\,t})^{n+1}}\, \rho\, i\, e^{i\,t}\, dt\,.$$

Usiamo ora invece la rappresentazione $z(t) = -\rho\, e^{i\,t}$, con $t \in [0, 2\pi]$; anche in questo caso il verso di percorrenza indotto su Γ è quello antiorario. Usando la simmetria di f ed osservando che $n+1$ è dispari, troviamo

$$c_n = \frac{1}{2\pi\, i}\int_0^{2\pi} \frac{f(-\rho\, e^{i\,t})}{(-\rho\, e^{i\,t})^{n+1}}\, (-\rho\, i\, e^{i\,t})\, dt = -\frac{1}{2\pi\, i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\rho\, e^{i\,t})}{(\rho\, e^{i\,t})^{n+1}}\, \rho\, i\, e^{i\,t}\, dt\,.$$

Confrontando con l'espressione trovata precedentemente, vediamo che $c_n = -c_n$, cioè $c_n = 0$, come volevamo.

Alternativamente, possiamo ragionare come segue. Ovviamente

$$f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, (-z)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n\, c_n\, z^n$$

e quindi, se f è dispari, $f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n\, c_n\, z^n$. Ricordando l'unicità dello sviluppo di Laurent, troviamo nuovamente $c_n = -c_n$ per $n \in \mathbb{Z}$ pari.

Sia $r < |z - z_0| < R$ la corona di centro z_0 in questione C; osservato che $|z + z_0| = |-z - z_0|$, vediamo che z appartiene alla corona simmetrica se e solo se $-z \in C$. Pertanto, se f è pari

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n\, (z + z_0)^n = f(z) = f(-z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, (-z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, (-1)^n\, (z + z_0)^n$$

e quindi la tesi, uguagliando in base al principio di identità ordinatamente i coefficienti nei due sviluppi. Se f è dispari il ragionamento è analogo. La parte finale si ha ricordando che $R[z_0] = c_{-1}$ e $R[-z_0] = d_{-1}$.

Ex. 33 Basta mostrare che, se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, (z - z_0)^n$ è lo sviluppo in serie di Laurent di f nella corona di centro z_0, nella corona di centro $\overline{z_0}$ vale lo sviluppo $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n}\, (z - \overline{z_0})^n$. A tal fine osserviamo che per z nella seconda corona, $\bar{z}$ appartiene alla prima corona e risulta

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, (\bar{z} - z_0)^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n}\, (z - \overline{z_0})^n\,.$$

L'osservazione sui residui è immediata, ricordando che $R[z_0]$ è il coefficiente di $(z - z_0)^{-1}$ nel primo sviluppo e analogamente per $R[\overline{z_0}]$.

Ex. 34 Le singolarità sono gli zeri del denominatore, cioè le quattro determinazioni di $\sqrt[4]{625}$, vale a dire ∓ 5 e $\mp 5j$. Sono tutti poli semplici, in quanto zeri semplici del denominatore, che non annullano il numeratore, ed il calcolo dei residui è immediato: detto z_k uno qualsiasi dei punti,

$$R[z_k] = \frac{z_k}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k^2}\,, \quad R[\mp 5] = \frac{1}{100}\,,\ R[\mp 5j] = -\frac{1}{100}\,.$$

Osserviamo che, essendo la funzione dispari, il residuo è "pari" (cfr. Ex. 32):

$$R[-5] = R[5]\,, \qquad R[-5j] = R[5j]\,.$$

Inoltre, essendo la funzione hermitiana in quanto funzione razionale a coefficienti reali, i residui in punti coniugati sono coniugati (cfr. Ex. 33):

$$R[-5j] = \overline{R[5j]}$$

e dunque, per quanto già visto, $R[-5j]$ e $R[5j]$ sono reali e coincidenti. Infine, ricordando che la somma è nulla per il II teorema dei residui ($R[\infty] = 0$ banalmente), vediamo che, conoscendo ad esempio $R[5]$, è possibile calcolare gli altri residui; in particolare

$$R[5j] = R[-5j] = -\frac{1}{2}\left(R[5] + R[-5]\right) = -R[5]\,.$$

Ex. 36 Vediamo il primo punto. Osserviamo che $z \mapsto \bar{z}$ non è olomorfa, quindi non possiamo provare l'olomorfia di g vedendola come funzione composta. Consideriamo $f = f(x,y)$ come funzione di due variabili reali, cioè identifichiamo $z = x + j\,y$ con la coppia ordinata (x,y), quindi $\bar{z} = x - j\,y$ con la coppia $(x,-y)$. Chiaramente $(x,y) \in \Omega^* \iff (x,-y) \in \Omega$. Scritta $f = u + j\,v$ in forma algebrica, abbiamo

$$g(x,y) = u(x,-y) - j\,v(x,-y)\,.$$

Osserviamo che $f \in C^\infty(\Omega)$, quindi lo stesso vale per u e v; inoltre vale la condizione di Cauchy-Riemann, espressa dalla coppia di uguaglianze

$$\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right. \tag{2}$$

Per quanto detto, risulta $g \in C^\infty(\Omega^*)$ e dunque resta da verificare la condizione di Cauchy-Riemann per g:

$$g_x(x,y) = u_x(x,-y) - j\,v_x(x,-y)$$

$$\frac{1}{j}\,g_y(x,y) = \frac{1}{j}\left[-u_y(x,-y) + j\,v_y(x,-y)\right] = v_y(x,-y) + j\,u_y(x,-y)]$$

Chiaramente, la prima delle (2) scritta nel punto $(x,-y) \in \Omega$ fornisce l'uguaglianza tra le parti reali, mentre la seconda fornisce l'uguaglianza tra i coefficienti dell'immaginario.

Vediamo il secondo punto. Osserviamo preliminarmente che $E = \Omega \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$: $A = \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z > 0\}$ e $B = \{z \in \Omega : \operatorname{Im} z < 0\}$ sono due sottoinsiemi aperti, non vuoti e disgiunti di Ω, quindi $E = \Omega \setminus (A \cup B) \neq \emptyset$, per l'ipotesi di connessione. Per il primo punto, la funzione

$$h(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}\,, \qquad z \in \Omega = \Omega^*\,,$$

è olomorfa; se f assume valori reali in E, h è nulla in E; essendo Ω aperto, ogni punto di E è di accumulazione. Pertanto per il II principio di identità h è identicamente nulla, cioè $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, $\forall z \in \Omega$.

Nel caso $\Omega = \mathbb{C}$, f risulta somma del suo sviluppo di Mac-Laurin; se f è reale nei punti dell'asse reale, i coefficienti sono reali:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,z^n\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\,; \qquad \text{dove } a_n \in \mathbb{R}\,,\ \forall n \in \mathbb{N}_0\,.$$

La conclusione che f è hermitiana è a questo punto immediata

$$f(\bar z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, \bar z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n}\, \bar z^n = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n} = \overline{f(z)}\,,\ \forall z \in \mathbb{C}\,.$$

L'esercizio 19 segue immediatamente.

Ex. 37 Basta osservare che $f(w) = -\operatorname{Log}(1-w)$ è olomorfa per $|w| < 1$ e

$$f'(w) = \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} w^n\,.$$

Ex. 41 Suggerimento: scritta $f(x,y) = \xi(x,y) + j\eta(x,y)$ in forma algebrica, la funzione composta è $v(x,y) = u(\xi(x,y), \eta(x,y))$; calcolare $\Delta v = v_{xx} + v_{yy}$ usando la regola di derivazione delle funzioni composte, ricordando che ξ e η verificano le relazioni di Cauchy-Riemann e sono funzioni armoniche.

Ex. 42 I tre punti sono singolarità eliminabili perché ciascuno di essi è zero semplice del numeratore e del denominatore. Indichiamo ancora con f il prolungamento e calcoliamo $f'(1)$. Evidentemente $f'(1) = \lim_{z\to 1} f'(z)$, ma il calcolo diretto risulta laborioso. È anche chiaro che, se g è una funzione che differisce da f per un infinitesimo di ordine maggiore di 1 per $z \to 1$, gli sviluppi di Taylor intorno a 1 di f e g possono differire per i termini di grado 2 in poi, quindi nel calcolo f può essere sostituita con g. Ricordando che $w - \sin w = O(w^3)$ per $w \to 0$ e che $\sin \pi z = \sin \pi(1-z)$, possiamo sostituire f con

$$g(z) = \frac{\pi\,(1-z)}{z\,(1-z^2)} = \frac{\pi}{z\,(1+z)} = \frac{\pi}{z+z^2}\,.$$

Il calcolo è a questo punto immediato

$$f'(1) = g'(1) = -\pi \left.\frac{1+2z}{(z+z^2)^2}\right|_{z=1} = -\frac{3}{4}\,\pi\,.$$

Essendo f pari e quindi f' dispari, risulta $f'(-1) = -f'(1) = 3\pi/4$. In 0 il calcolo è immediato: essendo f' dispari, risulta $f'(0) = 0$.

Ex. 43 Siano f e g olomorfe nell'aperto Ω connesso, con $f' = g'$. Scelto $z_0 \in \Omega$, la funzione $h = f - g - [f(z_0) - g(z_0)]$ ha in z_0 uno zero di ordine infinito.

Ex. 44 Poiché f' è evidentemente dotata di primitive, il suo integrale esteso ad una qualsiasi curva chiusa è nullo, quindi l'annullarsi di $R_{f'}[z_0]$ segue subito dalla definizione di residuo. È chiaro che il ragionamento precedente mostra che, se f è dotata di primitive, ha residuo nullo. Mostriamo ora il viceversa, supponendo f con residuo nullo $R_f[z_0] = 0$. Dunque, nello sviluppo di Laurent manca il termine in $1/(z-z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n\neq -1} c_n\,(z-z_0)^n\,.$$

Ogni termine in questa serie è dotato di primitiva nell'intorno bucato e, potendosi la serie integrare termine a termine, questo vale anche per f.

Riguardo ai residui, in entrambi i casi 0 è polo di ordine 3 ed il calcolo diretto è laborioso. Per quanto precede, il primo residuo è nullo, poiché la funzione è dotata di primitiva intorno a 0:

$$\frac{\sin z}{(1-\cos z)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{\cos z - 1}\,.$$

Il secondo residuo si riconduce facilmente al primo. Invero, poiché $\sin z - (z - z^3/6)$ è infinitesima in 0 di ordine 5, la differenza tra le due funzioni

$$\frac{\sin z}{(1-\cos z)^2}\,, \qquad \frac{z - z^3/6}{(1-\cos z)^2}$$

ha in 0 una singolarità eliminabile, quindi esse hanno lo stesso residuo. Ne segue

$$R\left[0\,,\ \frac{z}{(1-\cos z)^2}\right] = R\left[0\,,\ \frac{z^3/6}{(1-\cos z)^2}\right]$$

e quest'ultimo è relativo ad un polo semplice, quindi infine

$$R\left[0\,,\ \frac{z}{(1-\cos z)^2}\right] = \lim_{z\to 0} z\,\frac{z^3/6}{(1-\cos z)^2} = \frac{1}{6}\left(\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{1-\cos z}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\,.$$

CAPITOLO X

Svolgimenti Polinomi e funzioni razionali

Ex. 45j Osserviamo che 0 è polo semplice e $\mp j$ sono poli doppi. Possiamo ottenere la decomposizione in $\mathbb{R}$ scrivendo il numeratore come segue $1 = 1 + s^2 - s^2$

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)^2} = \frac{1+s^2-s^2}{s\,(s^2+1)^2} = \frac{1}{s\,(s^2+1)} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

e ripetendo poi l'osservazione per il primo addendo nell'ultimo membro.

Alternativamente, scriviamo

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)^2} = s\,\frac{1}{s^2\,(s^2+1)^2}$$

Posto $t = s^2$, l'ultimo fattore diviene $\frac{1}{t\,(t+1)^2}$ che si decompone facilmente:

$$\frac{1}{t\,(t+1)^2} = \frac{R[0]}{t} + \frac{R[-1]}{t+1} + \frac{c_{-2}[-1]}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}$$

Tornando alla variabile s abbiamo

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)^2} = s\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s^2+1)^2}\right). \tag{3}$$

Come ulteriore possibilità, osserviamo che la decomposizione nel campo reale è

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} + \frac{Ds+E}{(s^2+1)^2} \tag{4}$$

con i coefficienti reali. Come è noto $A = R[0]$, quindi $A = 1$. Essendo la funzione dispari, deve essere $C = E = 0$. (Mutando s in $-s$ e sommando membro a membro, otteniamo $0 = C/(s^2+1) + E/(s^2+1)^2$, che è assurda se i coefficienti non sono entrambi nulli.) Moltiplicando in (4) ambo i membri per $(s^2+1)^2$ e ponendo $s = j$, otteniamo $Dj = 1/j = -j$, quindi $D = -1$. Moltiplicando per s ambo i membri e passando al limite per $s \to \infty$, abbiamo $A + B = 0$, quindi $B = -1$.

Ancora, osserviamo che sottraendo dalla funzione razionale la sua caratteristica in 0, $R[0]/s$, otteniamo una funzione non più singolare nel punto:

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)^2} - \frac{1}{s} = \frac{1-(s^2+1)^2}{s\,(s^2+1)^2} = \frac{(1-s^2-1)(1+s^2+1)}{s\,(s^2+1)^2}$$

e ritroviamo subito (3).

Nel campo complesso, la decomposizione è

$$\frac{1}{s\,(s^2+1)^2} = \frac{R[0]}{s} + \frac{R[j]}{s-j} + \frac{c_{-2}[j]}{(s-j)^2} + \frac{R[-j]}{s+j} + \frac{c_{-2}[-j]}{(s+j)^2}\,.$$

Essendo la funzione a coefficienti reali, quindi hermitiana, è (cfr. Ex. 33)

$$R[-j] = \overline{R[j]}\,, \qquad c_{-2}[-j] = \overline{c_{-2}[j]}\,.$$

Inoltre (cfr. Ex. 32), essendo la funzione dispari, il residuo è pari, mentre il coefficiente c_{-2} è dispari:

$$R[-j] = R[j]\,, \qquad c_{-2}[-j] = -c_{-2}[j]\,.$$

Pertanto, $R[-j] = R[j]$ è reale e $c_{-2}[-j] = -c_{-2}[j]$ è immaginario. La prima di queste osservazioni, essendo $R[\infty] = 0$, per il II teorema dei residui implica $R[0] + 2\,R[j] = 0$, quindi $R[j] = R[-j] = -1/2$. Risulta inoltre

$$c_{-2}[j] = \left.\frac{1}{s\,(s+j)^2}\right|_{s=j} = \frac{1}{j\,(2j)^2} = \frac{j}{4}\,.$$

A scopo illustrativo, calcoliamo il residuo mediante la formula:

$$\begin{aligned} R[j] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left.\frac{1}{s\,(s+j)^2}\right|_{s=j} = -\left.\frac{(s+j)^2 + s\,2(s+j)}{s^2(s+j)^4}\right|_{s=j} = -\left.\frac{s+j+2s}{s^2(s+j)^3}\right|_{s=j} \\ &= -\frac{4j}{j^2(2j)^3} = -\frac{4j}{8j} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Ex. 45k Analogo all'Ex. 45j. Invece di ripeterne i calcoli, ci riduciamo ad esso:

$$\frac{1}{s\,(s^2+\omega^2)^2} = \frac{1}{\omega^5}\,\frac{1}{\dfrac{s}{\omega}\left[\left(\dfrac{s}{\omega}\right)^2 + 1\right]^2}$$

Ex. 45l Osserviamo che 7 è polo semplice e $\mp 5j$ sono poli doppi. Scriviamo la decomposizione in $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(s-7)\,(s^2+25)^2} = \frac{A}{s-7} + \frac{Bs+C}{s^2+25} + \frac{Ds+E}{(s^2+25)^2}\,. \tag{5}$$

Inoltre

$$A = R[7] = \left.\frac{1}{(s^2+25)^2}\right|_{s=7} = \frac{1}{74^2}\,.$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-7)\,(s^2+25)^2} - \frac{1}{74^2}\,\frac{1}{s-7} &= \frac{1}{74^2}\,\frac{74^2 - (s^2+25)^2}{(s-7)\,(s^2+25)^2} \\ &= \frac{1}{74^2}\,\frac{(74 - s^2 - 25)\,(74 + s^2 + 25)}{(s-7)\,(s^2+25)^2} \\ &= \frac{1}{74^2}\,\frac{(49 - s^2)\,(74 + s^2 + 25)}{(s-7)\,(s^2+25)^2} \\ &= -\frac{s+7}{74^2}\,\frac{74 + s^2 + 25}{(s^2+25)^2} \\ &= -\frac{1}{74^2}\,\frac{s+7}{s^2+25} - \frac{1}{74}\,\frac{s+7}{(s^2+25)^2} \end{aligned}$$

Pertanto (5) diviene

$$\frac{1}{(s-7)\,(s^2+25)^2} = \frac{1}{74^2}\,\frac{1}{s-7} - \frac{1}{74^2}\,\frac{s+7}{s^2+25} - \frac{1}{74}\,\frac{s+7}{(s^2+25)^2}\,.$$

Calcoliamo i coefficienti di (5) in altro modo. Moltiplicando ambo i membri per $(s^2+25)^2$ e ponendo $s=5j$, otteniamo

$$5Dj+E=\frac{1}{5j-7}=\frac{-5j-7}{74}$$

e quindi $D=-1/74$ e $E=-7/74$. Moltiplicando per s e passando al limite per $s\to\infty$, troviamo $A+B=0$, quindi $B=-1/74^2$. Ponendo $s=0$

$$\frac{1}{-7\cdot 25^2}=\frac{A}{-7}+\frac{C}{25}+\frac{E}{25^2}\,,$$

ovvero

$$\begin{aligned} C&=\frac{25}{7}\,A-\frac{E}{25}-\frac{1}{7\cdot 25}=\frac{25}{7}\,\frac{1}{74^2}+\frac{1}{25}\,\frac{7}{74}-\frac{1}{7\cdot 25}=\frac{25^2+49\cdot 74-74^2}{7\cdot 25\cdot 74^2}\\ &=\frac{25^2+(49-74)\cdot 74}{7\cdot 25\cdot 74^2}=\frac{25-74}{7\cdot 74^2}=-\frac{7}{74^2}\,. \end{aligned}$$

Alternativamente,

$$\frac{1}{(s-7)\,(s^2+25)^2}=\frac{1}{74}\,\frac{s^2+25+49-s^2}{(s-7)\,(s^2+25)^2}=\frac{1}{74}\left[\frac{1}{(s-7)\,(s^2+25)}-\frac{s+7}{(s^2+25)^2}\right]$$

e analogamente

$$\frac{1}{(s-7)\,(s^2+25)}=\frac{1}{74}\,\frac{s^2+25+49-s^2}{(s-7)\,(s^2+25)}=\frac{1}{74}\left[\frac{1}{s-7}-\frac{s+7}{s^2+25}\right]$$

Più complicata è la decomposizione nel campo complesso

$$\frac{1}{(s-7)\,(s^2+25)^2}=\frac{R[7]}{s-7}+\frac{R[5j]}{s-5j}+\frac{c_{-2}[5j]}{(s-5j)^2}+\frac{R[-5j]}{s+5j}+\frac{c_{-2}[-5j]}{(s+5j)^2}\,.$$

Osserviamo che, essendo la funzione a coefficienti reali, quindi hermitiana, risulta (cfr. Ex. 33)

$$R[-5j]=\overline{R[5j]}\,,\qquad c_{-2}[-5j]=\overline{c_{-2}[5j]}\,.$$

La prima uguaglianza, poiché evidentemente $R[\infty]=0$, implica $R[7]+2\operatorname{Re}R[5j]=0$, da cui $\operatorname{Re}R[5j]=\operatorname{Re}R[-5j]=-1/(2\cdot 74^2)$, ma non consente di calcolare il coefficiente dell'immaginario. Risulta

$$c_{-2}[5j]=\left.\frac{1}{(s-7)\,(s+5j)^2}\right|_{s=5j}=\frac{1}{(5j-7)\,(10j)^2}=\frac{1}{100\,(7-5j)}=\frac{7+5j}{100\cdot 74}\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} R[5j]&=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{1}{(s-7)\,(s+5j)^2}\right|_{s=5j}=-\left.\frac{(s+5j)^2+(s-7)\,2(s+5j)}{(s-7)^2\,(s+5j)^4}\right|_{s=5j}\\ &=-\left.\frac{(s+5j)+2(s-7)}{(s-7)^2\,(s+5j)^3}\right|_{s=5j}=-\frac{10j+10j-14}{(5j-7)^2\,(10j)^3}\\ &=-\frac{20j-14}{(-25-70j+49)\,(-1000j)}=-\frac{7-10j}{(35+12j)\cdot 1000}\\ &=-\frac{(7-10j)\,(35-12j)}{(35^2+12^2)\cdot 1000}=-\frac{245-120-84j-350j}{1369\cdot 1000}=\frac{-125+434j}{1369\cdot 1000}\\ &=-\frac{1}{1369\cdot 8}+\frac{217}{1369\cdot 500}\,j=-\frac{1}{2\cdot 74^2}+\frac{217}{125\cdot 74^2}\,j\,. \end{aligned}$$

CAPITOLO XI

Svolgimenti $\mathscr{Z}$-Trasformazione

Ex. 48a Osserviamo che

$$\frac{n^2+3n}{(n+2)!} = \frac{n^2+3n+2}{(n+2)!} - \frac{2}{(n+2)!} = \frac{(n+1)\,(n+2)}{(n+2)!} - \frac{2}{(n+2)!} = \frac{1}{n!} - \frac{2}{(n+2)!}\,.$$

Pertanto, in base alla definizione,

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_u\left[\frac{n^2+3n}{(n+2)!}\right] &= \mathrm{e}^{1/z} - 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n\,(n+2)!} = \mathrm{e}^{1/z} - 2z^2\left(\mathrm{e}^{1/z} - 1 - 1/z\right)\\ &= \mathrm{e}^{1/z}(1-2z^2) + 2z^2 + 2z\,.\end{aligned}$$

Ex. 49a Calcoliamo la $\mathscr{Z}_u^{-1}$. Osserviamo che risulta

$$\begin{aligned}\frac{(z-1)^2(z+1)}{z^3-8} &= \frac{z^3-z^2-z+1}{z^3-8} = 1 - \frac{z^2+z-9}{z^3-8}\\ &= 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{5z+16}{z^2+2z+4}\right).\end{aligned}$$

Inoltre

$$\mathscr{Z}^{-1}(1) = \delta\,, \qquad \mathscr{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z-2}\right] = \mathscr{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z}\,\frac{z}{z-2}\right] = 2^{n-1}u(n-1)\,,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_u^{-1}\left[\frac{z+16/5}{z^2+2z+4}\right] &= \mathscr{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z}\,z\,\frac{z+1+11/5}{z^2+2z+4}\right]\\ &= 2^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{2}{3}\pi + \frac{11}{5\sqrt{3}}\sin(n-1)\frac{2}{3}\pi\right]u(n-1)\,.\end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned}&\mathscr{Z}_u^{-1}\left[\frac{(z-1)^2(z+1)}{z^3-8}\right]\\ &\qquad = \delta + 2^{n-1}\left[\frac{1}{4} - \frac{5}{4}\cos(n-1)\frac{2}{3}\pi - \frac{11}{4\sqrt{3}}\sin(n-1)\frac{2}{3}\pi\right]u(n-1)\,.\end{aligned}$$

Presentiamo ora un approccio diverso. È facile ricondursi alla formula per la $\mathcal{Z}_u$ di successioni periodiche:

$$\frac{(z-1)^2(z+1)}{z^3-8} = \frac{z^3-z^2-z+1}{z^3-8} = \frac{\frac{9}{8}z^3-z^2-z}{z^3-8} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{\frac{9}{8}\left(\frac{z}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{z}{2}}{\left(\frac{z}{2}\right)^3 - 1} - \frac{1}{8}\,.$$

Ricordando la formula di riscalamento, vediamo in questo modo che l'antitrasformata cercata è

$$-\frac{1}{8}\,\delta + 2^n \left\{\frac{9}{8}\,,\ -\frac{1}{2}\,,\ -\frac{1}{4}\,,\dots\right\}$$

dove l'espressione in parentesi graffe indica la successione periodica di periodo 3 i cui primi tre termini sono quelli specificati.

Ex. 49c Confrontare con l'Ex. 49b;

$$\frac{1}{z^2+z+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{z}\,\frac{z\,\sin\frac{2}{3}\,\pi}{z^2-2\,z\,\cos\frac{2}{3}\,\pi+1} \xrightarrow{\ \mathcal{Z}_u^{-1}\ } \frac{2}{\sqrt{3}}\,u(n-1)\,\sin(n-1)\frac{2}{3}\pi\,.$$

È possibile anche scrivere

$$\frac{1}{z^2+z+1} = \frac{z-1}{z^3-1}$$

ed usare la formula per la trasformata delle successioni periodiche.

Ex. 49g Risulta

$$\frac{z^2}{(z^2-2z+2)^2} = \frac{z^2-2z+2+2z-2}{(z^2-2z+2)^2} = \frac{1}{z^2-2z+2} + \frac{2z-2}{(z^2-2z+2)^2}$$

$$= \frac{1}{z^2-2z+2} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{z^2-2z+2}\,.$$

Poiché inoltre

$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{z}{z^2-2z+2}\right] = 2^{n/2}\,\sin n\,\frac{\pi}{4}\,,$$

usando successivamente la formula della traslazione e la formula fondamentale, abbiamo

$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z^2-2z+2}\right] = \mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z}\,\frac{z}{z^2-2z+2}\right] = 2^{(n-1)/2}\,u(n-1)\,\sin(n-1)\,\frac{\pi}{4}$$

$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{z^2-2z+2}\right] = \mathcal{Z}_u^{-1}\left[-\frac{1}{z}\,z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{z^2-2z+2}\right]$$

$$= (n-1)\,2^{(n-2)/2}\,u(n-2)\,\sin(n-2)\,\frac{\pi}{4}\,.$$

Osservando che

$$2^{1/2}\,\sin(n-1)\,\frac{\pi}{4} = \sin n\,\frac{\pi}{4} - \cos n\,\frac{\pi}{4}\,, \qquad \sin(n-2)\,\frac{\pi}{4} = -\cos n\,\frac{\pi}{4}\,,$$

possiamo scrivere in definitiva

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{z^2}{(z^2-2z+2)^2}\right] &= 2^{(n-1)/2}\,u(n-1)\,\sin(n-1)\,\frac{\pi}{4}\\ &\quad+(n-1)\,2^{(n-2)/2}\,u(n-2)\,\sin(n-2)\,\frac{\pi}{4}\\ &= 2^{(n-2)/2}\,u(n-2)\,\left\{\sin n\,\frac{\pi}{4}-2\cos n\,\frac{\pi}{4}\right\}.\end{aligned}$$

Ex. 49h Una volta scritto

$$\begin{aligned}\frac{z^2-1}{(z^2-2z+2)^2} &= (z+1)\,\frac{z-1}{\left[(z-1)^2+1\right]^2}=\frac{1}{2}\,(z+1)\left\{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{(z-1)^2+1}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{-z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{(z-1)^2+1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{(z-1)^2+1}\right\},\end{aligned}$$

i calcoli sono analoghi a quelli dell'esercizio 49g.

Ex. 49i Osserviamo che, usando anche la formula di Hermite

$$\begin{aligned}\frac{z\,(z-1)}{(z^2+2z+4)^2} &= \frac{z\,(z+1)}{(z^2+2z+4)^2}-\frac{2z}{(z^2+2z+4)^2}\\ &= -\frac{z}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{z^2+2z+4}-\frac{z}{3}\left\{\frac{1}{(z+1)^2+3}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z+1}{(z+1)^2+3}\right\}\\ &= \frac{-z/3}{z^2+2z+4}-\frac{z}{6}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{2z+5}{z^2+2z+4}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{z}{z^2+2z+4}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{z\sqrt{3}/2}{z^2-2\cdot 2(-1/2)\,z+2^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathcal{Z}_u\left[2^n\sin n\,\frac{2}{3}\pi\right]$$

Pertanto, usando la formula fondamentale e quella della traslazione

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{z\,(z-1)}{(z^2+2z+4)^2}\right] &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}\,2^n\sin n\,\frac{2}{3}\pi+n\,\frac{2}{3\sqrt{3}}\,2^n\sin n\,\frac{2}{3}\pi\\ &\quad-\frac{5}{6}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\,n\,u(n-1)\,2^{n-1}\sin(n-1)\,\frac{2}{3}\pi.\end{aligned}$$

Ex. 49j Effettuando il prodotto a denominatore,

$$\frac{2z^2+z}{(z^2-1)(z^2+1)}=\frac{2z^2+z}{z^4-1}$$

e basta ricordare la trasformata di una successione periodica.

Ex. 49k Decomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{1}{z^3+1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z/z_0-1}+\frac{1}{z/z_1-1}+\frac{1}{z/z_2-1}\right)$$

dove $z_k=\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$, sono le $\sqrt[3]{-1}$. Pertanto

$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z^3+1}\right]=-\frac{1}{3}\,(z_0^n+z_1^n+z_2^n)\,u(n-1).$$

A scopo illustrativo, proponiamo altre soluzioni per l'inversione della trasformata unilatera.

A) Essendo

$$\frac{1}{\zeta+1} = \frac{1}{\zeta}\,\frac{\zeta}{\zeta+1} = \mathcal{Z}[(-1)^{n-1}u(n-1)](\zeta) = 0, 1, -1, 1, -1, \dots\,,$$

ponendo $\zeta = z^3$, abbiamo

$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z^3+1}\right] = \begin{cases} (-1)^{n/3-1}u(n/3-1)\,, & \text{per } n \text{ divisibile per } 3 \\ 0\,, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= 0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, \dots$$

(cfr. Ex 55.)

B) Essendo

$$\frac{1}{z^3+1} = -\frac{1}{(-z)^3-1} = -\left.\frac{1}{\zeta}\,\frac{\zeta}{\zeta^3-1}\right|_{\zeta=-z}$$

ricordando le formule di riscalamento, traslazione e per la trasformata unilatera di una successione periodica, troviamo

$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z^3+1}\right] = -(-1)^n\,a(n-1)\,u(n-1) = (-1)^{n+1}\,a(n-1)\,u(n-1)\,,$$

dove $a(n)$ è la successione periodica di periodo 3 tale che $a(0) = a(1) = 0$ e $a(2) = 1$.

Alternativamente, possiamo scrivere

$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z^3+1}\right] = \mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{z^3-1}{z^6-1}\right] = b(n)\,u(n) - b(n-3)\,u(n-3)\,,$$

essendo $b(n)$ la successione periodica di periodo 6 con $b(3) = 1$ e $b(0) = b(1) = b(2) = b(4) = b(5) = 0$.

Per confrontare con i risultati precedenti, notiamo che (cfr. Ex 14), essendo 3 numero primo, se n non è divisibile per 3 le potenze z_0^n, z_1^n e z_2^n sono a due a due distinte e quindi hanno somma nulla. Se n è divisibile per 3, risulta

$$z_0^n + z_1^n + z_2^n = \begin{cases} -3\,, & n/3 \text{ dispari} \\ 3\,, & n/3 \text{ pari} \end{cases}$$

Ex. 50a La $\mathcal{Z}_u$-trasformata del primo membro dell'equazione è

$$(z^2+z+1)\,Y - 2z^2 + 3z - 2z\,.$$

Per trasformare il secondo membro, osserviamo che $\cos^4\big(n\pi/2\big)$ vale 1 per n pari e 0 per n dispari, quindi

$$\mathcal{Z}_u\left(\cos^4\big(n\pi/2\big)\right) = z^2/(z^2-1)\,.$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{2z^2 - z}{z^2 + z + 1} + \frac{3\,z^2}{(z^2-1)\,(z^2+z+1)} \\
&= z\left(\frac{2z-1}{z^2+z+1} + \frac{3/2}{z+1} + \frac{1/2}{z-1} - \frac{2z+1}{z^2+z+1}\right) \\
&= \frac{3z/2}{z+1} + \frac{z/2}{z-1} - \frac{2z}{z^2+z+1}
\end{aligned}
$$

e antitrasformando

$$y(n) = \frac{3}{2}\,(-1)^n + \frac{1}{2} + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\sin n\frac{2\pi}{3}\,.$$

Ex. 50b Trasformando ambo i membri dell'equazione, abbiamo

$$2z^2(Y-1) + 3z(Y-1) - 2Y = z/\big(2(z-2)\big)\,,$$

ovvero, "mettendo da parte" un fattore z e decomponendo in fratti semplici

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{2z^2+3z}{(2z-1)(z+2)} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{(2z-1)(z+2)(z-2)} \\
&= z\left(\frac{22}{15(2z-1)} + \frac{9}{40(z+2)} + \frac{1}{24(z-2)}\right).
\end{aligned}
$$

Concludiamo antitrasformando

$$y(n) = \mathscr{Z}_u^{-1}\left(\frac{11}{15}\,\frac{2z}{2z-1} + \frac{9}{40}\,\frac{z}{z+2} + \frac{1}{24}\,\frac{z}{z-2}\right) = \frac{11}{15}\,2^{-n} + \frac{9}{40}\,(-2)^n + \frac{1}{24}\,2^n\,.$$

Ex. 50c La trasformata del primo membro dell'equazione è $Y\,(z^2-2z+4)-z$. Per trasformare il secondo membro, usiamo la formula di riscalamento:

$$\mathscr{Z}_u\left[2^{n-1}\cos n\frac{\pi}{3}\right](z) = \frac{1}{2}\;\mathscr{Z}_u\left[2^n\cos n\frac{\pi}{3}\right](z) = \frac{1}{2}\;\mathscr{Z}_u\left[\cos n\frac{\pi}{3}\right](z/2)\,.$$

Ricordando che

$$\mathscr{Z}_u\left[\cos n\frac{\pi}{3}\right] = z\,\frac{z-\cos\pi/3}{z^2-2(\cos\pi/3)\,z+1} = z\,\frac{z-1/2}{z^2-z+1}\,,$$

possiamo completare la trasformazione:

$$\mathscr{Z}_u\left[2^{n-1}\cos n\frac{\pi}{3}\right] = \frac{z}{2}\,\frac{z-1}{z^2-2z+4}\,.$$

Ricaviamo dunque

$$Y = \frac{z}{z^2-2z+4} + \frac{z}{2}\,\frac{z-1}{(z^2-2z+4)^2}\,.$$

Per completare la risoluzione, bisogna antitrasformare. Il primo termine a secondo membro è semplice da trattare:

$$\mathscr{Z}_u^{-1}\left(\frac{z}{z^2-2z+4}\right) = \mathscr{Z}_u^{-1}\left(\frac{1}{2}\,\frac{z/2}{\big(z/2\big)^2 - z/2 + 1}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,2^n\,\sin n\frac{\pi}{3}\,.$$

Per il secondo termine, usiamo la formula fondamentale e la formula della traslazione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_u^{-1}\left(\frac{z}{2}\,\frac{z-1}{(z^2-2z+4)^2}\right) &= \frac{1}{4}\,\mathcal{Z}_u^{-1}\left(-z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{z^2-2z+4}\right) \\
&= \frac{n}{4}\,\mathcal{Z}_u^{-1}\left(\frac{1}{z}\,\frac{z}{z^2-2z+4}\right) = \frac{n}{4\sqrt{3}}\,2^{n-1}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

(dove abbiamo trascurato $u(n-1)$, poiché $n\,u(n-1) = n\,u(n) = n$, per $n \geq 0$). Pertanto

$$y(n) = \frac{2^n}{\sqrt{3}}\left[\sin n\frac{\pi}{3} + \frac{n}{8}\,\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right].$$

Ex. 50d Poniamo come al solito $Y = \mathcal{Z}[y(n)]$. La trasformata del primo membro dell'equazione è $Y\,(z^2-6z+18) - z^2 + 6z$. La trasformata del secondo membro si calcola come segue; per la formula di riscalamento, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_u\left[\left(3\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right](z) &= 3\sqrt{2}\,\mathcal{Z}_u\left[\left(3\sqrt{2}\right)^{n}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right](z) \\
&= 3\sqrt{2}\,\mathcal{Z}_u\left[\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right]\left(\frac{z}{3\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

ed essendo, com'è noto,

$$\mathcal{Z}_u\left[\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right](z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{z}{z^2-\sqrt{2}z+1},$$

troviamo infine

$$\mathcal{Z}_u\left[\left(3\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right] = 3\,\frac{\frac{z}{3\sqrt{2}}}{\frac{z^2}{18}-\frac{z}{3}+1} = \frac{9\sqrt{2}\,z}{z^2-6z+18}. \tag{6}$$

Dunque

$$Y = z\,\frac{z-6}{z^2-6z+18} + \frac{9\sqrt{2}\,z}{(z^2-6z+18)^2}.$$

Dobbiamo ora antitrasformare. Per il primo termine, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\left(z\,\frac{z-6}{z^2-6z+18}\right) &= \left(3\sqrt{2}\right)^n\mathcal{Z}^{-1}\left(z\,\frac{z-\sqrt{2}}{z^2-\sqrt{2}z+1}\right) \\
&= \left(3\sqrt{2}\right)^n\mathcal{Z}^{-1}\left(z\,\frac{z-1/\sqrt{2}-1/\sqrt{2}}{z^2-2z/\sqrt{2}\,z+1}\right) \qquad (7)\\
&= \left(3\sqrt{2}\right)^n\left(\cos n\frac{\pi}{4} - \sin n\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Per antitrasformare il secondo termine, usiamo la formula di Hermite:

$$\frac{1}{(z^2-6z+18)^2} = \frac{1}{\left[(z-3)^2+9\right]^2} = \frac{1}{18}\left\{\frac{1}{z^2-6z+18} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z-3}{z^2-6z+18}\right\}.$$

Ricordando (6), troviamo

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z}{z^2-6z+18}\right)=\frac{1}{3}\left(3\sqrt{2}\right)^n\sin n\frac{\pi}{4}\,,$$

mentre usando la formula fondamentale, la formula della traslazione e ricordando (7)

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}\left(z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z-3}{z^2-6z+18}\right)&=-n\;\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z-3}{z^2-6z+18}\right)\\&=-n\;u(n-1)\;\mathcal{Z}^{-1}\left[z\,\frac{z-3}{z^2-6z+18}\right](n-1)\\&=-n\;u(n-1)\left(3\sqrt{2}\right)^{n-1}\;\cos(n-1)\frac{\pi}{4}\\&=-n\,\frac{\left(3\sqrt{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{2}}\left(\cos n\frac{\pi}{4}+\sin n\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

In definitiva, troviamo

$$\begin{aligned}y(n)&=\left(3\sqrt{2}\right)^n\left(\cos n\frac{\pi}{4}-\sin n\frac{\pi}{4}\right)+\left(3\sqrt{2}\right)^{n+1}\sin n\frac{\pi}{4}\\&\quad-9n\left(3\sqrt{2}\right)^{n-1}\left(\cos n\frac{\pi}{4}+\sin n\frac{\pi}{4}\right)\\&=\left(3\sqrt{2}\right)^n\left[\left(3\sqrt{2}-1-\frac{3}{\sqrt{2}}\,n\right)\sin n\frac{\pi}{4}+\left(1-\frac{3}{\sqrt{2}}\,n\right)\cos n\frac{\pi}{4}\right].\end{aligned}$$

Ex. 50e Trasformando nell'equazione, abbiamo

$$Y\left(z^2-z+1\right)=\frac{(-z)^3-(-z)}{(-z)^3-1}=\frac{z^3-z}{z^3+1}$$

e quindi

$$Y=z\,\frac{z-1}{(z^2-z+1)^2}=\frac{z}{2}\,\frac{2z-1-1}{(z^2-z+1)^2}=-\frac{z}{2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{1}{z^2-z+1}+\frac{1}{(z^2-z+1)^2}\right).$$

Inoltre,

$$\frac{1}{(z^2-z+1)^2}=\frac{1}{\left(z-1/2\right)^2+3/4}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{z^2-z+1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z-1/2}{z^2-z+1}\right)$$

e quindi

$$Y=-\frac{z}{3}\left(\frac{1}{z^2-z+1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\,\frac{z+1}{z^2-z+1}\right).$$

A questo punto possiamo antitrasformare:

$$\frac{z}{z^2-z+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{z\sin\pi/3}{z^2-2z\cos\pi/3+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\;\mathcal{Z}\left(\sin n\pi/3\right),$$

$$\frac{z+1}{z^2-z+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\;\mathcal{Z}\left(\sin n\pi/3+u(n-1)\,\sin(n-1)\pi/3\right)$$

ed infine, ricordando la formula fondamentale (per $n \geq 0$)

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big\{(n-1)\,\sin n\pi/3 + n\,u(n-1)\,\sin(n-1)\pi/3\Big\} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\Big\{(n-1)\,\sin n\pi/3 + n\,\sin(n-1)\pi/3\Big\}\,. \end{aligned}$$

Ex. 50f Trasformando ambo i membri e ricavando $Y = \mathcal{Z}[y(n)]$, otteniamo

$$Y = \frac{2\,z}{4\,z^2-1} + 2\,z\,\frac{2\,z+1}{(4\,z^2+1)\,(4\,z^2-1)} = \frac{2\,z}{4\,z^2-1} + 2\,z\,\frac{1}{(4\,z^2+1)\,(2\,z-1)}\,.$$

D'altra parte

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{2\,z}{4\,z^2-1}\right] = \frac{1}{2}\,\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1/2} - \frac{z}{z+1/2}\right] = \frac{2^{-n}-(-2)^{-n}}{2}\,.$$

Inoltre

$$\frac{2}{(4\,z^2+1)\,(2\,z-1)} = \frac{4\,z^2+1+1-4\,z^2}{(4\,z^2+1)\,(2\,z-1)} = \frac{1}{2\,z-1} - \frac{2\,z+1}{4\,z^2+1}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\left[2\,z\,\frac{1}{(4\,z^2+1)\,(2\,z-1)}\right] &= \frac{1}{2}\,\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1/2}\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{(2\,z)^2}{(2\,z)^2+1} + \frac{2\,z}{(2\,z)^2+1}\right] \\ &= 2^{-n-1} - 2^{-n-1}\left(\cos\frac{n\,\pi}{2} + \sin\frac{n\,\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è

$$y(n) = 2^{-n-1}\left(2-(-1)^n - \cos\frac{n\,\pi}{2} - \sin\frac{n\,\pi}{2}\right), \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Facciamo qualche ulteriore osservazione. Notiamo innanzitutto che, posto $x(n) = 2^n y(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}_0$, abbiamo $4\,y(n+2)\,2^n = x(n+2)$ e quindi, moltiplicando i due membri dell'equazione per 2^n, il problema di valori iniziali per $y(n)$ si trasforma in

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) = \cos\dfrac{n\,\pi}{2} + \sin\dfrac{n\,\pi}{2} \\ x_0 = 0\,,\ x_1 = 1 \end{cases}$$

che è analogo, ma leggermente più semplice. Trasformando ambo i membri e ricavando $X = \mathcal{Z}[x(n)]$, otteniamo

$$X = \frac{z}{z^2-1} + z\,\frac{z+1}{(z^2+1)\,(z^2-1)} = \frac{z}{z^2-1} + \frac{z^2+z}{z^4-1}\,.$$

Il primo termine nell'ultimo membro è la trasformata della successione

$$\{0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ldots\}$$

periodica di periodo 2, mentre il secondo termine è la trasformata della successione

$$\{0\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 1\,,\ldots\}$$

periodica di periodo 4; pertanto

$$x(n) = \{0\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 2\,, \dots\}$$

con periodo 4 ed infine

$$y(n) = 2^{-n}\ \{0\,,\ 1\,,\ 1\,,\ 2\,, \dots\}$$

Ex. 50k Trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$Y\,(z^2 + 2\,z + 4) - \sqrt{3}\,z = \frac{z^3 + 2\,z^2 + 4\,z}{z^3 - 1}$$

e quindi,

$$Y = \frac{\sqrt{3}\,z}{z^2 + 2\,z + 4} + \frac{z}{z^3 - 1} \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \quad 2^n\,\sin n\frac{2}{3}\pi + \{0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots\}\,.$$

Ex. 50l Notiamo che $a(n)$ è la successione periodica di periodo 2 con $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$. Dunque, trasformando ambo i membri nell'equazione, troviamo

$$\begin{aligned} Y\ &= \mathcal{Z}_u[y(n)] = \frac{2z^2 + z}{(z^2 - 1)\,(z^2 + 1)} = z\,\frac{2z + 1}{(z^2 - 1)\,(z^2 + 1)} \\ &= z\left(\frac{1}{4}\,\frac{1}{z + 1} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{2}\,\frac{2z + 1}{z^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

e quindi antitrasformando

$$y(n) = \frac{3 + (-1)^n}{4} - \cos n\,\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\,\sin n\,\frac{\pi}{2}\,.$$

A scopo illustrativo, risolviamo il problema in altro modo.

Per l'equazione particolare in esame, è possibile scindere il problema del secondo ordine in due del primo. Osserviamo che scrivendo l'equazione ricorrente per indice pari $n = 2k$, ricordando la definizione di $a(n)$ troviamo $y(2k+2) + y(2k) = a(2k) = 2$, quindi la successione definita ponendo $w(k) = y(2k)$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, risolve il problema del primo ordine

$$\begin{cases} w(k+1) + w(k) = 2 \\ w_0 = y_0 = 0 \end{cases}$$

Posto dunque $W = \mathcal{Z}_u[w(k)]$, abbiamo

$$W = \frac{2z}{z^2 - 1} = z\left(\frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1}\right)$$

e infine $y(2k) = w(k) = 1 - (-1)^k$. Analogamente, scrivendo l'equazione per l'indice dispari $n = 2k + 1$ troviamo $y(2k + 3) + y(2k + 1) = 1$ e quindi la successione definita ponendo $v(k) = y(2k + 1)$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, risolve il problema

$$\begin{cases} v(k+1) + v(k) = 1 \\ v(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Chiaramente è $v(k) = w(k)/2$ e pertanto

$$y(n) = \{0\,,\ 0\,,\ 2\,,\ 1\,,\ \dots\} \qquad \text{periodica di periodo } 4\,.$$

È anche facile scrivere la soluzione usando la convoluzione

$$y(n) = \mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z^2 + 1}\right] * a(n)\,.$$

Essendo
$$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{1}{z^2+1}\right] = \{0\,,\ 0\,,\ 1\,,\ 0\,,\ -1\,,\ 0\,,1\,,\ \ldots\}\,,$$
dove dopo i primi due 0 la successione si ripete con periodo 4, calcolando il prodotto di convoluzione troviamo $y_0 = 0$, $y_1 = 0$, che sono le condizioni iniziali, e successivamente
$$\begin{aligned}
&y_2 = 0\,a_2 + 0\,a_1 + 1\,a_0 = 2\,,\\
&y_3 = 0\,a_3 + 0\,a_2 + 1\,a_1 + 0\,a_0 = 1\,,\\
&y_4 = 0\,a_4 + 0\,a_3 + 1\,a_2 + 0\,a_1 + (-1)\,a_0 = 2 - 2 = 0\,,\\
&y_5 = 0\,a_5 + 0\,a_4 + 1\,a_3 + 0\,a_2 + (-1)\,a_1 + 0\,a_0 = 1 - 1 = 0\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ex. 51 La successione $y(n)$ è periodica di periodo $k \in \mathbb{N}$, se risulta $y(n+k) = y(n)$, ovvero $y(n+k) - y(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Di qui, l'equazione ricorrente del testo. Ricordiamo che una successione periodica è $\mathcal{Z}_u$-trasformabile per $|z| > 1$, in quanto ha immagine finita ed è dunque limitata. Trasformando nell'equazione, per la formula della traslazione abbiamo
$$z^k\,\mathcal{Z}_u[y(n)] - \big(y_0 z^k + y_1 z^{k-1} + \cdots + y(k-1)z\big) - \mathcal{Z}_u[y(n)] = 0\,,$$
da cui ricaviamo subito
$$\mathcal{Z}_u[y(n)] = \frac{y_0 z^k + y_1 z^{k-1} + \cdots + y(k-1)z}{z^k - 1}\,.$$
Equivalentemente, possiamo osservare che
$$\begin{aligned}
y_0 + \frac{y_1}{z} + \cdots + \frac{y(k-1)}{z^{k-1}} &= \mathcal{Z}\Big[y(n)\,\big[u(n) - u(k+k)\big]\Big]\\
&= \mathcal{Z}\big[y(n)\,u(n)\big] - \mathcal{Z}\big[y(n+k)\,u(k+k)\big]\\
&= \big(1 - 1/z^k\big)\ \mathcal{Z}\big[y(n)\,u(n)\big]
\end{aligned}$$
e quindi immediatamente la formula.

CAPITOLO XII

Svolgimenti Integrali con i residui

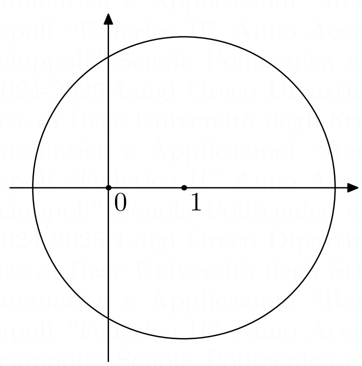
Ex. 57a L'integrando è funzione razionale, olomorfa in $\mathbb{C}$ esclusi i punti 0 e 1, che sono poli semplici. Entrambi i punti sono interni al cerchio di centro 1 e raggio 2, la cui frontiera è il cammino di integrazione; per il teorema dei residui, l'integrale vale dunque $2\,\pi\,i\big(R[0]+R[1]\big)$. Inoltre

$$R[0] = \left.\frac{2\,z+1}{z-1}\right|_{z=0} = -1\,, \qquad R[1] = \left.\frac{2\,z+1}{z}\right|_{z=1} = 3\,.$$

Alternativamente, ricordando che la somma dei residui è nulla, troviamo

$$R[0]+R[1] = -R[\infty] = \lim_{z\to\infty} z\,\frac{2z+1}{z^2-z} = 2\,.$$

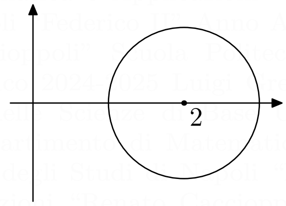
In definitiva, l'integrale vale $4\,\pi\,i$.



Ex. 57b L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C}-\{0\,,2\}$; in base alla definizione di residuo, l'integrale vale $2\,\pi\,i\,R[2]$. Per il calcolo del residuo, osserviamo che 2 è un polo doppio, quindi

$$R[2] = \lim_{z\to 2} D\left\{(z-2)^2\,\frac{\mathrm{e}^z}{z\,(z-2)^2}\right\} = \left.\mathrm{e}^z\,\frac{z-1}{z^2}\right|_{z=2} = \frac{\mathrm{e}^2}{4}\,.$$

In definitiva, il valore dell'integrale è $\mathrm{e}^2\pi\,i/2$.

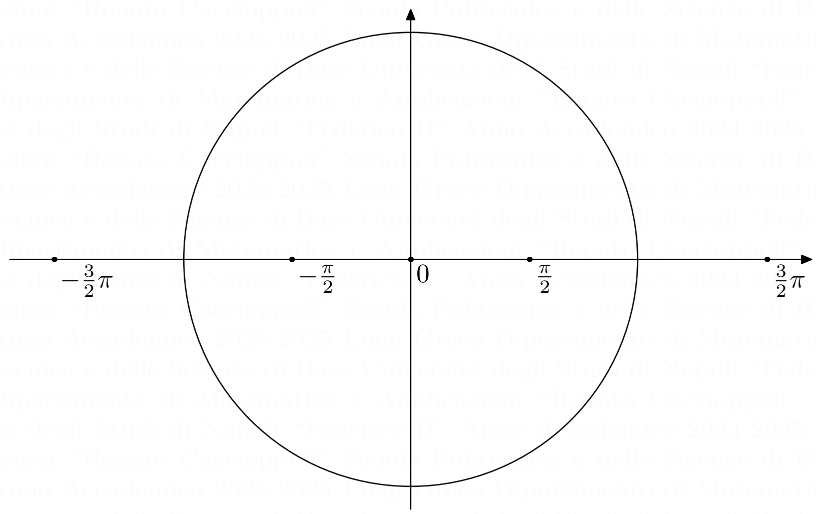


Ex. 57c L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. I punti $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono poli semplici e, $\forall k \in \mathbb{Z}$, risulta

$$R\left[\frac{\pi}{2} + k\pi; \operatorname{tg} z\right] = \left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} = -1\,.$$

Nel cerchio di centro 0 e raggio 3 cadono $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, quindi l'integrale vale

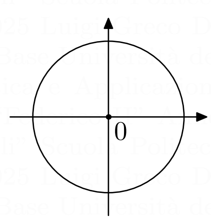
$$2\pi j\left(R\left[-\frac{\pi}{2}\right] + R\left[\frac{\pi}{2}\right]\right) = -4\pi j\,.$$



Ex. 57d Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; sono tutti zeri doppi. Di questi, 0 è anche zero semplice del numeratore, quindi è polo semplice dell'integrando. (Tutti gli altri punti sono poli doppi.) Per definizione di residuo, l'integrale vale $2\pi j\, R[0]$. Essendo

$$R[0] = \lim_{z\to 0} z\,\frac{z}{1-\cos z} = 2\,,$$

l'integrale vale $4\pi j$.



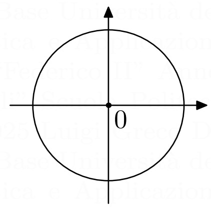
Ex. 57e L'integrando è olomorfo in $\mathbb{C} - \{0\}$. 0 è zero di ordine 2 per il numeratore e di ordine 3 per il denominatore, quindi è polo semplice dell'integrando. Per definizione di residuo, l'integrale vale

$$2\pi j\, R[0]\,.$$

Essendo

$$R[0] = \lim_{z\to 0} z\,\frac{\exp(z^2) - 1}{z^3} = \lim_{z\to 0}\frac{\exp(z^2)-1}{z^2} = 1\,,$$

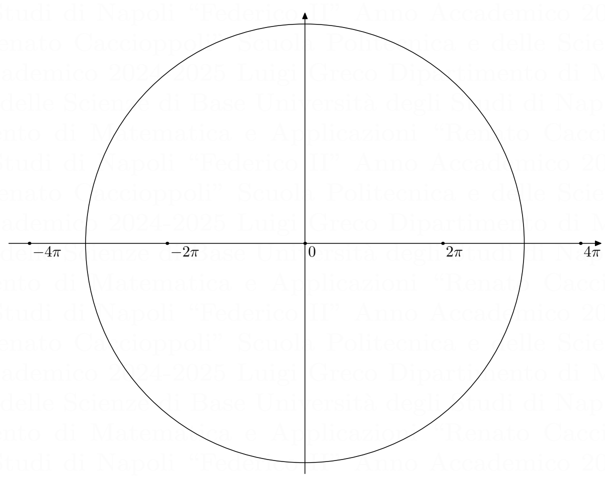
l'integrale vale $2\pi j$.



Ex. 57f Troviamo subito che, in base al teorema dei residui, il valore dell'integrale è $2\,\pi\, i\,\big(R[2\,\pi] + R[-2\,\pi]\big)$. Inoltre

$$R[2\,\pi] = \lim_{z\to 2\,\pi}(z-2\,\pi)\,\frac{z\,\sin z}{1-\cos z} = 2\,\pi\,\lim_{z\to 2\,\pi}\frac{(z-2\,\pi)^2}{1-\cos(z-2\pi)}\;\frac{\sin(z-2\,\pi)}{z-2\,\pi} = 4\,\pi$$

e analogamente $R[-2\,\pi] = -4\,\pi$. Pertanto l'integrale è nullo. Tale risultato segue immediatamente, in quanto la funzione integranda è pari il cammino di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, quindi i residui si presentano a coppie di numeri opposti (cfr. esercizio 32).



Ex. 58 Per le ipotesi fatte su $\mathscr{R}$, abbiamo

$$\mathscr{R}(w) = \sum_k \frac{R[w_k]}{w-w_k}$$

e quindi

$$\mathscr{R}(\sin x) = \sum_k \frac{R[w_k]}{\sin x - w_k}\,.$$

Quindi concludiamo usando la formula (VII.2.4) delle Lezioni. Nel caso particolare in esame, abbiamo

$$\frac{1}{12\,w^2 - 35\,w + 25} = \frac{1/5}{w-5/3} - \frac{1/5}{w-5/4}\,,$$

quindi

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{12\sin^2 x - 35\sin x + 25} = \frac{7}{30}\,\pi\,.$$

Ex. 59a Gli zeri del denominatore sono π e 2π, che sono discontinuità eliminabili dell'integrando. Inoltre l'integrando è $O(x^{-2})$ per $x \to \pm\infty$, quindi l'integrale converge assolutamente. Per il calcolo mediante la teoria dei residui, scegliamo come funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{j\,z}}{z^2 - 3\,\pi\,z + 2\,\pi^2}\,.$$

Per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è $\operatorname{Im} f(x)$, quindi l'integrale cercato sarà

$$\operatorname{Im}\left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right].$$

Notiamo che l'integrale di f è inteso nel senso del valor principale poiché π e 2π sono poli semplici reali di f. Come è noto,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,dx = \pi j\,(R[\pi] + R[2\pi])\,.$$

Essendo

$$R[\pi] = \left.\frac{\mathrm{e}^{jz}}{D(z^2 - 3\,\pi\,z + 2\,\pi^2)}\right|_{z=\pi} = \frac{\mathrm{e}^{\pi j}}{2\pi - 3\pi} = \frac{-1}{-\pi} = \frac{1}{\pi}$$

e analogamente

$$R[2\pi] = \frac{\mathrm{e}^{2\pi j}}{4\pi - 3\pi} = \frac{1}{\pi}\,.$$

troviamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \pi j\,\frac{2}{\pi} = 2j$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - 3\,\pi\,x + 2\,\pi^2}\,dx = \operatorname{Im}(2j) = 2\,.$$

Notiamo che

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{j\,z}}{(z - \frac{3}{2}\,\pi)^2 + (2 - \frac{9}{4})\,\pi^2} = \frac{-j\,\mathrm{e}^{j(z - \frac{3}{2}\pi)}}{(z - \frac{3}{2}\,\pi)^2 - \frac{\pi^2}{4}}\,,$$

quindi

$$\begin{aligned}\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-j\,\mathrm{e}^{jx}}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}\,dx \\ &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x - j\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}}\,dx\end{aligned}$$

è chiaramente immaginario.

Ex. 59b L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando è continuo in $\mathbb{R}$ (i punti 0 e $-1/2$ sono discontinuità eliminabili) ed è $O(1/x^2)$, quindi sommabile, intorno a $\mp\infty$.

Scegliamo la funzione ausiliaria $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{j\,2\,\pi\,z}}{2\,z^2 + z}$, in modo che, per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando sia il coefficiente dell'immaginario di $f(x)$. Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè 0 e $-1/2$, che risultano poli semplici, entrambi reali. L'integrale si calcola dunque mediante la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\,\pi\,x}{2\,x^2+x}\,dx = \operatorname{Im}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right) = \operatorname{Im}\big(\pi\,j\,R[0]+\pi\,j\,R[-1/2]\big)$$

$$= \pi\operatorname{Re}\big(R[0]+R[-1/2]\big).$$

(L'integrale di $f(x)$ va inteso nel senso del valor principale, per la presenza dei due poli reali.) Inoltre

$$R[0] = \left.\frac{e^{j\,2\,\pi\,z}}{2\,z+1}\right|_{z=0} = 1\,, \qquad R[-1/2] = \left.\frac{e^{j\,2\,\pi\,z}}{4\,z+1}\right|_{z=-1/2} = 1$$

e l'integrale cercato vale $2\,\pi$.

Ex. 59c Osserviamo che l'integrando ha una discontinuità eliminabile in $-\pi/4$, è continuo in $\mathbb{R}-\{-\pi/4\}$ e per $x\to\pm\infty$ è $O(x^{-3})$; pertanto l'integrale converge assolutamente. Osserviamo pure che $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\big(x+\pi/4\big)$ e quindi l'integrale cercato I è uguale a

$$I = \sqrt{2}\,\operatorname{Im}\left(\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,\pi/4}\quad e^{ix}}{(4x+\pi)\,(x^2+\pi^2)}\,dx\right)\,.$$

Equivalentemente, troviamo $I=\operatorname{Re}I_1+\operatorname{Im}I_1$, dove

$$I_1 = \text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(4x+\pi)\,(x^2+\pi^2)}\,dx\,.$$

Notiamo che l'integrale I_1 è inteso nel senso del valor principale, poiché per l'integrando il punto $-\pi/4$ è un infinito del primo ordine (non più discontinuità eliminabile). Per calcolare I_1 consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(4z+\pi)\,(z^2+\pi^2)}\,.$$

Essa ha poli semplici nei punti $-\pi/4$ e $\pm\pi\,i$, quindi $I_1 = 2\pi\,i\,R[\pi\,i]+\pi\,i\,R[-\pi/4]$. Essendo

$$R[\pi\,i] = \left.\frac{e^{iz}}{2z\,(4z+\pi)}\right|_{z=\pi\,i} = \frac{e^{-\pi}}{2\pi\,i\,(4\pi\,i+\pi)}\,, \qquad R[-\pi/4] = \frac{2\sqrt{2}\,(1-i)}{17\pi^2}\,,$$

abbiamo

$$I_1 = \frac{e^{-\pi}}{\pi\,(1+4\,i)} + i\,\frac{2\sqrt{2}\,(1-i)}{17\pi} = \frac{e^{-\pi}\,(1-4\,i)}{17\pi} + \frac{2\sqrt{2}\,(1+i)}{17\pi}$$

e quindi l'integrale cercato è

$$I = \frac{2\sqrt{2}+e^{-\pi}+2\sqrt{2}-4\,e^{-\pi}}{17\,\pi} = \frac{4\sqrt{2}-3\,e^{-\pi}}{17\,\pi}\,.$$

Ex. 59e L'integrale è assolutamente convergente, poiché l'integrando è continuo in $\mathbb{R}$ ed infinitesimo di ordine 3 per $x\to\mp\infty$. Inoltre

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\cos x}{x^4+4}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+4}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+4}\,dx = 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+4}\,dx\,,$$

essendo $x/(x^4+4)$ funzione dispari. Consideriamo la funzione ausiliaria $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{j\,z}}{z^4+4}$, che per $z = x \in \mathbb{R}$ ha parte reale coincidente con l'integrando dell'ultimo integrale. Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè $\sqrt[4]{-4}$, vale a dire $z_k = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{j\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$, per $k = 0,1,2,3$; sono poli semplici. Essendo il coefficiente nell'esponenziale nella definizione di f positivo, consideriamo i poli con coefficiente dell'immaginario positivo $z_0 = 1 + j$ e $z_1 = -1 + j$. Dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{jx}}{x^4+4}\,dx = 2\,\pi\,j\big(R[z_0] + R[z_1]\big)\,.$$

D'altra parte $z_k^4 = -4$ e $R[z_k] = \mathrm{e}^{jz_k}/(4\,z_k^3) = -z_k\,\mathrm{e}^{jz_k}/16$, quindi

$$R[z_0] = -\frac{1+j}{16}\,\mathrm{e}^{j(1+j)} = -\frac{1+j}{16}\,\mathrm{e}^{-1+j}\,,$$

$$R[z_1] = -\frac{-1+j}{16}\,\mathrm{e}^{j(-1+j)} = -\frac{-1+j}{16}\,\mathrm{e}^{-1-j}\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{jx}}{x^4+4}\,dx &= -\frac{\pi}{8}\,j\,\mathrm{e}^{-1}\big[(1+j)\,\mathrm{e}^{j} + (-1+j)\,\mathrm{e}^{-j}\big] \\ &= \frac{\pi}{8}\,\mathrm{e}^{-1}\big[(1-j)\,\mathrm{e}^{j} + (1+j)\,\mathrm{e}^{-j}\big] \\ &= \frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{Re}\big[(1-j)\,\mathrm{e}^{j}\big] = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{e}^{-1}\,(\cos 1 + \sin 1)\,.\end{aligned}$$

Tale valore è reale (com'era chiaro, essendo il coefficiente dell'immaginario dell'integrando funzione dispari) e quindi coincide con l'integrale cercato I.

Ex. 59f La funzione integranda è continua e l'integrale è assolutamente convergente. Osserviamo che, essendo la funzione integranda pari, risulta

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+\cos x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\cos x}{1+x^4}\,dx$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale, scegliamo la funzione ausiliaria $f(z) = \dfrac{z^2+\mathrm{e}^{iz}}{1+z^4}$. La funzione f presenta nel semipiano $\mathrm{Im}\,z > 0$ due poli del primo ordine nei punti $\mathrm{e}^{i\,\pi/4}$ e $\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}$, quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\cos x}{1+x^4}\,dx = 2\pi\,i\big(R[\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4}] + R[\,\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}]\big)\,. \tag{8}$$

Ponendo $A(z) = z^2 + \mathrm{e}^{iz}$ e $B(z) = 1 + z^4$, abbiamo $f(z) = A(z)/B(z)$ e

$$R[\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4}] = \frac{A(\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4})}{B'(\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4})} = \frac{i + \mathrm{e}^{i\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4}}}{4\,\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}} = -\frac{i + \mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}+i/\sqrt{2}}}{4}\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4}\,,$$

$$R[\,\mathrm{e}^{i\,3\pi/4}] = \frac{-i + \mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}-i/\sqrt{2}}}{4}\,\mathrm{e}^{-i\,\pi/4} = -\overline{R[\,\mathrm{e}^{i\,\pi/4}]}$$

Pertanto, guardando le parti reali nei due membri della (8), troviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+\cos x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\Big[1+\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\big(\cos 1/\sqrt{2}+\sin 1/\sqrt{2}\big)\Big]$$

Ex. 59g Osserviamo preliminarmente che l'integrando ha una discontinuità eliminabile in 1 ed è infinitesimo a $+\infty$ di ordine 2; pertanto l'integrale è assolutamente convergente. Inoltre, essendo l'integrando una funzione pari, l'integrale cercato è la metà di quello esteso all'intervallo $]-\infty,+\infty[$. Per calcolare quest'ultimo, consideriamo la funzione ausiliaria $f(z)=\dfrac{z^2+\mathrm{e}^{i\pi z}}{z^4-1}$, la cui parte reale per $z=x\in\mathbb{R}$ si riduce all'integrando. La funzione f è priva di singolarità reali e l'unica singolarità con coefficiente dell'immaginario positivo è un polo semplice in i. Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\mathrm{e}^{i\pi z}}{x^4-1}\,dx = 2\pi i\,R[i]\,. \tag{9}$$

Inoltre $R[i]=(-1+\mathrm{e}^{-\pi})/(4i^3)=(1-\mathrm{e}^{-\pi})/(4i)$ e quindi, guardando le parti reali in (9) (le parti immaginarie sono nulle, com'è chiaro essendo il coefficiente dell'immaginario dell'integrando una funzione dispari), troviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+\cos\pi\,x}{x^4-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\cos\pi\,x}{x^4-1}\,dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-\pi}}{4}\,\pi\,.$$

Ex. 59j La funzione integranda è discontinua in -1; l'integrale è inteso nel senso del valore principale. Per il calcolo, consideriamo la funzione ausiliaria $f(z)=\mathrm{e}^{iz}/(1+z^3)$. Essa ha tre poli del primo ordine negli zeri del denominatore $1+z^3$, vale a dire nelle radici cubiche di -1. Quelli rilevanti per il calcolo sono -1, sull'asse reale, e $\mathrm{e}^{i\pi/3}$, nel semipiano $\operatorname{Im} z>0$. Dunque

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{jz}}{1+z^3}\,dx = 2\pi\,j\,R[\mathrm{e}^{j\,\pi/3}]+\pi\,j\,R[-1]\,.$$

Inoltre $R[-1]=\mathrm{e}^{-j}/3$, $R[\mathrm{e}^{j\pi/3}]=\mathrm{e}^{j\,\mathrm{e}^{j\pi/3}}/(3\,\mathrm{e}^{j2\pi/3})$, quindi

$$\begin{aligned}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x+j\sin x}{1+x^3}\,dx &= \frac{j\pi}{3}\left(\mathrm{e}^{-j}+\frac{2\,\mathrm{e}^{j\,\mathrm{e}^{j\pi/3}}}{\mathrm{e}^{j2\pi/3}}\right)\\ &= \frac{\pi}{3}\left(\mathrm{e}^{j(\pi/2-1)}+2\,\mathrm{e}^{-j\pi/6+\mathrm{e}^{j5\pi/6}}\right).\end{aligned}$$

Infine, uguagliando i coefficienti del'immaginario nei due membri, abbiamo

$$\begin{aligned}\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^3}\,dx &= \frac{\pi}{3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{3}/2}\sin\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= \frac{\pi}{3}\left(\cos 1+\mathrm{e}^{-\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{3}\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)\right)\end{aligned}$$

Ex. 59k L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando è continuo in $\mathbb{R}$ (il punto 1 è una discontinuità eliminabile) ed è $O(1/x^2)$, quindi sommabile, intorno a $\mp\infty$.

Scegliamo la funzione ausiliaria $f(z) = \dfrac{z\, \mathrm{e}^{j\,\pi\, z}}{z^3-1}$, in modo che, per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando sia il coefficiente dell'immaginario di $f(x)$. Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè $\sqrt[3]{1} = z_k = \mathrm{e}^{j\frac{2}{3}\pi\, k}$, con $k = 0, 1, 2$. Sono poli semplici. Essendo il coefficiente nell'esponente positivo, consideriamo i poli con coefficiente dell'immaginario non-negativo e quindi l'integrale si calcola mediante la formula

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,\sin\pi\, x}{x^3-1}\,dx = \operatorname{Im} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Im}\big(\pi\, j\, R[z_0] + 2\,\pi\, j\, R[z_1]\big) \\
&= \pi \operatorname{Re}\big(R[z_0] + 2\, R[z_1]\big).
\end{aligned}
$$

(L'integrale di $f(x)$ va inteso nel senso del valor principale, per la presenza del polo semplice in 1.) Osserviamo inoltre che

$$
R[z_k] = \frac{z\,\mathrm{e}^{j\,\pi\, z}}{3\,z^2}\bigg|_{z=z_k} = \frac{\mathrm{e}^{j\,\pi\, z_k}}{3\, z_k}\,,
$$

quindi $R[z_0] = R[1] = \mathrm{e}^{j\,\pi}/3 = -1/3$ e

$$
\begin{aligned}
R[z_1] = R\left[-\frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] &= \frac{\mathrm{e}^{j\,\pi\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-j\frac{2}{3}\pi}}{3} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - j\frac{7}{6}\pi}}{3} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{j}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
I = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi} = -\frac{\pi}{3}\left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\pi}\right)
$$

Ex. 591 Scegliamo la funzione ausiliaria $f(z) = \dfrac{i\,z - \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2}\,z}}{z^3-1}$, in modo che, per $z = x \in \mathbb{R}$, il coefficiente dell'immaginario di $f(x)$ sia la funzione integranda. Notiamo che f è olomorfa (ha una singolarità eliminabile) in $z = 1$; la funzione presenta nelle altre due radici cubiche dell'unità $\mathrm{e}^{\pm i\,\frac{2}{3}\pi}$ poli semplici. Essendo positivo il coefficiente nell'esponenziale nella definizione di f, applichiamo il teorema dei residui a f sul semicerchio D_R di centro 0 e raggio $R > 1$ formato dai punti z con $\operatorname{Im} z \geq 0$. Per il teorema del grande cerchio, passando al limite per $R \to +\infty$, otteniamo come al solito

$$
I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin\frac{\pi}{2}x}{x^3-1}\,dx = \operatorname{Im}\left(2\,\pi\, i\, R_f[\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi}]\right) = 2\,\pi\ \operatorname{Re}\left(R_f[\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi}]\right)\,.
$$

D'altra parte,

$$
R_f[\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi}] = \frac{i\,z - \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2}\,z}}{3\,z^2}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi}} = \frac{1}{3}\left(i\,\mathrm{e}^{i\,\frac{4}{3}\pi} - \mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi} + i\,\frac{2}{3}\,\pi}\right)
$$

ed essendo

$$
i\,\mathrm{e}^{i\,\frac{4}{3}\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\,, \qquad \mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad i\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\,,
$$

$$
\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi}} = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\,\pi}\,\mathrm{e}^{-i\,\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\,\pi}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\,,
$$

abbiamo

$$R_f[\mathrm{e}^{i\,\frac{2}{3}\pi}] = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\pi}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\pi}\,\frac{1-\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)\,i}{2\sqrt{2}}\right].$$

Pertanto in definitiva

$$I = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3} + \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\pi}\,\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right).$$

Ex. 59n L'integrale converge assolutamente, in quanto l'integrando è continuo in $\mathbb{R}$ ($x = 1/2$ è una discontinuità eliminabile) ed è $O(x^{-3})$ per $x \to \mp\infty$.

Consideriamo la funzione ausiliaria $f(z) = \mathrm{e}^{j\pi z}/(8\,z^3-1)$: per $x \in \mathbb{R}$, l'integrando è la parte reale di $f(x)$; l'integrale cercato sarà la parte reale dell'integrale di $f(x)$ sull'asse reale (quest'ultimo va inteso nel senso del valor principale). Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè le soluzioni dell'equazione $8\,z^3 - 1 = 0$, vale a dire $z_k = \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi k j}}{2}$, con $k = 0, 1, 2$; sono poli semplici. Pertanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\pi\,x}{8\,x^3-1}\,dx = \mathrm{Re}\left(\pi\,j\,R\left[\frac{1}{2}\right] + 2\,\pi\,j\,R\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}}{2}\right]\right)$$

$$= -\pi\ \mathrm{Im}\left(R\left[\frac{1}{2}\right] + 2\,R\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}}{2}\right]\right).$$

D'altra parte, essendo $8\,z_k^3 = 1$, abbiamo

$$R[z_k] = \frac{\mathrm{e}^{j\pi z_k}}{24\,z_k^2} = z_k\,\frac{\mathrm{e}^{j\pi z_k}}{24\,z_k^3} = \frac{z_k\,\mathrm{e}^{j\pi z_k}}{3}\,,$$

quindi

$$R\left[\frac{1}{2}\right] = R[z_0] = \frac{\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}}}{6} = \frac{j}{6}\,, \qquad R\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}}{2}\right] = R[z_1] = \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}\ \mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}}}{6}\,.$$

Inoltre, essendo $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,j$, $j\,\dfrac{\pi}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j} = -j\,\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\pi$,

$$\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}\ \mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\ \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi j}\ \mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{4}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\,\pi} = \mathrm{e}^{\frac{5}{12}\pi j - \frac{\sqrt{3}}{4}\,\pi}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\,\pi}\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + j\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right),$$

abbiamo infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi\, x}{8\, x^3 - 1}\, dx = -\frac{\pi}{6}\, \mathrm{Im} \left\{ j + 2\, \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi} \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + j\, \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right) \right\}$$

$$= -\frac{\pi}{6} \left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi} \sqrt{2+\sqrt{3}} \right).$$

Ex. 59o Osserviamo che l'integrale è assolutamente convergente.

Dalla uguaglianza $(\cos x + i\, \sin x)^3 = \cos 3x + i\, \sin 3x$, ricaviamo $\sin^3 x = (3 \sin x - \sin 3x)/4 = \mathrm{Im}\big((3\, \mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{3ix})/4\big)$. Per il calcolo dell'integrale, è allora naturale considerare la funzione $z \mapsto (3\, \mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{3iz})/z^3$; d'altra parte, tale funzione ha in 0 un polo di ordine 3 e quindi non può essere utilizzata. Consideriamo invece la funzione $f(z) = (3\, \mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{3iz} - 2)/z^3$, che ha in 0 un polo semplice; per $z = x$ reale, f differisce dalla precedente solo per la parte reale e non per il coefficiente dell'immaginario, che interessa per l'integrale. Considerando il dominio $0 \le \vartheta = \arg z \le \pi$, $\varepsilon \le |z| \le R$, con la solita tecnica basata sul teorema dei residui, otteniamo l'uguaglianza

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\, \mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{3ix} - 2}{x^3}\, dx = 3\pi\, i$$

(dove v.p. è necessario per la parte reale dell'integrando), da cui uguagliando i coefficienti dell'immaginario nei due membri ricaviamo subito il risultato. Notiamo che, per $x \in \mathbb{R}$, la funzione $\mathrm{Re}\, f(x)$ è dispari, quindi ha integrale nullo, in accordo col fatto che il valore trovato per l'integrale di $f(x)$ è immaginario.

Ex. 59p Esprimendo $\sin 2x$ con le formule di Eulero, l'integrale cercato diviene

$$\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{3ix}}{1+x^2}\, dx - \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ix}}{1+x^2}\, dx\,. \tag{10}$$

Per il primo integrale scegliamo il dominio D indicato in figura e la funzione ausiliaria $f(z) = \mathrm{e}^{3iz}/(1+z^2)$, mentre per il secondo scegliamo il dominio D' e la funzione $g(z) = \mathrm{e}^{-iz}/(1+z^2)$. Passando al limite per $R \to +\infty$, vediamo che l'integrale cercato vale

$$\pi\big(R_f[i] + R_g[-i]\big) = \pi \frac{\mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{-1}}{2i}\,.$$

Per evitare di calcolare due integrali su cammini diversi, osserviamo che mutando x in $-x$ nell'ultimo integrale di (10), l'integrale cercato diviene

$$\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{ix}}{1+x^2}\, dx\,, \tag{11}$$

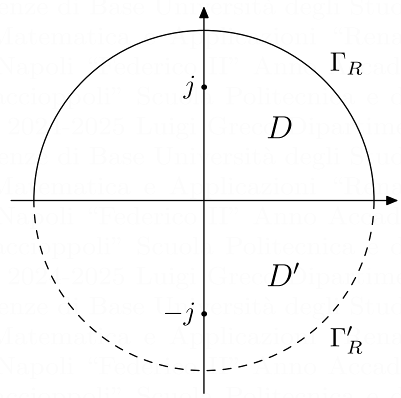
che si può calcolare scegliendo come dominio D e funzione ausiliaria $h(z) = (\mathrm{e}^{3iz} - \mathrm{e}^{iz})/(1+z^2)$. Alternativamente scriviamo e^{ix} nell'integrando mediante la formula di Eulero; l'integrale cercato diviene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos x + i \sin x) \sin 2x}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\, \sin x\, \sin 2x}{1+x^2}\, dx$$

poiché $(\cos x \sin 2x)/(1+x^2)$ è una funzione dispari. Essendo $2\, \sin x\, \sin 2x = \cos x - \cos 3x$, l'integrale cercato è

$$\frac{i}{2}\, \mathrm{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{3ix}}{1+x^2}\, dx\,;$$

questa espressione coincide con (11).



Ex. 59q Ricordando le formule di duplicazione, con la sostituzione $t = 2x$ ed usando le formule di Eulero, l'integrale cercato I si riscrive

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{2+\sin t}{3+\cos t}\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{4i + \mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{6 + \mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2it} + 4i\,\mathrm{e}^{it} - 1}{\mathrm{e}^{2it} + 6\,\mathrm{e}^{it} + 1}\,dt\,.$$

Pertanto, con l'ulteriore sostituzione $z = \mathrm{e}^{it}$, arriviamo ad un integrale curvilineo, esteso alla circonferenza unitaria

$$I = -\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 4i\,z - 1}{z\,(z^2+6z+1)}\,dz\,.$$

La funzione integranda ha poli semplici nei punti 0, $-3 \mp 2\sqrt{2}$, quindi per il teorema dei residui abbiamo $I = -\pi\, i\big(R[0] + R[-3+2\sqrt{2}]\big)$. Essendo $R[0] = -1/1 = -1$ e

$$R[-3+2\sqrt{2}] = \left.\frac{(z^2+4i\,z-1)/z}{(z^2+6z+1)'}\right|_{z=-3+2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{9 - 12\sqrt{2} + 8 + 4i\,(-3+2\sqrt{2}) - 1}{(-3+2\sqrt{2})\,(-6+4\sqrt{2}+6)}$$

$$= \frac{4 - 3\sqrt{2} + i(-3+2\sqrt{2})}{4-3\sqrt{2}} = 1 + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

troviamo infine $I = \pi/\sqrt{2}$.

Notiamo che l'integrale si calcola molto facilmente in maniera elementare.

Ex. 59r L'integrale è assolutamente convergente, poiché la funzione integranda risulta $O\big(1/x^3\big)$ per $x \to \mp\infty$, in $x = 0$ ha una discontinuità eliminabile ed è continua altrove.

Mediante le formule di bisezione, riscriviamo l'integrale da calcolare come segue

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x + x\sin x}{x^4 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x + 2x\sin x}{x^4+x^2}\,dx$$

ed osservando che $1-\cos 2x+2x\sin x = \operatorname{Re}(1-\mathrm{e}^{2ix}-2ix\ \mathrm{e}^{ix})$, consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{1-\ \mathrm{e}^{2iz} - 2iz\ \mathrm{e}^{iz}}{z^4+z^2}\,.$$

Gli zeri del denominatore sono 0, di ordine due, e $\mp i$, semplici. Il punto $z=0$ è pure zero semplice del numeratore e quindi 0 è polo semplice per f. I punti $\mp i$ non annullano l'espressione a numeratore, dunque sono poli semplici per f. Consideriamo il dominio D formato dai punti $z\in\mathbb{C}$ tali che $\varepsilon\le|z|\le\rho$ e $\operatorname{Im} z\ge 0$, dove $0<\varepsilon<1<\rho$ in modo che i sia interno a D, ed integriamo f lungo la frontiera; per il teorema dei residui, troviamo l'uguaglianza

$$\begin{aligned}(x)\int_{-\rho}^{-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + (x)\int_{\varepsilon}^{\rho} f(x)\,dx + \int_{\Gamma_\rho} f(z)\,dz\\ = \int_{\partial D} f(z)\,dz = 2\pi i\, R_f[i]\,,\end{aligned}\tag{12}$$

dove γ_ε e Γ_ρ sono le semicirconferenze nel semipiano $\operatorname{Im} z\ge 0$, di centro 0 e raggi ε e ρ, rispettivamente, mentre gli altri integrali sono estesi a segmenti dell'asse reale. Per il teorema del grande cerchio, l'integrale esteso a Γ_ρ è infinitesimo per $\rho\to+\infty$. Essendo $z\,f(z)$ convergente a $-4i$ per $z\to 0$, per il teorema del piccolo cerchio l'integrale esteso a γ_ε converge a $-\pi i(-4i)=-4\pi$ per $\varepsilon\to 0$. La somma dei due integrali calcolati lungo l'asse reale in (12) converge a v.p. $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. D'altra parte, poiché

$$R_f[i] = \left.\frac{1-\ \mathrm{e}^{2iz}-2iz\ \mathrm{e}^{iz}}{4z^3+2z}\right|_{z=i} = \frac{1-\ \mathrm{e}^{-2}+2\ \mathrm{e}^{-1}}{-2i}\,,$$

mediante il passaggio al limite per $\varepsilon\to 0$ e $\rho\to+\infty$, da (12) otteniamo

$$\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 4\pi - \pi\left(1-\ \mathrm{e}^{-2}+2\ \mathrm{e}^{-1}\right)$$

da cui ricaviamo

$$I = \frac{\pi}{2}\left(3+\ \mathrm{e}^{-2}-2\ \mathrm{e}^{-1}\right).$$

Notiamo che

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} f(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x + x\cos x}{x^4+x^2}\,dx = 0\,,$$

poiché l'integrando è una funzione dispari, in accordo col fatto che l'integrale di $f(x)$ è reale.

Ex. 59t Usando le formule di Eulero, l'integrando si riscrive

$$\begin{aligned}\frac{4\sin^2 x+\ \mathrm{e}^{2ix}}{2+\cos x} &= \frac{4\left(\dfrac{\mathrm{e}^{ix}-\ \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^2+\ \mathrm{e}^{2ix}}{2+\dfrac{\mathrm{e}^{ix}+\ \mathrm{e}^{-ix}}{2}} = 2\,\frac{2-\ \mathrm{e}^{-2ix}}{4+\ \mathrm{e}^{ix}+\ \mathrm{e}^{-ix}}\\ &= 2\,\frac{2\,\mathrm{e}^{2ix}-1}{(\,\mathrm{e}^{2ix}+4\,\mathrm{e}^{ix}+1)\ \mathrm{e}^{ix}}\end{aligned}$$

e quindi, effettuando la sostituzione $\mathrm{e}^{ix} = z$, da cui $dx = (iz)^{-1}\,dz$, l'integrale cercato I diviene

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2 x + \mathrm{e}^{2ix}}{2+\cos x}\,dx = \frac{2}{i}\int_{|z|=1} \frac{2z^2-1}{(z^2+4z+1)\,z^2}\,dz\,.$$

La funzione integranda f nell'ultimo membro ha un polo doppio in $z = 0$ e poli semplici negli zeri di z^2+4z+1 vale a dire nei punti $z = -2 \mp \sqrt{3}$. Osserviamo che $|-2+\sqrt{3}| < 1$, mentre $|-2-\sqrt{3}| > 1$. Per il teorema dei residui, risulta dunque $I = 4\pi\big(R_f[0] + R_f[-2+\sqrt{3}]\big)$. D'altra parte, risulta $R_f[0] + R_f[-2+\sqrt{3}] + R_f[-2-\sqrt{3}] + R_f[\infty] = 0$ ed è subito visto che $R_f[\infty] = 0$. Dunque $I = -4\pi\,R_f[-2-\sqrt{3}]$. Essendo

$$R_f[-2-\sqrt{3}] = \frac{(2z^2-1)/z^2}{(z^2+4z+1)'}\bigg|_{z=-2-\sqrt{3}} = \frac{2(2+\sqrt{3})^2-1}{(2+\sqrt{3})^2\,(-4-2\sqrt{3}+4)}$$

$$= -\frac{13+8\sqrt{3}}{\sqrt{3}(14+8\sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{7+4\sqrt{3}} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48} - 2\right) = \frac{5-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

abbiamo $I = 2\pi\,(12-5\sqrt{3})/3$.

Ex. 59u Risulta

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{\sin^2 x - \mathrm{e}^{2ix}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2x}{\frac{1-\cos 2x}{2} - \mathrm{e}^{2ix}}\,dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1-\cos t - 2\,\mathrm{e}^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\mathrm{e}^{it}-\mathrm{e}^{-it}}{2i}}{1 - \frac{\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it}}{2} - 2\,\mathrm{e}^{it}}\,dt$$

$$= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2it}-1}{2\,\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{2it} - 1 - 4\,\mathrm{e}^{2it}}\,dt = i\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{2it}-1}{5\,\mathrm{e}^{2it} - 2\,\mathrm{e}^{it} + 1}\,dt$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{z^2-1}{z(5z^2-2z+1)}\,dz\,.$$

Per il teorema dei residui, I è dunque uguale a $2\pi i$ per la somma dei residui nei poli della funzione integranda nell'ultimo membro, che cadono nel cerchio unitario. Poiché $|z| \geq 1$ implica che $|5z^2-2z+1| \geq 5-2-1 > 0$, tutti i poli cadono nel cerchio e quindi

$$I = 2\pi i\big(-R[\infty]\big) = 2\pi i \lim_{z\to\infty} z\,\frac{z^2-1}{z(5z^2-2z+1)} = \frac{2\pi i}{5}\,.$$

Ex. 59v L'integrale converge assolutamente, essendo l'integrando continuo in $\mathbb{R}$ ($x = -5/2$ è discontinuità eliminabile) e $O(x^{-3})$ per $x \to \mp\infty$. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{j\pi z}}{(2\,z+5)\,(z^2+2\,z+2)}\,,$$

la cui parte reale, per $z = x \in \mathbb{R}$, si riduce all'integrando. Le singolarità (al finito) di f sono gli zeri del denominatore, cioè $-5/2$ e $-1 \mp j$, che sono poli semplici. Quindi l'integrale si calcola secondo la formula

$$I = \mathrm{Re}\left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\right] = \pi \ \mathrm{Re}\left(j\, R[-5/2] + 2j\, R[-1+j]\right).$$

(L'integrale di f va inteso nel senso del valor principale, per la presenza del polo semplice reale $-5/2$.) Inoltre

$$R[-5/2] = \left.\frac{\mathrm{e}^{j\pi\, z}}{2\,(z^2 + 2\,z + 2)}\right|_{z=-5/2} = \frac{\mathrm{e}^{-j\,\frac{5}{2}\,\pi}}{2\,(\frac{25}{4} - 5 + 2)} = -\frac{2j}{13}$$

e, similmente,

$$R[-1+j] = \left.\frac{\mathrm{e}^{j\pi\, z}}{(2\,z + 5)\,(2\,z + 2)}\right|_{z=-1+j} = \frac{\mathrm{e}^{j\,\pi\,(-1+j)}}{(3 + 2j)\,2j} = \frac{2 + 3j}{26\ \mathrm{e}^{\pi}}.$$

Pertanto l'integrale vale

$$I = \pi\ \mathrm{Re}\left(\frac{2}{13} + 2\,\frac{2j - 3}{26\ \mathrm{e}^{\pi}}\right) = \frac{\pi}{13}\,(2 - 3\ \mathrm{e}^{-\pi}).$$

Ex. 59w L'integrale converge assolutamente, essendo l'integrando continuo in $\mathbb{R}$ ($x = -3$ è discontinuità eliminabile) e $O(x^{-3})$ per $x \to \mp\infty$. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,z}}{(z + 3)\,(z^2 + 6\,z + 10)},$$

la cui parte reale, per $z = x \in \mathbb{R}$, si riduce all'integrando. Le singolarità (al finito) di f sono gli zeri del denominatore, cioè -3 e $-3 \mp j$, che sono poli semplici. Quindi l'integrale si calcola secondo la formula

$$I = \mathrm{Re}\left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx\right] = \pi\ \mathrm{Re}\left(j\, R[-3] + 2j\, R[-3+j]\right).$$

(L'integrale di f va inteso nel senso del valor principale, per la presenza del polo semplice reale -3.) Inoltre

$$R[-3] = \left.\frac{\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,z}}{z^2 + 6\,z + 10}\right|_{z=-3} = j\,,$$

$$R[-3+j] = \left.\frac{\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,z}}{(z + 3)\,(2\,z + 6)}\right|_{z=-3+j} = -\frac{j}{2\ \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}.$$

e dunque l'integrale vale $I = \pi\,(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} - 1)$.

Come visto, v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ è reale. In effetti, essendo $x^2 + 6\,x + 10 = (x+3)^2 + 1$, abbiamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}\, f(x)\, dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{2}\,(x - 3)}{x\,(x^2 + 1)}\, dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{2}\,x}{x\,(x^2 + 1)}\, dx$$

è nullo poiché l'integrando è funzione dispari.

Ex. 59x L'integrale converge assolutamente, essendo l'integrando continuo in $\mathbb{R}$ ($x = 1$ è discontinuità eliminabile) e $O(x^{-4})$ per $x \to \mp\infty$. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{1 + \mathrm{e}^{j\pi\, z}}{(z-1)^2(z^2+1)}\,,$$

la cui parte reale, per $z = x \in \mathbb{R}$, si riduce all'integrando. Le singolarità (al finito) di f sono gli zeri del denominatore, cioè 1 e $\mp j$, che sono poli semplici. Quindi l'integrale si calcola secondo la formula

$$I = \mathrm{Re}\left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right] = \pi\ \mathrm{Re}\big(j\,R[1] + 2j\,R[j]\big)\,.$$

(L'integrale di f va inteso nel senso del valor principale, per la presenza del polo semplice reale 1.) Inoltre

$$R[1] = \lim_{z\to 1} \frac{1 + \mathrm{e}^{j\pi\, z}}{z-1}\, \frac{1}{z^2+1} = -\frac{j\pi}{2}\,,$$

$$R[j] = \frac{1 + \mathrm{e}^{j\pi\, j}}{(j-1)^2\, 2j} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi}}{4}\,.$$

Pertanto l'integrale vale $I = \pi^2/2$.

Ex. 59y L'integrale è analogo a quello dell'Ex. 59x. Esso converge assolutamente, essendo l'integrando continuo in $\mathbb{R}$ ($x = 3/2$ è discontinuità eliminabile) e $O(x^{-4})$ per $x \to \mp\infty$. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{j + \mathrm{e}^{j\pi\, z}}{(2\,z-3)^2(z^2+1)}\,,$$

il cui coefficiente dell'immaginario, per $z = x \in \mathbb{R}$, si riduce all'integrando. Le singolarità (al finito) di f sono gli zeri del denominatore, cioè $3/2$ e $\mp j$, che sono poli semplici. Quindi l'integrale si calcola secondo la formula

$$\begin{aligned} I &= \mathrm{Im}\left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right] = \pi\ \mathrm{Im}\big(j\,R[3/2] + 2j\,R[j]\big) \\ &= \pi\ \mathrm{Re}\big(R[3/2] + 2\,R[j]\big)\,. \end{aligned}$$

(L'integrale di f va inteso nel senso del valor principale, per la presenza del polo semplice reale $3/2$.) Inoltre

$$R[3/2] = \lim_{z\to 3/2} \frac{j + \mathrm{e}^{j\pi\, z}}{2\,(2\,z-3)}\, \frac{1}{z^2+1} = \frac{2}{13} \lim_{z\to 3/2} \frac{j\pi\ \mathrm{e}^{j\pi\, z}}{2} = \frac{\pi}{13}$$

e

$$\begin{aligned} R[j] &= \frac{j + \mathrm{e}^{j\pi\, j}}{(2j-3)^2\, 2j} = \frac{j + \mathrm{e}^{-\pi}}{2\,(5j+12)} = \frac{(j + \mathrm{e}^{-\pi})\,(12-5j)}{338} \\ &= \frac{5 + 12\ \mathrm{e}^{-\pi} + j\,(12 - 5\ \mathrm{e}^{-\pi})}{338}\,. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale vale

$$I = \frac{\pi^2}{13} + \frac{\pi}{169}\,(5 + 12\ \mathrm{e}^{-\pi})\,.$$

Ex. 59z L'integrale converge assolutamente, essendo l'integrando continuo in $\mathbb{R}$ e $O(x^{-4})$ per $x \to \mp\infty$. Per il calcolo, consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{jz}}{z^4 - 6\,z^2 + 25}\,,$$

la cui parte reale, per $z = x \in \mathbb{R}$, si riduce all'integrando. Le singolarità (al finito) di f sono gli zeri del denominatore, cioè $\mp(2+j)$ e $\mp(2-j)$, che sono poli semplici. Pertanto l'integrale vale

$$I = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi\ \operatorname{Re}\big(j\,R[2+j] + j\,R[-2+j]\big)\,.$$

Inoltre

$$R[\pm 2+j] = \left.\frac{\mathrm{e}^{jz}}{4\,z^3 - 12\,z}\right|_{z=\pm 2+j} = \frac{\mathrm{e}^{-1\pm 2j}}{4\,(\pm 2+j)\big[(\pm 2+j)^2 - 3\big]}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-1\pm 2j}}{4\,(\pm 2+j)\,(\pm 4j)} = \frac{\mathrm{e}^{-1\pm 2j}}{16\,(\mp 1+2j)} = \frac{(\mp 1 - 2j)\ \mathrm{e}^{\pm 2j}}{80\ \mathrm{e}}$$

e quindi

$$R[2+j] + R[-2+j] = \frac{-(1+2j)\ \mathrm{e}^{2j} + (1-2j)\ \mathrm{e}^{-2j}}{80\ \mathrm{e}}$$

$$= \frac{-(\,\mathrm{e}^{2j} - \,\mathrm{e}^{-2j}) - 2j(\,\mathrm{e}^{2j} + \,\mathrm{e}^{-2j})}{80\ \mathrm{e}}$$

$$= -j\,\frac{\sin 2 + 2\cos 2}{40\ \mathrm{e}}\,.$$

Dunque $I = \frac{\pi}{20\,\mathrm{e}}(\sin 2 + 2\cos 2)$. Concludiamo notando che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ è reale, in accordo col fatto che il coefficiente dell'immaginario di $f(x)$ è funzione dispari e quindi ha integrale nullo.

Ex. 59a$_1$ L'integrale è analogo a quello dell'Ex. 59z. Esso è assolutamente convergente. La funzione ausiliaria $f(z) = \mathrm{e}^{jz}/(z^4 - 16\,z^2 + 100)$ ha i poli semplici $\mp(3+j)$ e $\mp(3-j)$ e risultando

$$R[\pm 3+j] = \left.\frac{\mathrm{e}^{jz}}{4\,z^3 - 32\,z}\right|_{z=\pm 3+j} = \frac{\mathrm{e}^{-1\pm 3j}}{4\,(\pm 3+j)\big[(\pm 3+j)^2 - 8\big]}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-1\pm 3j}}{4\,(\pm 3+j)\,(\pm 6j)} = \frac{\mathrm{e}^{-1\pm 3j}}{24\,(\mp 1+3j)} = \frac{(\mp 1 - 3j)\ \mathrm{e}^{\pm 3j}}{240\ \mathrm{e}}\,,$$

l'integrale vale

$$I = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi\ \operatorname{Re}\big(j\,R[3+j] + j\,R[-3+j]\big) = \frac{\pi}{60\ \mathrm{e}}(\sin 3 + 3\cos 3)\,.$$

Ex. 59b$_1$ Mediante la sostituzione $z = \mathrm{e}^{jx}$, l'integrale cercato I si trasforma nel seguente

$$I = -\frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{(1+j)\,z^2 - (1-j)}{(5\,z + 2j\,z^2 - 2j)^2}\,dz = \frac{1+j}{8}\int_{|z|=1} \frac{z^2 + j}{(z^2 - \frac{5}{2}j\,z - 1)^2}\,dz\,.$$

(Notiamo che $-(1-j) = j^2(1-j) = j\,(1+j)$.) Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore, vale a dire $j/2$ e $2j$, che risultano poli doppi. Pertanto l'integrale vale $I = \frac{1+j}{8}\,2\pi j\,R[j/2]$. Essendo inoltre

$$R[j/2] = D\,\frac{z^2+j}{(z-2j)^2}\bigg|_{z=j/2} = \frac{2z\,(z-2j) - 2(z^2+j)}{(z-2j)^3}\bigg|_{z=j/2}$$

$$= \frac{j\,(-3j/2) + 1/2 - 2j}{(-3j/2)^3} = -\frac{16}{27}\,(1+j)\,,$$

troviamo infine $I = \pi\,8/27$.

Per semplificare leggermente il calcolo, potevamo osservare preventivamente che ovviamente risulta

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{(5-4\sin x)^2}\,dx = 0\,.$$

Ex. 59c$_1$ Mediante la sostituzione $z = \mathrm{e}^{jx}$, l'integrale cercato I si trasforma nel seguente

$$I = 2j\int_{|z|=1} \frac{z^2+2\,z+1}{3\,z^4-10\,z^2+3}\,dz = 2j\int_{|z|=1} \frac{(z+1)^2}{3\,z^4-10\,z^2+3}\,dz\,.$$

Le singolarità dell'integrando sono gli zeri del denominatore, vale a dire $\mp\sqrt{3}$ e $\mp 1/\sqrt{3}$, che risultano poli semplici. Pertanto l'integrale vale

$$I = 2j\times 2\pi j\,(R[1/\sqrt{3}] + R[-1/\sqrt{3}]) = -4\pi\,(R[1/\sqrt{3}] + R[-1/\sqrt{3}])\,.$$

Essendo inoltre

$$R[\mp 1/\sqrt{3}] = \frac{(z+1)^2}{(12\,z^2-20)\,z}\bigg|_{z=\mp 1/\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}\mp 1)^2/3}{\pm 16/\sqrt{3}} = \pm\frac{1}{4\sqrt{3}} - \frac{1}{8}\,,$$

quindi $R[1/\sqrt{3}] + R[-1/\sqrt{3}] = -1/4$, troviamo infine $I = \pi$.

Per semplificare leggermente il calcolo, potevamo osservare preventivamente che ovviamente risulta

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin^2 x}\,dx = 0\,.$$

Ex. 59d$_1$ L'integrale converge assolutamente, poiché l'integrando è continuo in $\mathbb{R}$ (il punto 0 è una discontinuità eliminabile) e per $x \to \mp\infty$ risulta $O(x^{-5})$. Scegliamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{j\pi z}}{z\,(z^4-10\,z^2+169)}$$

il cui coefficiente dell'immaginario, per $z = x \in \mathbb{R}$ coincide con l'integrando. Le singolarità di f sono gli zeri del denominatore, cioè $z=0$ e le radici dell'equazione biquadratica $z^4 - 10\,z^2 + 169 = 0$, ovvero $z = \sqrt{5\mp 12\,j} = \mp(3\mp 2\,j)$, dove i segni vanno presi in tutti e quattro i modi possibili; sono tutti poli semplici. Pertanto, com'è noto, l'integrale cercato è

$$\mathrm{Im}\left[\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\right] = \pi\,\mathrm{Im}\Big\{j\,R[0] + 2\,j\,R[-3+2\,j] + 2\,j\,R[3+2\,j]\Big\}$$

$$= \pi\,\mathrm{Re}\Big\{R[0] + 2\,R[-3+2\,j] + 2\,R[3+2\,j]\Big\}\,.$$

(L'integrale di f va inteso nel senso del valor principale, a causa del polo semplice reale $z=0$.) Notiamo che la parte reale di f è funzione dispari e quindi ha integrale nullo su $\mathbb{R}$, dunque v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ è immaginario. D'altra parte

$$R[0] = \left.\frac{\mathrm{e}^{j\pi z}}{z^4 - 10\,z^2 + 169}\right|_{z=0} = \frac{1}{169}$$

e

$$R[\mp 3 + 2\,j] = \left.\frac{(\,\mathrm{e}^{j\pi z})/z}{D(z^4 - 10\,z^2 + 169)}\right|_{z=\mp 3+2\,j} = \left.\frac{\mathrm{e}^{j\pi z}}{4\,z^4 - 20\,z^2}\right|_{z=\mp 3+2\,j}.$$

Tenendo presente che, per $z = \mp 3 + 2\,j$, risulta $z^4 - 10\,z^2 + 169 = 0$, ricaviamo $4\,z^4 - 20\,z^2 = 4\,(5\,z^2 - 169)$ e quindi

$$\begin{aligned} R[\mp 3 + 2\,j] &= \left.\frac{\mathrm{e}^{j\pi z}}{4\,(5\,z^2 - 169)}\right|_{z=\mp 3+2\,j} = \frac{\mathrm{e}^{j\pi(\mp 3+2\,j)}}{4\,[5\,(\mp 3 + 2\,j)^2 - 169]} \\ &= \frac{-\,\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\,[5\,(5 \mp 12\,j) - 169]} = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{48\,(12 \mp 5\,j)} = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}\,(12 \pm 5\,j)}{48 \times 169} \end{aligned}$$

ed ancora

$$R[-3 + 2\,j] + R[3 + 2\,j] = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}\,(12 + 5\,j)}{48 \times 169} + \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}\,(12 - 5\,j)}{48 \times 169} = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{2 \times 169}.$$

Osserviamo che, in accordo con quanto detto, $R[0] + R[-3 + 2\,j] + R[3 + 2\,j]$ è reale. In definitiva,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\,x}{x\,(x^4 - 10\,x^2 + 169)}\,dx = \frac{\pi}{169}\,(1 + \mathrm{e}^{-2\pi}).$$

Ex. 59e$_1$ Osserviamo che l'integrando è funzione pari, quindi l'integrale cercato è la metà dell'integrale esteso all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Posto $z = \mathrm{e}^{i\,t}$, abbiamo $dz = i\,\mathrm{e}^{i\,t}\,dt = i\,z\,dt$ e quando t varia tra $-\pi$ e π, z descrive la cinconferenza $|z| = 1$ in verso antiorario. Mediante la formula di Eulero scriviamo $\cos t = (z + 1/z)/2$ e l'integrale si trasforma quindi come segue:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{(5 - 3\,\cos t)\,(5 - 4\,\cos t)} &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z\,(10 - 3\,z - 3/z)\,(5 - 2\,z - 2/z)} \\ &= \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(3\,z^2 - 10\,z + 3)\,(2\,z^2 - 5\,z + 2)} \end{aligned}$$

La funzione integranda nell'ultimo termine ha poli semplici nei punti 1/3, 3, 1/2, 2, che annullano il denominatore. Per il teorema dei residui, il valore dell'integrale è dunque $2\,\pi\big(R[1/3] + R[1/2]\big)$. Essendo

$$\begin{aligned} R[1/3] &= \left.\frac{z}{2\,z^2 - 5\,z + 2}\,\frac{1}{6\,z - 10}\right|_{z=1/3} \\ &= \frac{1/3}{2/9 - 5/3 + 2}\,\frac{1}{2 - 10} = \frac{3}{(2 - 15 + 18)\,(-8)} = -\frac{3}{40} \end{aligned}$$

e analogamente $R[1/2] = 2/15$, l'integrale vale $\pi\big(4/15 - 3/20\big) = 7\,\pi/60$.

È anche possibile calcolare l'integrale "decomponendo l'integrando in fratti", come indicato nell'esercizio 58.

Ex. 59g$_1$ Procediamo direttamente con la sostituzione $z = \mathrm{e}^{jx}$; l'integrale si trasforma nel seguente

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1 + \dfrac{z - 1/z}{2j}}{4 + 21\left(\dfrac{z+1/z}{2}\right)^2} \, \frac{dz}{jz} = -2\int_{|z|=1} \frac{z^2 + 2jz - 1}{21z^4 + 58z^2 + 21}\, dz\,.$$

Le singolarità dell'integrando sono i poli semplici $\mp\sqrt{\frac{3}{7}}j$ e $\mp\sqrt{\frac{7}{3}}j$, quindi

$$I = -4\pi j\left(R\left[\sqrt{\frac{3}{7}}\,j\right] + R\left[-\sqrt{\frac{3}{7}}\,j\right]\right).$$

Essendo inoltre

$$R\left[\sqrt{\frac{3}{7}}\,j\right] = \frac{z^2 + 2jz - 1}{84z^3 + 116z}\bigg|_{z=\sqrt{\frac{3}{7}}\,j} = \frac{-\frac{3}{7} - 2\sqrt{\frac{3}{7}} - 1}{4\sqrt{\frac{3}{7}}\,j\left(-21\,\frac{3}{7} + 29\right)} = \frac{-\frac{5}{7} - \sqrt{\frac{3}{7}}}{2\sqrt{\frac{3}{7}}\,j\,20} = -\frac{5\sqrt{\frac{7}{3}} + 1}{40j}$$

e similmente

$$R\left[-\sqrt{\frac{3}{7}}\,j\right] = \frac{5\sqrt{\frac{7}{3}} - 1}{40j}$$

troviamo infine

$$I = -4\pi j\left(-\frac{2}{40j}\right) = \frac{\pi}{5}\,.$$

Calcoliamo ora l'integrale riducendo i calcoli con qualche osservazione. Iniziamo notando che il termine $\sin x$ a numeratore dà contributo nullo: per la periodicità, possiamo sostituire all'intervallo di integrazione $[0, 2\pi]$ l'intervallo $[-\pi, \pi]$, e poi osserviamo che $\frac{\sin x}{4+21\cos^2 x}$ è dispari. Usando la formula di bisezione, abbiamo quindi

$$I = 2\int_0^{2\pi} \frac{dx}{29 + 21\cos 2x} = 2\int_0^{2\pi} \frac{dx}{29 + 21\cos x}\,,$$

l'ultima uguaglianza valendo per la periodicità dell'integrando. A questo punto possiamo usare la formula (VII.2.4) delle Lezioni:

$$I = \frac{4\pi}{\sqrt{29^2 - 21^2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{400}} = \frac{\pi}{5}\,.$$

Come ulteriore possibilità, scriviamo nel denominatore $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \sin x}{25 - 21\sin^2 x}\, dx = \int_0^{2\pi} \mathscr{R}(\sin x)\, dx\,,$$

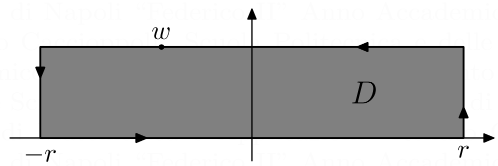
dove $\mathscr{R}(w) = \frac{1+w}{25-21w^2}$. A questo punto usiamo l'esercizio 58. Le singolarità di $\mathscr{R}$ sono i poli semplici $\mp\frac{5}{\sqrt{21}}$ e risulta

$$R\left[\mp\frac{5}{\sqrt{21}}\right] = \frac{\pm\sqrt{21} - 5}{210}\,,$$

quindi

$$
\begin{aligned}
I &= -2\pi\left(\frac{-\sqrt{21}-5}{210}\,\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{21}-1}}+\frac{\sqrt{21}-5}{210}\,\frac{-1}{\sqrt{\frac{25}{21}-1}}\right)\\
&= \frac{2\pi}{210}\,\frac{\sqrt{21}}{2}\,(\sqrt{21}+5+\sqrt{21}-5)=\frac{2\pi}{210}\,21=\frac{\pi}{5}\,.
\end{aligned}
$$

Ex. 60 L'espressione $F(w)$ è l'integrale della funzione intera $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ lungo la retta orizzontale passante per w, che è rappresentata dall'equazione $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$. Osserviamo innanzitutto che l'integrale è assolutamente convergente e ovviamente $F(w)$ non dipende da $\operatorname{Re} w$, vale a dire è costante su ogni retta orizzontale, ad esempio sull'asse reale. Per w non reale, scriviamo $w = u+j\,v$ in forma algebrica e applichiamo il teorema di Cauchy a f sul rettangolo D di vertici r, $r+j\,v$, $-r+j\,v$, $-r$, dove $r > 0$:



(la figura è relativa al caso $v > 0$). In tal modo abbiamo

$$
\int_{+FD} \mathrm{e}^{-z^2}\,dz = 0\,. \tag{13}
$$

Notiamo che gli integrali sui lati orizzontali hanno versi di percorrenza opposti, mentre è facile mostrare che gli integrali sui lati verticali sono infinitesimi per $r \to +\infty$. Ad esempio, scrivendo $z = x+j\,y$ in forma algebrica, sul lato verticale destro risulta $x = r$ e y compreso tra 0 e v, quindi $|\,\mathrm{e}^{-z^2}| = \mathrm{e}^{-\operatorname{Re} z^2} = \mathrm{e}^{y^2-r^2} \le \mathrm{e}^{v^2}\,\mathrm{e}^{-r^2}$, da cui segue

$$
\left|\int_{r+j\,0}^{r+j\,v} \mathrm{e}^{-z^2}\,dz\right| \le |v|\,\mathrm{e}^{v^2}\,\mathrm{e}^{-r^2}
$$

infinitesimo per $r \to +\infty$. Pertanto, passando al limite in (13), troviamo

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+jv)^2}\,dx = 0\,,
$$

che è la tesi. Dunque per ogni $w \in \mathbb{C}$ l'integrale vale $\sqrt{\pi}$, che com'è noto è il valore per $w = 0$.

Osserviamo che possiamo anche estendere il caso banale per $w \in \mathbb{R}$ all'intero piano complesso mediante il II principio di identità, poiché $F(w)$ è funzione intera. Alternativamente e più direttamente, è sufficiente usare le condizioni di Cauchy-Riemann, vista l'indipendenza da $u = \operatorname{Re} w$:

$$
\frac{\partial}{\partial v}\,F(u,v) = j\,\frac{\partial}{\partial u}\,F(u,v) = 0\,.
$$

CAPITOLO XIII

Svolgimenti Trasformazione di Laplace

Ex. 61c Decomponiamo in fratti semplici. Essendo

$$\frac{1}{(t+4)^2(t+16)} = \frac{R[-4]}{t+4} + \frac{c_{-2}[-4]}{(t+4)^2} + \frac{R[-16]}{t+16}$$

e

$$R[-16] = \frac{1}{144}\,, \qquad R[-4] = -R[-16]\,, \qquad c_{-2}[-4] = \frac{1}{12}\,,$$

abbiamo

$$\frac{1}{(t+4)^2(t+16)} = \frac{-1/144}{t+4} + \frac{1/12}{(t+4)^2} + \frac{1/144}{t+16}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{s}{(s^2+4)^2(s^2+16)} &= \frac{1}{144}\left(-\frac{s}{s^2+4} + \frac{12s}{(s^2+4)^2} + \frac{s}{s^2+16}\right)\\ &= \frac{1}{144}\left(-\frac{s}{s^2+4} - 6\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+16}\right).\end{aligned}$$

Pertanto

$$\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2(s^2+16)}\right] = \frac{1}{144}\big(-\cos 2t + 3t\sin 2t + \cos 4t\big)\,u(t)\,.$$

Ex. 62b Tenendo presenti i valori iniziali, calcoliamo la trasformata del primo membro dell'equazione:

$$\mathscr{L}[y'' - 6\,y' + 13\,y] = Y\,s^2 - s - 5 - 6\,(s\,Y - 1) + 13\,Y = (s^2 - 6\,s + 13)\,Y - s + 1\,.$$

Per il secondo membro abbiamo

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{3\,t}\,u(t-5)\right](s) = \mathscr{L}\left[u(t-5)\right](s-3) = \frac{\mathrm{e}^{-5\,(s-3)}}{s-3}$$

e quindi ricaviamo

$$Y = \frac{s-1}{s^2-6\,s+13} + \frac{4\,\mathrm{e}^{-5\,(s-3)}}{(s-3)\,(s^2-6\,s+13)}\,.$$

Per antitrasformare, osserviamo che $s^2 - 6\,s + 13 = (s-3)^2 + 4$ e quindi

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2-6\,s+13}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-3+2}{(s-3)^2+4}\right] = \mathrm{e}^{3\,t}\;\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+4}\right]\\ &= \mathrm{e}^{3\,t}\,(\cos 2\,t + \sin 2\,t)\,u(t)\,.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4\ \mathrm{e}^{-5\,(s-3)}}{(s-3)\,(s^2-6\,s+13)}\right] &= \mathrm{e}^{3\,t}\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4\ \mathrm{e}^{-5\,s}}{s\,(s^2+4)}\right]\\ &= \mathrm{e}^{3\,t}\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4}{s\,(s^2+4)}\right](t-5)\end{aligned}$$

e

$$\frac{4}{s\,(s^2+4)} = \frac{4+s^2-s^2}{s\,(s^2+4)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad u(t)(1-\cos 2\,t)\,.$$

In definitiva

$$y(t) = u(t)\ \mathrm{e}^{3\,t}\,(\cos 2\,t + \sin 2\,t) +\ \mathrm{e}^{3\,t}\big(1-\cos 2\,(t-5)\big)\,u(t-5)\,.$$

Ex. 62c Trasformando ambo i membri dell'equazione e ricavando $Y = \mathscr{L}[y]$, abbiamo

$$Y = \frac{4}{s^2-10\,s+21} + \frac{1}{s^2-10\,s+21}\left(\frac{1}{s-7} - \frac{1}{s-3}\right).$$

Per antitrasformare, osserviamo che

$$\frac{4}{s^2-10\,s+21} = \frac{s-3-(s-7)}{(s-3)\,(s-7)} = \frac{1}{s-7} - \frac{1}{s-3}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2-10\,s+21}\left(\frac{1}{s-7} - \frac{1}{s-3}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-7} - \frac{1}{s-3}\right)^2\\ &= \frac{1/4}{(s-7)^2} - \frac{1/2}{(s-7)\,(s-3)} + \frac{1/4}{(s-3)^2}\\ &= \frac{1/4}{(s-7)^2} - \frac{1/8}{s-7} + \frac{1/8}{s-3} + \frac{1/4}{(s-3)^2}\,.\end{aligned}$$

Pertanto (per $t \geq 0$)

$$y(t) = \frac{7}{8}\,(\ \mathrm{e}^{7\,t} -\ \mathrm{e}^{3\,t}) + \frac{t}{4}\,(\ \mathrm{e}^{7\,t} +\ \mathrm{e}^{3\,t})\,.$$

Ex. 62d Tenendo presenti i valori iniziali, calcoliamo la trasformata del primo membro dell'equazione:

$$\mathscr{L}[y'' - 14\,y' + 65\,y] = s^2 Y - s - 3 - 14\,(s\,Y - 1) + 65\,Y = (s^2 - 14\,s + 65) - s + 11\,,$$

mentre per il secondo membro abbiamo $\mathscr{L}[t\ \mathrm{e}^{7\,t}] = \mathscr{L}[t](s-7) = 1/(s-7)^2$. Quindi ricaviamo Y:

$$Y = \frac{s-11}{s^2-14\,s+65} + \frac{16}{(s-7)^2\,(s^2-14\,s+65)}\,.$$

Per l'antitrasformazione, osserviamo che $s^2 - 14\,s + 65 = (s-7)^2 + 16$. Dunque (sottintendendo $t \geq 0$)

$$\frac{s-11}{s^2-14\,s+65} = \frac{s-7-4}{(s-7)^2+16} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad \mathrm{e}^{7\,t}\,(\cos 4\,t - \sin 4\,t)\,.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{16}{(s-7)^2\,(s^2-14\,s+65)}\right] &= \mathrm{e}^{7\,t}\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{16}{s^2\,(s^2+16)}\right]\\ &= \mathrm{e}^{7\,t}\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{16+s^2-s^2}{s^2\,(s^2+16)}\right] = \mathrm{e}^{7\,t}\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+16}\right]\\ &= \mathrm{e}^{7\,t}\left(t-\frac{1}{4}\,\sin 4\,t\right).\end{aligned}$$

In definitiva

$$y(t) = \mathrm{e}^{7\,t}\,(t+\cos 4\,t-5/4\,\sin 4\,t)\,.$$

Ex. 62e La trasformata del primo membro dell'equazione è

$$s^2 Y - s - 1 - 2(sY-1) + Y = (s^2-2s+1)\,Y - s + 1 = (s-1)^2\,Y - s + 1\,.$$

La trasformata del secondo membro è

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[2(\sin t + t\cos t)\right] &= 2\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+1}\right)\\ &= 2\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{2s^2}{(s^2+1)^2}\right) = \frac{4\,s^2}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

e quindi troviamo

$$Y = \frac{1}{s-1}+\frac{4\,s^2}{(s-1)^2\,(s^2+1)^2}\,.$$

Il primo addendo a secondo membro ha antitrasformata e^t (per $t \ge 0$); per il secondo addendo, osserviamo che risulta

$$\begin{aligned}\frac{4\,s^2}{(s-1)^2\,(s^2+1)^2} &= \frac{(s^2+1)^2-(s^2-1)^2}{(s-1)^2\,(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2}-\frac{(s+1)^2}{(s^2+1)^2}\\ &= \frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s^2+1}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

e quindi (per $t \ge 0$)

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{4\,s^2}{(s-1)^2\,(s^2+1)^2}\right] = t\ \mathrm{e}^t - \sin t - t\sin t\,.$$

Pertanto la soluzione del problema è $y(t) = (1+t)\,(\,\mathrm{e}^t - \sin t)$.

Ex. 62f Ponendo $Y = \mathscr{L}[y]$, scriviamo la trasformata del primo membro come

$$s^2 Y - 5\,s - \sqrt{3} - \frac{5}{\sqrt{3}}\,(s\,Y-5) + 2\,Y = \left(s^2 - \frac{5}{\sqrt{3}}\,s + 2\right)Y - 5\,s + \frac{22}{\sqrt{3}}\,.$$

Per il secondo membro, abbiamo

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[u(t-\pi/3)\,\sin 2\,t\right] &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,s}\,\mathscr{L}\left[\sin(2\,t+2\,\pi/3)\right]\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,s}\,\mathscr{L}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\,t-\frac{1}{2}\sin 2\,t\right] = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,s}}{2}\,\frac{\sqrt{3}\,s-2}{s^2+4}\,.\end{aligned}$$

Notiamo che $s^2 - 5\,s/\sqrt{3} + 2 = (s-\sqrt{3})\,(s-2/\sqrt{3})$ e quindi ricaviamo

$$Y = \frac{5\,s - 22/\sqrt{3}}{(s-\sqrt{3})\,(s-2/\sqrt{3})} + \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,s}}{2}\,\frac{7}{(s^2+4)\,(s-\sqrt{3})}\,.$$

Per antitrasformare, decomponiamo in fratti semplici:

$$\frac{5\,s - 22/\sqrt{3}}{(s-\sqrt{3})\,(s-2/\sqrt{3})} = \frac{R[\sqrt{3}]}{s-\sqrt{3}} + \frac{R[2/\sqrt{3}]}{s-2/\sqrt{3}} = \frac{-7}{s-\sqrt{3}} + \frac{12}{s-2/\sqrt{3}}$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad -7\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}\,t} + 12\,\mathrm{e}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\,t}\,,$$

$$\frac{7}{(s^2+4)\,(s-\sqrt{3})} = \frac{s^2+4+3-s^2}{(s^2+4)\,(s-\sqrt{3})} = \frac{1}{s-\sqrt{3}} - \frac{s+\sqrt{3}}{s^2+4}$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad \mathrm{e}^{\sqrt{3}\,t} - \cos 2\,t - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin 2\,t\,.$$

Pertanto (per $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} y(t) &= -7\,\mathrm{e}^{\sqrt{3}\,t} + 12\,\mathrm{e}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\,t} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,u(t-\pi/3)\,\left[\mathrm{e}^{\sqrt{3}\,(t-\pi/3)} - \cos 2\,(t-\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin 2\,(t-\pi/3)\right]. \end{aligned}$$

Ex. 62g Trasformando ambo i membri dell'equazione, essendo $s^2+2\,s+5 = (s+1)^2+4$ troviamo

$$\mathscr{L}[y] = Y = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{\left[(s+1)^2+4\right]^2}$$

ed usando la formula di Hermite, antitrasformando concludiamo, $\forall t \geq 0$,

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos 2\,t + \frac{1}{8}\,\sin 2\,t - \frac{t}{4}\,\cos 2\,t\right).$$

Ex. 62h Trasformiamo ambo i membri dell'equazione. Ponendo $Y = \mathscr{L}[y]$ e tenendo presenti i valori iniziali, troviamo che la trasformata del primo membro è

$$\mathscr{L}[4\,y'' - 4\,y' + 5\,y] = 4\,(s^2 Y - s - 1/2) - 4\,(s\,Y - 1) + 5\,Y = (4\,s^2 - 4\,s + 5)\,Y - 4\,s + 2\,.$$

La trasformata del secondo membro è

$$\mathscr{L}\left[4\,\mathrm{e}^{t/2}\,\sin t\right](s) = 4\,\mathscr{L}\left[\sin t\right](s-1/2) = \frac{4}{(s-1/2)^2+1}\,.$$

Osservato che risulta $4\,s^2 - 4\,s + 5 = 4\big[(s-1/2)^2+1\big]$, usando anche la formula di Hermite, ricaviamo dunque

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+1} + \frac{1}{\left[(s-1/2)^2+1\right]^2} \\ &= \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+1} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(s-1/2)^2+1} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+1}\right\}\,. \end{aligned}$$

Antitrasformando infine otteniamo (per $t \geq 0$)

$$y = \mathrm{e}^{t/2} \left\{ \cos t + \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t \right\} .$$

Ex. 62i Trasformiamo ambo i membri dell'equazione. Ponendo $Y = \mathscr{L}[y]$ e tenendo presenti i valori iniziali, troviamo che la trasformata del primo membro è

$$\begin{aligned} \mathscr{L}[4\,y'' + 12\,y' + 13\,y] &= 4\,(s^2 Y - s + 1/2) + 12\,(s\,Y - 1) + 13\,Y \\ &= (4\,s^2 + 12\,s + 13)\,Y - 4\,s - 10\,. \end{aligned}$$

La trasformata del secondo membro è

$$\mathscr{L}\left[4\,\mathrm{e}^{-3\,t/2} \cos t\right](s) = 4\,\mathscr{L}\left[\cos t\right](s + 3/2) = 4\,\frac{s + 3/2}{(s + 3/2)^2 + 1}\,.$$

Osservato che risulta $4\,s^2 + 12\,s + 13 = 4\big[(s + 3/2)^2 + 1\big]$, ricaviamo dunque

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s + 5/2}{(s + 3/2)^2 + 1} + \frac{s + 3/2}{\big[(s + 3/2)^2 + 1\big]^2} \\ &= \frac{s + 3/2}{(s + 3/2)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 3/2)^2 + 1} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{1}{(s + 3/2)^2 + 1}\,. \end{aligned}$$

Antitrasformando infine otteniamo (per $t \geq 0$)

$$y = \mathrm{e}^{-3\,t/2} \left\{ \cos t + \sin t + \frac{1}{2}\,t \sin t \right\} .$$

Ex. 62j Trasformando ambo i membri dell'equazione e ricavando Y, troviamo

$$Y = 2\,\frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 16} + \frac{s - 3}{\big[(s - 3)^2 + 16\big]^2} = 2\,\frac{s - 3}{(s - 3)^2 + 16} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{1}{(s - 3)^2 + 16}$$

e quindi (per $t \geq 0$)

$$y(t) = \mathrm{e}^{3\,t} \left(2\,\cos 4\,t + \frac{t}{8}\,\sin 4\,t \right).$$

Ex. 62k Analogo all'Ex. 62j. Trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$s^2 Y - 2\,s - 4 + 10\,(s\,Y - 2) + 74\,Y = (s^2 + 10\,s + 74)\,Y - 2\,s - 24 = \frac{s + 5}{(s + 5)^2 + 49}$$

e quindi, osservando che $s^2 + 10\,s + 74 = (s + 5)^2 + 49$, ricaviamo

$$Y = 2\,\frac{s + 12}{(s + 5)^2 + 49} + \frac{s + 5}{\big[(s + 5)^2 + 49\big]^2} = 2\,\frac{s + 5 + 7}{(s + 5)^2 + 49} - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{1}{(s + 5)^2 + 49}\,.$$

Pertanto, antitrasformando ($t \geq 0$):

$$y(t) = \mathrm{e}^{-5t} \left[2\,\cos 7\,t + \left(2 + \frac{t}{14} \right) \sin 7\,t \right].$$

Ex. 62l Trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$s^2 Y - s - 2 - (s\,Y - 1) - 2\,Y = (s^2 - s - 2)\,Y - s - 1 = 18\,\frac{s - 2}{(s - 2)^2 + 9}$$

e quindi, osservando che $s^2 - s - 2 = (s-2)\,(s+1)$, ricaviamo

$$Y = \frac{1}{s-2} + \frac{18}{(s+1)\big[(s-2)^2+9\big]} \quad \xrightarrow{\ \mathscr{L}^{-1}\ } \quad \mathrm{e}^{2\,t} + \mathrm{e}^{2\,t}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{18}{(s+3)\,(s^2+9)}\right].$$

Inoltre

$$\frac{18}{(s+3)\,(s^2+9)} = \frac{s^2+9+9-s^2}{(s+3)\,(s^2+9)} = \frac{1}{s+3} + \frac{3-s}{s^2+9}\,.$$

Pertanto ($t \geq 0$):

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2\,t}(1 + \sin 3\,t - \cos 3\,t)\,.$$

Ex. 62m Trasformando ambo i membri dell'equazione, abbiamo $(s^2-6\,s+5)\,Y - s + 5 = \mathrm{e}^{-(s-1)}/(s-1)$ ed essendo $s^2 - 6\,s + 5 = (s-1)\,(s-5)$, ricaviamo

$$Y = \frac{1}{s-1} + \frac{\mathrm{e}^{-(s-1)}}{(s-1)^2\,(s-5)} \quad \xrightarrow{\ \mathscr{L}^{-1}\ } \quad \mathrm{e}^t\,u(t) + \mathrm{e}^t\ \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2\,(s-4)}\right](t-1)\,.$$

Inoltre

$$\frac{1}{s^2\,(s-4)} = \frac{1}{16}\,\frac{s^2+16-s^2}{s^2\,(s-4)} = \frac{1}{16\,(s-4)} - \frac{s+4}{16\,s^2} = \frac{1}{16\,(s-4)} - \frac{1}{16\,s} - \frac{4}{16\,s^2}$$

e quindi

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2\,(s-4)}\right] = \frac{\mathrm{e}^{4\,t} - 1 - 4\,t}{16}\,u(t)\,.$$

Pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^t\,u(t) + \mathrm{e}^t\,\frac{\mathrm{e}^{4\,(t-1)} - 1 - 4\,(t-1)}{16}\,u(t-1)\,.$$

A scopo illustrativo, forniamo un'altra risoluzione del problema. Innanzitutto, osserviamo che esso può essere "spezzato" nei due problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6\,y' + 5\,y = \mathrm{e}^t\,u(t-1) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} y'' - 6\,y' + 5\,y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

dei quali il primo tiene conto delle condizioni iniziali ed ha termine noto nullo, mentre il secondo ha valori iniziali nulli e tiene conto del termine noto dell'equazione. In altri termini, dette y_1 e y_2 rispettivamente le soluzioni dei due problemi, la soluzione y del problema iniziale è la somma di queste: $y = y_1 + y_2$. Com'è chiaro dai calcoli precedenti, risulta $y_2(t) = \mathrm{e}^t\,u(t)$. D'altra parte, se $H(s) = 1/(s^2 - 6\,s + 5)$ è la funzione di trasferimento (cioè il reciproco del polinomio caratteristico dell'operatore differenziale a primo membro) e $h = \mathscr{L}^{-1}\,H$, è noto che la soluzione y_1 si scrive come prodotto di convoluzione di h col termine noto dell'equazione; nel caso dell'esercizio, la convoluzione si calcola facilmente. In effetti, per la formula dello sviluppo di Heaviside,

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\,\frac{1}{(s-1)\,(s-5)} = \big\{R[1]\ \mathrm{e}^t + R[5]\ \mathrm{e}^{5\,t}\big\}u(t) = \frac{\mathrm{e}^{5\,t} - \mathrm{e}^t}{4}\,u(t)$$

e quindi

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{\mathrm{e}^{5\,t} - \mathrm{e}^t}{4}\,u(t) * \mathrm{e}^t\,u(t-1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{5\,\tau} - \mathrm{e}^{\tau}}{4}\,u(\tau)\ \mathrm{e}^{t-\tau}\,u(t-\tau-1)\,d\tau \\ &= \frac{\mathrm{e}^t}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} (\,\mathrm{e}^{4\,\tau} - 1)\,u(\tau)\,u(t-\tau-1)\,d\tau\,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$u(\tau)\,u(t-\tau-1)=\begin{cases}0\,, & \text{per } t<1 \text{ e per } \tau>t-1;\\ 1\,, & \text{per } 0<\tau<t-1.\end{cases}$$

Dunque abbiamo

$$y_1(t)=u(t-1)\,\frac{\mathrm{e}^t}{4}\int_0^{t-1}(\,\mathrm{e}^{4\,\tau}-1)\,d\tau=u(t-1)\,\frac{\mathrm{e}^t}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{4\,(t-1)}-1}{4}-(t-1)\right)$$

e ritroviamo subito la soluzione precedente.

Ex. 62n La trasformata del primo membro dell'equazione è

$$\mathscr{L}[2\,y''+5\,y'+2\,y]=2\,(s^2\,Y-s+2)+5\,(s\,Y-1)+2\,Y=(2\,s^2+5\,s+2)\,Y-2\,s-1$$

(notiamo che il fattore che moltiplica Y è il polinomio caratteristico dell'operatore differenziale), mentre la trasformata del secondo membro è

$$\mathscr{L}[t\,u(t-2)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\mathscr{L}[u(t-2)]=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}=2\,\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s}+\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2}=\frac{2\,s+1}{s^2}\,\mathrm{e}^{-2s}\,.$$

Pertanto, osservando che $2\,s^2+5\,s+2=2\,(s+1/2)\,(s+2)=(2\,s+1)\,(s+2)$, ricaviamo

$$Y=\frac{2\,s+1}{2\,s^2+5\,s+2}+\frac{2\,s+1}{s^2\,(2\,s^2+5\,s+2)}\,\mathrm{e}^{-2s}=\frac{1}{s+2}+\frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2\,(s+2)}.$$

Inoltre

$$\frac{1}{s^2\,(s+2)}=\frac{1}{4}\,\frac{s^2+4-s^2}{s^2\,(s+2)}=\frac{1}{4\,(s+2)}+\frac{2-s}{4\,s^2}=\frac{1}{4\,(s+2)}+\frac{1}{2\,s^2}-\frac{1}{4\,s}\,,$$

quindi infine

$$\begin{aligned} y(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}+\mathrm{e}^{-2s}\left(\frac{1}{4\,(s+2)}+\frac{1}{2\,s^2}-\frac{1}{4\,s}\right)\right]\\ &=\mathrm{e}^{-2t}\,u(t)+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{4\,(s+2)}+\frac{1}{2\,s^2}-\frac{1}{4\,s}\right](t-2)\\ &=\mathrm{e}^{-2t}\,u(t)+\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2(t-2)}\,u(t-2)+\frac{1}{2}\,(t-2)\,u(t-2)-\frac{1}{4}\,u(t-2)\\ &=\mathrm{e}^{-2t}\left\{u(t)+\frac{\mathrm{e}^4}{4}\,u(t-2)\right\}+\frac{2\,t-5}{4}\,u(t-2)\,. \end{aligned}$$

Ex. 62o Calcoliamo la trasformata del I membro dell'equazione tenendo presenti i valori iniziali, usando la proprietà di linearità e la formula per la trasformata (unilatera) delle derivate:

$$\mathscr{L}[y''-6\,y'+34]=s^2\,Y-s-1-6\,(s\,Y-1)+34\,Y=(s^2-6\,s+34)\,Y-s+5\,,$$

dove come al solito $Y=\mathscr{L}[y]$ è la trasformata della funzione incognita. Notiamo che il fattore che moltiplica Y è il polinomio caratteristico dell'operatore differenziale.

Per trasformare il II membro dell'equazione, usiamo la formula di traslazione in s e ricordiamo la trasformata del seno:

$$\mathscr{L}[\,\mathrm{e}^{3\,t}\sin 5\,t](s)=\mathscr{L}[\sin 5\,t](s-3)=\frac{5}{(s-3)^2+25}\,.$$

Ricaviamo ora Y; nel fare ciò, osserviamo che $s^2-6\,s+34=(s-3)^2+25$ e dunque

$$Y=\frac{s-5}{(s-3)^2+25}+\frac{5}{\left[(s-3)^2+25\right]^2}\,.$$

Per ricavare la soluzione, antitrasformiamo l'espressione a II membro. Per il primo termine, mediante la formula di traslazione in s abbiamo

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-5}{(s-3)^2+25}\right] = \mathrm{e}^{3\,t}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2+25}\right] = \mathrm{e}^{3\,t}\left(\cos 5\,t - \frac{2}{5}\,\sin 5\,t\right).$$

Decomponiamo il secondo termine mediante la formula di Hermite e ricordiamo la formula per la derivata della trasformata:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{5}{\left[(s-3)^2+25\right]^2}\right] &= \frac{\mathrm{e}^{3\,t}}{10}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+25} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+25}\right] \\ &= \frac{\mathrm{e}^{3\,t}}{10}\left(\frac{1}{5}\,\sin 5\,t - t\,\cos 5\,t\right).\end{aligned}$$

In definitiva, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = \mathrm{e}^{3\,t}\left[\left(1-\frac{t}{10}\right)\cos 5\,t - \frac{19}{50}\,\sin 5\,t\right].$$

Ex. 62p Analogo all'Ex. 62o;

$$y(t) = \mathrm{e}^{4\,t}\left[\left(1-\frac{t}{3}\right)\cos\frac{3}{2}\,t + \frac{2}{9}\,\sin\frac{3}{2}\,t\right].$$

Ex. 62q Analogo all'Ex. 62o;

$$y(t) = \mathrm{e}^{5\,t}\left[\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + \sin\frac{t}{\sqrt{2}}\right].$$

Ex. 62r Analogo all'Ex. 62o;

$$y(t) = \mathrm{e}^{t}\left[\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right)\cos\frac{2}{\sqrt{5}}\,t + \sin\frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right].$$

Ex. 62s La trasformata del I membro è

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[16\,y'' + 16\,y' - 5\,y] &= 16\,(s^2\,Y - s - 1) + 16\,(s\,Y - 1) - 5\,Y \\ &= (16\,s^2 + 16\,s - 5)\,Y - 16\,s - 32\,.\end{aligned}$$

Per trasformare il II membro, usiamo innanzitutto la formula di traslazione in s:

$$\mathscr{L}\left[t\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos\frac{3}{4}\,t\right](s) = \mathscr{L}\left[t\,\cos\frac{3}{4}\,t\right](s+1/2)\,.$$

Inoltre, per la formula della derivata della trasformata, abbiamo

$$\mathscr{L}\left[t\,\cos\frac{3}{4}\,t\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\mathscr{L}\left[\cos\frac{3}{4}\,t\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+9/16} = \frac{s^2-9/16}{(s^2+9/16)^2}$$

e quindi

$$\mathscr{L}\left[t\,\mathrm{e}^{-t/2}\cos\frac{3}{4}\,t\right](s) = \frac{(s+1/2)^2-9/16}{\left[(s+1/2)^2+9/16\right]^2}\,.$$

Ricaviamo ora Y dall'uguaglianza ottenuta trasformando ambo i membri dell'equazione; a tale scopo, osserviamo che $16\,s^2 + 16\,s - 5 = 16\left[(s+1/2)^2 - 9/16\right] = 16\,(s-1/4)\,(s+5/4)$ e dunque

$$Y = \frac{s+2}{(s-1/4)\,(s+5/4)} + \frac{1}{16}\,\frac{1}{\left[(s+1/2)^2+9/16\right]^2}\,.$$

A questo punto, dobbiamo antitrasformare l'spressione a II membro. Per il primo addendo, decomponiamo in fratti semplici. Poiché

$$R[1/4] = \left.\frac{s+2}{s+5/4}\right|_{s=1/4} = \frac{1/4+2}{1/4+5/4} = \frac{3}{2}\,, \qquad R[-5/4] = -R[\infty] - R[1/4] = -\frac{1}{2}\,,$$

abbiamo

$$\frac{s+2}{(s-1/4)\,(s+5/4)} = \frac{3/2}{s-1/4} - \frac{1/2}{s+5/4} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{t/4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-5\,t/4}\,.$$

Per il secondo addendo usiamo la formula di Hermite:

$$\frac{1}{16}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\left[(s+1/2)^2+9/16\right]^2}\right] = \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{18}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9/16} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+9/16}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{18}\left(\frac{4}{3}\,\sin\frac{3}{4}\,t - t\,\cos\frac{3}{4}\,t\right).$$

Possiamo pertanto concludere

$$y(t) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{t/4} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-5\,t/4} + \mathrm{e}^{-t/2}\left(\frac{2}{27}\,\sin\frac{3}{4}\,t - \frac{t}{8}\,\cos\frac{3}{4}\,t\right).$$

Ex. 62t Analogo all'Ex. 62s;

$$y(t) = \mathrm{e}^{-2\,t} + \mathrm{e}^{5\,t}\left(\frac{1}{7}\,\sin 7\,t - t\,\cos 7\,t\right).$$

Ex. 62u Trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$(s^2-3\,s+2)\,Y - 2\,s + 3 = 10\,\frac{s-2}{(s-2)^2+9}$$

ed osservando che $s^2-3\,s+2 = (s-1)\,(s-2)$, ricaviamo

$$Y = \frac{2\,s-3}{(s-1)\,(s-2)} + \frac{10}{(s-1)\,\left[(s-2)^2+9\right]}\,.$$

Inoltre

$$\frac{2\,s-3}{(s-1)\,(s-2)} = \frac{s-2+s-1}{(s-1)\,(s-2)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2\,t}$$

e

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s-1)\,\left[(s-2)^2+9\right]}\right] = \mathrm{e}^{2\,t}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{10}{(s+1)\,(s^2+9)}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{2\,t}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+9+1-s^2}{(s+1)\,(s^2+9)}\right] = \mathrm{e}^{2\,t}\,\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} + \frac{1-s}{s^2+9}\right]$$

$$= \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2\,t}\left(\frac{1}{3}\,\sin 3\,t - \cos 3\,t\right)$$

Pertanto

$$y(t) = 2\,\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{2\,t}\left(1 + \frac{1}{3}\,\sin 3\,t - \cos 3\,t\right).$$

Ex. 62v Analogo all'Ex. 62u;

$$y(t) = \mathrm{e}^{t/2}\left(\frac{4}{3} + \frac{3}{16}\,\sin 4\,t - \frac{1}{4}\,\cos 4\,t\right) - \frac{1}{12}\,\mathrm{e}^{-5\,t/2}\,.$$

Ex. 62w Trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$(s^2 + 4\,s + 4)\,Y - s - 2 = \frac{27}{(s-1)^2}$$

e quindi ricaviamo

$$Y = \frac{1}{s+2} + \frac{27}{(s+2)^2\,(s-1)^2}\,.$$

Osserviamo inoltre che

$$\frac{3}{(s+2)\,(s-1)} = \frac{s+2+1-s}{(s+2)\,(s-1)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\frac{27}{(s+2)^2\,(s-1)^2} &= 3\left[\frac{3}{(s+2)\,(s-1)}\right]^2 = 3\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{(s-1)^2} - 2\,\frac{3}{(s-1)\,(s+2)} + \frac{3}{(s+2)^2} \\ &= \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2}{s+2} + \frac{3}{(s+2)^2} \\ &\xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \quad 3\,t\,\mathrm{e}^{t} - 2\,\mathrm{e}^{t} + 2\,\mathrm{e}^{-2\,t} + 3\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t}\end{aligned}$$

Pertanto

$$y(t) = \mathrm{e}^{t}\,(3\,t - 2) + 3\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,(t+1)\,.$$

Ex. 62x Trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$Y\,(s^2 + 3\,s + 2) - s - 2 = 4\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}\right) = 4\,\mathrm{e}^{-s}\,\frac{s+1}{s^2}$$

e quindi, notando che $s^2 + 3\,s + 2 = (s+1)\,(s+2)$, ricaviamo

$$Y = \frac{1}{s+1} + \mathrm{e}^{-s}\,\frac{4}{s^2\,(s+2)}\,.$$

Essendo inoltre

$$\frac{4}{s^2\,(s+2)} = \frac{s^2 + 4 - s^2}{s^2\,(s+2)} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s^2} - \frac{1}{s}\,,$$

troviamo infine

$$y(t) = \mathrm{e}^{-t} + \left[\mathrm{e}^{-2\,(t-1)} + 2\,(t-1) - 1\right]u(t-1)\,.$$

Ex. 62y La trasformata del secondo membro dell'equazione è

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{3\,t}\sin 6\,t\;u(t-\pi)\right] &= \mathscr{L}\left[\sin 6\,t\;u(t-\pi)\right](s-3) \\ &= \mathrm{e}^{-\pi(s-3)}\,\mathscr{L}_u\left[\sin 6(t+\pi)\right](s-3) = \frac{6\,\mathrm{e}^{-\pi(s-3)}}{(s-3)^2 + 36}\end{aligned}$$

e quindi, essendo $s^2 - 6\,s + 45 = (s-3)^2 + 36$, ricaviamo

$$Y = \frac{s+3}{(s-3)^2+36} + \frac{6\ \mathrm{e}^{-\pi(s-3)}}{[(s-3)^2+36]^2}\,.$$

Infine, antitrasformiamo:

$$\frac{s+3}{(s-3)^2+36} = \frac{s-3+6}{(s-3)^2+36} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}} \quad \mathrm{e}^{3t}\,(\cos 6t + \sin 6t)\,u(t)\,;$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{6\ \mathrm{e}^{-\pi(s-3)}}{[(s-3)^2+36]^2}\right] &= \frac{\mathrm{e}^{3t}}{12}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{s^2+36} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+36}\right](t-\pi) \\ &= \mathrm{e}^{3t}\left(\frac{1}{72}\sin 6t - \frac{t-\pi}{12}\cos 6t\right)u(t-\pi)\,.\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è

$$y(t) = \mathrm{e}^{3t}\left\{(\cos 6t + \sin 6t)\,u(t) + \left(\frac{1}{72}\sin 6t - \frac{t-\pi}{12}\cos 6t\right)u(t-\pi)\right\}.$$

Ex. 62z La trasformata del secondo membro dell'equazione è

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{4\,t}\sin 3t\ u(t-\pi/3)\right] &= \mathscr{L}\left[\sin 3t\ u(t-\pi/3)\right](s-4) \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,(s-4)}\,\mathscr{L}_u\left[\sin 3(t+\pi/3)\right](s-4) \\ &= -\frac{3\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,(s-4)}}{(s-4)^2+9}\end{aligned}$$

e quindi, essendo $s^2 - 8\,s + 25 = (s-4)^2 + 9$, ricaviamo

$$Y = \frac{s-1}{(s-4)^2+9} - \frac{3\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,(s-4)}}{[(s-4)^2+9]^2}\,.$$

Infine, antitrasformiamo:

$$\frac{s-1}{(s-4)^2+9} = \frac{s-4+3}{(s-4)^2+9} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}} \quad \mathrm{e}^{4t}\,(\cos 3t + \sin 3t)\,u(t)\,;$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{-3\ \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\,(s-4)}}{[(s-4)^2+9]^2}\right] &= -\frac{\mathrm{e}^{4t}}{6}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+9}\right](t-\pi/3) \\ &= \mathrm{e}^{4t}\left(\frac{1}{18}\sin 3t - \frac{t-\pi/3}{6}\cos 3t\right)u(t-\pi/3)\,.\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è

$$y(t) = \mathrm{e}^{4t}\left\{(\cos 3t + \sin 3t)\,u(t) + \left(\frac{1}{18}\sin 3t - \frac{t-\pi/3}{6}\cos 3t\right)u(t-\pi/3)\right\}.$$

Ex. 62a$_1$ La trasformata del secondo membro dell'equazione è

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{4\,t}\sin 6\,t\;u(t-\pi/2)\right] &= \mathscr{L}\left[\sin 6\,t\;u(t-\pi/2)\right](s-4)\\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}(s-4)}\,\mathscr{L}_u\left[\sin 6(t+\pi/2)\right](s-4)\\ &= -\frac{6\;\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}(s-4)}}{(s-4)^2+36}\end{aligned}$$

e quindi, essendo $s^2-8\,s+52=(s-4)^2+36$, ricaviamo

$$Y=\frac{s+2}{(s-4)^2+36}-\frac{6\;\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}(s-4)}}{[(s-4)^2+36]^2}\,.$$

Infine, antitrasformiamo:

$$\frac{s+2}{(s-4)^2+36}=\frac{s-4+6}{(s-4)^2+36}\quad\xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}}\quad\mathrm{e}^{4t}\,(\cos 6t+\sin 6t)\,u(t)\,;$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{6\;\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}(s-4)}}{[(s-4)^2+36]^2}\right] &= \frac{\mathrm{e}^{4t}}{12}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{s^2+36}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+36}\right](t-\pi/2)\\ &= \mathrm{e}^{4t}\left(\frac{1}{72}\sin 6t-\frac{t-\pi/2}{12}\cos 6t\right)u(t-\pi/2)\,.\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è

$$y(t)=\mathrm{e}^{4t}\left\{(\cos 6t+\sin 6t)\,u(t)+\left(\frac{1}{72}\sin 6t-\frac{t-\pi/2}{12}\cos 6t\right)u(t-\pi/2)\right\}.$$

Ex. 62b$_1$ La trasformata del secondo membro dell'equazione è

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^{-2\,t}\sin 7\,t\;u(t-\pi)\right] &= \mathscr{L}\left[\sin 7t\;u(t-\pi)\right](s+2)\\ &= \mathrm{e}^{-\pi\,(s+2)}\,\mathscr{L}_u\left[\sin 7(t+\pi)\right](s+2)=-\frac{7\;\mathrm{e}^{-\pi\,(s+2)}}{(s+2)^2+49}\end{aligned}$$

e quindi, essendo $s^2+4\,s+53=(s+2)^2+49$, ricaviamo

$$Y=\frac{s+9}{(s+2)^2+49}-\frac{7\;\mathrm{e}^{-\pi\,(s+2)}}{[(s+2)^2+49]^2}\,.$$

Infine, antitrasformiamo:

$$\frac{s+9}{(s+2)^2+49}=\frac{s+2+7}{(s+2)^2+49}\quad\xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}}\quad\mathrm{e}^{-2t}\,(\cos 7t+\sin 7t)\,u(t)\,;$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{-7\;\mathrm{e}^{-\pi\,(s+2)}}{[(s+2)^2+49]^2}\right] &= -\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{14}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{s^2+49}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\,\frac{s}{s^2+49}\right](t-\pi)\\ &= \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{1}{98}\sin 7t-\frac{t-\pi}{14}\cos 7t\right)u(t-\pi)\,.\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione è

$$y(t)=\mathrm{e}^{-2t}\left\{(\cos 7t+\sin 7t)\,u(t)+\left(\frac{1}{98}\sin 7t-\frac{t-\pi}{14}\cos 7t\right)u(t-\pi)\right\}.$$

Ex. 62c$_1$ Trasformando ambo i membri dell'equazione e notando che il polinomio caratteristico si scompone come segue $s^2-10\,s+21=(s-3)\,(s-7)$, ricaviamo

$$Y(s)=\frac{2\,s-10}{(s-3)\,(s-7)}+\frac{1}{(s-7)\big[(s-3)^2+16\big]}\,.$$

Antitrasformando otteniamo ($t\ge 0$)

$$\frac{2\,s-10}{(s-3)\,(s-7)}=\frac{s-3+s-7}{(s-3)\,(s-7)}=\frac{1}{s-7}+\frac{1}{s-3}\quad\xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}}\quad \mathrm{e}^{7t}+\mathrm{e}^{3t}$$

$$\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{(s-7)\big[(s-3)^2+16\big]}\right]=\mathrm{e}^{3t}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{(s-4)\,(s^2+16)}\right]$$

ed essendo

$$\frac{1}{(s-4)\,(s^2+16)}=\frac{1}{32}\,\frac{s^2+16+16-s^2}{(s-4)\,(s^2+16)}=\frac{1}{32}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{s+4}{s^2+16}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}}\quad\frac{1}{32}\,(\,\mathrm{e}^{4t}-\cos 4t-\sin 4t)$$

troviamo infine la soluzione

$$y(t)=\frac{33}{32}\,\mathrm{e}^{7t}+\mathrm{e}^{3t}\left(1-\frac{\cos 4t+\sin 4t}{32}\right).$$

Ex. 62d$_1$ Trasformando ambo i membri dell'equazione e osservando che il polinomio caratteristico si decompone come segue $s^2-5\,s+6=(s-2)\,(s-3)$, ricaviamo

$$Y(s)=\frac{2\,s-5}{(s-2)\,(s-3)}+\frac{1}{(s-3)\big[(s-2)^2+25\big]}\,.$$

Per antitrasformare, cominciamo osservando che ($t\ge 0$)

$$\frac{2\,s-5}{(s-2)\,(s-3)}=\frac{s-2+s-3}{(s-2)\,(s-3)}=\frac{1}{s-3}+\frac{1}{s-2}\quad\xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}}\quad \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{2t}\,.$$

D'altra parte

$$\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)\big[(s-2)^2+25\big]}\right]=\mathrm{e}^{2t}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s^2+25)}\right].$$

Inoltre

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+25)}=\frac{1}{26}\,\frac{s^2+25+1-s^2}{(s-1)(s^2+25)}=\frac{1}{26}\left\{\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{s^2+25}\right\}$$

$$\xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}}\quad\frac{1}{26}\left\{\mathrm{e}^{t}-\cos 5t-\frac{1}{5}\sin 5t\right\}.$$

Pertanto la soluzione è

$$y(t)=\frac{27}{26}\,\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{2t}\left(1-\frac{1}{26}\cos 5t-\frac{1}{130}\sin 5t\right).$$

Ex. 62e$_1$ Trasformando ambo i membri dell'equazione e notando che il polinomio caratteristico si scrive $(s-7)^2$, ricaviamo

$$Y(s) = \frac{s-12}{(s-7)^2} + \frac{3}{(s-7)^2\big[(s-7)^2+9\big]}\,.$$

Per l'antitrasformazione, notiamo innanzitutto che $(t \geq 0)$

$$\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{s-12}{(s-7)^2} + \frac{3}{(s-7)^2\big[(s-7)^2+9\big]}\right] = \mathrm{e}^{7t}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{s-5}{s^2} + \frac{3}{s^2\,(s^2+9)}\right].$$

Inoltre

$$\frac{s-5}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{5}{s^2} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}} \quad 1-5t$$

$$\frac{3}{s^2\,(s^2+9)} = \frac{1}{3}\,\frac{s^2+9-s^2}{s^2\,(s^2+9)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9}\right) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}} \quad \frac{t}{3} - \frac{1}{9}\sin 3t$$

e quindi la soluzione è

$$y(t) = \mathrm{e}^{7t}\left(1 - \frac{14}{3}\,t - \frac{1}{9}\sin 3t\right).$$

Ex. 62f$_1$ Trasformando ambo i membri dell'equazione e notando che il polinomio caratteristico si scrive $(s-5)^2$, ricaviamo

$$Y(s) = \frac{s-8}{(s-5)^2} + \frac{6}{(s-5)^2\big[(s-5)^2+36\big]}\,.$$

Per l'antitrasformazione, notiamo innanzitutto che $(t \geq 0)$

$$\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{s-8}{(s-5)^2} + \frac{6}{(s-5)^2\big[(s-5)^2+36\big]}\right] = \mathrm{e}^{5t}\,\mathscr{L}_u^{-1}\left[\frac{s-3}{s^2} + \frac{6}{s^2\,(s^2+36)}\right].$$

Inoltre

$$\frac{s-3}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s^2} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}} \quad 1-3t$$

$$\frac{6}{s^2\,(s^2+36)} = \frac{1}{6}\,\frac{s^2+36-s^2}{s^2\,(s^2+36)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+36}\right) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}_u^{-1}} \quad \frac{t}{6} - \frac{1}{36}\sin 6t$$

e quindi la soluzione è

$$y(t) = \mathrm{e}^{5t}\left(1 - \frac{17}{18}\,t - \frac{1}{36}\sin 6t\right).$$

Ex. 62n$_1$ Tenendo presenti i valori iniziali, calcoliamo la trasformata del primo membro dell'equazione

$$\mathscr{L}[y'' - 2\,y' + y] = s^2 Y - s - 1 - 2\,(s\,Y - 1) + Y = (s^2 - 2\,s + 1)\,Y - s + 1\,,$$

mentre per il secondo membro abbiamo

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^t\,\big(u(t) - u(t-1)\big)\right](s) &= \mathscr{L}\left[u(t) - u(t-1)\right](s-1)\\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{\mathrm{e}^{-(s-1)}}{s-1} = \frac{1-\mathrm{e}^{-(s-1)}}{s-1}\,.\end{aligned}$$

In definitiva, essendo $s^2 - 2\,s + 1 = (s-1)^2$, troviamo $Y = \dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1-\mathrm{e}^{-(s-1)}}{(s-1)^3}$ e quindi antitrasformando

$$y(t) = \mathrm{e}^t\,u(t) + \frac{\mathrm{e}^t}{2}\left[t^2\,u(t) - (t-1)^2\,u(t-1)\right].$$

Ex. 62o$_1$ Trasformiamo ambo i membri dell'equazione; per il secondo membro, osserviamo che $\sin 2\,t = \sin 2\,(t-\pi)$ e usiamo la formula di traslazione:

$$Y\,(s^2+2) - s - \sqrt{2} = \mathrm{e}^{-\pi\,s}\,\frac{2}{s^2+4}\,,$$

da cui

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s+\sqrt{2}}{s^2+2} + \mathrm{e}^{-\pi\,s}\,\frac{2}{(s^2+4)\,(s^2+2)} = \frac{s+\sqrt{2}}{s^2+2} + \mathrm{e}^{-\pi\,s}\,\frac{s^2+4-s^2-2}{(s^2+4)\,(s^2+2)} \\ &= \frac{s+\sqrt{2}}{s^2+2} + \mathrm{e}^{-\pi\,s}\left(\frac{1}{s^2+2} - \frac{1}{s^2+4}\right). \end{aligned}$$

A questo punto possiamo facilmente antitrasformare

$$y(t) = (\cos\sqrt{2}\,t + \sin\sqrt{2}\,t)\,u(t) + u(t-\pi)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\sin\sqrt{2}(t-\pi) - \frac{1}{2}\,\sin 2\,t\right).$$

Ex. 62p$_1$ La trasformata del primo membro è $s^2Y - s - 1 - 3\,(s\,Y - 1) + 2\,Y = (s^2 - 3\,s + 2)\,Y - s + 2$, mentre quella del secondo membro è

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\left[10\,u\big(t-\pi/2\big)\,\cos t\right] &= 10\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\,s}\,\mathscr{L}\left[\cos(t+\pi/2)\right] \\ &= 10\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\,s}\,\mathscr{L}\left[-\sin t\right] = -10\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\,s}}{s^2+1}\,. \end{aligned}$$

Essendo $s^2 - 3\,s + 2 = (s-1)\,(s-2)$, ricaviamo dunque

$$Y = \frac{1}{s-1} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\,s}\,\frac{10}{(s^2+1)\,(s-2)\,(s-1)}\,.$$

Per antitrasformare, decomponiamo in fratti semplici la funzione razionale

$$\frac{10}{(s^2+1)\,(s-2)\,(s-1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C\,s+D}{s^2+1}\,.$$

Risulta $A = R[2] = 2$, $B = R[1] = -5$; inoltre usiamo le formule $C = 2\,\alpha$ e $D = -2\,\beta$, essendo $\alpha + i\,\beta = R[i] = 5/(3+i)$, quindi $2\,(\alpha + i\,\beta) = 3 - i$ e $C = 3$, $D = 1$. Dunque

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{e}^t\,u(t) - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-2} - \frac{5}{s-1} + \frac{3\,s+1}{s^2+1}\right](t-\pi/2) \\ &= \mathrm{e}^t\,u(t) - \left\{2\,\mathrm{e}^{2t-\pi} - 5\,\mathrm{e}^{t-\pi/2} + 3\cos(t-\pi/2) + \sin(t-\pi/2)\right\}u(t-\pi/2) \\ &= \mathrm{e}^t\,u(t) - \left\{2\,\mathrm{e}^{2t-\pi} - 5\,\mathrm{e}^{t-\pi/2} + 3\sin t - \cos t\right\}u(t-\pi/2)\,. \end{aligned}$$

Ex. 62q$_1$ La trasformata del primo membro è $2\,(s^2Y - s - 1/2) - 2\,(s\,Y - 1) + Y = (2\,s^2 - 2\,s + 1)\,Y - 2\,s + 1$, mentre quella del secondo membro è

$$\mathscr{L}\left[t\,(\mathrm{e}^t + 1)\right] = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2} = \frac{2\,s^2 - 2\,s + 1}{s^2(s-1)^2}\,.$$

Pertanto ricaviamo
$$Y = \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+1/4} + \frac{1}{s^2(s-1)^2}\,.$$
Per antitrasformare il secondo termine a secondo membro, decomponiamo in fratti semplici; a tal fine, osserviamo che $1/\big(s\,(s-1)\big) = 1/(s-1) - 1/s$ e quindi
$$\frac{1}{s^2(s-1)^2} = \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right)^2 = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s\,(s-1)} = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2}{s}\,.$$
Pertanto, per $t \geq 0$
$$y(t) = \,\mathrm{e}^{t/2}\cos\frac{t}{2} + \,\mathrm{e}^t(t-2) + 2 + t\,.$$
Notiamo che potevamo anche procedere nel modo seguente
$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s-1)^2}\right] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s\,(s-1)}\right)^2\right] \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right] \\
&= \big[(\,\mathrm{e}^t - 1)\,u(t)\big] * \big[(\,\mathrm{e}^t - 1)\,u(t)\big] \\
&= \big[\,\mathrm{e}^t u(t)\big] * \big[\,\mathrm{e}^t u(t)\big] - 2\big[\,\mathrm{e}^t u(t)\big] * u(t) + u(t) * u(t) \\
&= \,\mathrm{e}^t \int_0^t d\tau - 2\int_0^t \mathrm{e}^\tau\,d\tau - \int_0^t d\tau \\
&= t\,(\,\mathrm{e}^t + 1) - 2\,(\,\mathrm{e}^t - 1)\,.
\end{aligned}$$

CAPITOLO XIV

Svolgimenti Serie e Trasformazione di Fourier

Ex. 63a Il segnale da trasformare è sommabile e la trasformata si calcola mediante la definizione:

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin \pi t}{t^2-1}\right] = \frac{1}{2j}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{j(\pi-\omega)t} - \mathrm{e}^{-j(\pi+\omega)t}}{t^2-1}\, dt$$

e gli integrali si possono valutare col metodo dei residui.

Procediamo in modo diverso. Risultando

$$\text{v.p.}\,\frac{2}{t^2-1} = \text{v.p.}\,\frac{1}{t-1} - \text{v.p.}\,\frac{1}{t+1}\,,$$

abbiamo

$$\mathscr{F}\left[\text{v.p.}\,\frac{1}{t^2-1}\right] = -j\frac{\pi}{2}\,\operatorname{sgn}\omega\,\left(\mathrm{e}^{-j\omega} - \mathrm{e}^{j\omega}\right) = -\pi\operatorname{sgn}\omega\sin\omega\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[\frac{\sin \pi t}{t^2-1}\right] &= -\frac{\pi}{2j}[\operatorname{sgn}(\omega-\pi)\sin(\omega-\pi) - \operatorname{sgn}(\omega+\pi)\sin(\omega+\pi)] \\
&= \frac{\pi}{2j}\sin\omega[\operatorname{sgn}(\omega-\pi) - \operatorname{sgn}(\omega+\pi)] \\
&= j\pi\sin\omega[u(\omega+\pi) - u(\omega-\pi)]\,.
\end{aligned}$$

Confrontare con gli esempi nelle Lezioni.

Ex. 63b Procedendo come nell'Ex. 63a, troviamo

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\left[\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{t^2-1}\right] &= -\frac{\pi}{2}\left[\operatorname{sgn}\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sgn}\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= -\frac{\pi}{2}\cos\omega\left[\operatorname{sgn}\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sgn}\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= -\pi\cos\omega\left[u\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right) - u\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Confrontare con l'Ex. 64e.

Ex. 64c Confrontare con l'Ex. 64b.

Ex. 64d Usiamo il teorema di campionamento. Dobbiamo quindi trasformare x_0, che è prodotto di una funzione trigonometrica per una porta; deriviamo due volte nel senso delle distribuzioni e usiamo la proprietà di campionamento della δ:

$$\begin{aligned}
x_0'(t) &= \big[\delta(t) - \delta(t+\pi)\big]\,\sin t + \big[u(t) - u(t+\pi)\big]\,\cos t = \big[u(t) - u(t+\pi)\big]\,\cos t\,, \\
x_0''(t) &= \big[\delta(t) - \delta(t+\pi)\big]\,\cos t - \big[u(t) - u(t+\pi)\big]\,\sin t = \delta(t) + \delta(t+\pi) - x_0(t)\,.
\end{aligned}$$

Posto $X_0 = \mathscr{F}[x_0]$, trasformando ambo i membri e usando la formula per la trasformata della derivata, ne segue $-\omega^2 X_0(\omega) = 1 + e^{i\pi\omega} - X_0(\omega)$ e quindi, per $\omega \neq \mp 1$,

$$X_0(\omega) = \frac{1 + e^{i\pi\omega}}{1 - \omega^2} .$$

Essendo $\omega_0 = 1$, dobbiamo campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$. Pertanto calcoliamo

$$X_0(\mp 1) = \lim_{\omega \to \mp 1} X_0(\omega) = \lim_{\omega \to \mp 1} \frac{1 + e^{i\pi\omega}}{1 - \omega^2} = \left. \frac{i\pi\, e^{i\pi\omega}}{-2\omega} \right|_{\omega = \mp 1} = \mp \frac{i\pi}{2} .$$

Inoltre, per $k \in \mathbb{Z} - \{-1\,,\ 1\}$

$$X_0(k) = \frac{1 + e^{i\pi k}}{1 - k^2} = \frac{1 + (-1)^k}{1 - k^2} = \begin{cases} 0\,, & \text{per } k \text{ dispari,} \\ \dfrac{2}{1 - k^2}\,, & \text{per } k \text{ pari.} \end{cases}$$

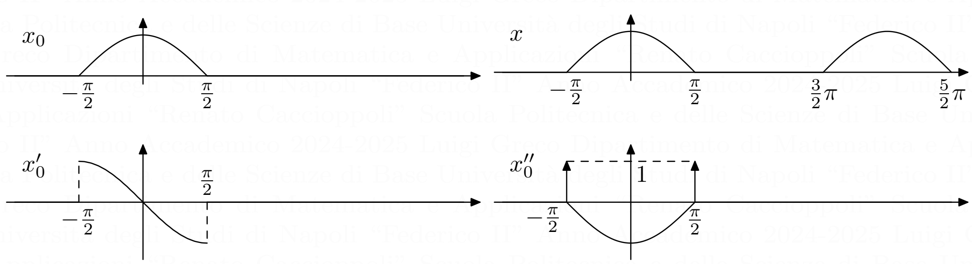
In definitiva, indicando un intero pari $k = 2n$, con $n \in \mathbb{Z}$, possiamo scrivere la trasformata della replica periodica

$$X(\omega) = j\,\frac{\pi}{2}\,\delta(\omega - 1) - j\,\frac{\pi}{2}\,\delta(\omega + 1) + 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 - 4n^2}\,\delta(\omega - 2n) .$$

Ex. 64e Applichiamo il teorema di campionamento. Calcoliamo la trasformata di x_0. Poiché tale funzione è prodotto di una funzione trigonometrica per una porta, deriviamo nel senso delle distribuzioni finché non si ripresenta il segnale di partenza:

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= -\sin t\,\big[u(t + \pi/2) - u(t - \pi/2)\big] + \cos t\,\big[\delta(t + \pi/2) - \delta(t - \pi/2)\big] \\ &= -\sin t\,\big[u(t + \pi/2) - u(t - \pi/2)\big]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= -\cos t\,\big[u(t + \pi/2) - u(t - \pi/2)\big] - \sin t\,\big[\delta(t + \pi/2) - \delta(t - \pi/2)\big] \\ &= -x_0(t) + \delta(t + \pi/2) + \delta(t - \pi/2) . \end{aligned}$$



A questo punto trasformiamo usando la formula per la trasformata delle derivate:

$$(1 - \omega^2)\ \mathscr{F}\, x_0 = e^{j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} + e^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} = 2\cos\frac{\pi}{2}\,\omega$$

e quindi, per $\omega \neq \mp 1$,

$$X_0(\omega) = \mathscr{F}\, x_0(\omega) = 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{1 - \omega^2} .$$

Osserviamo che la trasformata è funzione reale pari, come potevamo prevedere, essendo tale anche il segnale di partenza.

Un altro modo di calcolare X_0 è quello di usare la trasformata della finestra $\Pi(t/\pi) = u(t+\pi/2) - u(t-\pi/2)$, scrivere $\cos t$ mediante la formula di Eulero e applicare la formula della traslazione. In tal modo abbiamo

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[x_0] &= \mathscr{F}[\cos t\,\Pi(t/\pi)] = \frac{1}{2}\,\mathscr{F}[(\,\mathrm{e}^{j\,t} + \mathrm{e}^{-j\,t})\,\Pi(t/\pi)] \\ &= \frac{1}{2}\,\mathscr{F}[\Pi(t/\pi)](\omega-1) + \frac{1}{2}\,\mathscr{F}[\Pi(t/\pi)](\omega+1) \\ &= \cos\frac{\pi}{2}\,\omega\cdot\left(\frac{1}{\omega+1} - \frac{1}{\omega-1}\right)\end{aligned}$$

e ritroviamo il risultato precedente. Come ulteriore possibilità, ricordando che

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{j\,t} + \mathrm{e}^{-j\,t}}{2} \quad \xrightarrow{\ \ \mathscr{F}\ \ } \quad \pi\left[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\right],$$

possiamo usare la formula per la trasformata del prodotto:

$$\mathscr{F}\,x_0 = \mathscr{F}[\cos t\,\Pi(t/\pi)] = \frac{1}{2\,\pi}\,\mathscr{F}[\cos t] * \mathscr{F}[\Pi(t/\pi)] = \left[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\right] * \frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega}$$

ed infine, ricordando che $\delta(\omega-\omega_0) * Y(\omega) = Y(\omega-\omega_0)$, concludiamo con gli stessi calcoli di prima. Alternativamente ancora, osserviamo che la trasformata si ricava da quella dell'Ex. 64a mediante la formula di traslazione in t.

Poiché il periodo è $2\,\pi$, risulta $\omega_0 = 1$ e dobbiamo campionare X_0 nei punti k interi; occorre quindi calcolare $X_0(\mp 1)$, per i quali non possiamo usare la formula trovata. Dunque, essendo X_0 continua,

$$X_0(1) = \lim_{\omega\to 1} X_0(\omega) = \lim_{\omega\to 1} 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{1-\omega^2} = \frac{\pi}{2}$$

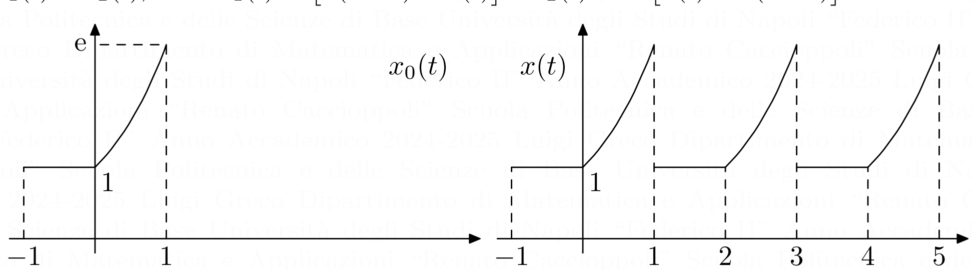
e analogamente (o usando il fatto che X_0 è pari) troviamo $X_0(-1) = \pi/2$. D'altra parte, per $k \in \mathbb{Z} - \{-1\,,\,1\}$, abbiamo

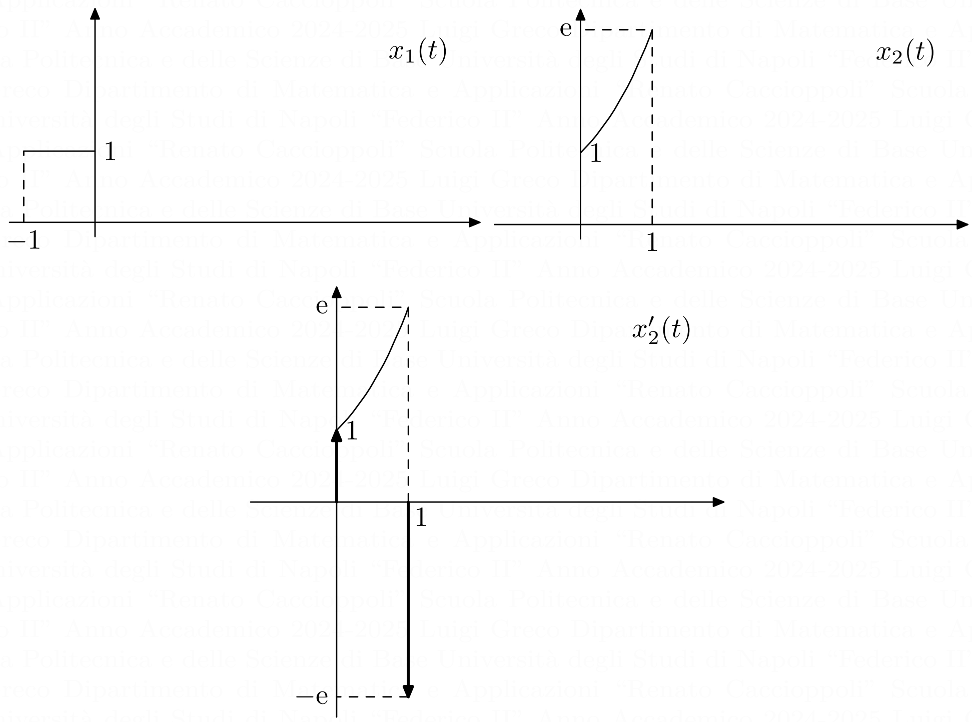
$$X_0(k) = 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,k}{1-k^2} = \begin{cases} 2\,\dfrac{(-1)^n}{1-4\,n^2} & ,\ \text{per } k = 2\,n \text{ pari} \\ 0 & ,\ \text{per } k \text{ dispari}\end{cases}$$

In definitiva, essendo $x(t)$ la replica periodica,

$$X(\omega) = \mathscr{F}[x](\omega) = \frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\right] + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4\,n^2}\,\delta(\omega-2\,n)\,.$$

Ex. 64f Usiamo il teorema di campionamento e trasformiamo $x(t)\left[u(t{+}1){-}u(t{-}1)\right] = x_1(t) + x_2(t)$, dove $x_1(t) = \left[u(t+1) - u(t)\right]$ e $x_2(t) = \mathrm{e}^t\left[u(t) - u(t-1)\right]$.





In base alla definizione, per $\omega \neq 0$ abbiamo

$$X_1(\omega) = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-j\,\omega\,t} dt = \frac{\left[\mathrm{e}^{-j\,\omega\,t}\right]_{t=-1}^{t=0}}{-j\,\omega} = \frac{\mathrm{e}^{j\,\omega} - 1}{j\,\omega},$$

mentre $X_1(0) = 1$. Per trasformare x_2, deriviamo una volta e usiamo la proprietà di campionamento della δ:

$$x_2'(t) = x_2(t) + \mathrm{e}^t\big[\delta(t) - \delta(t-1)\big] = x_2(t) + \delta(t) - \mathrm{e}\,\delta(t-1)$$

e quindi, $\forall \omega \in \mathbb{R}$,

$$X_2(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega} - 1}{1 - j\,\omega}.$$

Dunque, per $\omega \neq 0$,

$$X_0(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{j\,\omega} - 1}{j\,\omega} + \frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega} - 1}{1 - j\,\omega},$$

mentre $X_0(0) = 1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e}$. Essendo $\omega_0 = \pi$, bisogna campionare nei punti $k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per $k \neq 0$, abbiamo

$$X_0(k\,\pi) = \frac{\mathrm{e}^{j\,k\,\pi} - 1}{j\,k\,\pi} + \frac{\mathrm{e}^{1-j\,k\,\pi} - 1}{1 - j\,k\,\pi}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e} - 1}{1 - j\,k\,\pi}, & \text{per } k \text{ pari,} \\ -\dfrac{2}{j\,k\,\pi} - \dfrac{\mathrm{e} + 1}{1 - j\,k\,\pi} = -\dfrac{2 + (\mathrm{e} - 1)\,j\,k\,\pi}{j\,k\,\pi + k^2\,\pi^2}, & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

In definitiva, scrivendo un numero pari non nullo $k = 2n$, con $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e un numero dispari $k = 2n+1$, con $n \in \mathbb{Z}$, abbiamo

$$X(\omega) = \pi\, \mathrm{e}\, \delta(\omega) + \pi\,(\mathrm{e}-1) \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{1-2\,n\,\pi\, j}\, \delta(\omega - 2\,n\,\pi)$$

$$- \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2 + (\mathrm{e}-1)\,(2\,n+1)\,\pi\, j}{(2\,n+1)\, j + (2\,n+1)^2\,\pi}\, \delta(\omega - (2\,n+1)\,\pi)\,.$$

Ex. 64g Usando il teorema di campionamento, trasformiamo

$$x_0(t) = 2^t \left[u(t+1) - u(t)\right] + \cos\frac{\pi}{3}\, t\, \left[u(t) - u(t-1)\right].$$

Cominciamo col trasformare $x_1(t) = 2^t\left[u(t+1) - u(t)\right]$. La trasformata può essere facilmente calcolata col metodo del *riciclo*; usiamo invece la definizione di trasformata di Fourier:

$$\mathscr{F}[x_1] = \int_{-1}^{0} 2^t\, \mathrm{e}^{-j\omega\, t}\, dt = \int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{(\log 2 - j\omega)t}\, dt = \frac{\left[\mathrm{e}^{(\log 2 - j\omega)t}\right]_{t=-1}^{t=0}}{\log 2 - j\omega}$$

$$= \frac{1 - \mathrm{e}^{j\omega - \log 2}}{\log 2 - j\omega} = \frac{\mathrm{e}^{j\omega} - 2}{2\,(j\omega - \log 2)}\,, \qquad \forall \omega \in \mathbb{R}\,.$$

Calcoliamo la $\mathscr{F}$-trasformata di $x_2(t) = \cos\frac{\pi}{3}\, t\, \left[u(t) - u(t-1)\right]$ mediante il legame con la trasformata di Laplace (anche questa $\mathscr{F}$-trasformata si calcola col riciclo, o esprimendo il coseno con la formula di Eulero); $\mathscr{F}[x_2](\omega) = \mathscr{L}[x_2](j\,\omega)$ e $\mathscr{L}[x_2]$ è funzione intera. Per il calcolo, supponendo $\operatorname{Re} s > 0$ abbiamo

$$\mathscr{L}[x_2] \;= \frac{s}{s^2 + \pi^2/9} - \mathrm{e}^{-s}\, \mathscr{L}\left[\cos\frac{\pi}{3}\,(t+1)\right]$$

$$= \frac{s}{s^2 + \pi^2/9} - \frac{\mathrm{e}^{-s}}{2}\left(\frac{s}{s^2+\pi^2/9} - \sqrt{3}\,\frac{\pi/3}{s^2+\pi^2/9}\right).$$

Tale uguaglianza si estende a $s \in \mathbb{C}$ (in $\mp j\,\pi/3$ bisogna eliminare la singolarità). Ponendo $s = j\,\omega$, abbiamo per $\omega \neq \mp\pi/3$

$$\mathscr{F}[x_2] = \frac{9}{2}\, \frac{2j\,\omega - \mathrm{e}^{-j\,\omega}\,(j\,\omega - \pi/\sqrt{3})}{\pi^2 - 9\,\omega^2}\,.$$

Chiaramente $X_0 = X_1 + X_2$; essendo il periodo 2, risulta $\omega_0 = \pi$ e bisogna campionare X_0 nei punti $k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$: non intervengono quindi nel campionamento i punti $\mp\pi/3$, esclusi nella formula di X_2. Osserviamo che $\mathrm{e}^{\mp j\,k\,\pi} = (-1)^k$, dunque distinguendo i casi $k = 2\,n$ pari e $k = 2\,n+1$ dispari, $n \in \mathbb{Z}$, abbiamo

$$X_0(2\,n\,\pi) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\log 2 - 2\,j\,n\,\pi} + 3\,\frac{6\,j\,n + \sqrt{3}}{1 - 36\,n^2}\right),$$

$$X_0((2\,n+1)\,\pi) = \frac{3}{8\pi}\left(\frac{4\,\pi}{\log 2 - j\,(2\,n+1)\,\pi} - \frac{9\,j\,(2n+1) - \sqrt{3}}{9\,n^2 + 9\,n + 2}\right)$$

e

$$X(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{\log 2-2\,j\,n\,\pi}+3\,\frac{6\,j\,n+\sqrt{3}}{1-36\,n^2}\right)\delta(\omega-2\,n\,\pi)$$
$$+\frac{3}{8}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{4\,\pi}{\log 2-j\,(2\,n+1)\,\pi}-\frac{9\,j\,(2n+1)-\sqrt{3}}{9\,n^2+9\,n+2}\right)\delta(\omega-(2\,n+1)\,\pi\,).$$

Infine, per quanto riguarda la serie di Fourier, ricordiamo che

$$c_k=\frac{1}{2\,\pi}\,\omega_0\,X_0(k\,\omega_0)\,,\ \forall k\in\mathbb{Z}\,;$$
$$a_0=c_0\,;\qquad \text{e}\quad \forall k\in\mathbb{N}:\quad a_k=c_k+c_{-k}\,,\quad b_k=j\,(c_k-c_{-k})\,.$$

Ex. 64h Usando il teorema di campionamento, dobbiamo trasformare

$$x_0(t)=(t^2+3\,t)\,\big[u(t+3)-u(t)\big]+3\,(t-t^2)\,\big[u(t)-u(t-1)\big]=t\,x_1(t)\,,$$

essendo

$$x_1(t)=(t+3)\,u(t+3)-4\,t\,u(t)+3\,(t-1)\,u(t-1)\,.$$

A tal fine, osserviamo che x_1 è $\mathscr{L}$-trasformabile in $\mathbb{C}$, quindi $\mathscr{F}[x_1](\omega)=\mathscr{L}[x_1](j\,\omega)$. Inoltre (supponendo momentaneamente $\operatorname{Re} s>0$)

$$\mathscr{L}[x_1](s)=\frac{\mathrm{e}^{3\,s}-4+3\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2}\,,\qquad \forall s\in\mathbb{C}-\{0\}\,.$$

Pertanto

$$\mathscr{F}[x_1](\omega)=\left.\frac{\mathrm{e}^{3\,s}-4+3\,\mathrm{e}^{-s}}{s^2}\right|_{s=j\,\omega}=-\frac{\mathrm{e}^{3\,j\,\omega}-4+3\,\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega^2}\,,\qquad \forall\omega\in\mathbb{R}-\{0\}\,.$$

Per la formula della derivata della trasformata abbiamo

$$X_0(\omega)=\mathscr{F}[x_0](\omega)=j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,\mathscr{F}[x_1]=3\,\frac{\mathrm{e}^{3\,j\,\omega}-\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega^2}+2\,j\,\frac{\mathrm{e}^{3\,j\,\omega}-4+3\,\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega^3}\,.$$

Alternativamente, posto $g(t)=(t^2+3\,t)\,\big[u(t+3)-u(t)\big]$, osserviamo che q.o. risulta $x_0(t)=g(t)-g(-3\,t)/3$ e quindi

$$X_0(\omega)=G(\omega)-\frac{1}{9}\,G\left(-\frac{\omega}{3}\right).$$

Essendo il periodo 4, è $\omega_0=\pi/2$ e dobbiamo campionare nei punti $k\,\pi/2$, con $k\in\mathbb{Z}$. Osserviamo che $\mathrm{e}^{3\,j\,\frac{\pi}{2}}=-j=\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}}$, quindi per $k\neq 0$ abbiamo

$$X_0(k\,\pi/2)=0+2\,j\,\frac{(-i)^k-4+3\,(-i)^k}{\big(k\,\pi/2\big)^3}=i\,\frac{64}{\pi^3}\,\frac{(-i)^k-1}{k^3}\,.$$

Inoltre $X_0(0)=\int_{-3}^{0}(t^2+3\,t)\,dt+3\int_0^1(t-t^2)\,dt=-4$. Dunque

$$X(\omega)=-2\,\pi\,\delta(\omega)+i\,\frac{32}{\pi^2}\sum_{k\neq 0}\frac{(-i)^k-1}{k^3}\,\delta(\omega-k\,\pi/2)\,.$$

Ex. 64k Usiamo il teorema di campionamento; trasformiamo dunque x_0. Osserviamo che per le proprietà di simmetria, la trasformata sarà immaginaria dispari. Per il calcolo, notiamo che

$$x_0(t)=j\,(-j\,t)\,\big[u\big(t+\pi/2\big)-u\big(t-\pi/2\big)\big]\,\cos t=j\,\big(-j\,t\,x_1(t)\big)\,,$$

e ricordiamo che la trasformata di x_1 è calcolata nell'Ex. 64e; pertanto, usando la formula per la derivata della trasformata, abbiamo per $\omega \neq \mp 1$

$$\begin{aligned} X_0(\omega) = \mathscr{F}[x_0](\omega) = j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,\mathscr{F}[x_1](\omega) = 2\,j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{1-\omega^2} \\ = 2\,j\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{-\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{1-\omega^2} + 2\,\omega\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{(1-\omega^2)^2}\right). \end{aligned}$$

Essendo il periodo π, è $\omega_0 = 2$ e dobbiamo campionare X_0 nei punti $2\,k$, con $k \in \mathbb{Z}$; non intervengono nel campionamento i valori esclusi $\omega = \mp 1$:

$$X_0(2\,k) = 2\,j\left(0 + 4\,k\,\frac{\cos k\,\pi}{(1-4\,k^2)^2}\right) = 8\,j\,\frac{k\,(-1)^k}{(1-4\,k^2)^2}$$

In definitiva, essendo x la replica periodica, abbiamo

$$X(\omega) = \mathscr{F}[x](\omega) = 16\,j\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{k\,(-1)^k}{(1-4\,k^2)^2}\delta(\omega - 2\,k)\,.$$

Ex. 64l Usiamo il teorema di campionamento. Dobbiamo quindi trasformare il segnale

$$x_0(t) = t\,(1-\mathrm{e}^t)\left[u(t) - u(t-1)\right] + t^2\left[u(t+1) - u(t)\right].$$

Cominciamo col trasformare $x_1(t) = \mathrm{e}^t\left[u(t) - u(t-1)\right]$; questa trasformata è calcolata nell'Ex. 64f. A scopo illustrativo, procediamo in base alla definizione; abbiamo

$$X_1(\omega) = \int_0^1 \mathrm{e}^{(1-j\,\omega)\,t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega} - 1}{1 - j\,\omega}\,, \qquad \forall\omega \in \mathbb{R}\,.$$

Alternativamente,

$$X_1(\omega) = \mathscr{L}[u(t) - u(t-1)](j\,\omega - 1) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-(j\,\omega - 1)}}{j\,\omega - 1}\,.$$

Ricordando la formula per la derivata della trasformata troviamo quindi

$$\mathscr{F}\left[t\,\mathrm{e}^t\left[u(t) - u(t-1)\right]\right] = \mathscr{F}[t\,x_1(t)] = j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega} - 1}{1 - j\,\omega} = \frac{1 - j\,\omega\,\mathrm{e}^{1-j\,\omega}}{(1-j\,\omega)^2}\,.$$

Calcoliamo ora la trasformata di $x_2(t) = t\left[u(t) - u(t-1)\right] + t^2\left[u(t+1) - u(t)\right]$ derivando ripetutamente fino ad ottenere impulsi e derivate di impulsi:

$$\begin{aligned} x_2'(t) &= u(t) - u(t-1) + t\left[\delta(t) - \delta(t-1)\right] + 2\,t\left[u(t+1) - u(t)\right] \\ &\quad + t^2\left[\delta(t+1) - \delta(t)\right] \\ &= u(t) - u(t-1) - \delta(t-1) + 2\,t\left[u(t+1) - u(t)\right] + \delta(t+1)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2''(t) &= \delta(t) - \delta(t-1) - \delta'(t-1) + 2\left[u(t+1) - u(t)\right] \\ &\quad + 2\,t\left[\delta(t+1) - \delta(t)\right] + \delta'(t+1) \\ &= \delta(t) - \delta(t-1) - \delta'(t-1) + 2\left[u(t+1) - u(t)\right] - 2\,\delta(t+1) + \delta'(t+1)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2'''(t) &= \delta'(t) - \delta'(t-1) - \delta''(t-1) + 2\left[\delta(t+1) - \delta(t)\right] \\ &\quad - 2\,\delta'(t+1) + \delta''(t+1)\,, \end{aligned}$$

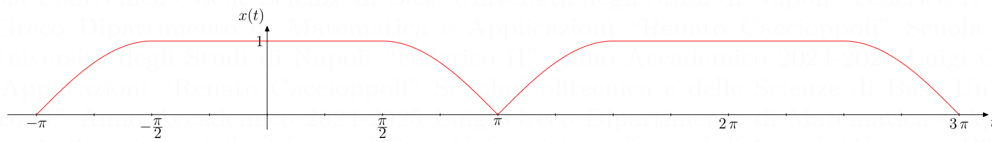
quindi $(j\,\omega)^3\,X_2(\omega) = j\,\omega + \mathrm{e}^{-j\,\omega}\,(-j\,\omega+\omega^2) + \mathrm{e}^{j\,\omega}\,(2-2\,j\,\omega-\omega^2) - 2$ e, per $\omega \neq 0$,

$$X_2(\omega) = j\,\frac{j\,\omega + \mathrm{e}^{-j\,\omega}\,(-j\,\omega+\omega^2) + \mathrm{e}^{j\,\omega}\,(2-2\,j\,\omega-\omega^2) - 2}{\omega^3}\,.$$

Inoltre $X_2(0) = \int_0^1 t\,dt + \int_{-1}^0 t^2\,dt = 1/2 + 1/3 = 5/6$. Essendo il periodo 2, abbiamo $\omega_0 = \pi$ e quindi dobbiamo campionare nei punti $k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Per $k \neq 0$ pari risulta $\mathrm{e}^{\mp j\,k\,\pi} = 1$ e quindi $X_2(k\,\pi) = 2/(k\,\pi)^2$. Per k dispari risulta $\mathrm{e}^{\mp j\,k\,\pi} = -1$ e quindi $X_0(k\,\pi) = -4\,(i + k\,\pi)/(k\,\pi)^3$. Dunque la trasformata del prolungamento per periodicità è

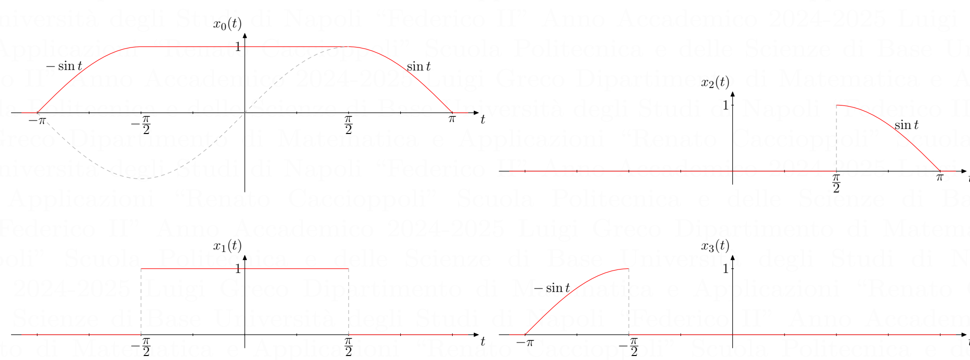
$$\begin{aligned} X(\omega) = &-\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1 - j\,k\,\pi\;\mathrm{e}\,(-1)^k}{(1-j\,k\,\pi)^2}\,\delta(\omega - k\,\pi) \\ &+ \frac{5}{6}\,\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2\,\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\,\delta(\omega - 2\,n) \\ &- \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i + (2\,n+1)\,\pi}{(2\,n+1)^3}\,\delta(\omega - (2\,n+1)\pi)\,. \end{aligned}$$

Ex. 64m Tracciamo il grafico del prolungamento periodico x:



Usiamo il teorema di campionamento. Trasformiamo il segnale (per $-\pi < t < -\pi/2$ è $|\sin t| = -\sin t$)

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \Big[u\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big) - u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big] + \sin t\,\Big[u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big) - u(t-\pi)\Big] \\ &\qquad - \sin t\,\Big[u(t+\pi) - u\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big)\Big] \\ &:= x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)\,. \end{aligned}$$



In base alla definizione, troviamo $X_1(\omega) = 2\,\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega}$ (o, ciò che è lo stesso, osservando che $x_1(t) = \Pi\big(t/\pi\big)$ e ricordando che $\mathscr{F}[\Pi] = 2\,\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\omega}$, calcoliamo la trasformata X_1 mediante la formula di cambiamento di scala).

Il segnale $x_2(t) = \sin t\big[u\big(t-\pi/2\big) - u(t-\pi)\big]$ è prodotto di una funzione trigonometrica per una finestra, quindi per trasformarlo possiamo derivare due volte nel senso delle distribuzioni:

$$
\begin{aligned}
x_2'(t) &= \cos t\left[u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big) - u(t-\pi)\right] + \sin t\left[\delta\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big) - \delta(t-\pi)\right]\\
&= \cos t\left[u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big) - u(t-\pi)\right] + \delta\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2''(t) &= -\sin t\left[u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big) - u(t-\pi)\right] + \cos t\left[\delta\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big) - \delta(t-\pi)\right] + \delta'\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\\
&= -x_2(t) + \delta(t-\pi) + \delta'\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

e quindi trasformando $-\omega^2 X_2(\omega) = -X_2(\omega) + \mathrm{e}^{-j\,\pi\,\omega} + j\,\omega\;\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\omega}$, ovvero per $\omega \neq \mp 1$,

$$
X_2(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{-j\,\pi\,\omega} + j\,\omega\;\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\omega}}{1-\omega^2}\,.
$$

Per trasformare $x_3(t) = -\sin t\big[u(t+\pi) - u\big(t+\pi/2\big)\big]$, basta osservare che risulta $x_3(t) = x_2(-t)$ e quindi

$$
X_3(\omega) = X_2(-\omega) = \frac{\mathrm{e}^{j\,\pi\,\omega} - j\,\omega\;\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\omega}}{1-\omega^2}\,.
$$

Pertanto (per $\omega \neq -1, 0, 1$)

$$
\begin{aligned}
X_0(\omega) &= X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)\\
&= 2\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-j\,\pi\,\omega} + j\,\omega\;\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\omega} + \mathrm{e}^{j\,\pi\,\omega} - j\,\omega\;\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\omega}}{1-\omega^2}\\
&= 2\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega} + 2\,\frac{\cos\pi\,\omega + \omega\,\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2} = 2\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega + \omega\,\cos\pi\,\omega}{\omega\,(1-\omega^2)}
\end{aligned}
$$

La funzione X_0 è reale e pari, come è chiaro risultando tale pure x_0. Per il campionamento, essendo $\omega_0 = 1$, dobbiamo calcolare i valori di X_0 nei punti esclusi:

$$
X_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} x_0(t)\,dt = \pi + 2\,,
$$

$$
\begin{aligned}
X_0(\mp 1) &= \lim_{\omega\to 1} X_0(\omega) = \lim_{\omega\to 1}\left\{2\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega} + 2\,\frac{\cos\pi\,\omega + \omega\,\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\right\}\\
&= 2 + 2\lim_{\omega\to 1}\frac{-\pi\sin\pi\,\omega + \sin\frac{\pi}{2}\omega + \omega\,\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\omega}{-2\,\omega} = 2 - 1 = 1\,.
\end{aligned}
$$

D'altra parte, per $n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$, abbiamo $X_0(n) = 2\,\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}\,n + n\,\cos\pi\,n}{n\,(1-n^2)}$ e, distinguendo i casi n pari e n dispari,

$$X_0(2\,k) = 2\,\frac{\sin k\,\pi + 2\,k\,\cos 2\,k\,\pi}{2\,k\,(1-4\,k^2)} = \frac{2}{1-4\,k^2}\,, \quad k \neq 0\,;$$

$$\begin{aligned} X_0(2\,k+1) &= 2\,\frac{\sin\left(k\,\pi + \frac{\pi}{2}\right) + (2\,k+1)\,\cos(2\,k\,\pi+\pi)}{(2\,k+1)\,(-4\,k-4\,k^2)} \\ &= \frac{2\,k+1-(-1)^k}{2\,(2\,k+1)\,(k+k^2)}\,, \quad k \neq -1\,,\ 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto la trasformata del prolungamento periodico x è

$$\begin{aligned} X(\omega) = (\pi+2)\,\delta(\omega) + \delta(\omega-1) + \delta(\omega+1) + 2\sum_{k\neq 0}\frac{1}{1-4\,k^2}\,\delta(\omega-2\,k) \\ +\frac{1}{2}\sum_{k\neq -1,0}\frac{2\,k+1-(-1)^k}{(2\,k+1)\,(k+k^2)}\,\delta(\omega-2\,k-1)\,. \end{aligned}$$

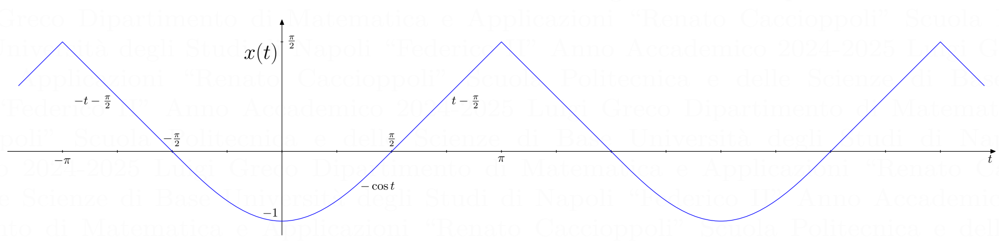
Da questo possiamo subito scrivere la serie esponenziale di Fourier di x, ricordando che i coefficienti sono $c_n = X_0(n)/(2\,\pi)$:

$$\begin{aligned} x(t) \sim \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right) + \frac{\mathrm{e}^{j\,t}}{2\,\pi} + \frac{\mathrm{e}^{-j\,t}}{2\,\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{\mathrm{e}^{2\,k\,j\,t}}{1-4\,k^2} \\ + \frac{1}{4\,\pi}\sum_{k\neq -1,0}\frac{2\,k+1-(-1)^k}{(2\,k+1)\,(k+k^2)}\,\mathrm{e}^{(2\,k+1)\,j\,t}\,. \end{aligned}$$

La serie trigonometrica sarà in soli coseni, poiché il segnale x è pari. Ricordando che $a_0 = c_0$ e $a_n = c_n + c_{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, scriviamo

$$x(t) \sim \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right) + \frac{\cos t}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\cos 2\,k\,t}{1-4\,k^2} + \frac{1}{2\,\pi}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{2\,k+1-(-1)^k}{(2\,k+1)\,(k+k^2)}\,\cos\,(2\,k+1)\,t\,.$$

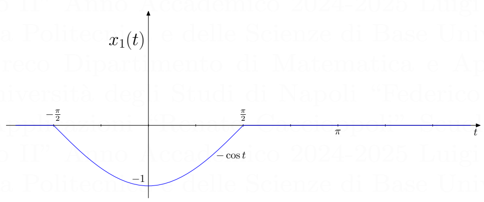
Ex. 64n Tracciamo il grafico del prolungamento periodico x:

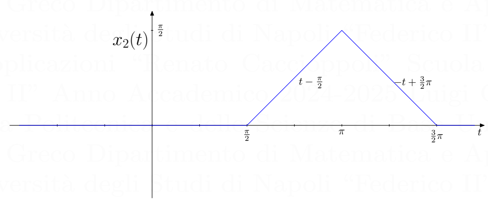


Usiamo il teorema di campionamento. È chiaro che il segnale x si ottiene come replica periodica di periodo $2\,\pi$ della somma x_0 di

$$x_1(t) = -\cos t\,\Big[u\Big(t+\frac{\pi}{2}\Big) - u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\,;$$

$$\begin{aligned} x_2(t) = {} & \Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\,\Big[u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big) - u(t-\pi)\Big] \\ & + \Big(-t+\frac{3}{2}\,\pi\Big)\,\Big[u(t-\pi) - u\Big(t-\frac{3}{2}\,\pi\Big)\Big]\,. \end{aligned}$$





La trasformata di $-x_1(t) = \big[u\big(t+\pi/2\big) - u\big(t-\pi/2\big)\big]\,\cos t$ è stata calcolata nell'Ex. 64e; per $\omega \neq \mp 1$:

$$X_1(\omega) = 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^2-1}\,.$$

La trasformata di x_2 si riconduce facilmente a quella del segnale y_0 nell'Ex. 64u, risultando

$$x_2(t) = \frac{\pi}{2}\,y_0\Big(\frac{t-\pi}{\frac{\pi}{2}}\Big)\,.$$

Usando la formula di traslazione e quella di cambiamento di scala, otteniamo per $\omega \neq 0$

$$X_2(\omega) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-j\,\pi\,\omega}\,Y_0\Big(\frac{\pi}{2}\,\omega\Big) = \mathrm{e}^{-j\,\pi\,\omega}\,2\,\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^2}\,.$$

Essendo $\omega_0 = 1$, dobbiamo campionare nei punti $\omega = n \in \mathbb{Z}$. Occorre quindi calcolare i valori esclusi dalle formule trovate; poiché $X_1(\mp 1) = -\pi/2$ e $X_2(0) = (\pi/2)^2$, abbiamo

$$X_0(0) = X_1(0) + X_2(0) = -2 + \frac{\pi^2}{4}\,, \qquad X_0(\mp 1) = -\frac{\pi}{2} - 2\,.$$

D'altra parte, per $n \in \mathbb{Z} - \{-1, 0, 1\}$

$$X_0(n) = X_1(n) + X_2(n) = 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,n}{n^2-1} + \mathrm{e}^{-j\,\pi\,n}\,2\,\frac{1-\cos\frac{\pi}{2}\,n}{n^2}\,.$$

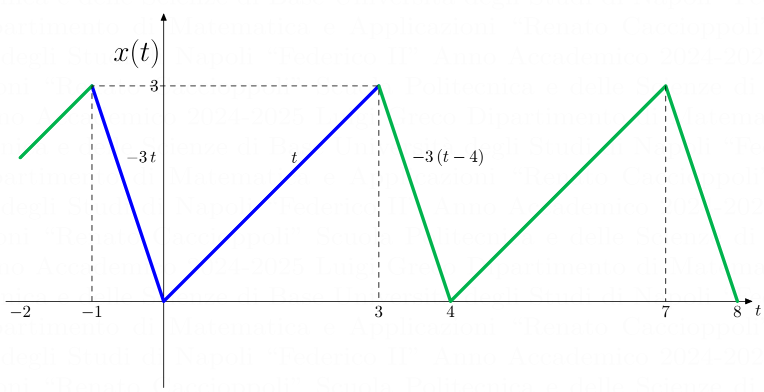
Evidentemente:

$$\begin{aligned} &\cos\frac{\pi}{2}\,n = 0 \text{ per } n \text{ dispari } \Rightarrow X_0(n) = -\frac{2}{n^2}\,; \\ &\cos\frac{\pi}{2}\,n = 1 \text{ per } n \text{ divisibile per } 4 \Rightarrow X_0(n) = \frac{2}{n^2-1}\,; \\ &\cos\frac{\pi}{2}\,n = -1 \text{ per } n \text{ pari, ma non divisibile per } 4 \Rightarrow X_0(n) = 2\,\frac{n^2-2}{n^2\,(n^2-1)}\,. \end{aligned}$$

Scrivendo nei tre casi $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{Z} - \{-1, 0\}$, $n = 4k$ con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e $n = 4k+2$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, rispettivamente, abbiamo in definitiva

$$\begin{aligned} X(\omega) = {} & \left(\frac{\pi^2}{4} - 2\right)\delta(\omega) - \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\big[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\big] \\ & - 2 \sum_{k \neq -1;0} \frac{1}{(2k+1)^2}\,\delta(\omega - 2k - 1) \\ & + 2 \sum_{k \neq 0} \frac{1}{(4k)^2 - 1}\,\delta(\omega - 4k) \\ & + 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(4k+2)^2 - 2}{(4k+2)^2\big[(4k+2)^2 - 1\big]}\,\delta(\omega - 4k - 2)\,. \end{aligned}$$

Ex. 64o Chiaramente $x(t) = \begin{cases} -3t\,, & -1 \le t < 0 \\ t\,, & 0 \le t < 3 \end{cases}$. Tracciamo il diagramma del prolungamento periodico, denotato ancora con x.



Usando il teorema di campionamento, trasformiamo il segnale

$$x_0 = -3t\big[u(t+1) - u(t)\big] + t\big[u(t) - u(t-3)\big] = t\big[4u(t) - 3u(t+1) - u(t-3)\big]\,,$$

la cui replica periodica di periodo 4 è il prolungamento periodico x. Deriviamo due volte nel senso delle distribuzioni:

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= 4u(t) - 3u(t+1) - u(t-3) + t\big[4\delta(t) - 3\delta(t+1) - \delta(t-3)\big] \\ &= 4u(t) - 3u(t+1) - u(t-3) + 3\delta(t+1) - 3\delta(t-3)\,, \end{aligned}$$

$$x_0''(t) = 4\delta(t) - 3\delta(t+1) - \delta(t-3) + 3\delta'(t+1) - 3\delta'(t-3)\,.$$

Trasformando,

$$-\omega^2 X_0(\omega) = 4 - 3\,\mathrm{e}^{j\omega} - \mathrm{e}^{-3j\omega} + 3j\omega\,\mathrm{e}^{j\omega} - 3j\omega\,\mathrm{e}^{-3j\omega}\,,$$

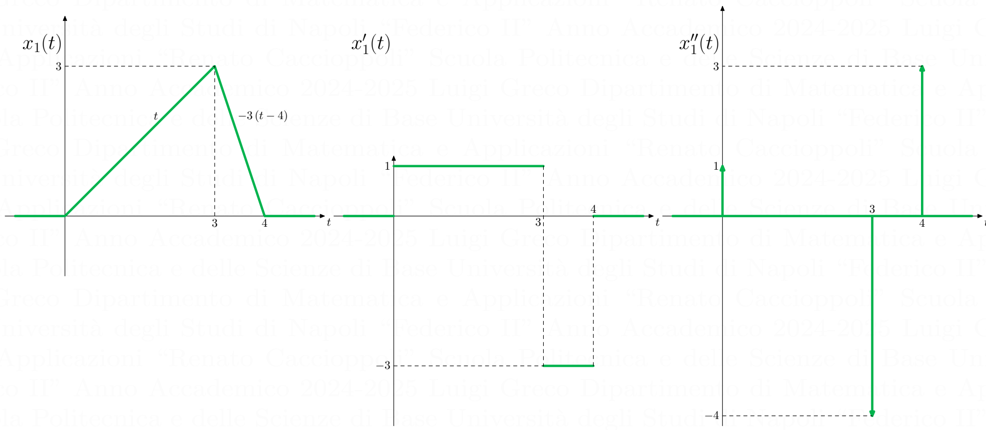
da cui ricaviamo, per $\omega \neq 0$,

$$X_0(\omega) = \frac{3(1 - \mathrm{e}^{j\omega} + j\omega\,\mathrm{e}^{j\omega}) + 1 - \mathrm{e}^{-3j\omega} - 3j\omega\,\mathrm{e}^{-3j\omega}}{-\omega^2}\,.$$

Una scelta leggermente più comoda dal punto di vista dei calcoli è

$$x_1(t) = t\big[u(t) - u(t-3)\big] - 3(t-4)\big[u(t-3) - u(t-4)\big]\,,$$

che ha pure come replica periodica x; il segnale x_1 è continuo, quindi x_1' non contiene impulsi. È facile derivare x_1 graficamente:



Dunque $x_1''(t) = \delta(t) - 4\,\delta(t-3) + 3\,\delta(t-4)$.

Alternativamente, posto

$$x_2(t) = t\,\big[u(t) - u(t-3)\big]\,, \qquad x_3(t) = -3\,t\,\big[u(t+1) - u(t)\big]\,,$$

in modo che risulti $x_0 = x_2 + x_3$, possiamo osservare che $x_3(t) = x_2(-3\,t)$, quindi $X_3(\omega) = \frac{1}{3}\,X_2(-\frac{\omega}{3})$. Per calcolare X_2, possiamo procedere come prima, derivando nel senso delle distribuzioni, o come segue:

$$X_2(\omega) = \mathscr{F}\,\Big[t\,\big[u(t) - u(t-3)\big]\Big] = j\;\mathscr{F}\,\Big[-j\,t\,\big[u(t) - u(t-3)\big]\Big] = j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,X_4(\omega)\,,$$

dove $x_4(t) = u(t) - u(t-3)$. La trasformata X_4 si calcola subito usando la definizione:

$$X_4(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_4(t)\;\mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt = \int_0^3 \mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt = \frac{1-\mathrm{e}^{-3j\omega}}{j\,\omega}\,.$$

Dunque

$$X_2(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-3j\omega}}{\omega} = \frac{3\,j\,\omega\;\mathrm{e}^{-3j\omega} - 1 + \mathrm{e}^{-3j\omega}}{\omega^2}\,.$$

Ne segue

$$X_3(\omega) = \frac{1}{3}\,\frac{-j\,\omega\;\mathrm{e}^{j\omega} - 1 + \mathrm{e}^{j\omega}}{\omega^2/9} = 3\,\frac{1-\mathrm{e}^{j\omega} + j\,\omega\;\mathrm{e}^{j\omega}}{-\omega^2}$$

e quindi riotteniamo la trasformata $X_0 = X_2 + X_3$ trovata precedentemente.

Occorre calcolare a parte $X_0(0)$:

$$X_0(0) = \frac{1}{2}\,4\cdot 3\;(= \text{area triangolo})$$

Essendo il periodo 4, risulta $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ e dobbiamo campionare nei punti $k\,\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Poiché

$$\mathrm{e}^{-3jk\frac{\pi}{2}} = \mathrm{e}^{-2k\pi j + k\frac{\pi}{2}j} = \mathrm{e}^{k\frac{\pi}{2}j} = j^k\,,$$

per $k \neq 0$ troviamo

$$X_0\left(k\,\frac{\pi}{2}\right) = 4\,\frac{3\,\left(1 - j^k + j\,k\,\frac{\pi}{2}\,j^k\right) + 1 - j^k - 3\,j\,k\,\frac{\pi}{2}\,j^k}{-k^2\pi^2} = \frac{16}{\pi^2}\,\frac{j^k-1}{k^2}\,.$$

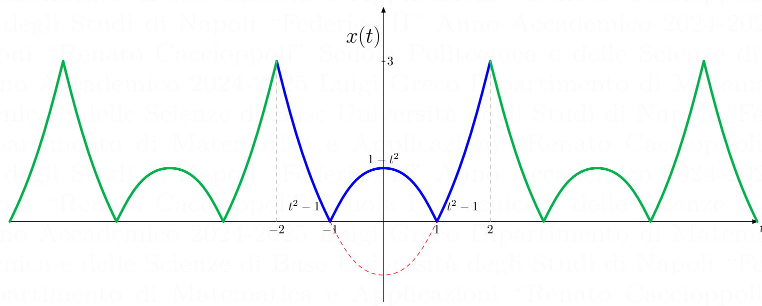
Pertanto infine

$$X(\omega) = 3\,\pi\,\delta(\omega) + \frac{8}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{j^k-1}{k^2}\,\delta\Big(\omega - k\,\frac{\pi}{2}\Big)\,.$$

Ex. 64p Il prolungamento si ottiene come replica periodica di

$$\begin{aligned} x_0(t) &= (t^2-1)\big\{[u(t+2)-u(t+1)] - [u(t+1)-u(t-1)] \\ &\qquad +[u(t-1)-u(t-2)]\big\} \\ &= (1-t^2)\big\{2\,\Pi(t/2) - \Pi(t/4)\big\} = (1-t^2)\,x_1(t)\,, \end{aligned}$$

dove come al solito $\Pi(t) = u(t+1/2) - u(t-1/2)$ e abbiamo posto $x_1(t) = 2\,\Pi(t/2) - \Pi(t/4)$.



Per le proprietà della trasformazione, avremo

$$X_0 = \mathscr{F}\left[x_1(t) - t^2\,x_1(t)\right] = X_1 + \mathscr{F}\left[(-j\,t)^2\,x_1(t)\right] = X_1 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\,X_1\,.$$

Per calcolare X_1, ricordiamo che $\mathscr{F}[\Pi(t)] = \sin(\omega/2)/(\omega/2)$, quindi, per la formula di cambiamento di scala,

$$\mathscr{F}[\Pi(t/2)] = 2\,\frac{\sin\omega}{\omega}\,, \qquad \mathscr{F}[\Pi(t/4)] = 4\,\frac{\sin 2\,\omega}{2\,\omega}$$

e dunque

$$X_1(\omega) = 4\,\frac{\sin\omega}{\omega} - 4\,\frac{\sin 2\,\omega}{2\,\omega} = 4\,[Y(\omega) - Y(2\,\omega)]\,,$$

essendo $Y(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega}$. Inoltre $X_1''(\omega) = 4\,[Y''(\omega) - 4\,Y''(2\,\omega)]$, essendo

$$Y''(\omega) = -\frac{\sin\omega}{\omega} - 2\,\frac{\cos\omega}{\omega^2} + 2\,\frac{\sin\omega}{\omega^3}\,. \tag{14}$$

Pertanto

$$X_0(\omega) = 4\,\big\{Y(\omega) - Y(2\,\omega) + Y''(\omega) - 4\,Y''(2\,\omega)\big\}\,.$$

Il valore $\omega = 0$ non può essere inserito nelle espressioni trovate, quindi $X_0(0)$ deve essere calcolato a parte. In base alla definizione, abbiamo $X_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0(t)\,dt = 4$. Poiché il periodo è 4, risulta $\omega_0 = \pi/2$. Nel campionamento, distinguiamo i casi n pari e n dispari. Per $n \neq 0$ pari, scriviamo $n = 2\,k$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, quindi $n\,\omega_0 = k\,\pi$. Inoltre $Y(k\,\pi) = Y(2\,k\,\pi) = 0$ e da (14)

$$Y''(k\,\pi) = -2\,\frac{\cos k\,\pi}{(k\,\pi)^2} = -2\,\frac{(-1)^k}{(k\,\pi)^2}\,, \qquad Y''(2\,k\,\pi) = -\frac{2}{(2\,k\,\pi)^2}\,.$$

Dunque

$$X_0(k\,\pi) = \frac{8}{\pi^2}\,\frac{1-(-1)^k}{k^2}\,.$$

Per n dispari, scriviamo $n = 2\,k+1$, con $k \in \mathbb{Z}$, quindi abbiamo $n\,\omega_0 = k\,\pi + \frac{\pi}{2}$, $Y(2\,k\,\pi + \pi) = 0$ e

$$Y(k\,\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \frac{(-1)^k}{k\,\pi + \frac{\pi}{2}}\,,$$

$$Y''(k\,\pi + \tfrac{\pi}{2}) = -\frac{(-1)^k}{k\,\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{2\,(-1)^k}{(k\,\pi + \frac{\pi}{2})^3}\,, \qquad Y''(2\,k\,\pi + \pi) = \frac{2}{(2\,k\,\pi + \pi)^2}\,.$$

Quindi

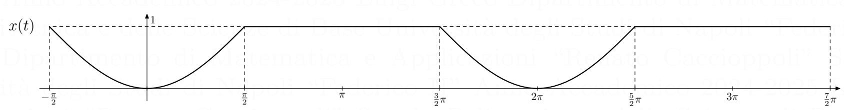
$$X_0(k\,\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \frac{32}{\pi^3}\,\frac{2\,(-1)^k - 2\,k\,\pi - \pi}{(2\,k+1)^3}\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X(\omega) = 2\,\pi\,\delta(\omega) &+ \frac{4}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{1-(-1)^k}{k^2}\,\delta(\omega - k\,\pi) \\ &+ \frac{16}{\pi^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{2\,(-1)^k - 2\,k\,\pi - \pi}{(2\,k+1)^3}\,\delta(\omega - k\,\pi - \tfrac{\pi}{2})\,. \end{aligned}$$

D'altra parte, non è difficile calcolare in base alla definizione i coefficienti c_k della serie esponenziale di Fourier.

Ex. 64q Indichiamo con x anche il prolungamento per periodicità.



Osserviamo che risulta $x(t) = 1 - y(t)$, dove y è replica periodica con periodo $2\,\pi$ di

$$y_0(t) = \cos t\,\big[u(t+\pi/2) - u(t-\pi/2)\big]\,.$$

Pertanto abbiamo $X(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega) - Y(\omega)$. D'altra parte, la trasformata $Y = \mathscr{F}[y]$ è stata calcolata nell'Ex. 64e:

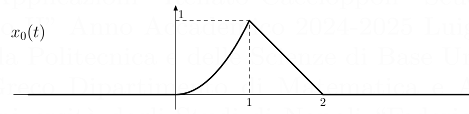
$$Y(\omega) = \frac{\pi}{2}\,\big[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\big] + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4\,n^2}\,\delta(\omega - 2\,n)\,.$$

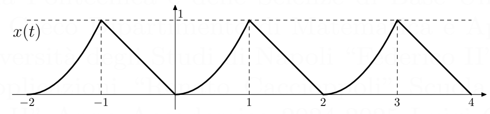
Dunque in definitiva

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2\pi\,\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}\,\big[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\big] + 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4\,n^2-1}\,\delta(\omega - 2\,n) \\ &= (2\,\pi - 2)\,\delta(\omega) - \frac{\pi}{2}\,\big[\delta(\omega-1) + \delta(\omega+1)\big] + 2\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{4\,n^2-1}\,\delta(\omega - 2\,n)\,. \end{aligned}$$

Ex. 64r Il prolungamento per periodicità, che indicheremo ancora con x, si ottiene come replica periodica con periodo 2 di

$$x_0(t) = t^2\,[u(t) - u(t-1)] + (2-t)\,[u(t-1) - u(t-2)]\,.$$





Procediamo mediante il teorema di campionamento. Trasformiamo x_0; poiché tale segnale è somma di termini ciascuno prodotto di un polinomio per una finestra, deriviamo nel senso delle distribuzioni fino a che rimangano impulsi e derivate:

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= 2\,t\,[u(t)-u(t-1)] + t^2\,[\delta(t)-\delta(t-1)] - [u(t-1)-u(t-2)] \\ &\quad + (2-t)\,[\delta(t-1)-\delta(t-2)] = 2\,t\,[u(t)-u(t-1)] - u(t-1) + u(t-2) \end{aligned}$$

(notiamo che la derivata coincide con quella ordinaria, x_0 essendo C^1 a tratti)

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= 2\,[u(t)-u(t-1)] + 2\,t\,[\delta(t)-\delta(t-1)] - \delta(t-1) + \delta(t-2) \\ &= 2\,[u(t)-u(t-1)] - 3\,\delta(t-1) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

$$x_0'''(t) = 2\,\delta(t) - 2\,\delta(t-1) - 3\,\delta'(t-1) + \delta'(t-2)$$

Applicando la trasformazione ad ambo i membri e ricordando la formula per la trasformata delle derivate, troviamo

$$-j\,\omega^3\,X_0(\omega) = \mathscr{F}[x_0'''] = 2 - 2\,\mathrm{e}^{-j\,\omega} - 3\,j\,\omega\,\mathrm{e}^{-j\,\omega} + j\,\omega\,\mathrm{e}^{-2\,j\,\omega}\,,$$

da cui ricaviamo (in senso puntuale, essendo X_0 una funzione di classe C^∞ in quanto trasformata di una funzione a supporto compatto), per $\omega \neq 0$

$$X_0(\omega) = 2\,\frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}-1}{j\,\omega^3} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-j\,\omega} - \mathrm{e}^{-2\,j\,\omega}}{\omega^2}\,.$$

D'altra parte

$$X_0(0) = \int_0^1 t^2\,dt + \int_1^2 (2-t)\,dt = \frac{5}{6}\,.$$

Essendo il periodo 2, risulta $\omega_0 = \pi$ e bisogna campionare nei punti $k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $\mathrm{e}^{-j\,k\,\pi} = (-1)^k$, distinguiamo i casi k pari e k dispari:

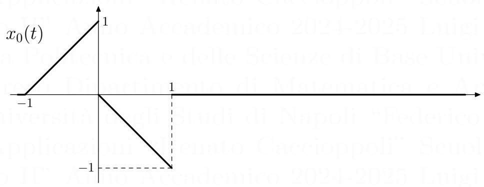
$$X_0(k\,\pi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\,n^2\,\pi^2}\,, & \text{per } k = 2\,n,\ n \neq 0 \\ 4\,\dfrac{j-(2\,n-1)\,\pi}{(2\,n-1)^3\,\pi^3}\,, & \text{per } k = 2\,n-1 \end{cases}$$

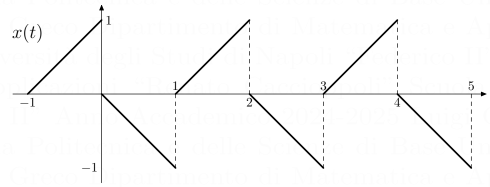
In definitiva

$$X(\omega) = \frac{5}{6}\,\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2\,\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\,\delta(\omega-2\,n\,\pi) + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{j-(2\,n-1)\,\pi}{(2\,n-1)^3}\,\delta(\omega-2\,n\,\pi+\pi)\,.$$

Ex. 64s Il prolungamento x è replica periodica con periodo 2 di

$$x_0(t) = (t+1)\,\big[u(t+1)-u(t)\big] - t\,\big[u(t)-u(t-1)\big]\,.$$





Procediamo mediante il teorema di campionamento. Trasformiamo x_0; deriviamo nel senso delle distribuzioni fino a che rimangano impulsi e derivate:

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= u(t+1) - u(t) + (t+1)\big[\delta(t+1) - \delta(t)\big] - \big[u(t) - u(t-1)\big] \\ &\quad - t\big[\delta(t) - \delta(t-1)\big] \\ &= u(t+1) - 2\,u(t) + u(t-1) - \delta(t) + \delta(t-1) \end{aligned}$$

$$x_0''(t) = \delta(t+1) - 2\,\delta(t) + \delta(t-1) - \delta'(t) + \delta'(t-1)$$

e quindi, applicando la trasformazione e usando la formula per la trasformata delle derivate, abbiamo

$$-\omega^2\,X_0(\omega) = \mathrm{e}^{j\,\omega} - 2 + \mathrm{e}^{-j\,\omega} - j\,\omega + j\,\omega\,\mathrm{e}^{-j\,\omega}$$

e, per $\omega \neq 0$,

$$X_0(\omega) = 2\,\frac{1-\cos\omega}{\omega^2} + \frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega} - 1}{j\,\omega}\,.$$

Alternativamente, posto $x_1(t) = t\,\big[u(t) - u(t-1)\big]$, possiamo scrivere $x_0(t) = x_1(t+1) - x_1(t)$; inoltre

$$\begin{aligned} \mathscr{F}[x_1(t)] &= j\,\mathscr{F}[-j\,t\,\Pi(t-1/2)] = j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\;\mathrm{e}^{-j\,\omega/2}\,\frac{\sin\omega/2}{\omega/2} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\;\frac{1-\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega} = j\,\frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega} - \frac{1-\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega^2}\,, \end{aligned}$$

$$\mathscr{F}[x_1(t+1)] = \mathrm{e}^{j\,\omega}\,\mathscr{F}[x_1(t)] = j\,\frac{1}{\omega} - \frac{\mathrm{e}^{j\,\omega} - 1}{\omega^2}$$

e riotteniamo facilmente l'espressione trovata per X_0. D'altra parte

$$X_0(0) = \lim_{\omega\to 0} X_0(\omega) = 2\,\frac{1}{2} - 1 = 0\,.$$

Riguardo al campionamento, essendo il periodo 2, è $\omega_0 = \pi$; inoltre osserviamo che $\forall n \in \mathbb{Z}$ risulta $X_0(2\,n\,\pi) = 0$, mentre

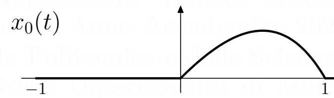
$$X_0\big((2\,n-1)\,\pi\big) = 2\,\frac{2 + j\,(2\,n-1)\,\pi}{(2\,n-1)^2\,\pi^2}\,.$$

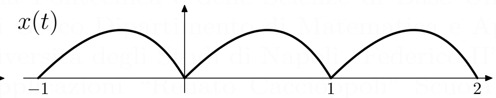
Pertanto, in definitiva

$$X(\omega) = \frac{2}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{2 + j\,(2\,n-1)\,\pi}{(2\,n-1)^2}\;\delta\big(\omega - (2\,n-1)\,\pi\big)\,.$$

Ex. 64t Il prolungamento x si ottiene come replica periodica con periodo 1 di

$$x_0(t) = (1-t)\,(\mathrm{e}^t - 1)\,\big[u(t) - u(t-1)\big] = (1-t)\,y_0(t) = \big[1 - j\,(-j\,t)\big]\,y_0(t)\,,$$





dove $y_0(t) = (\mathrm{e}^t - 1)\,\big[u(t) - u(t-1)\big]$. Calcoliamo la trasformata di y_0 in base alla definizione; per $\omega \neq 0$:

$$\begin{aligned}
Y_0(\omega) \; &= \int_0^1 (\mathrm{e}^t - 1)\,\mathrm{e}^{-j\,\omega\,t}\,dt = \int_0^1 \left(\mathrm{e}^{(1-j\,\omega)\,t} - \mathrm{e}^{-j\,\omega\,t}\right) dt \\
&= \frac{\big[\mathrm{e}^{(1-j\,\omega)\,t}\big]_{t=0}^{t=1}}{1-j\,\omega} - \frac{\big[\mathrm{e}^{-j\,\omega\,t}\big]_{t=0}^{t=1}}{-j\,\omega} = \frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega}-1}{1-j\,\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}-1}{j\,\omega}
\end{aligned}$$

Dunque, ricordando la formula per la derivata della trasformata, abbiamo

$$\begin{aligned}
X_0(\omega) \; &= Y_0(\omega) - j\,Y_0'(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega}-1}{1-j\,\omega} + \frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}-1}{j\,\omega} \\
&\quad -j\left\{-j\,\frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega}}{1-j\,\omega} - (-j)\,\frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega}-1}{(1-j\,\omega)^2} - j\,\frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{j\,\omega} - \frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}-1}{j\,\omega^2}\right\} \\
&= \frac{-1}{1-j\,\omega} + \frac{-1}{j\,\omega} - j\left\{-(-j)\,\frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega}-1}{(1-j\,\omega)^2} - \frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}-1}{j\,\omega^2}\right\} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{1-j\,\omega}-1}{(1-j\,\omega)^2} + \frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}-1}{\omega^2} - \frac{1}{j\,\omega\,(1-j\,\omega)}\,.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$X_0(0) = \int_0^1 (1-t)\,(\mathrm{e}^t - 1)\,dt = \mathrm{e} - \frac{5}{2}\,.$$

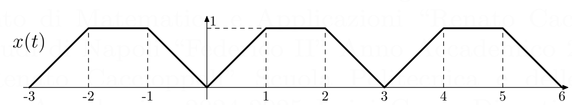
Poiché il periodo è 1, risulta $\omega_0 = 2\,\pi$ e bisogna campionare nei punti $2\,k\,\pi$. Essendo $\mathrm{e}^{-j\,2\,k\,\pi} = 1$, $\forall k$, dall'espressione di X_0 ricaviamo per $k \neq 0$

$$X_0(2\,k\,\pi) = \frac{\mathrm{e}-1}{(1-j\,2\,k\,\pi)^2} + 0 - \frac{1}{j\,2\,k\,\pi\,(1-j\,2\,k\,\pi)} = \frac{\mathrm{e}\,j\,2\,k\,\pi - 1}{j\,2\,k\,\pi\,(1-j\,2\,k\,\pi)^2}\,.$$

Pertanto concludiamo

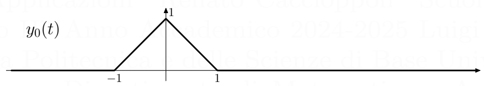
$$X(\omega) = (2\,\mathrm{e} - 5)\,\pi\,\delta(\omega) + \sum_{k\neq 0} \frac{2\,k\,\pi\,\mathrm{e} + j}{k\,(1-2\,k\,\pi\,j)^2}\,\delta(\omega - 2\,k\,\pi)\,.$$

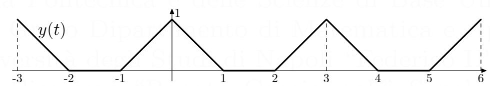
Ex. 64u Tracciamo il diagramma del prolungamento per periodicità (che indichiamo ancora con x):



È chiaro che $y(t) = 1 - x(t)$ si ottiene come replica periodica di periodo 3 della finestra triangolare

$$y_0(t) = (1-t)\,\big[u(t) - u(t-1)\big] + (1+t)\,\big[u(t+1) - u(t)\big] = \Lambda(t)\,,$$





trasformata nelle Lezioni: per $\omega \neq 0$, abbiamo

$$Y_0(\omega) = 2\,\frac{1-\cos\omega}{\omega^2}\,,$$

mentre $Y_0(0) = 1$. Poiché il periodo è 3, risulta $\omega_0 = \dfrac{2}{3}\,\pi$; per $k \neq 0$, abbiamo

$$Y_0\left(k\,\frac{2}{3}\,\pi\right) = 2\,\frac{1-\cos k\,\frac{2}{3}\,\pi}{\left(k\,\frac{2}{3}\,\pi\right)^2}$$

ed essendo $\cos\frac{2}{3}\,\pi = \cos\frac{4}{3} = -\frac{1}{2}$, troviamo ancora

$$Y_0\left(k\,\frac{2}{3}\,\pi\right) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{per } k = 3\,n, \text{ con } n \neq 0 \\ \dfrac{27}{(2\,k\,\pi)^2} & ,\ \text{per } k = 3\,n+1 \text{ e per } k = 3\,n+2, \text{ con } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pertanto

$$Y(\omega) = \frac{2}{3}\,\pi\,\delta(\omega) + \frac{9}{2\,\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(3\,n+1)^2}\,\delta\left(\omega-(3\,n+1)\,\frac{2}{3}\,\pi\right) + \frac{1}{(3\,n+2)^2}\,\delta\left(\omega-(3\,n+2)\,\frac{2}{3}\,\pi\right)\right]$$

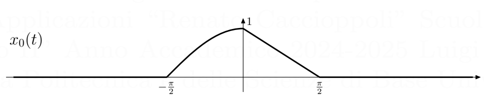
e quindi in definitiva

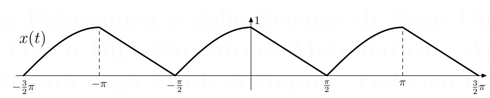
$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2\,\pi\,\delta(\omega) - Y(\omega) \\ &= \frac{4}{3}\,\pi\,\delta(\omega) - \frac{9}{2\,\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{(3\,n+1)^2}\,\delta\left(\omega-(3\,n+1)\,\frac{2}{3}\,\pi\right) + \frac{1}{(3\,n+2)^2}\,\delta\left(\omega-(3\,n+2)\,\frac{2}{3}\,\pi\right)\right]. \end{aligned}$$

Notiamo che $X(\omega)$ è reale pari, come potevamo prevedere, essendo tale pure $x(t)$.

Ex. 64v Il prolungamento, indicato ancora con x, si ottiene come replica periodica con periodo π di $x_0(t) = x_1(t) + x_2(t)$, dove

$$x_1(t) = \cos t\,\big[u(t+\pi/2) - u(t)\big]\,, \qquad x_2(t) = (1 - 2\,t/\pi)\,\big[u(t) - u(t-\pi/2)\big]\,.$$





Derivando due volte, troviamo $x_1(t) = -x_1(t) + \delta(t+\pi/2) - \delta'(t)$ e quindi, per $\omega \neq \mp 1$,

$$X_1(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} - j\,\omega}{1-\omega^2}\,.$$

Analogamente, $x_2''(t) = -(2/\pi)\,\delta(t) + (2/\pi)\,\delta(t-\pi/2) + \delta'(t)$ e quindi, per $\omega \neq 0$,

$$X_2(\omega) = \frac{2\,(\,\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} - 1) + \pi\,j\,\omega}{-\pi\,\omega^2}\,.$$

Inoltre $X_2(0)=\int_0^{\pi/2}(1-2\,t/\pi)\,dt=\pi/4$. Essendo il periodo π, risulta $\omega_0=2$, quindi dobbiamo campionare nei punti $2\,k$; $\omega=\mp 1$ non intervengono. Dunque, per $k\neq 0$,

$$X_0(2\,k)=X_1(2\,k)+X_2(2\,k)=\frac{(-1)^k\,2\,k-j}{2\,k\,(1-4\,k^2)}-\frac{(-1)^k-1}{2\,k^2\,\pi}$$

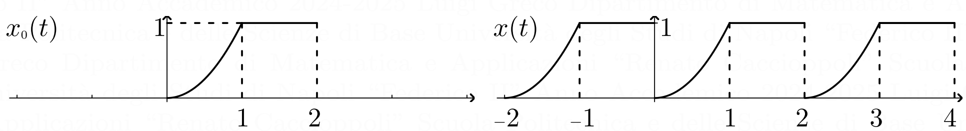
$$=\begin{cases}\dfrac{2\,k-j}{2\,k\,(1-4\,k^2)} & \text{, per } k \text{ pari}\\[2ex] \dfrac{-2\,k-j}{2\,k\,(1-4\,k^2)}+\dfrac{1}{k^2\,\pi} & \text{, per } k \text{ dispari}\end{cases}$$

Possiamo pertanto scrivere

$$\begin{aligned}X(\omega)=&\Big(2+\frac{\pi}{2}\Big)\,\delta(\omega)+\sum_{n\neq 0}\frac{4\,n-j}{2\,n\,(1-16\,n^2)}\,\delta(\omega-4\,n)\\ &+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2\,(2\,n-1)+j}{(2\,n-1)\,(16\,n^2-16\,n+3)}+\frac{2}{(2\,n-1)^2\,\pi}\right]\delta(\omega-4\,n+2)\end{aligned}$$

Ex. 64w Il prolungamento x si ottiene come replica periodica con periodo 2 di

$$x_0(t)=t^2\,\big[u(t)-u(t-1)\big]+u(t-1)+u(t-2)\,.$$



Deriviamo fino a che non rimangano impulsi e derivate (deriviamo 3 volte):

$$\begin{aligned}x_0'(t)&=2\,t\,\big[u(t)-u(t-1)\big]+t^2\,\big[\delta(t)-\delta(t-1)\big]+\delta(t-1)-\delta(t-2)\\ &=2\,t\,\big[u(t)-u(t-1)\big]-\delta(t-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_0''(t)&=2\,u(t)-2\,u(t-1)+2\,t\,\big[\delta(t)-\delta(t-1)\big]-\delta'(t-2)\\ &=2\,u(t)-2\,u(t-1)-2\,\delta(t-1)-\delta'(t-2)\end{aligned}$$

$$x_0'''(t)=2\,\delta(t)-2\,\delta(t-1)-2\,\delta'(t-1)-\delta''(t-2)$$

e quindi, applicando la trasformazione,

$$-j\,\omega^3\,X_0(\omega)=2-2\,\mathrm{e}^{-j\,\omega}-2\,j\,\omega\,\mathrm{e}^{-j\,\omega}+\omega^2\,\mathrm{e}^{-2\,j\,\omega}\,.$$

Dunque, per $\omega\neq 0$, otteniamo

$$X_0(\omega)=2\,j\,\frac{1-\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega^3}+2\,\frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega}}{\omega^2}+j\,\frac{\mathrm{e}^{-2\,j\,\omega}}{\omega}\,.$$

D'altra parte, $X_0(0)=\int_0^1 t^2\,dt+1=1/3+1=4/3$. Essendo il periodo 2, è $\omega_0=\pi$ e dobbiamo campionare nei punti $k\,\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Osserviamo che $\mathrm{e}^{-j\,k\,\pi}=(-1)^k$; distinguiamo i casi k pari e k dispari:

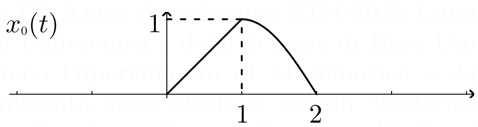
$$X_0(k\,\pi)=\begin{cases}\dfrac{1+n\,\pi\,j}{2\,n^2\,\pi^2} & \text{, per } k=2\,n,\ n\neq 0\\[2ex] \dfrac{4\,j-2\,(2\,n-1)\,\pi+j\,(2\,n-1)^2\,\pi^2}{(2\,n-1)^3\,\pi^3} & \text{, per } k=2\,n-1\end{cases}$$

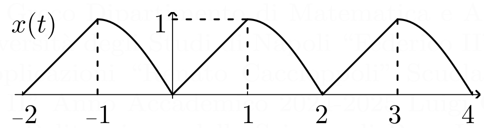
Pertanto

$$X(\omega) = \frac{4}{3}\,\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2\,\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1+n\,\pi\,j}{n^2}\,\delta(\omega-2\,n\,\pi) + \frac{j}{\pi^2}\sum_{n}\frac{4+2\,j\,(2\,n-1)\,\pi+(2\,n-1)^2\,\pi^2}{(2\,n-1)^3}\,\delta(\omega-2\,n\,\pi+\pi)\,.$$

Ex. 64x Il prolungamento x è la replica periodica di

$$x_0(t) = t\,\big[u(t)-u(t-1)\big] + \sin\frac{\pi}{2}\,t\,\big[u(t-1)-u(t-2)\big]\,.$$





L'esercizio è analogo all'Ex. 64v. Per il risultato, osserviamo che, indicata con $y(t)$ la funzione periodica di periodo π di tale esercizio, risulta

$$x(t) = y\left(-\frac{\pi}{2}\,(t-1)\right)$$

e quindi

$$X(\omega) = \mathrm{e}^{-j\,\omega}\,\mathscr{F}\left[y\left(\frac{\pi}{2}\,t\right)\right] = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{e}^{-j\,\omega}\,Y\left(-\frac{2}{\pi}\,\omega\right)\,.$$

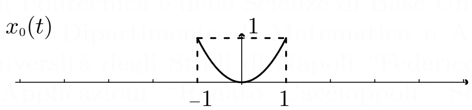
Inoltre

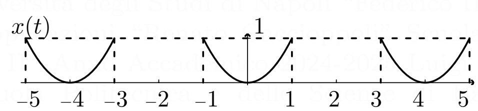
$$\frac{2}{\pi}\,\delta\Big(-\frac{2}{\pi}\,\omega-4\,n\Big) = \delta(\omega+2\,n\,\pi)\,,\qquad \frac{2}{\pi}\,\delta\Big(-\frac{2}{\pi}\,\omega-4\,n+2\Big) = \delta\big(\omega+(2\,n-1)\,\pi\big)\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \Big(2+\frac{\pi}{2}\Big)\,\delta(\omega) + \sum_{n\neq 0}\frac{4\,n-j}{2\,n\,(1-16\,n^2)}\,\mathrm{e}^{j\,2\,n\,\pi}\delta(\omega+2\,n\,\pi) \\ &\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2\,(2\,n-1)+j}{(2\,n-1)\,(16\,n^2-16\,n+3)}+\frac{2}{(2\,n-1)^2\,\pi}\right]\times \\ &\qquad\qquad \times\,\mathrm{e}^{j\,(2\,n-1)\,\pi}\delta(\omega+(2\,n-1)\,\pi) \\ &= \Big(2+\frac{\pi}{2}\Big)\,\delta(\omega) + \sum_{n\neq 0}\frac{4\,n+j}{2\,n\,(1-16\,n^2)}\,\delta(\omega-2\,n\,\pi) \\ &\quad - \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2\,(2\,n+1)-j}{(2\,n+1)\,(16\,n^2+16\,n+3)}+\frac{2}{(2\,n+1)^2\,\pi}\right]\delta(\omega-(2\,n+1)\,\pi) \end{aligned}$$

Ex. 64y Tracciamo i diagrammi di x_0 e della replica periodica x:





Per trasformare x_0, osserviamo che risulta $x_0(t) = -(-j\,t)^2\,\Pi\big(t/2\big)$ e quindi, per $\omega\neq 0$,

$$X_0(\omega) = -2\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}\,\frac{\sin\omega}{\omega} = -2\left(\frac{-\sin\omega}{\omega}-2\,\frac{\cos\omega}{\omega^2}+2\,\frac{\sin\omega}{\omega^3}\right)\,.$$

D'altra parte $X_0(0) = 2\int_0^1 t^2\,dt = 2/3$. Essendo il periodo 4, risulta $\omega_0 = \pi/2$; nel campionamento, distinguiamo i casi k pari e k dispari:

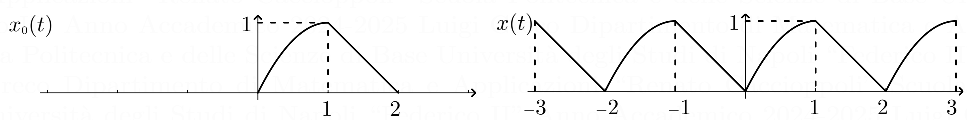
$$X_0\left(k\,\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 4\,\dfrac{(-1)^n}{4\,n^2\,\pi^2/4}\,, & \text{per } k = 2\,n\,,\ n \neq 0 \\ 2\,(-1)^n \left(\dfrac{1}{(2\,n+1)\,\pi/2} - \dfrac{2}{(2\,n+1)^3\,\pi^3/8}\right)\,, & \text{per } k = 2\,n+1 \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X(\omega) = \frac{\pi}{3}\,\delta(\omega) + \frac{2}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^n}{n^2}\delta(\omega - n\,\pi) \\ + \frac{2}{\pi^2}\sum_n (-1)^n\,\frac{(2\,n+1)^2\,\pi^2 - 8}{(2\,n+1)^3}\,\delta(\omega - n\,\pi - \pi/2)\,. \end{aligned}$$

Ex. 64z Il prolungamento x si ottiene come replica periodica con periodo 2 del segnale continuo

$$x_0(t) = (2\,t - t^2)\,\big[u(t) - u(t-1)\big] + (2-t)\,\big[u(t-1) - u(t-2)\big]\,.$$



Deriviamo fino a che non rimangano impulsi e derivate (deriviamo 3 volte, i calcoli sono analoghi a quelli dell'Ex. 64r:

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= (2 - 2\,t)\,[u(t) - u(t-1)] + (2\,t - t^2)\,[\delta(t) - \delta(t-1)] \\ &\quad - [u(t-1) - u(t-2)] + (2-t)\,[\delta(t-1) - \delta(t-2)] \\ &= 2\,(1-t)\,[u(t) - u(t-1)] - u(t-1) + u(t-2) \end{aligned}$$

(notiamo che la derivata coincide con quella ordinaria, x_0 essendo C^1 a tratti)

$$\begin{aligned} x_0''(t) &= -2\,[u(t) - u(t-1)] + 2\,(1-t)\,[\delta(t) - \delta(t-1)] - \delta(t-1) + \delta(t-2) \\ &\quad - 2\,[u(t) - u(t-1)] + 2\,\delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-2) \end{aligned}$$

$$x_0'''(t) = -2\,\delta(t) + 2\,\delta(t-1) + 2\,\delta'(t) - \delta'(t-1) + \delta'(t-2)$$

quindi

$$-j\,\omega^3\,X_0(\omega) = -2 + 2\,\mathrm{e}^{-j\,\omega} + j\,\omega\,(2 - \mathrm{e}^{-j\,\omega} + \mathrm{e}^{-2\,j\,\omega})$$

e, per $\omega \neq 0$, ricaviamo

$$X_0(\omega) = 2\,j\,\frac{\mathrm{e}^{-j\,\omega} - 1}{\omega^3} - \frac{2 - \mathrm{e}^{-j\,\omega} + \mathrm{e}^{-2\,j\,\omega}}{\omega^2}\,.$$

D'altra parte $X_0(0) = \int_0^1 (2\,t - t^2)\,dt + 1/2 = 1 - 1/3 + 1/2 = 7/6$. Poiché il periodo è 2, risulta $\omega_0 = \pi$ e dobbiamo campionare nei punti $k\,\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$; distinguiamo i casi k pari e k dispari:

$$X_0(k\,\pi) = 2\,j\,\frac{(-1)^k - 1}{k^3\,\pi^3} - \frac{3-(-1)^k}{k^2\,\pi^2}$$

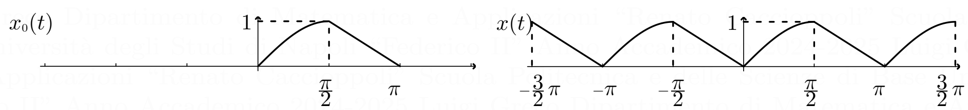
$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{2\,n^2\,\pi^2} & ,\ \text{per } k = 2\,n, \text{ con } n \neq 0 \\[2ex] -4\,\dfrac{(2\,n-1)\,\pi + j}{(2\,n-1)^3\,\pi^3} & ,\ \text{per } k = 2\,n-1 \end{cases}$$

Pertanto

$$X(\omega) = \frac{7}{6}\,\pi\,\delta(\omega) - \frac{1}{2\,\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}\,\delta(\omega - 2\,n\,\pi) - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n}\frac{(2\,n-1)\,\pi + j}{(2\,n-1)^3}\,\delta(\omega - 2\,n\,\pi + \pi)\,.$$

Ex. 64a$_1$ Il prolungamento x è la replica periodica con periodo π del segnale continuo

$$x_0(t) = \sin t\,\big[u(t) - u(t-\pi/2)\big] + (2 - 2t/\pi)\big[u(t-\pi/2) - u(t-\pi)\big]\,.$$

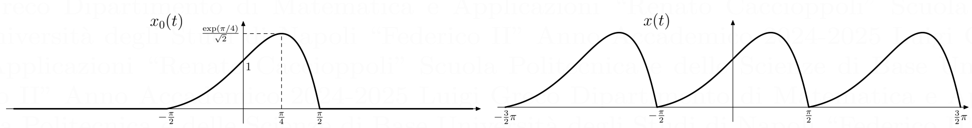


L'esercizio è analogo all'Ex. 64v. Per il risultato, osserviamo che, indicata con $y(t)$ la funzione periodica di periodo π di tale esercizio, risulta $x(t) = y(t - \pi/2)$ e quindi

$$X(\omega) = \mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega}\,Y(\omega) = \Big(2 + \frac{\pi}{2}\Big)\,\delta(\omega) + \sum_{n\neq 0}\frac{4\,n - j}{2\,n\,(1 - 16\,n^2)}\,\delta(\omega - 4\,n)$$
$$-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left[\frac{2\,(2\,n-1) + j}{(2\,n-1)\,(16\,n^2 - 16\,n + 3)} + \frac{2}{(2\,n-1)^2\,\pi}\right]\delta(\omega - 4\,n + 2)\,.$$

Ex. 64b$_1$ Il prolungamento è replica periodica con periodo π di

$$x_0(t) = \mathrm{e}^t\,\cos t\,\big[u(t + \pi/2) - u(t - \pi/2)\big]\,.$$



Per trasformare x_0, usiamo il legame tra $\mathscr{F}$ e $\mathscr{L}$; osserviamo che $\mathscr{L}[x_0]$ è una funzione intera e $\mathscr{F}[x_0](\omega) = \mathscr{L}[x_0](j\,\omega)$. Poiché (supponendo momentaneamente $\mathrm{Re}\,s > 1$)

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^t\,\cos t\;u(t + \pi/2)\right] = \mathscr{L}\left[\cos t\;u(t+\pi/2)\right](s-1)$$
$$= \mathrm{e}^{(s-1)\,\pi/2}\,\mathscr{L}[\sin t\;u(t)](s-1) = \frac{\mathrm{e}^{(s-1)\,\pi/2}}{(s-1)^2 + 1}$$

e analogamente

$$\mathscr{L}\left[\mathrm{e}^t\,\cos t\;u(t - \pi/2)\right] = -\frac{\mathrm{e}^{(1-s)\,\pi/2}}{(s-1)^2+1}\,,$$

abbiamo

$$X_0(\omega) = \mathscr{F}[x_0] = \frac{\mathrm{e}^{(j\,\omega - 1)\,\pi/2} + \mathrm{e}^{(1 - j\,\omega)\,\pi/2}}{(j\,\omega - 1)^2 + 1}\,.$$

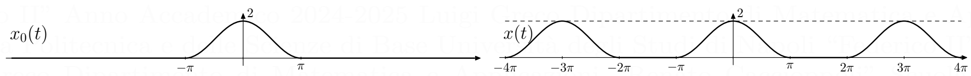
Essendo il periodo π, risulta $\omega_0 = 2$; inoltre

$$X_0(2\,k) = \frac{\mathrm{e}^{k\,\pi\,j-\pi/2} + \mathrm{e}^{-k\,\pi\,j+\pi/2}}{(2\,k\,j-1)^2+1} = (-1)^k\,\frac{\cosh\frac{\pi}{2}}{1-2\,k\,j-2\,k^2}$$

e pertanto

$$X(\omega) = 2\,\cosh\frac{\pi}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1-2\,k\,j-2\,k^2}\,\delta(\omega-2\,k)\,.$$

Ex. 64c$_1$ Tracciamo i diagrammi di x_0 e della replica periodica x:



Per la trasformazione, per $\omega \in \mathbb{R} - \{-1\,,\ 0\,,\ 1\}$ abbiamo

$$\begin{aligned}X_0(\omega) &= \mathscr{F}\left[(1+\cos t)\,\Pi\!\left(\frac{t}{2\,\pi}\right)\right] = 2\,\frac{\sin\pi\,\omega}{\omega} + \frac{\sin\pi\,(\omega-1)}{\omega-1} + \frac{\sin\pi\,(\omega+1)}{\omega+1}\\ &= \sin\pi\,\omega\left(\frac{2}{\omega} - \frac{1}{\omega-1} - \frac{1}{\omega+1}\right) = 2\,\frac{\sin\pi\,\omega}{\omega-\omega^3}\,.\end{aligned}$$

Notiamo che X_0 è reale pari, come x_0. Essendo il periodo 3π, risulta $\omega_0 = 2/3$ e bisogna campionare nei punti $k\,2/3$; i punti ∓1 non intervengono nel campionamento. D'altra parte $X_0(0) = \lim_{\omega\to0} X_0(\omega) = 2\,\pi$. Nel campionamento, distinguiamo i tre casi $k = 3\,n$, $k = 3\,n+1$ e $k = 3\,n+2$; essendo

$$\sin\frac{2}{3}\,\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \qquad \sin\frac{4}{3}\,\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

troviamo

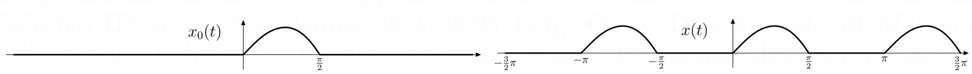
$$X_0\left(\frac{2}{3}\,k\right) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{per } k = 3\,n, \text{ con } n \neq 0\\ \dfrac{\sqrt{3}/2}{(n+1/3)-4\,(n+1/3)^3} & ,\ \text{per } k = 3\,n+1\\ \dfrac{-\sqrt{3}/2}{(n+2/3)-4\,(n+2/3)^3} & ,\ \text{per } k = 3\,n+2\end{cases}$$

e pertanto

$$\begin{aligned}X(\omega) = \frac{4\,\pi}{3}\,\delta(\omega) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\Bigg\{&\frac{1}{(n+1/3)-4\,(n+1/3)^3}\,\delta(\omega-2\,n-2/3)\\ &- \frac{1}{(n+2/3)-4\,(n+2/3)^3}\,\delta(\omega-2\,n-4/3)\Bigg\}\,.\end{aligned}$$

Ex. 64d$_1$ Il prolungamento x è replica periodica con periodo π di

$$x_0(t) = t\,\cos t\,\big[u(t) - u(t-\pi/2)\big]\,.$$



Posto $x_1(t) = \cos t\,\big[u(t) - u(t-\pi/2)\big]$, abbiamo $x_0(t) = j\,(-j\,t)\,x_1(t)$. Per trasformare x_1, essendo tale segnale prodotto di una finestra per una funzione trigonometrica, usiamo il metodo del riciclo, quindi deriviamo due volte:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -\sin t\,\big[u(t)-u(t-\pi/2)\big] + \cos t\,\big[\delta(t)-\delta(t-\pi/2)\big] \\ &= -\sin t\,\big[u(t)-u(t-\pi/2)\big] + \delta(t) \end{aligned}$$

$$x_1''(t) = -x_1(t) - \sin t\,\big[\delta(t)-\delta(t-\pi/2)\big] + \delta'(t) = -x_1(t) + \delta(t-\pi/2) + \delta'(t)$$

e quindi, per $\omega \neq \mp 1$

$$X_1(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} + j\,\omega}{1-\omega^2}\,.$$

Ne segue

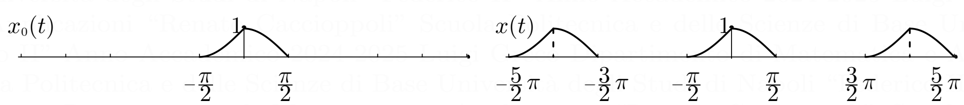
$$\begin{aligned} X_0(\omega) = j\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\,X_1(\omega) &= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\,\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega}-1\right)(1-\omega^2) + 2\,j\,\omega\,\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} - 2\,\omega^2}{(1-\omega^2)^2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega}\left[\frac{\pi}{2}\,(1-\omega^2) + 2\,j\,\omega\right] - 1 - \omega^2}{(1-\omega^2)^2}\,. \end{aligned}$$

È $\omega_0 = 2$, quindi

$$X(\omega) = 2\sum_k \frac{(-1)^k\left(\frac{\pi}{2} - 2\,k^2\pi + 4\,k\,j\right) - 1 - 4\,k^2}{(1-4\,k^2)^2}\,\delta(\omega - 2\,k)\,.$$

Ex. 64e$_1$ Sia x la replica periodica con periodo $2\,\pi$ di

$$x_0(t) = (1+\sin t)\,\big[u(t+\pi/2)-u(t)\big] + \cos t\,\big[u(t)-u(t-\pi/2)\big]\,.$$



Scriviamo $x_0(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$, con $x_1(t) = u(t+\pi/2) - u(t)$, $x_2(t) = \sin t\,\big[u(t+\pi/2)-u(t)\big]$ e $x_3(t) = \cos t\,\big[u(t)-u(t-\pi/2)\big]$. In base alla definizione, per $\omega \neq 0$ abbiamo

$$X_1(\omega) = \int_{-\pi/2}^{0} \mathrm{e}^{-j\,\omega\,t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} - 1}{j\,\omega}\,.$$

Inoltre, essendo $x_2''(t) = -x_2 - \delta(t) - \delta'(t+\pi/2)$, per $\omega \neq \mp 1$ abbiamo

$$X_2(\omega) = \frac{1 + j\,\omega\,\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,\omega}}{\omega^2 - 1}\,.$$

Ancora, osservando che $x_3(t) = -x_2(t-\pi/2)$, troviamo $X_3(\omega) = -\,\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega}\,X_2(\omega)$ e quindi infine

$$X_0(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} - 1}{j\,\omega} + (1 - \mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega})\,\frac{1 + j\,\omega\,\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,\omega}}{\omega^2 - 1} = (\mathrm{e}^{j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} - 1)\,\frac{j\,\omega\,\mathrm{e}^{-j\,\frac{\pi}{2}\,\omega} - 1}{j\,\omega\,(\omega^2 - 1)}\,.$$

Essendo il periodo 2π, è $\omega_0 = 1$ e bisogna campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$. Nel campionamento, distinguiamo quattro casi, in base alla classe di k modulo 4:

$$\begin{aligned}
X_0(4n) &= 0\,, && n \neq 0\,;\\
X_0(4n+1) &= \frac{1+j}{(4n+1)\,(4n+2)}\,, && n \neq 0\,;\\
X_0(4n+2) &= \frac{4n+2-j}{(2n+1)\,\big[(4n+2)^2-1\big]}\,, && \forall n\,;\\
X_0(4n+3) &= \frac{1-j}{(4n+2)\,(4n+3)}\,, && n \neq -1\,.
\end{aligned}$$

Inoltre $X_0(0) = \lim_{\omega\to 0} X_0(\omega) = \pi/2$,

$$X_0(1) = \lim_{\omega\to 1} X_0(\omega) = (1+j)\left(\frac{1}{2} - j\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+j}{(4n+1)\,(4n+2)}\bigg|_{n=0} + \frac{\pi}{4}\,(1-j)$$

e analogamente

$$X_0(-1) = (1-j)\left(\frac{1}{2} + j\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-j}{(4n+2)\,(4n+3)}\bigg|_{n=-1} + \frac{\pi}{4}\,(1+j)\,.$$

Possiamo pertanto scrivere

$$\begin{aligned}
X(\omega) = \frac{\pi}{2}\,\delta(\omega) &+ \frac{\pi}{4}\,(1-j)\,\delta(\omega-1) + \frac{\pi}{4}\,(1+j)\,\delta(\omega+1)\\
&+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1+j}{8n+2}\,\delta(\omega-4n-1)\right.\\
&\left. + \frac{4n+2-j}{(4n+2)^2-1}\,\delta(\omega-4n-2) + \frac{1-j}{8n+6}\,\delta(\omega-4n-3)\right\}.
\end{aligned}$$

Ex. 64f$_1$ Per trasformare x_0 osserviamo che, posto $x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\,(1+t)\,u(t)$, risulta $x_0(t) = x_1(t) + x_1(-t)$, quindi $X_0(\omega) = X_1(\omega) + X_1(-\omega)$. $\mathscr{F}$-trasformiamo dunque x_1; a tal fine, usiamo il legame con la $\mathscr{L}$-trasformazione, osservando che x_1 è assolutamente $\mathscr{L}$-trasformabile per $\operatorname{Re} s > -1$, perché di ordine esponenziale. Risulta quindi

$$\begin{aligned}
X_1(\omega) = \mathscr{F}[x_1](\omega) = \mathscr{L}[x_1](j\,\omega) &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2}\bigg|_{s=j\omega}\\
&= \frac{s+2}{(s+1)^2}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2}\,.
\end{aligned}$$

Notando che $X_1(-\omega) = \overline{X_1(\omega)}$, troviamo infine

$$\begin{aligned}
X_0(\omega) = 2\operatorname{Re} X_1(\omega) = 2\operatorname{Re}\frac{j\omega+2}{(j\omega+1)^2} &= 2\operatorname{Re}\frac{(j\omega+2)(-j\omega+1)^2}{(\omega^2+1)^2}\\
&= 2\operatorname{Re}\frac{(j\omega+2)(1-\omega^2-2j\omega)}{(\omega^2+1)^2} = 2\,\frac{2\,(1-\omega^2)+2\,\omega^2}{(\omega^2+1)^2}\\
&= \frac{4}{(\omega^2+1)^2} = \left(\frac{2}{1+\omega^2}\right)^2
\end{aligned}$$

Notiamo che X_0 è reale pari, come è pure x_0. Inoltre, ricordando che $\mathscr{F}[\,\mathrm{e}^{-|t|}] = 1/(1+\omega^2)$, vediamo che $x_0(t) = \mathrm{e}^{-|t|} * \mathrm{e}^{-|t|}$. Essendo il periodo 2π, dobbiamo campionare negli interi.Pertanto

$$X(\omega) = 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+k^2)^2} \, \delta(\omega - k)$$

e

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+k^2)^2} \, e^{jkt} = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+k^2)^2} \cos kt \, .$$

Ex. 64g$_1$ Il prolungamento periodico, che indichiamo pure con x si ottiene come replica periodica di periodo 2 di

$$x_0(t) = (t - t^3) \, [u(t+1) - u(t-1)] \, .$$

Ricordando che (vedere Esempio X.3.9 delle Lezioni)

$$\mathscr{F} \left[(1 - t^2) \, [u(t+1) - u(t-1)] \right] = 4 \left(\frac{\sin \omega}{\omega^3} - \frac{\cos \omega}{\omega^2} \right) ,$$

mediante la prima formula fondamentale troviamo, per $\omega \neq 0$,

$$X_0(\omega) = 4 \, j \, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \left(\frac{\sin \omega}{\omega^3} - \frac{\cos \omega}{\omega^2} \right) = 4 \, j \left(\frac{\sin \omega}{\omega^2} + 3 \, \frac{\cos \omega}{\omega^3} - 3 \, \frac{\sin \omega}{\omega^4} \right) .$$

Notiamo che X_0 è immaginaria dispari, in accordo col fatto che x_0 è reale dispari. Inoltre, essendo dispari, verifica $X_0(0) = 0$.

Essendo il periodo $\tau = 2$, risulta $\omega_0 = \pi$ e dobbiamo campionare nei punti $k \, \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché chiaramente $\sin k \, \pi = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, mentre $\cos k \, \pi = (-1)^k$, troviamo

$$X_0(k \, \pi) = 12 \, j \, \frac{(-1)^k}{(k \, \pi)^3} \, , \qquad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \, .$$

Dunque

$$X(\omega) = \frac{12 \, j}{\pi^2} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^3} \, \delta(\omega - k \, \pi) \, , \qquad x(t) = \frac{6 \, j}{\pi^3} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^3} \, e^{j \pi k t} \, .$$

Ex. 64h$_1$ Il prolungamento periodico,indicato ancora con x, si ottiene come replica con periodo $2\,\pi$ di

$$x_0(t) = (\pi^2 - t^2) \cos t \, [u(t+\pi) - u(t-\pi)] \, .$$

Per la formula di modulazione, posto

$$x_1(t) = (\pi^2 - t^2) \, [u(t+\pi) - u(t-\pi)]$$

e risultando quindi $x_0(t) = x_1(t) \cos t$, abbiamo

$$X_0(\omega) = \frac{1}{2} \Big(X_1(\omega - 1) + X_1(\omega + 1) \Big).$$

Per trasformare x_1, possiamo derivare 3 volte nel senso delle distribuzioni, o usare la prima formula fondamentale, o usare il legame con la $\mathscr{L}$-trasformazione. Procediamo qui nel modo seguente; ricordando che il segnale

$$x_2(t) = (1 - t^2) \, [u(t+1) - u(t-1)]$$

è stato trasformato nelle Lezioni ed osservando che risulta $x_1(t) = \pi^2\, x_2(t/\pi)$, troviamo, per la formula di cambiamento di scala, $X_1(0) = 4\,\pi^2/3$ e per $\omega \neq 0$,

$$X_1(\omega) = \pi^3\, X_2(\pi\,\omega) = 4\,\pi^3 \left(\frac{\sin \pi\,\omega}{(\pi\,\omega)^3} - \frac{\cos \pi\,\omega}{(\pi\,\omega)^2}\right) = 4 \left(\frac{\sin \pi\,\omega}{\omega^3} - \pi\,\frac{\cos \pi\,\omega}{\omega^2}\right).$$

Pertanto, per $\omega \neq \mp 1$,

$$\begin{aligned} X_0(\omega) &= 2 \left(\frac{\sin \pi\,(\omega-1)}{(\omega-1)^3} - \pi\,\frac{\cos \pi\,(\omega-1)}{(\omega-1)^2} + \frac{\sin \pi\,(\omega+1)}{(\omega+1)^3} - \pi\,\frac{\cos \pi\,(\omega+1)}{(\omega+1)^2}\right) \\ &= 2\,\pi \cos \pi\,\omega \left(\frac{1}{(\omega-1)^2} + \frac{1}{(\omega+1)^2}\right) - 2 \sin \pi\,\omega \left(\frac{1}{(\omega-1)^3} + \frac{1}{(\omega+1)^3}\right) \\ &= 4\,\pi \cos \pi\,\omega\, \frac{\omega^2+1}{(\omega^2-1)^2} - 4 \sin \pi\,\omega\, \frac{\omega^3+3\,\omega}{(\omega^2-1)^3}. \end{aligned}$$

Osserviamo che X_0 è reale pari, in accordo col fatto che tale è anche x_0. Essendo il periodo $\tau = 2\,\pi$, risulta $\omega_0 = 1$ e dobbiamo campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$. Calcoliamo

$$X_0(-1) = X_0(1) = \frac{1}{2}\Big(X_1(0) + X_1(2)\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi^3 - \pi\right) = \frac{2}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2}\,.$$

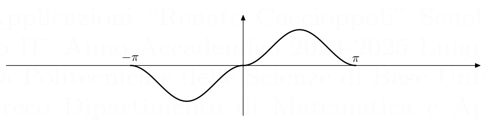
Notiamo che $\sin k\,\pi = 0$ e $\cos k\,\pi = (-1)^k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, quindi, per $k \neq \mp 1$, abbiamo

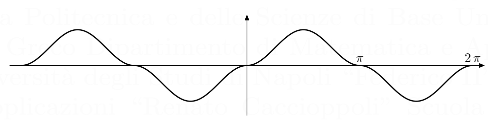
$$X_0(k) = 4\,\pi\,(-1)^k\, \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}\,.$$

Dunque

$$X(\omega) = \left(\frac{2}{3}\pi^3 - \frac{\pi}{2}\right)\{\delta(\omega+1) + \delta(\omega-1)\} + 4\,\pi \sum_{k \neq \mp 1} (-1)^k\, \frac{k^2+1}{(k^2-1)^2}\, \delta(\omega-k)\,.$$

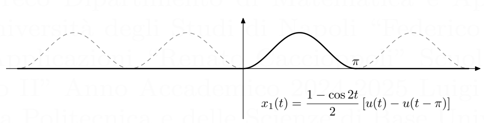
Ex. 64i$_1$ Tracciamo il diagramma di x e del prolungamento periodico, che denoteremo ancora con x.

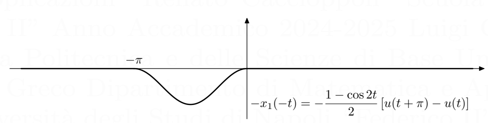




Il segnale periodico si ottiene come replica di periodo 2π di $x_0(t) = x_1(t) - x_1(-t)$, dove

$$x_1(t) = \frac{1-\cos 2t}{2}\,[u(t) - u(t-\pi)]\,.$$





Notiamo altresì che, detto x_2 il segnale periodico di periodo $2\,\pi$ che nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ vale

$$x_2(t) = \begin{cases} -1 & , \text{ per } -\pi < t < 0 \\ 1 & , \text{ per } 0 < t < \pi \end{cases}$$

risulta

$$x(t) = x_2(t)\, \frac{1-\cos 2t}{2}\,.$$

Ne segue

$$c_k[x] = \frac{1}{2}\left\{c_k[x_2] - \frac{1}{2}\Big(c_{k+2}[x_2] + c_{k-2}[x_2]\Big)\right\}.$$

Poiché risulta

$$c_k[x_2] = \begin{cases} 0 & \text{, per } k \text{ pari} \\ \dfrac{2}{j\,k\,\pi} & \text{, per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

abbiamo $c_k[x] = 0$ per k pari, mentre, per k dispari

$$\begin{aligned} c_k[x] &= \frac{1}{2\,j\,\pi}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+2} - \frac{1}{k-2}\right) = \frac{2\,k^2 - 8 - k^2 + 2\,k - k^2 - 2\,k}{2\,j\,\pi\,k\,(k^2-4)} \\ &= \frac{4\,j}{\pi\,k\,(k^2-4)}\,. \end{aligned}$$

Notiamo che la successione dei coefficienti della serie esponenziale di Fourier è immaginaria dispari, in accordo col fatto che x è reale dispari. Pertanto, ricordando la relazione $\omega_0\,X_0(k\,\omega_0) = 2\pi\,c_k[x]$, abbiamo infine

$$X(\omega) = 8\,j\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\,n-1)\,\big[(2\,n-1)^2-4\big]}\,\delta(\omega - 2\,n + 1)\,. \tag{15}$$

A scopo illustrativo, proponiamo un'altra risoluzione. Per trasformare

$$x_0(t) = \frac{1-\cos 2t}{2}\,[2\,u(t) - u(t+\pi) - u(t-\pi)]$$

deriviamo tre volte nel senso delle distribuzioni; essendo $x_0 \in C^2(\mathbb{R})$, le derivate prima e seconda coincidono con le derivate ordinarie:

$$x_0'(t) = \sin 2\,t\,[2\,u(t) - u(t+\pi) - u(t-\pi)] + 0$$

$$x_0''(t) = 2\cos 2\,t\,[2\,u(t) - u(t+\pi) - u(t-\pi)] + 0$$

$$\begin{aligned} x_0'''(t) &= -4\sin 2\,t\,[2\,u(t) - u(t+\pi) - u(t-\pi)] \\ &\quad +2\cos 2\,t\,[2\,\delta(t) - \delta(t+\pi) - \delta(t-\pi)] \\ &= -4\,x_0'(t) + 4\,\delta(t) - 2\,\delta(t+\pi) - 2\,\delta(t-\pi) \end{aligned}$$

e quindi, trasformando ambo i membri

$$(-j\,\omega^3 + 4\,j\,\omega)\,X_0(\omega) = 4 - 2\,(\,\mathrm{e}^{j\pi\omega} + \mathrm{e}^{-j\pi\omega})\,,$$

ovvero, per $\omega \neq 0$, $\omega \neq \mp 2$,

$$X_0(\omega) = 4\,j\,\frac{1-\cos\pi\,\omega}{\omega\,(\omega^2-4)}\,.$$

Notiamo che X_0 è immaginaria dispari, in accordo col fatto che x_0 è reale dispari. Facilmente troviamo pure

$$X_0(0) = \lim_{\omega\to 0} X_0(\omega) = 4\,j\lim_{\omega\to 0}\frac{1-\cos\pi\,\omega}{\omega}\,\frac{1}{\omega^2-4} = 0\,,$$

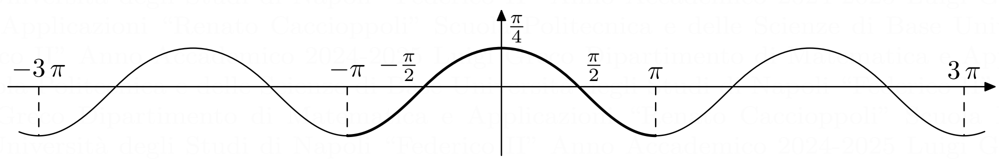
$$X_0(\mp 2) = \lim_{\omega\to\mp 2} X_0(\omega) = 0\,.$$

Essendo il periodo 2π, risulta $\omega_0 = 1$ e bisogna campionare negli interi. Risulta chiaramente $X_0(k) = 0$ per k pari, mentre per k dispari è

$$X_0(k) = \frac{8\,j}{k\,(k^2-4)}\,,$$

quindi ritroviamo la (15).

Ex. 64j$_1$ Tracciamo il diagramma del prolungamento periodico, che denotiamo ancora con x.



Evidentemente x è replica periodica di periodo 2π di

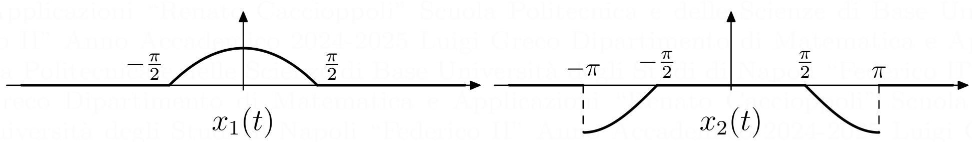
$$x_0(t) = x_1(t) + x_2(t)\,,$$

dove

$$x_1(t) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{t^2}{\pi}\right)[u(t+\pi/2) - u(t-\pi/2)] = \frac{\pi}{4}\left[1 - \left(\frac{2}{\pi}\,t\right)^2\right]\Pi\!\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

e

$$x_2(t) = \cos t\,[u(t+\pi) - u(t+\pi/2) + u(t-\pi/2) - u(t-\pi)]\,.$$

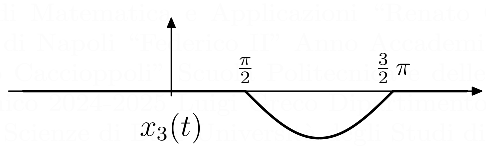


Osservando però che x_2 non è continua, può valere la pena di notare che x si ottiene anche come replica periodica di periodo 2π di

$$x_0(t) = x_1(t) + x_3(t)\,,$$

dove

$$x_3(t) = \cos t\,[u(t-\pi/2) - u(t-3\,\pi/2)]\,.$$



Una ulteriore possibilità è quella di vedere x come somma di $\cos t$ con la replica periodica di periodo 2π di

$$x_4(t) = x_1(t) - \cos t\,[u(t+\pi/2) - u(t-\pi/2)]\,.$$

Di queste tre possibilità, scegliamo l'ultima. La $\mathscr{F}$-trasformata di x_1 si può calcolare derivando 3 volte nel senso delle distribuzioni, o usando la seconda formula fondamentale, o mediante il legame con la $\mathscr{L}$-trasformazione. Noi procediamo direttamente, riconducendoci, come fatto nell'Ex. $64\mathrm{h}_1$, mediante la formula di cambiamento di scala alla trasformata di

$$y_1(t) = (1-t^2)\,[u(t+1)-u(t-1)] = (1-t^2)\,\Pi(t/2)\,,$$

calcolata nelle Lezioni. In effetti, chiaramente risulta $x_1(t) = \frac{\pi}{4}\,y_1\big(\frac{2}{\pi}\,t\big)$ e quindi (per $\omega \neq 0$)

$$X_1(\omega) = \frac{\pi}{4}\,\frac{\pi}{2}\,Y_1\left(\frac{\pi}{2}\,\omega\right) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\left(\frac{\pi}{2}\,\omega\right)^3} - \frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{\left(\frac{\pi}{2}\,\omega\right)^2}\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^3} - 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^2}\,.$$

D'altra parte, $\cos t\,[u(t+\pi/2)-u(t-\pi/2)]$ è stato trasformato nell'Ex. 64e. Pertanto ($\omega \neq 0$, $\omega \neq \mp 1$)

$$X_4(\omega) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^3} - 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^2} - 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{1-\omega^2} = \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^3} - 2\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\,\omega}{\omega^2\,(1-\omega^2)}\,.$$

Essendo $\tau = 2\,\pi$ il periodo, risulta $\omega_0 = 1$ e dobbiamo campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$, Calcoliamo $X_1(0) = \pi^2/6 - 2$, $X_1(\mp 1) = 4/\pi - \pi/2$. Inoltre, per $k \in \mathbb{Z} - \{-1,0,1\}$, distinguendo i casi $k = 2\,n$ pari, $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e $k = 2\,n+1$ dispari, $n \in \mathbb{Z} - \{-1,0\}$, troviamo

$$X_4(2\,n) = \frac{(-1)^{n+1}}{2\,n^2\,(1-4\,n^2)}\,, \qquad X_4(2\,n+1) = \frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^3}\,.$$

Dunque, ricordando che $\mathscr{F}[\cos t] = \pi\,\{\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)\}$, troviamo

$$\begin{aligned} X(\omega) = {} & \left(\frac{\pi^2}{6} - 2\right)\delta(\omega) + \left(\frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{2}\right)\big\{\delta(\omega+1)+\delta(\omega-1)\big\} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\,(1-4\,n^2)}\,\delta(\omega-2\,n) + \frac{4}{\pi}\sum_{n\neq -1,\,n\neq 0}\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^3}\,\delta(\omega-2\,n-1) \end{aligned}$$

e lo sviluppo in serie esponenziale di Fourier si scrive

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{\pi}\right) + \left(\frac{2}{\pi^2} + \frac{1}{4}\right)\{\,\mathrm{e}^{-jt} + \mathrm{e}^{jt}\} \\ & + \frac{1}{4\,\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2\,(1-4\,n^2)}\,\mathrm{e}^{j2nt} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n\neq -1,\,n\neq 0}\frac{(-1)^n}{(2\,n+1)^3}\,\mathrm{e}^{j(2n+1)t}\,. \end{aligned}$$

Ex. $64\mathbf{k}_1$ Il prolungamento periodico x si ottiene come replica con periodo π di $x_0 = x_1 + x_2$, dove

$$x_1(t) = \cos 3\,t\,[u(t+\pi/2)-u(t)]\,, \qquad x_2(t) = \cos t\,[u(t)-u(t-\pi/2)]\,.$$

Per trasformare x_1 e x_2, deriviamo due volte nel senso delle distribuzioni (metodo del riciclo).

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -3\sin 3\,t\,[u(t+\pi/2)-u(t)] + \cos 3\,t\,[\delta(t+\pi/2)-\delta(t)] \\ &= -3\sin 3\,t\,[u(t+\pi/2)-u(t)] - \delta(t)\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= -9\,x_1(t) - 3\sin 3\,t\,[\delta(t+\pi/2)-\delta(t)] - \delta'(t) \\ &= -9\,x_1(t) - 3\delta(t+\pi/2) - \delta'(t) \end{aligned}$$

e quindi ricaviamo, per $\omega \neq \mp 3$,

$$X_1(\omega) = -\frac{3\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}\omega} + j\,\omega}{9-\omega^2}\,.$$

In maniera simile, troviamo

$$x_2''(t) = -x_1(t) - \sin t\,[\delta(t) - \delta(t-\pi/2)] + \delta'(t) = -x_2(t) + \delta(t-\pi/2) + \delta'(t)$$

e quindi, per $\omega \neq \mp 1$,

$$X_2(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}\omega} + j\,\omega}{1-\omega^2}\,.$$

Dunque

$$X_0(\omega) = -\frac{3\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}\omega} + j\,\omega}{9-\omega^2} + \frac{\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}\omega} + j\,\omega}{1-\omega^2} = \frac{\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{2}\omega}}{1-\omega^2} - \frac{3\,\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}\omega}}{9-\omega^2} + \frac{8\,j\,\omega}{(1-\omega^2)\,(9-\omega^2)}\,.$$

Essendo il periodo $\tau = \pi$, risulta $\omega_0 = 2$ e dobbiamo campionare negli interi pari; i valori ∓ 1 e ∓ 3 non intervengono. Inoltre, con $k \in \mathbb{Z}$,

$$X_0(2\,k) = \frac{\mathrm{e}^{-jk\pi}}{1-4\,k^2} - \frac{3\,\mathrm{e}^{jk\pi}}{9-4\,k^2} + \frac{16\,j\,k}{(1-4\,k^2)\,(9-4\,k^2)} = 2\,\frac{(-1)^k\,(4\,k^2+3) + 8\,j\,k}{(1-4\,k^2)\,(9-4\,k^2)}\,.$$

Pertanto

$$X(\omega) = 4\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^k\,(4\,k^2+3) + 8\,j\,k}{(1-4\,k^2)\,(9-4\,k^2)}\,\delta(\omega - 2\,k)\,.$$

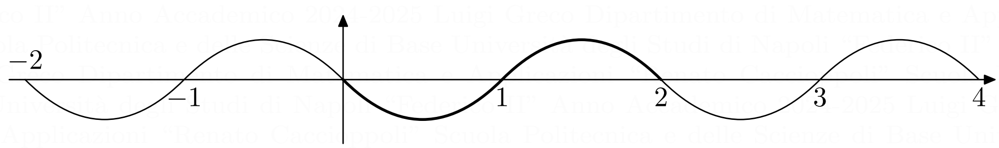
Ex. 64l$_1$ Analogo all'Ex. 64b$_1$. Invero, detto y il segnale periodico dell'Ex. 64b$_1$, il segnale periodico del presente esercizio è $x(t) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\,y(t-\pi/2)$ e quindi troviamo immediatamente

$$X(\omega) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\;\mathrm{e}^{-j\,\omega\,\frac{\pi}{2}}\,Y(\omega) = (\,\mathrm{e}^{\pi}+1)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-2\,k\,j-2\,k^2}\,\delta(\omega-2\,k)\,.$$

Ex. 64m$_1$ Il prolungamento periodico, che indicheremo ancora con x, si ottiene come replica periodica di periodo 2 di

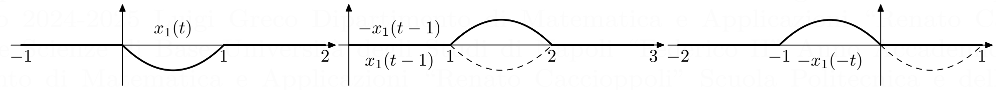
$$x_0(t) = (t^2-t)\,[u(t)-u(t-1)] + (3\,t-t^2-2)\,[u(t-1)-u(t-2)] = x_1(t) - x_1(t-1)\,,$$

dove $x_1(t) = (t^2-t)\,[u(t)-u(t-1)]$.



È però facile rendersi conto che x si ottiene anche come replica periodica di periodo 2 di

$$y_0(t) = x_1(t) - x_1(-t)\,.$$



Per trasformare x_1 che è prodotto di un polinomio di secondo grado per una finestra, deriviamo tre volte nel senso delle distribuzioni:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= (2\,t-1)\,[u(t)-u(t-1)] + (t^2-t)\,[\delta(t)-\delta(t-1)] \\ &= (2\,t-1)\,[u(t)-u(t-1)] + 0\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1''(t) &= 2\,[u(t)-u(t-1)] + (2\,t-1)\,[\delta(t)-\delta(t-1)] \\ &= 2\,[u(t)-u(t-1)] - \delta(t) - \delta(t-1)\,, \end{aligned}$$

$$x_1'''(t) = 2\,[\delta(t)-\delta(t-1)] - \delta'(t) - \delta'(t-1)\,.$$

Applicando la $\mathscr{F}$-trasformazione ad ambo i membri e ricordando la prima formula fondamentale, abbiamo quindi

$$-j\,\omega^3\,X_1(\omega) = 2\,(1-\,\mathrm{e}^{-j\omega}) - j\,\omega\,(1+\,\mathrm{e}^{-j\omega})$$

e quindi, per $\omega \neq 0$,

$$X_1(\omega) = \frac{1+\,\mathrm{e}^{-j\omega}}{\omega^2} + 2\,j\,\frac{1-\,\mathrm{e}^{-j\omega}}{\omega^3}\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} Y_0(\omega) = X_1(\omega) - X_1(-\omega) &= \frac{1+\,\mathrm{e}^{-j\omega}}{\omega^2} + 2\,j\,\frac{1-\,\mathrm{e}^{-j\omega}}{\omega^3} - \frac{1+\,\mathrm{e}^{j\omega}}{\omega^2} + 2\,j\,\frac{1-\,\mathrm{e}^{j\omega}}{\omega^3} \\ &= 2\,j\left(2\,\frac{1-\cos\omega}{\omega^3} - \frac{\sin\omega}{\omega^2}\right). \end{aligned}$$

Notiamo che Y_0 è immaginaria dispari, in accordo col fatto che y_0 è reale dispari. Ne segue, in particolare, $Y_0(0) = 0$. Essendo il periodo $\tau = 2$, risulta $\omega_0 = \pi$ e bisogna campionare nei punti $k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Chiaramente $\sin k\,\pi = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, mentre $\cos k\,\pi = (-1)^k$, quindi

$$Y_0(k\,\pi) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{per } k \text{ pari} \\ \dfrac{8\,j}{(\pi\,k)^3} & ,\ \text{per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

Pertanto, scrivendo k dispari come $k = 2\,n-1$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$X(\omega) = \frac{8\,j}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(2\,n-1)^3}\,\delta(\omega - 2\,n\,\pi + \pi)\,.$$