

PIAZZALE TECCHIO - 80125 NAPOLI

Indice

Capitolo I. Il campo complesso	4
1. La forma algebrica	4
2. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi	6
3. Forma trigonometrica dei numeri complessi	7
4. Radici dei numeri complessi	11
5. Le funzioni elementari nel campo complesso	13
5.1. L'esponenziale	13
5.2. Il logaritmo	15
5.3. Le funzioni circolari e iperboliche	15
5.4. La potenza	17
6. Ampliamento del campo complesso. Elementi di topologia	18
6.1. Funzioni complesse di variabile complessa	20
6.2. Serie a termini complessi	22
A. Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza	24
Capitolo II. Funzioni analitiche	26
1. Funzioni olomorfe	26
1.1. Funzioni armoniche	29
2. Serie di potenze nel campo complesso	30
2.1. Proprietà della somma di una serie di potenze	32
Capitolo III. Integrazione nel campo complesso	36
1. Integrali curvilinei	36
2. Teorema e formule integrali di Cauchy	39
3. Conseguenze della formula di Cauchy	42
Capitolo IV. Proprietà delle funzioni analitiche	45
1. Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità	45
2. Proprietà di media e principio di massimo modulo	47
3. Ulteriori proprietà	49
4. Sviluppo di Laurent	49
5. Singolarità isolate	53
6. Olomorfia e singolarità all' ∞	58
Capitolo V. Residui e applicazioni	60
1. Residui	60
2. Calcolo del residuo nei poli	62
3. Applicazioni alla decomposizione in fratti semplici	67
3.1. Fratti semplici nel campo complesso	68

3.2. Fratti semplici nel campo reale	70
3.3. La formula di Hermite	72
Capitolo VI. \mathcal{Z} -trasformazione	74
1. Generalità sulle successioni	74
2. Trasformazione e trasformazione inversa	75
3. Proprietà della trasformazione	76
4. Equazioni ricorrenti, problemi ai valori iniziali	79
Capitolo VII. Estensioni della nozione di integrale	87
1. Funzioni integrabili e sommabili	87
1.1. Integrale a valor principale	90
1.2. Criteri di sommabilità	91
1.3. Sommabilità per funzioni di più variabili	94
1.4. Cenni sull'integrale di Lebesgue	96
2. Calcolo degli integrali definiti	99
2.1. Integrali di funzioni razionali di coseno e seno	99
2.2. Integrali di funzioni razionali	102
2.3. Altri integrali	109
3. La funzione gamma	115
Capitolo VIII. Elementi di analisi funzionale	119
1. Spazi di Lebesgue	119
2. Generalità sui segnali	122
3. Serie di Fourier	127
3.1. Osservazioni	129
3.2. Convergenza puntuale della serie di Fourier	130
3.3. Esempi	131
Capitolo IX. Trasformazione di Laplace	136
1. La trasformata di Laplace	136
2. Proprietà fondamentali	139
3. Proprietà formali	141
4. La trasformata della convoluzione	142
5. Trasformata unilatera di segnali periodici	143
6. Antitrasformazione	143
7. Applicazioni	145
Capitolo X. Trasformazione di Fourier	150
1. Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$	150
1.1. Inversione della trasformazione di Fourier	152
2. Proprietà formali	153
3. Le formule fondamentali	154
3.1. La trasformata di funzioni a decrescenza rapida	157
4. La trasformata della convoluzione	158
Capitolo XI. Distribuzioni	159
1. Introduzione	159
2. Lo spazio delle funzioni test	160

3. Le distribuzioni	161
4. Operazioni sulle distribuzioni	163
4.1. Derivata di distribuzioni	167
5. δ -successioni	170
6. Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier	171
6.1. Esempi	172
6.2. Teoremi di campionamento	175
7. Trasformata di Laplace di distribuzioni	180
Capitolo XII. Problemi ai limiti	182
1. Introduzione	182
2. Equazioni in forma autoaggiunta	184
3. La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa	184
4. Il problema di Sturm-Liouville	188
5. L'equazione di Bessel	190
5.1. Zeri delle funzioni di Bessel	192
Capitolo XIII. Equazioni differenziali alle derivate parziali	193
1. Generalità	193
2. Equazioni di Laplace e Poisson	194
2.1. Funzioni armoniche	194
2.2. Risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un cerchio	198
3. L'equazione del calore	201
3.1. Il problema di Cauchy nel semipiano	201
4. L'equazione delle onde	203
4.1. Il problema di Cauchy nel semipiano	204
4.2. Problema misto nella semistriscia	205
Capitolo XIV. Riepilogo delle formule	208
1. \mathcal{Z} -trasformazione e \mathcal{Z} -trasformazione inversa	208
2. \mathcal{L} -trasformazione e \mathcal{L} -trasformazione inversa	210
3. \mathcal{F} -trasformazione	213

CAPITOLO I

Il campo complesso

1. La forma algebrica

L'esigenza di introdurre un ampliamento del campo dei numeri reali nasce dall'impossibilità di risolvere in esso l'equazione $x^2 = a$ nell'incognita x , per $a \in \mathbb{R}$ generico numero assegnato. È chiaro infatti che, se $a < 0$, non esiste alcuna soluzione, poiché ovviamente risulta $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Più in generale, nel campo reale un'equazione algebrica $P(x) = 0$, P polinomio, può essere priva di soluzioni.

Il campo dei numeri complessi si costruisce sull'insieme \mathbb{R}^2 delle coppie ordinate di numeri reali, introducendo le operazioni di addizione e moltiplicazione:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Con tali operazioni, \mathbb{R}^2 diviene un campo, che diremo *campo complesso* ed indicheremo con \mathbb{C} . Pertanto, due numeri complessi (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono uguali se e solo se sono uguali come coppie ordinate, cioè se e solo se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Consideriamo il sottoinsieme

$$\mathcal{R} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Evidentemente, esso è chiuso rispetto alle due operazioni, cioè la somma ed il prodotto di elementi di \mathcal{R} appartengono a \mathcal{R} ; il sottoinsieme risulta un sottocampo di \mathbb{C} (cioè le operazioni (1.1), ristrette a \mathcal{R} , lo rendono un campo). Dal punto di vista insiemistico, è naturale identificare \mathcal{R} con \mathbb{R} , facendo corrispondere al generico elemento $(x, 0) \in \mathcal{R}$ la sua prima componente $x \in \mathbb{R}$. È immediato però verificare che tale identificazione fa corrispondere le strutture di campo su \mathcal{R} e su \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ccccc} (x_1, 0) & + & (x_2, 0) & = & (x_1 + x_2, 0) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ x_1 & + & x_2 & = & x_1 + x_2 \end{array}$$

dove $+$ denota l'addizione in \mathcal{R} (cioè in \mathbb{C}), e analogamente per la moltiplicazione; si dice che i due campi \mathcal{R} e \mathbb{R} sono isomorfi. Con l'identificazione indicata, il campo reale risulta un sottocampo del campo complesso, ovvero quest'ultimo è un ampliamento del primo.

È naturale considerare anche l'altro sottoinsieme

$$(1.2) \quad \mathcal{I} = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\},$$

ma esso non è chiuso, in quanto ad esempio risulta

$$(1.3) \quad (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \notin \mathcal{I}.$$

Gli elementi di \mathcal{I} si dicono numeri (complessi) *immaginari*. L'elemento $(0, 1)$ è di fondamentale importanza; si dice *unità immaginaria* e si denota con j (spesso anche con i): $j = (0, 1)$. Con queste notazioni, l'uguaglianza (1.3) si riscrive $j^2 = -1$. Dunque \mathcal{I} non è un sottocampo. Osserviamo che ogni numero complesso $z = (x, y)$ si può rappresentare come segue:

$$(1.4) \quad z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$$

ovvero (con l'identificazione tra \mathcal{R} e \mathbb{R}), $z = x + jy$. Questa espressione si chiama *forma algebrica* del numero complesso $z = (x, y)$. I numeri reali x e y si dicono rispettivamente *parte reale* e *coefficiente dell'immaginario* del numero complesso z e si denotano con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$. L'utilità della forma algebrica è nel fatto che sui numeri complessi in forma algebrica si opera, invece che usando direttamente le definizioni (1.1), mediante le usuali regole dell'aritmetica elementare (che seguono dalle proprietà di campo), ricordando che $j^2 = -1$ e le relazioni che ne seguono:

$$j^3 = j^2 \cdot j = -j, \quad j^4 = (j^2)^2 = 1, \quad j^5 = j^4 \cdot j = j, \quad j^6 = j^2 = -1, \dots$$

e analogamente

$$j^{-1} = \frac{1}{j} = -j, \quad j^{-2} = -1, \quad j^{-3} = j, \dots$$

In generale, se m e n sono numeri interi con $m - n$ divisibile per 4 (si dice che m e n sono congruenti modulo 4 e si scrive $m \equiv n \pmod{4}$), risulta $j^m = j^n$.

Ad esempio,

$$\begin{aligned} (3 + 4j) \cdot (1 - j) + (5 + 2j) &= (3 - 3j + 4j - 4j^2) + (5 + 2j) \\ &= (3 + j + 4) + (5 + 2j) = 3 + j + 4 + 5 + 2j = 12 + 3j. \end{aligned}$$

Vediamo qualche altro esempio di operazioni sui numeri complessi in forma algebrica. Dato $z = x + jy$, il numero $\bar{z} = x - jy$ si chiama *coniugato* di z (un'altra notazione usata per il coniugato è z^*). Calcoliamo $z\bar{z} = (x + jy)(x - jy)$. Usando il ben noto prodotto notevole dell'aritmetica elementare (somma per differenza), scriviamo subito

$$z\bar{z} = (x + jy)(x - jy) = x^2 - (jy)^2 = x^2 - j^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Il numero reale non-negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ si dice *modulo* di z e si indica con $|z|$. Dunque $z\bar{z} = |z|^2$. Osserviamo che $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \iff z = 0$. Inoltre $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2j \operatorname{Im} z$.

OSSERVAZIONE 1.1. La notazione per il modulo di un numero complesso è identica a quella usata per il valore assoluto di un numero reale. In effetti, se $z = x$ è un numero complesso reale, il suo modulo coincide con il valore assoluto.

Scriviamo il reciproco di $z = x + jy \neq 0$ in forma algebrica:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j \frac{y}{x^2 + y^2},$$

cioè

$$\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{Im} \frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Notiamo che per l'ipotesi $z \neq 0$, risulta $x^2 + y^2 > 0$. Vediamo un altro esempio.

ESEMPIO 1.2. Calcoliamo $\sum_{k=1}^{365} j^k$. A tale scopo, ricordiamo che le potenze consecutive dell'unità immaginaria sono

$$j, -1, -j, 1, j, -1, -j, 1, \dots$$

Notando che $j - 1 - j + 1 = 0$, conviene associare i termini della sommatoria a gruppi di quattro consecutivi; poiché 365 non è divisibile per 4, rimarranno alcuni termini che non completano uno di questi gruppi. Precisamente, essendo $365 = 364 + 1$ ed essendo 364 divisibile per 4, risulta

$$\sum_{k=1}^{365} j^k = \sum_{k=1}^{364} j^k + j^{365} = 0 + j = j.$$

In maniera meno diretta, alternativamente possiamo usare la nota formula dell'aritmetica elementare $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$, per $a \neq 1$, e ricavare

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{365} j^k &= \sum_{k=0}^{365} j^k - 1 = \frac{1 - j^{366}}{1 - j} - 1 = \frac{1 - (-1)}{1 - j} - 1 \\ &= \frac{2 - 1 + j}{1 - j} = \frac{1 + j}{1 - j} = \frac{(1 + j)^2}{2} = \frac{1 + 2j - 1}{2} = j. \end{aligned}$$

ESEMPIO 1.3. È facile verificare che il coniugato della somma è la somma dei coniugati; analogamente per prodotto e rapporto. Più in generale, vale la seguente proprietà. Se $\mathcal{R}(z_1, \dots, z_n)$ è una funzione razionale dei suoi argomenti (cioè un'espressione che si calcola a partire dai numeri z_1, \dots, z_n mediante le quattro operazioni razionali), risulta

$$\mathcal{R}(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) = \overline{\mathcal{R}(z_1, \dots, z_n)}.$$

Se $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ è un polinomio, chiaramente risulta $P(z) = \mathcal{R}(z, a_0, a_1, \dots, a_n)$. In particolare, se i coefficienti di P sono reali, abbiamo $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.

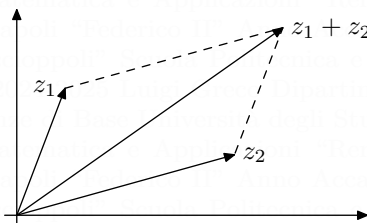
Osserviamo che in \mathbb{C} non si introduce un ordinamento, poiché non è possibile farlo in modo che esso sia compatibile con la struttura algebrica.

2. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Poiché dal punto di vista insiemistico \mathbb{C} coincide con \mathbb{R}^2 , una rappresentazione geometrica dell'insieme dei numeri complessi si ottiene mediante quella ben nota di \mathbb{R}^2 sul piano, la quale si realizza considerando nel piano un sistema di riferimento cartesiano monometrico ortogonale e facendo corrispondere alla coppia (x, y) il punto P che la ammette come coppia di coordinate. Il punto $P(x, y)$ si dice *immagine* del numero complesso $z = x + jy$. Dunque, l'origine è l'immagine di 0; i numeri reali hanno per immagini i punti dell'asse delle ascisse, che per tal motivo si dice *asse reale*, mentre i numeri immaginari hanno per immagini i punti dell'asse delle ordinate, che si dice *asse immaginario*. Le immagini di z e \bar{z} sono simmetriche rispetto all'asse reale. Nel seguito, identificheremo sistematicamente i numeri complessi con le loro immagini

sul piano; questo, com'è noto, permette di adottare la terminologia geometrica a proposito di numeri e sottoinsiemi di \mathbb{C} . Ad esempio, chiameremo un numero $z \in \mathbb{C}$ *punto* complesso. O, anche, faremo riferimento a $|z|$ come distanza di z dall'origine.

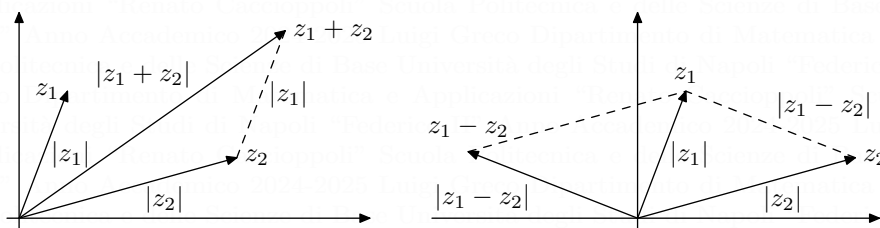
In maniera equivalente, possiamo rappresentare i numeri complessi come segmenti orientati, di primo estremo l'origine. In questo modo, possiamo illustrare geometricamente la somma di due numeri complessi ricordando la costruzione geometrica della somma di due vettori del piano.



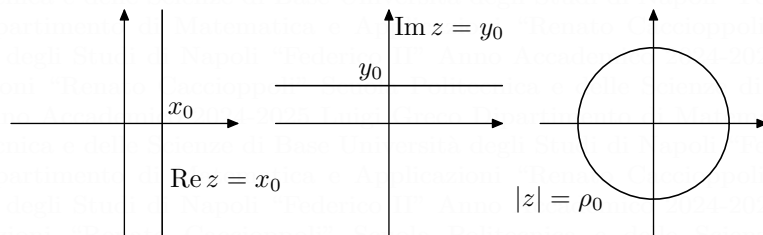
Così otteniamo la doppia disuguaglianza

$$(2.1) \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Il contenuto geometrico della (2.1) è evidente. La prima disuguaglianza esprime la proprietà che in un triangolo il valore assoluto della differenza tra le lunghezze di due lati non supera la lunghezza del terzo lato. La seconda disuguaglianza corrisponde al fatto che in un triangolo la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due. Per questi motivi, la (2.1) è detta *disuguaglianza triangolare*.



ESEMPIO 2.1. Fissati $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, le equazioni $\operatorname{Re} z = x_0$ e $\operatorname{Im} z = y_0$ rappresentano rispettivamente una retta verticale e una orizzontale. Fissato $\rho_0 > 0$, l'equazione $|z| = \rho_0$ rappresenta una circonferenza di centro 0.



3. Forma trigonometrica dei numeri complessi

Nel piano, consideriamo l'usuale sistema di coordinate polari avente polo nell'origine O e semiasse polare coincidente col semiasse positivo delle ascisse. Le formule

che legano le coordinate cartesiane a quelle polari sono

$$(3.1) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$$

Da queste otteniamo $\rho^2 = x^2 + y^2$; è quindi chiaro che $\rho = 0 \iff x = y = 0$. In tal caso ϑ è indeterminato, nel senso che le uguaglianze (3.1) valgono $\forall \vartheta \in \mathbb{R}$, e il punto $P(x, y)$ coincide con l'origine. Se invece P è distinto dall'origine, è $\rho > 0$, e da (3.1) ricaviamo

$$(3.2) \quad \begin{cases} \cos \vartheta = x/\rho \\ \sin \vartheta = y/\rho \end{cases}$$

e queste uguaglianze individuano ϑ a meno di un multiplo di 2π , cioè

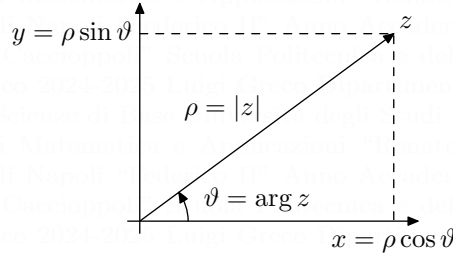
$$(3.3) \quad \vartheta = \tilde{\vartheta} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

essendo $\tilde{\vartheta}$ una soluzione particolare. Ricordiamo che ρ e l'insieme dei valori di ϑ indicati in (3.3) si dicono rispettivamente *raggio vettore* e *anomalia* di P ; i singoli valori di ϑ , che si ottengono fissando $k \in \mathbb{Z}$ nella (3.3), si dicono *determinazioni* dell'anomalia.

Sia $z = x + jy$ un numero complesso. Usando le (3.1), possiamo scrivere

$$(3.4) \quad z = x + jy = \rho(\cos \vartheta + j \sin \vartheta).$$

Questa si chiama *forma trigonometrica* di z . Evidentemente $\rho = |z|$ è il modulo di z . In riferimento a z , ϑ si dice *argomento* di z e si denota con $\arg z$ (a volte anche con $\angle z$). Com'è noto, 0 è l'unico numero di modulo nullo. Se $z \neq 0$, l'argomento è un insieme di valori che a due a due differiscono per un multiplo di 2π e si chiamano *determinazioni dell'argomento* (con leggero abuso di notazione, $\arg z$ indica pure una qualsiasi determinazione).



Per indicare che ρ e ϑ sono modulo e argomento di z , scriveremo sinteticamente $z = [\rho, \vartheta]$. La determinazione dell'argomento che cade in $]-\pi, \pi]$ si dice *argomento principale* (o determinazione principale dell'argomento) di z e si indica con $\text{Arg } z$.

La corrispondenza $z \rightarrow \arg z$ fornisce un esempio di *funzione polidroma*, in quanto ad ogni numero complesso è associato un insieme (non unitario) di valori. Viceversa, la corrispondenza $z \in \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \text{Arg } z$ definisce una funzione *monodroma*, cioè una funzione in senso usuale.

Le (3.1) consentono subito di passare dalla forma trigonometrica a quella algebrica. Ad esempio

$$\left[1, \frac{\pi}{2}\right] = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j.$$

Effettuiamo l'operazione inversa per $z \neq 0$. Banalmente, se $z = x$ è reale positivo, risulta $\rho = x$ e (una determinazione di) $\vartheta = 0$; se $z = x < 0$, è $\rho = -x$ e $\vartheta = \pi$; se

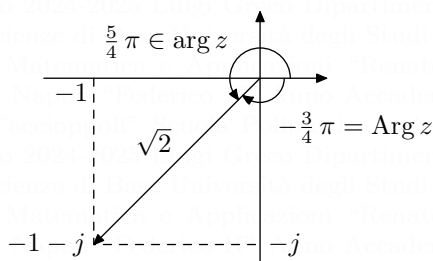
$z = jy$ è immaginario con $y > 0$, è $\rho = y$ e $\vartheta = \pi/2$; se $z = jy$ con $y < 0$, è $\rho = -y$ e $\vartheta = -\pi/2$. Esclusi questi casi, risulta $\cos \vartheta \neq 0$ e quindi da (3.1) ricaviamo

$$(3.5) \quad \tan \vartheta = \frac{y}{x},$$

da cui

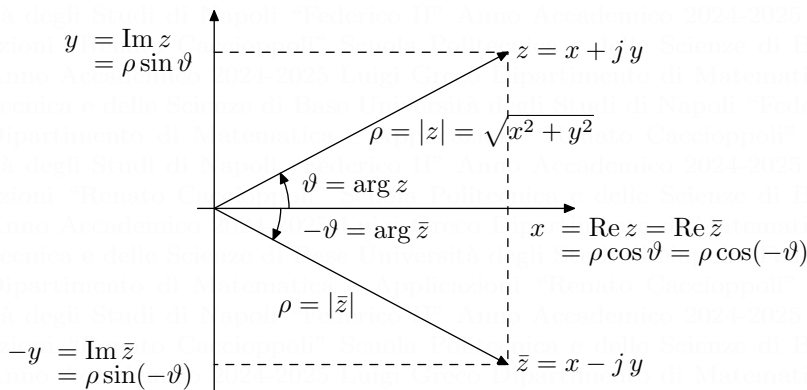
$$(3.6) \quad \vartheta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & \text{se } x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

ESEMPIO 3.1. Volendo scrivere in forma trigonometrica $-1-j$, troviamo $\rho = \sqrt{2}$ ed usando (3.6) $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$. Osserviamo che $-1-j$ cade nel terzo quadrante, quindi ha una determinazione dell'argomento verificante $\pi < \vartheta < \frac{3}{2}\pi$ (in effetti il punto è sulla bisettrice del quadrante). L'argomento principale è $\text{Arg } z = \frac{5}{4}\pi - 2\pi = -\frac{3}{4}\pi$.



ESERCIZIO 3.2. Scrivere in forma trigonometrica $3-4j$ e $-3+4j$.

ESEMPIO 3.3. Se $z \neq 0$ e \bar{z} è il coniugato, risulta $|\bar{z}| = |z|$ e $\arg \bar{z} = -\arg z$.



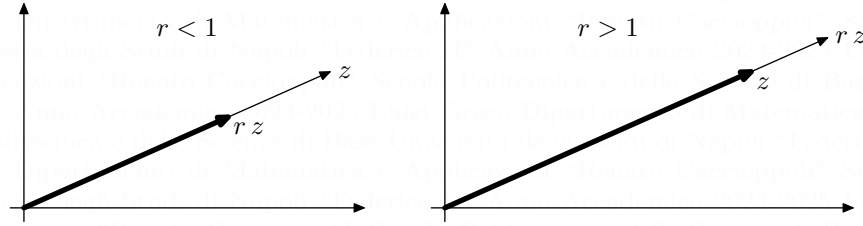
La forma trigonometrica risulta comoda per calcolare il prodotto tra numeri complessi. Dati $z = [\rho, \vartheta]$ e $w = [r, \varphi]$, risulta

$$\begin{aligned} zw &= \rho(\cos \vartheta + j \sin \vartheta) r(\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ &= \rho r [\cos \vartheta \cos \varphi - \sin \vartheta \sin \varphi + j(\cos \vartheta \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi)] \\ &= \rho r [\cos(\vartheta + \varphi) + j \sin(\vartheta + \varphi)], \end{aligned}$$

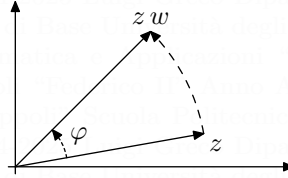
ovvero, vale la formula

$$(3.7) \quad [\rho, \vartheta] \cdot [r, \varphi] = [\rho r, \vartheta + \varphi].$$

Più esplicitamente, risulta $|zw| = |z||w|$ e $\arg(zw) = \arg z + \arg w$. La (3.7) consente di interpretare geometricamente il prodotto di due numeri complessi. Consideriamo inizialmente il prodotto di z per un numero reale positivo $w = r = [r, 0]$:



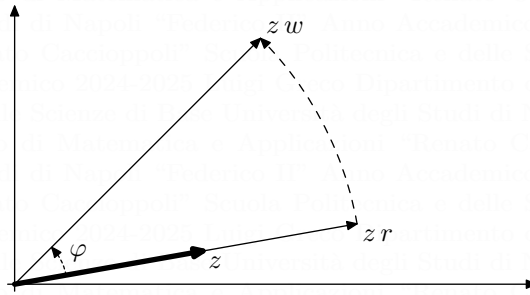
Geometricamente, l'effetto su z della moltiplicazione consiste in un accorciamento, se $r < 1$, o in un allungamento, se $r > 1$, dunque in un'omotetia di centro 0 e rapporto r . Consideriamo ora il prodotto di z per un numero di modulo unitario $w = [1, \varphi]$. Poiché cambia solo l'argomento, è chiaro che l'effetto geometrico su z è quello di una rotazione di ampiezza (relativa) φ attorno a 0:



Consideriamo ora il caso generale. Essendo

$$zw = z[r, \varphi] = (z[r, 0])[1, \varphi],$$

evidentemente l'effetto su z della moltiplicazione per w è la composizione di una omotetia e di una rotazione; in figura consideriamo ad esempio il caso $r > 1$:



La formula (3.7) si generalizza ad un numero arbitrario di fattori:

$$(3.8) \quad [\rho_1, \vartheta_1] \cdot [\rho_2, \vartheta_2] \cdots [\rho_n, \vartheta_n] = [\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n, \vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n].$$

In particolare, se i fattori sono uguali tra loro, abbiamo la formula di *De Moivre* per le potenze:

$$(3.9) \quad [\rho, \vartheta]^n = [\rho^n, n\vartheta].$$

Tale formula, ricavata per $n \in \mathbb{N}$, si estende ad ogni $n \in \mathbb{Z}$ osservando che vale per $n = -1$.

ESERCIZIO 3.4. Scrivere in forma algebrica $(j - \sqrt{3})^{41}$.

OSSERVAZIONE 3.5. La (3.9) per $\rho = 1$, insieme alla ben nota formula di Newton per le potenze di un binomio, consente di ottenere le *formule di moltiplicazione degli archi*. Per $n \in \mathbb{N}$, è $[1, \vartheta]^n = [1, n\vartheta]$, ovvero

$$\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta = (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)^n.$$

Sviluppando il secondo membro mediante la formula di Newton, abbiamo

$$\cos n\vartheta + j \sin n\vartheta = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \vartheta)^{n-k} (j \sin \vartheta)^k.$$

A questo punto, ricaviamo $\cos n\vartheta$ e $\sin n\vartheta$ separando il reale dall'immaginario. Ad esempio

$$\cos 2\vartheta + j \sin 2\vartheta = \cos^2 \vartheta + 2j \cos \vartheta \sin \vartheta - \sin^2 \vartheta$$

che danno le ben note formule $\cos 2\vartheta = \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta$ e $\sin 2\vartheta = 2 \cos \vartheta \sin \vartheta$. Analogamente,

$$\cos 3\vartheta = \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta, \quad \sin 3\vartheta = 3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta.$$

Illustriamo l'uguaglianza di due numeri complessi in forma trigonometrica: risulta $[\rho, \vartheta] = [r, \varphi]$ se e solo se $\rho = r = 0$, oppure $\rho = r \neq 0$ e ϑ e φ differiscono per un multiplo di 2π , cioè $\exists k \in \mathbb{Z}$: $\varphi = \vartheta + 2k\pi$.

4. Radici dei numeri complessi

Dati $n \in \mathbb{N}$ e $z \in \mathbb{C}$, si dice *radice n -sima* di z ogni numero complesso la cui potenza n -sima è z , cioè ogni soluzione w dell'equazione

$$(4.1) \quad w^n = z.$$

Essendo il caso $n = 1$ banale, supponiamo $n \geq 2$. È chiaro che per $z = 0$ troviamo l'unica radice $w = 0$ (per la legge di annullamento del prodotto). Per $z \neq 0$, riscriviamo l'equazione (4.1) usando la formula di De Moivre, rappresentando z e l'incognita w in forma trigonometrica; posto $z = [\rho, \vartheta]$ e $w = [r, \varphi]$, abbiamo

$$(4.2) \quad [r^n, n\varphi] = [\rho, \vartheta].$$

Questo (in base all'osservazione finale del paragrafo 3) significa

$$(4.3) \quad \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} & (\text{radice } n\text{-sima aritmetica}); \\ \varphi = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}, & k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

dove la radice n -sima aritmetica di ρ è l'unico numero positivo la cui potenza n -sima è ρ . Le infinite scelte di k nella seconda delle (4.3) non danno tutte origine a radici a due a due distinte. Questo accade per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Per ogni altro valore di k , abbiamo una ripetizione: la formula fornisce una determinazione diversa

dell'argomento di una delle radici già trovate. Dunque troviamo esattamente n radici n -sime; esse hanno tutte modulo $\sqrt[n]{\rho}$, mentre gli argomenti sono

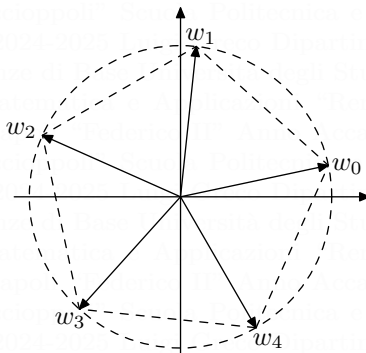
$$\varphi_0 = \frac{\vartheta}{n}, \quad \varphi_1 = \frac{\vartheta + 2\pi}{n}, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{\vartheta + 2(n-1)\pi}{n}.$$

Osserviamo che

$$\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_2 - \varphi_1 = \dots = \varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} = \frac{2\pi}{n}.$$

Geometricamente, le n radici w_0, w_1, \dots, w_{n-1} sono i vertici di un poligono regolare a n lati, inscritto nella circonferenza di centro 0 e raggio $\sqrt[n]{\rho}$. Ad esempio, in figura sono rappresentate le 5 radici quinte di

$$\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right].$$



L'insieme delle radici n -sime del numero complesso z si denota con $\sqrt[n]{z}$; le singole soluzioni si chiamano *determinazioni* della radice. (Con abuso di notazione, tale simbolo indica anche una qualsiasi delle determinazioni.) Ogni numero complesso non nullo ha due radici quadrate opposte. Se $z = a > 0$, le due radici sono quella aritmetica e l'opposto. Se $z = a < 0$, le due radici sono $\mp j(-a)^{1/2}$; ad esempio, $\sqrt{-1} = \mp j$. È chiaro allora che l'equazione $x^2 = a$ da cui siamo partiti per motivare la costruzione del campo complesso è risolubile in \mathbb{C} per ogni a .

ESERCIZIO 4.1. Calcolare $\sqrt{-8}$, $\sqrt{3+4j}$, $\sqrt{\frac{j}{j-1}}$.

OSSERVAZIONE 4.2. Notiamo che il simbolo $\sqrt[n]{}$ è usato con due significati diversi: quello di radice aritmetica e quello di radice di un numero complesso. La corrispondenza $z \rightarrow \sqrt[n]{z}$ è un altro esempio di funzione polidroma.

ESEMPIO 4.3. Risolviamo l'equazione

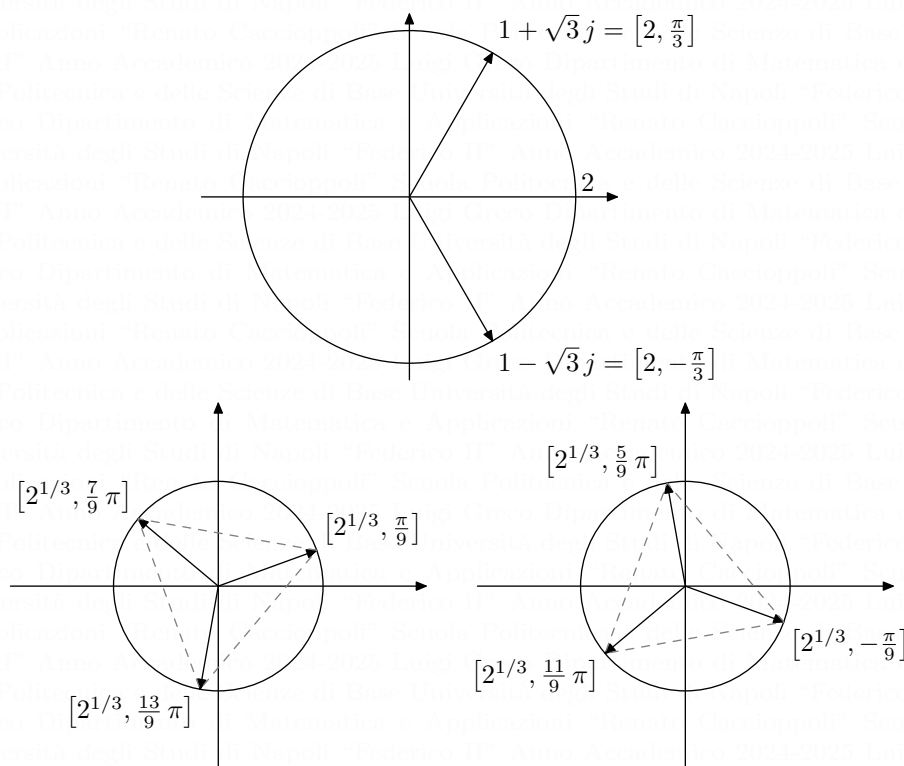
$$(4.4) \quad z^6 - 2z^3 + 4 = 0.$$

Ponendo $w = z^3$, l'equazione diviene $w^2 - 2w + 4 = 0$, che ha le soluzioni $w = 1 \mp \sqrt{3}j$ e quindi $z = \sqrt[3]{1 - \sqrt{3}j}$ e $z = \sqrt[3]{1 + \sqrt{3}j}$. Per calcolare le radici, scriviamo i radicandi in forma trigonometrica:

$$1 \mp \sqrt{3}j = 2 \left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}j \right) = \left[2, \mp \frac{\pi}{3} \right]$$

e quindi

$$\sqrt[3]{1 \mp \sqrt{3}j} = \left[2^{1/3}, \mp \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3} \pi k \right], \quad k = 0, 1, 2.$$



5. Le funzioni elementari nel campo complesso

Per estendere al campo complesso le funzioni elementari useremo due modi di procedere: quando possibile effettueremo l'estensione direttamente dalla definizione, oppure cercheremo di mantenere le proprietà formali valide nel campo reale.

5.1. L'esponenziale. L'uguaglianza $[1, \vartheta] \cdot [1, \varphi] = [1, \vartheta + \varphi]$, caso particolare di (3.7), è formalmente analoga alla ben nota proprietà dell'esponenziale $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$. Questo suggerisce di dare la seguente definizione

$$(5.1) \quad e^{jy} = [1, y] = \cos y + j \sin y,$$

$\forall y \in \mathbb{R}$. Questa uguaglianza, che qui è usata come definizione, è detta *formula di Eulero*. Se $z = [\rho, \vartheta]$, possiamo scrivere $z = \rho e^{j\vartheta}$. Questa scrittura si chiama *forma esponenziale* del numero complesso z . È chiaro che essa equivale alla forma trigonometrica.

Con la notazione introdotta nella formula di Eulero (5.1), ripetiamo, la formula per il prodotto di due numeri complessi (di modulo 1) in forma trigonometrica corrisponde alla menzionata proprietà delle potenze

$$e^{jy_1} \cdot e^{jy_2} = e^{j(y_1+y_2)}.$$

Vogliamo definire l'esponenziale e^z , per $z \in \mathbb{C}$, cercando di conservare tale proprietà. Dato $z = x + jy$ in forma algebrica, dobbiamo allora *necessariamente* porre

$$(5.2) \quad e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y).$$

Con tale definizione la proprietà delle potenze resta effettivamente valida.

Un'altra notazione per l'esponenziale di z è $\exp(z) = e^z$. Dunque

$$(5.3) \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \arg(e^z) = \operatorname{Im} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare, dalla prima uguaglianza, ricaviamo $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$, poiché l'esponenziale reale è positivo: $e^{\operatorname{Re} z} > 0$. La corrispondenza $z \mapsto e^z$ definisce in \mathbb{C} una *funzione complessa di variabile complessa*, che si dice *funzione esponenziale*. Osserviamo che l'esponenziale è periodico di periodo $2\pi j$:

$$e^{z+2k\pi j} = e^z, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

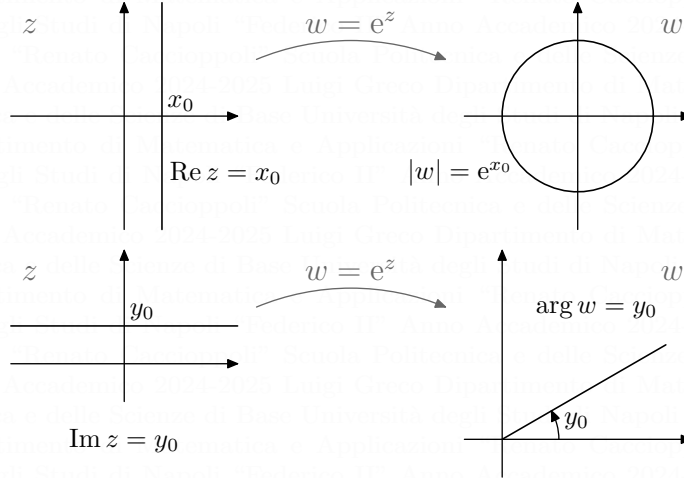
A scopo illustrativo, studiamo l'equazione $e^z = 1$. Scriviamo $z = x + jy$ in forma algebrica. In base alle (5.3), essendo $1 = [1, 0]$ troviamo

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

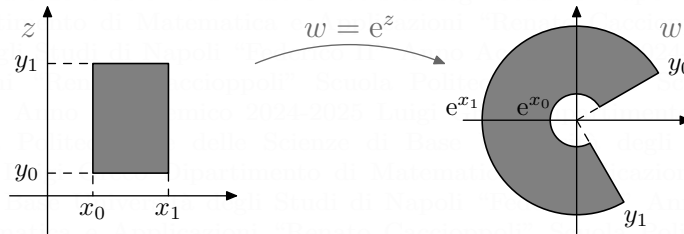
Analogamente

$$e^z = -1 \iff z = \pi j + 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 5.1. Descriviamo l'immagine tramite la corrispondenza $w = e^z$ delle rette di equazioni $\operatorname{Re} z = x_0$ e $\operatorname{Im} z = y_0$ nel piano della z , cfr. esempio 2.1.



ESEMPIO 5.2. Dati $x_0, x_1, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ con $x_0 < x_1$ e $0 < y_1 - y_0 < 2\pi$, l'immagine di $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$ è un settore di corona circolare con centro nell'origine.



5.2. Il logaritmo. Dato $z \in \mathbb{C}$, chiameremo logaritmo di z e lo indicheremo con $\log z$ ogni numero complesso w , se esiste, tale che $e^w = z$. È chiaro che non si può definire il logaritmo di 0. Per $z \neq 0$, quindi con $|z| > 0$, l'equazione $e^w = z$ si riscrive

$$e^{\operatorname{Re} w} = |e^w| = |z|, \quad \operatorname{Im} w = \arg(e^w) = \arg z.$$

Pertanto

$$(5.4) \quad w = \log z = \log_* |z| + j(\tilde{\vartheta} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

dove \log_* indica il logaritmo aritmetico di un numero positivo (cioè l'esponente da dare a e per ottenere tale numero, $\log_*:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$), e $\tilde{\vartheta}$ è una qualsiasi fissata determinazione dell'argomento di z . Il logaritmo $z \rightarrow \log z$ è una funzione polidroma ad infinite determinazioni, corrispondenti alle infinite determinazioni di $\arg z$; due determinazioni di $\log z$ differiscono per un multiplo di $2\pi j$ (ovvio, per la periodicità dell'esponenziale). La determinazione che si ottiene scegliendo la determinazione principale dell'argomento di z si chiama *logaritmo principale* di z e si denota con $\operatorname{Log} z$:

$$(5.5) \quad \operatorname{Log} z = \log_* |z| + j \operatorname{Arg} z.$$

Più in generale, scelto $\vartheta_0 \in \mathbb{R}$, possiamo fissare una determinazione di $\log z$ considerando la determinazione di $\arg z$ che cade in $]\vartheta_0, \vartheta_0 + 2\pi[$. In altri termini, definiti l'insieme

$$A_{\vartheta_0} = \{ z \in \mathbb{C} - \{0\} : \vartheta_0 < \arg z < \vartheta_0 + 2\pi \},$$

ottenuto da \mathbb{C} effettuando un taglio lungo la semiretta uscente da O di anomalia ϑ_0 , e la striscia orizzontale

$$S_{\vartheta_0} = \{ w \in \mathbb{C} : \vartheta_0 < \operatorname{Im} w < \vartheta_0 + 2\pi \},$$

consideriamo la funzione

$$\log: z \in A_{\vartheta_0} \mapsto \log_* |z| + j \arg z \in S_{\vartheta_0},$$

che risulta inversa alla restrizione dell'esponenziale (cfr. esempio 5.2)

$$w \in S_{\vartheta_0} \mapsto e^w \in A_{\vartheta_0}.$$

ESEMPIO 5.3. Risulta

$$\log 1 = 2k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{Log} 1 = 0.$$

ESERCIZIO 5.4. Calcolare $\log \frac{j}{j-1}$, $\operatorname{Log} \frac{j}{j-1}$.

5.3. Le funzioni circolari e iperboliche. In base alla formula di Eulero (5.1), per ϑ reale, abbiamo $e^{j\vartheta} = \cos \vartheta + j \sin \vartheta$ e, mutando ϑ in $-\vartheta$, per le proprietà di simmetria delle funzioni coseno e seno, abbiamo pure $e^{-j\vartheta} = \cos \vartheta - j \sin \vartheta$. Dunque ricaviamo

$$(5.6) \quad \cos \vartheta = \frac{e^{j\vartheta} + e^{-j\vartheta}}{2}, \quad \sin \vartheta = \frac{e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta}}{2j}.$$

Estendiamo le funzioni a \mathbb{C} ponendo

$$(5.7) \quad \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

(sostituiamo cioè $\vartheta \in \mathbb{R}$ con $z \in \mathbb{C}$). Analoghe sono le definizioni delle funzioni iperboliche

$$(5.8) \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sono immediate le uguaglianze

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \cosh jz &= \cos z, & \sinh jz &= j \sin z, \\ \cos jz &= \cosh z, & \sin jz &= j \sinh z, \end{aligned}$$

e le ben note *relazioni fondamentali*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1.$$

Vediamo alcune proprietà. Osserviamo innanzitutto che le funzioni $\cos z$ e $\sin z$ sono periodiche di periodo 2π , come segue subito dalla periodicità dell'esponenziale.

Studiamo l'equazione $\cos z = 0$, cerchiamo cioè gli *zeri* del coseno. In base alla definizione,

$$\cos z = 0 \iff e^{jz} + e^{-jz} = 0 \iff e^{2jz} = -1 \iff 2jz = \pi j + 2k\pi j$$

e quindi

$$\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Analogamente

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In altri termini, troviamo solo gli zeri reali. Una proprietà nuova rispetto a quanto accade in \mathbb{R} è che $\cos z$ e $\sin z$ *non* sono limitate:

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} |\cos z| = \sup_{z \in \mathbb{C}} |\sin z| = +\infty,$$

come si vede ad esempio prendendo $z = jy$ e passando al limite per $y \rightarrow \mp\infty$.

Valgono formule di addizione identiche a quelle note nel campo reale:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad \sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w,$$

$\forall z, w \in \mathbb{C}$, che si verificano con un calcolo diretto, o, come vedremo, seguono dal *principio di permanenza* delle proprietà analitiche. In particolare, usando (5.9)

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \cos(x+jy) &= \cos x \cos jy - \sin x \sin jy \\ &= \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y. \end{aligned}$$

Da (5.10) ricaviamo

$$\cos z \in \mathbb{R} \iff \sin x \sinh y = 0 \iff (x = k\pi, k \in \mathbb{Z}), \quad \text{o } y = 0.$$

Osserviamo che $y = 0$ significa $z = x \in \mathbb{R}$ e quindi chiaramente $\cos z = \cos x \in \mathbb{R}$.

Supponendo $x = k\pi$, troviamo

$$|\cos z| \leq 1 \iff |\cos x \cosh y| = \cosh y \leq 1$$

e quindi comunque $y = 0$. Pertanto l'equazione nell'incognita z

$$\cos z = w \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq w \leq 1$$

ha in \mathbb{C} esattamente le soluzioni reali. Analogamente

$$\sin z = w \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq w \leq 1$$

ha in \mathbb{C} esattamente le soluzioni reali. Questo è in accordo col fatto che, come abbiamo visto, gli zeri delle due funzioni sono esattamente quelli reali. Chiaramente definiamo

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{per } z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \text{per } z \neq j\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

ESERCIZIO 5.5. Posto $z = x + jy$, verificare le uguaglianze

$$(5.11) \quad |\cos z|^2 = \cosh^2 y - \sin^2 x, \quad |\sin z|^2 = \cosh^2 y - \cos^2 x,$$

che, per $z = x$ reale (cioè $y = 0$), si riducono alla relazione fondamentale per le funzioni trigonometriche. Osservare inoltre che le (5.11), unite alle (5.9) implicano

$$(5.12) \quad |\cosh z|^2 = \cosh^2 x - \sin^2 y, \quad |\sinh z|^2 = \cosh^2 x - \cos^2 y,$$

ovvie per z reale.

5.4. La potenza. Per $w \neq 0$ definiamo la potenza

$$(5.13) \quad w^z = \exp(z \log w).$$

Essendo $\log w$ polidroma, c'è da aspettarsi che la potenza abbia in generale più determinazioni. Scegliendo in (5.13) per $\log w$ la determinazione principale $\text{Log } w$, si ottiene quella che si chiama *determinazione principale della potenza*. Studiamo in dettaglio le determinazioni della potenza, scrivendo

$$\begin{aligned} w^z &= \exp(z(\text{Log } w + 2k\pi j)) = \exp(z \text{Log } w) \exp(z 2k\pi j) \\ &= \exp(z \text{Log } w) h^k \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$, avendo posto $h = \exp(z 2\pi j)$. Dunque tra le determinazioni della potenza ci sono ripetizioni se e solo se esistono due interi $k_1 \neq k_2$ tali che $h^{k_1} = h^{k_2}$, cioè se e solo se $\exists n \in \mathbb{N}: h^n = 1$, ovvero ancora risulta

$$z 2n\pi j = 2m\pi j, \quad \text{con } m \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto le determinazioni della potenza non sono a due a due distinte (vale a dire, ci sono ripetizioni) se e solo se $z = m/n \in \mathbb{Q}$. Se $z = m/n$ è ridotta a minimi termini, la potenza ha n determinazioni a due a due distinte. Per $z = 1/n$ otteniamo le n radici n -sime di w . Per $z = m \in \mathbb{Z}$, otteniamo come unica determinazione la definizione già nota di potenza m -sima; ad esempio, se $m > 0$,

$$w^m = \underbrace{w \cdot w \cdots w}_{m \text{ fattori}}.$$

Per $z \notin \mathbb{Q}$, le determinazioni sono a due a due distinte. Se w è reale positivo, in genere w^z denota la determinazione principale. Ad esempio, e^z è una notazione imprecisa (la potenza avendo infinite determinazioni, in generale); più precisa è $\exp(z)$, che coincide con la determinazione principale. Con la convenzione introdotta, e^z indica $\exp(z)$.

ESERCIZIO 5.6. Calcolare $1^j, j^j$. Indicare le determinazioni principali.

6. Ampliamento del campo complesso. Elementi di topologia

Ricordiamo che in \mathbb{C} non si introduce un ordinamento. Il campo complesso si amplia con l'aggiunta di un unico punto all'infinito, che indicheremo con ∞ . Il campo complesso ampliato si denota con $\hat{\mathbb{C}}$.

In \mathbb{C} si adopera la struttura topologica di \mathbb{R}^2 , che è indotta dalla *metrica euclidea*; se $z = x + jy$, $z_0 = x_0 + jy_0 \in \mathbb{C}$, $|z - z_0|$ rappresenta la loro distanza (la distanza tra le immagini nel piano):

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

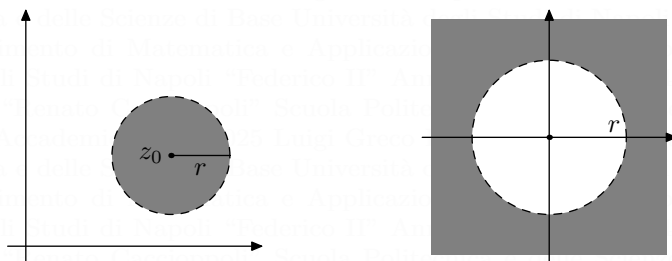
Chiameremo *intorno* di $z_0 \in \mathbb{C}$ ogni cerchio aperto (privato della circonferenza che lo delimita) con centro nel punto, cioè

$$D(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

dove r è un numero positivo. Un *intorno del punto all'infinito* ∞ è un insieme del tipo

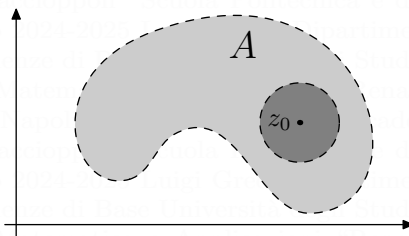
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\},$$

vale a dire, geometricamente, l'insieme dei punti esterni ad un cerchio con centro nell'origine.



Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice *aperto* se ogni suo punto ha un intorno contenuto in A :

$$\forall z_0 \in A, \exists r > 0 : D(z_0; r) \subseteq A.$$



Un sottoinsieme $C \subseteq \mathbb{C}$ si dice *chiuso* se il suo complementare $A = \mathbb{C} - C$ è aperto. L'insieme vuoto \emptyset e \mathbb{C} sono sia aperti che chiusi.

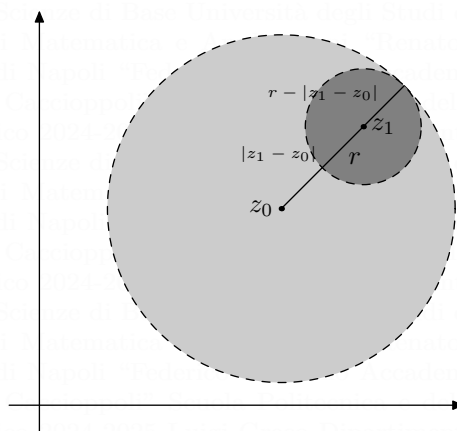
ESEMPIO 6.1. Un cerchio aperto secondo la terminologia introdotta precedentemente, cioè privato della circonferenza che lo delimita, è un insieme aperto secondo la definizione appena data. In effetti, assegnato il cerchio $D = D(z_0; r)$, dobbiamo mostrare che ogni suo punto ha un intorno contenuto in D . Se $z_1 \in D$, risulta

$|z_1 - z_0| < r$, quindi $\rho = r - |z_1 - z_0| > 0$. Mostriamo che il cerchio $D(z_1; \rho)$ di centro z_1 e raggio ρ è contenuto in D , cioè

$$|z - z_1| < \rho \Rightarrow |z - z_0| < r.$$

Questa implicazione è immediata conseguenza della disuguaglianza triangolare (2.1):

$$|z - z_0| \leq |z - z_1| + |z_1 - z_0| < \rho + |z_1 - z_0| = r.$$



Diremo *cerchio chiuso* ogni cerchio comprendente la circonferenza che lo delimita, cioè un insieme del tipo

$$\bar{D}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Con un ragionamento analogo al precedente, è facile vedere che esso è un insieme chiuso, nel senso che il complementare è aperto.

L'unione di una famiglia qualsiasi di aperti è aperta, come pure l'intersezione di una famiglia finita; simmetricamente, l'intersezione di una famiglia qualsiasi e l'unione di una famiglia finita di chiusi sono chiusi.

Un aperto A si dice *connesso* se non può essere espresso come unione di due aperti non vuoti e disgiunti, vale a dire

$$(A = A_1 \cup A_2, \text{ con } A_1, A_2 \text{ aperti, } A_1 \cap A_2 = \emptyset) \Rightarrow (A_1 = \emptyset \text{ o } A_2 = \emptyset)$$

La nozione di connesso traduce l'idea intuitiva di insieme formato da un unico pezzo. \mathbb{C} è connesso, quindi non esiste alcun sottoinsieme proprio e non vuoto che sia simultaneamente aperto e chiuso.

Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{C}$ si dice *limitato* se esiste $K > 0$ tale che $|z| \leq K$, per ogni $z \in E$. Geometricamente, E è limitato se e solo se esiste un cerchio di centro l'origine che lo contiene. Un insieme chiuso e limitato si dice *compatto*.

Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Un punto $z_0 \in E$ si dice *interno* ad E se esiste un suo intorno contenuto in E , cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0; r) \subseteq E$. Ad esempio, in un insieme aperto ogni punto è interno. L'insieme dei punti interni ad E si indica con \mathring{E} . Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *esterno* ad E se è interno al complementare, cioè esiste $r > 0$ tale che $D(z_0; r) \cap E = \emptyset$. Un punto $z_0 \in E$ si dice *isolato* se possiede un intorno nel quale non cadono altri punti di E .

Un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice *di accumulazione* per $E \subseteq \mathbb{C}$ se in ogni suo intorno cadono punti di E distinti da esso. Intuitivamente, z_0 di accumulazione per E significa che,

muovendosi nell'insieme E , ci si può avvicinare arbitrariamente a z_0 , ma rimanendo a distanza positiva da esso. Osserviamo che le due proprietà: $z_0 \in E$; z_0 di accumulazione per E ; sono indipendenti tra loro. Un punto di E che non sia di accumulazione per l'insieme è punto isolato dell'insieme. L'unione di E con l'insieme dei suoi punti di accumulazione si dice *chiusura* di E :

$$\overline{E} = \{z \in \mathbb{C} : z \in E \text{ o } z \text{ di accumulazione per } E\}.$$

Si dice frontiera di $E \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme $FE = \partial E = \overline{E} \cap \overline{(\mathbb{C} - E)}$.

La nozione di punto di accumulazione si applica anche al punto all'infinito ∞ , essendo stati definiti gli intorno di tale punto. È immediato verificare che

$$\infty \text{ di accumulazione per } E \iff E \text{ non limitato.}$$

ESERCIZIO 6.2. Siano A e B aperti connessi tali che $A \cap B \neq \emptyset$. Mostrare che $A \cup B$ è connesso. (Suggerimento: se $A \cup B$ è unione di due insiemi aperti disgiunti, A è contenuto in uno di questi e lo stesso vale per B ; poiché A e B non sono disgiunti, entrambi sono contenuti nello stesso insieme, quindi l'altro è vuoto.)

6.1. Funzioni complesse di variabile complessa. Una funzione complessa è una funzione a valori in \mathbb{C} ; una funzione di variabile complessa è una funzione definita in un sottoinsieme di \mathbb{C} . Pertanto, una funzione complessa di variabile complessa è una funzione

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Scriveremo $w = f(z)$, $z \in \Omega$. Dal punto di vista insiemistico, assegnare una funzione complessa di variabile complessa equivale ad assegnare una funzione complessa di due variabili reali, o una coppia di funzioni reali di due variabili reali. In effetti, scrivendo $z = x + jy$ e $w = u + jv$ in forma algebrica, abbiamo

$$(6.1) \quad w = f(z) = f(x, y) = (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)).$$

Siano assegnati $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ punto di accumulazione per Ω e $l \in \mathbb{C}$. Diremo che l è il *limite* di f in z_0 , o anche che $f(z)$ *converge* a l per z tendente a z_0 , e scriveremo

$$l = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z), \quad \text{o anche} \quad f(z) \rightarrow l \text{ per } z \rightarrow z_0,$$

se vale la ben nota condizione:

\mathcal{L}) comunque si fissi un intorno I di l , è possibile trovare un intorno J di z_0 , tale che i valori assunti da f nei punti (di Ω) che cadono in J e sono distinti da z_0 appartengano a I .

Tenendo presente che gli intorno di un punto al finito sono i cerchi con centro in tale punto, possiamo riscrivere la definizione di limite come segue:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (z \in \Omega, 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Ricordiamo che, per parlare di limite di f in z_0 , non occorre che la funzione sia definita nel punto e che, anche se $z_0 \in \Omega$, l'esistenza del limite e l'eventuale valore di questo sono indipendenti da $f(z_0)$. Si estendono facilmente tutte le proprietà del limite note nel caso delle funzioni reali di variabile reale, nelle quali non intervenga l'ordinamento di \mathbb{R} : così, ad esempio, valgono l'unicità del limite, i teoremi sul limite di somma, prodotto, rapporto.

ESEMPIO 6.3. Considerando la funzione $z \in \Omega \mapsto |f(z)|$ che assume valori reali non-negativi, è facile mostrare la seguente versione del teorema della permanenza del segno: se il limite l di f in z_0 è diverso da zero, esiste un intorno di z_0 nel quale, escluso al più il punto z_0 , la funzione assume valori diversi da zero.

Un'altra proprietà è la seguente. Scritti $z_0 = x_0 + j y_0$ e $l = \mu + j \nu$ in forma algebrica, con riferimento alla (6.1), risulta

$$(6.2) \quad l = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \iff \begin{cases} \mu = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) \\ \nu = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) \end{cases}$$

L'equivalenza (6.2) è facile conseguenza delle disuguaglianze

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mu - u| \\ |\nu - v| \end{array} \right\} \leq |l - f| \leq |\mu - u| + |\nu - v|.$$

La definizione di limite data in termini di intorni si estende al caso del limite infinito. In questo caso diremo che ∞ è il limite di f in z_0 , o anche che $f(z)$ *diverge* per $z \rightarrow z_0$, e scriveremo $\infty = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Ricordando come sono fatti gli intorni del punto all'infinito, vediamo che divergenza significa che vale la condizione

$$\forall K > 0, \exists \delta > 0 : (z \in \Omega, 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z)| > K,$$

ovvero ancora che $|f|$ diverge positivamente.

Se ∞ è di accumulazione per Ω , cioè l'insieme non è limitato, si dà la definizione di limite nel punto all'infinito. È chiaro che $f(z)$ converge a $l \in \mathbb{C}$ per $z \rightarrow \infty$, $l = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$, significa che vale la condizione

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : (z \in \Omega, |z| > M) \Rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon.$$

Analogamente, $\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ significa che

$$\forall K > 0, \exists M > 0 : (z \in \Omega, |z| > M) \Rightarrow |f(z)| > K.$$

Se f ammette limite, finito o infinito, in z_0 , si dice che f è *regolare* nel punto.

Siano $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. La funzione f si dice *continua* in z_0 se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : (z \in \Omega, |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Tale condizione vale banalmente se z_0 è punto isolato di Ω . Se z_0 è di accumulazione, essa chiaramente significa

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z).$$

Un caso particolare di funzioni è quello delle successioni. Una successione a termini complessi è una funzione $n \in \mathbb{N} \mapsto z_n \in \mathbb{C}$. Usualmente la indicheremo con

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \quad \text{o anche con} \quad (z_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

La definizione di limite si particularizza facilmente nel caso delle successioni.

Verificare la convergenza in base alla definizione richiede la conoscenza del limite. Il seguente *criterio di convergenza di Cauchy* fornisce una caratterizzazione della convergenza, che non fa intervenire il limite.

TEOREMA 6.4. La successione $(z_n)_n$ converge se e solo se $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}$: $m, n > \nu \Rightarrow |z_m - z_n| < \varepsilon$.

Ogni successione convergente verifica banalmente la condizione del criterio di Cauchy. L'implicazione inversa costituisce la *proprietà di completezza* di \mathbb{C} .

ESEMPIO 6.5. Consideriamo la successione $(z^n)_n$, per $z \in \mathbb{C}$ fissato. È subito visto per $|z| < 1$ la successione è *infinitesima*, cioè converge a 0. In effetti, risulta $|z^n| = |z|^n$ ed è noto che la successione reale $n \mapsto \rho^n$ è infinitesima per $0 \leq \rho < 1$. Analogamente, la successione è divergente per $|z| > 1$. Per $z = 1$ la successione vale costantemente 1. Per $|z| = 1$, ma $z \neq 1$, la successione non è regolare. Infatti la successione è limitata, quindi non diverge. Inoltre,

$$|z_{n+1} - z_n| = |z^{n+1} - z^n| = |z^n(z - 1)| = |z - 1| > 0$$

quindi non vale la condizione di Cauchy e la successione non converge.

6.2. Serie a termini complessi. Ricordiamo che il concetto di serie si introduce per estendere l'operazione di addizione agli infiniti termini di una successione. Assegnata una successione complessa $(z_n)_n$, la serie

$$(6.3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$$

indica formalmente la corrispondenza che associa alla $(z_n)_n$ la sua *successione delle somme parziali* $(s_n)_n$, definita ponendo

$$s_1 = z_1, \quad s_2 = z_1 + z_2, \dots, \quad s_n = z_1 + \dots + z_n, \dots$$

La serie si dice *convergente o divergente*, a seconda che tale risulti la successione $(s_n)_n$. Nel caso di convergenza, il limite della successione delle somme parziali si dice

somma della serie; per indicare che $s = \lim s_n$, si scrive $s = \sum_{n=1}^{+\infty} z_n$. La serie si dice

indeterminata (o *oscillante*) se $(s_n)_n$ non è regolare. Si dice *carattere* della serie la proprietà di essere convergente, divergente o indeterminata. È ben noto che condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine generale sia infinitesimo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \text{ è convergente} \quad \Rightarrow \quad \lim z_n = 0.$$

La condizione non è sufficiente. Ad esempio, la *serie armonica*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

diverge, pur essendo infinitesimo il termine generale.

Data la serie complessa (6.3), scrivendo $z_n = x_n + j y_n$ in forma algebrica, possiamo considerare le due serie reali $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$. Inoltre, per quanto detto è chiaro che la (6.3) è convergente se e solo se tali risultano queste ultime; in caso di convergenza, vale l'uguaglianza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \right) + j \left(\sum_{n=1}^{+\infty} y_n \right).$$

Il criterio di convergenza di Cauchy (teorema 6.4) può essere riformulato per le serie. A tale scopo, ricordiamo che, dati $n, k \in \mathbb{N}$, si dice *resto parziale* della serie (6.3) di indici n e k l'espressione

$$r_{n,k} = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k} = s_{n+k} - s_n.$$

TEOREMA 6.6. *Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie (6.3) converga è che $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N}: \forall n > \nu$ e $\forall k \in \mathbb{N}$, risulti $|r_{n,k}| < \varepsilon$.*

DEFINIZIONE 6.7. Si dice che la serie (6.3) *converge assolutamente* se risulta convergente la serie dei moduli $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n|$. Quest'ultima è una serie a termini non negativi e quindi o converge o diverge, non è indeterminata.

PROPOSIZIONE 6.8. *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

La serie *armonica a segni alterni*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$$

è convergente, ma non assolutamente convergente; dunque il risultato precedente non si inverte. Una serie che converge, ma non assolutamente, è detta *semplicemente convergente*.

ESEMPIO 6.9. Sia $z \in \mathbb{C}$ fissato. La serie

$$(6.4) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

(per $z = 0$, poniamo qui $0^0 = 1$) si dice *serie geometrica di ragione z* . La successione del termine generale è (z^n) , considerata nell'esempio 6.5. Il carattere della serie geometrica dipende dalla ragione z . Evidentemente, per $z = 1$ la serie diverge. Per $z \neq 1$, consideriamo le somme parziali

$$s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{(1 + z + z^2 + \cdots + z^n)(1 - z)}{1 - z} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

Dobbiamo esaminare il comportamento di (s_n) per $n \rightarrow +\infty$. Risultando $\lim z^{n+1} = 0$ per $|z| < 1$, per tali z la serie converge:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \text{ con } |z| < 1.$$

In effetti, la convergenza è assoluta, in quanto la serie dei moduli è la serie geometrica di ragione $|z| < 1$, che converge.

Analogamente, risultando $\lim z^n = \infty$ per $|z| > 1$, per tali valori di z la serie diverge (nel campo complesso).

Resta da considerare il caso $|z| = 1$, ma $z \neq 1$. In tali punti la serie non può convergere, poiché il termine generale non è infinitesimo. D'altra parte, la serie non diverge, essendo la successione delle somme parziali limitata:

$$|s_n| = \frac{|1 - z^{n+1}|}{|1 - z|} \leq \frac{1 + |z^{n+1}|}{|1 - z|} = \frac{2}{|1 - z|}.$$

Pertanto la serie è indeterminata.

A. Serie a termini non-negativi. Criteri di convergenza

Come già detto, la serie dei moduli $\sum |z_n|$ è una serie a termini non-negativi, quindi non indeterminata. Richiamiamo qui alcuni criteri di convergenza per le serie a termini non-negativi, che forniranno altrettanti criteri di convergenza assoluta per le serie complesse (6.3), quindi di convergenza in base alla proposizione 6.8. I criteri seguenti sono stabiliti per confronto. Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini non-negativi. Se vale la relazione $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$ (o anche solo per n abbastanza grande), la prima serie si dice maggiorata dalla seconda, o la seconda minorata dalla prima (definitivamente). Evidentemente, in questo caso valgono le implicazioni:

$$\begin{aligned}\sum b_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum a_n \text{ converge}; \\ \sum a_n \text{ diverge} &\Rightarrow \sum b_n \text{ diverge}.\end{aligned}$$

PROPOSIZIONE A.1 (Criterio del rapporto). *Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi, tale che il limite*

$$l = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty]$$

esista. Se risulta $l < 1$, la serie converge. Se risulta $l > 1$, la serie diverge.

PROPOSIZIONE A.2 (Criterio della radice). *Sia $\sum a_n$ una serie a termini non-negativi, tale che il limite*

$$l = \lim_n \sqrt[n]{a_n} \in [0, +\infty]$$

esista. Se risulta $l < 1$, la serie converge. Se risulta $l > 1$, la serie diverge.

Nel caso $l = 1$ entrambi i criteri non sono applicabili. Il criterio della radice è più generale di quello del rapporto, in quanto si prova l'implicazione

$$(A.1) \quad l = \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow l = \lim_n \sqrt[n]{a_n}.$$

PROPOSIZIONE A.3 (Criterio dell'integrale). *Sia*

$$\varphi: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

una funzione decrescente. La convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$ equivale alla sommabilità della funzione φ su $[1, +\infty[$.

Sulla nozione di sommabilità torneremo nel capitolo VII. Scegliendo $\varphi(t) = t^{-p}$, con $p > 0$, vediamo che la *serie armonica generalizzata* di esponente p

$$(A.2) \quad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

converge se e solo se $p > 1$. A tale serie non è applicabile il criterio del rapporto, né quello della radice, poiché il limite da studiare vale 1.

OSSERVAZIONE A.4. Il caso della divergenza è chiaro per confronto, poiché per $p < 1$ la serie è minorata dalla serie armonica ($p = 1$).

Per confronto con la (A.2), si ottiene il seguente *criterio dell'ordine di infinitesimo*.

PROPOSIZIONE A.5. *Sia data $\sum a_n$ una serie a termini non-negativi. (a) Se esistono due costanti $K > 0$ e $p > 1$ tali che risulti $a_n \leq K n^{-p}$ per n abbastanza grande, la serie converge. (b) Se esiste una costante $K > 0$ tale che per n abbastanza grande risulti $a_n \geq K n^{-1}$, la serie diverge.*

Nel caso (a) dell'enunciato precedente, si dice che a_n è infinitesimo di ordine non inferiore a p (rispetto all'infinitesimo campione n^{-1}), per $n \rightarrow +\infty$; per intendere ciò, si scrive $a_n = O(n^{-p})$ (che si legge “ a_n è o grande di n^{-p} ”).

ESERCIZIO A.6. Se $\sum a_n$ è una serie a termini non-negativi convergente, anche $\sum a_n^p$ risulta convergente, $\forall p > 1$.

CAPITOLO II

Funzioni analitiche

1. Funzioni olomorfe

Siano Ω un aperto di \mathbb{C} , $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Essendo Ω aperto, per $\Delta z \in \mathbb{C}$ di modulo sufficientemente piccolo, risulta $z_0 + \Delta z \in \Omega$ e quindi possiamo esaminare il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ per $\Delta z \rightarrow 0$. Si dice che f è derivabile, o *olomorfa*, in z_0 se il rapporto incrementale converge, cioè esiste finito

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

In questo caso il limite si chiama derivata di f in z_0 e si denota con uno dei simboli $f'(z_0)$, $Df(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$. Formalmente, quindi, la condizione di derivabilità è identica a quella per le funzioni di variabile reale. Come vedremo, a differenza di quanto accade per queste ultime, la derivabilità in campo complesso è una condizione estremamente forte. Cominciamo col dimostrare la seguente caratterizzazione.

TEOREMA 1.1. *La funzione $f = f(z)$ è olomorfa in $z_0 = x_0 + jy_0$ se e solo se $f = f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) e soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann:*

$$(1.1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{j} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

In tal caso, risulta

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{j} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Ricordiamo che $f(x, y)$ è differenziabile in (x_0, y_0) se nel punto è derivabile parzialmente rispetto ad entrambe le variabili e, denotato con

$$df = df(x_0, y_0): (\Delta x, \Delta y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \Delta y$$

il differenziale totale di f , risulta $\Delta f = df + o(\Delta z)$ per $\Delta z = \Delta x + j \Delta y \rightarrow 0$, cioè

$$(1.2) \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta z} = 0.$$

Dim. (del teor. 1.1) Supponiamo che f sia derivabile e mostriamo la differenziabilità e la (1.1). Facciamo tendere Δz a 0 per valori reali, cioè prendiamo $\Delta z = \Delta x$ reale: chiaramente il rapporto incrementale convergerà ancora a $f'(z_0)$. Essendo

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

la $f(x, y)$ è derivabile rispetto a x e risulta $f_x(x_0, y_0) = f'(z_0)$. Ragioniamo analogamente, dando a Δz valori immaginari, $\Delta z = j \Delta y$, con Δy reale tendente a 0; anche in questo caso il limite sarà

$f'(z_0)$. Poiché

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{j} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

troviamo f derivabile pure rispetto a y e soddisfacente l'uguaglianza

$$(1.3) \quad \frac{1}{j} f_y(x_0, y_0) = f'(z_0) = f_x(x_0, y_0),$$

quindi la (1.1). Resta da mostrare la (1.2). A tale scopo osserviamo che, esprimendo $\Delta z = \Delta x + j \Delta y$ in forma algebrica, mediante la (1.1) possiamo riscrivere il differenziale come segue

$$(1.4) \quad \begin{aligned} df &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y \\ &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + \frac{1}{j} f_y(x_0, y_0) j \Delta y = f_x(x_0, y_0) \Delta z \end{aligned}$$

e quindi per la (1.3)

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} - f_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0) = 0,$$

come volevamo.

Proviamo ora l'olomorfia di f in z_0 , supponendo la differenziabilità e la condizione di Cauchy-Riemann (1.1). Osserviamo che possiamo esprimere il differenziale mediante la (1.4), cioè $df = f_x(x_0, y_0) \Delta z$, poiché questa è stata ricavata da (1.1). Quindi, usando l'ipotesi di differenziabilità, abbiamo

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f_x(x_0, y_0) + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta z} = f_x(x_0, y_0) + 0,$$

vale a dire, il rapporto incrementale converge, cioè f è olomorfa in z_0 , la derivata essendo $f_x(x_0, y_0)$.

Diremo che f è olomorfa in Ω se risulta olomorfa in ogni punto di Ω . Possiamo allora considerare la funzione derivata $f': z \in \Omega \mapsto f'(z) \in \mathbb{C}$. In questo caso, la condizione di Cauchy-Riemann è un'identità in Ω :

$$(1.5) \quad f_x(x, y) = \frac{1}{j} f_y(x, y), \quad \forall z = x + j y \in \Omega,$$

il valore comune essendo $f'(z)$. Per quanto riguarda la condizione di differenziabilità, ricordiamo che una condizione sufficiente è $f \in C^1(\Omega)$.

ESEMPIO 1.2. Verifichiamo l'olomorfia in \mathbb{C} della funzione esponenziale

$$f(z) = \exp(z) = \exp(x + j y) = e^x (\cos y + j \sin y).$$

In effetti, f è differenziabile poiché di classe C^1 . Inoltre

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x (\cos y + j \sin y), \\ f_y(x, y) &= e^x (-\sin y + j \cos y) = j e^x (\cos y + j \sin y), \end{aligned}$$

dunque f verifica la condizione di Cauchy-Riemann. Pertanto, la funzione esponenziale è olomorfa in \mathbb{C} e risulta $\forall z$

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z.$$

Analogamente, possiamo verificare l'olomorfia in \mathbb{C} della potenza z^n , $n \in \mathbb{N}$, e la formula per la derivata $D z^n = n z^{n-1}$.

Non è invece olomorfa, pur essendo di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, la funzione $f(z) = \bar{z} = x - j y$, in quanto non soddisfa la condizione di Cauchy-Riemann, risultando $f_x = 1$, $\frac{1}{j} f_y = -1$.

Una funzione olomorfa in \mathbb{C} si dice *funzione intera*; per quanto visto, tali risultano l'esponenziale e la potenza.

Come accennato, l'olomorfia è una condizione di estrema regolarità; le considerazioni seguenti mirano ad illustrare questo punto. Un risultato emblematico è il seguente *teorema di Goursat*, che qui ci limitiamo ad enunciare.

TEOREMA 1.3. *La derivata di una funzione olomorfa in un aperto Ω è anche essa olomorfa in Ω .*

Il teorema assicura la derivabilità di f' , cioè che f sia dotata di *derivata seconda*; il teorema si può quindi applicare a f' , provando così che f ha la *derivata terza*. Iterando il ragionamento, vediamo che una funzione olomorfa in Ω , cioè dotata di derivata prima nel campo complesso, è in realtà *indefinitamente derivabile* e di classe $C^\infty(\Omega)$. Questa proprietà è certamente sorprendente, in confronto a quanto accade per le funzioni di variabile reale. Per illustrare ulteriormente la condizione di olomorfia, riscriviamo l'uguaglianza di Cauchy-Riemann. Esprimiamo $f(x, y) = u(x, y) + j v(x, y)$ in forma algebrica; dunque u e v sono funzioni reali in Ω . La derivabilità parziale di f equivale a quella delle due funzioni u e v e risulta $f_x = u_x + j v_x$, $f_y = u_y + j v_y$. Pertanto la (1.5) diviene

$$u_x + j v_x = \frac{1}{j} u_y + v_y = -j u_y + v_y$$

e, separando il reale dall'immaginario, esprimiamo l'uguaglianza (1.5) tra quantità complesse mediante il sistema di due uguaglianze tra quantità reali

$$(1.6) \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

ESERCIZIO 1.4. Ricavare dalle (1.6) le uguaglianze

$$(1.7) \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2 = |f'(z)|^2.$$

Usando le condizioni di Cauchy-Riemann (1.6), è facile mostrare la seguente

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia f olomorfa nell'aperto connesso Ω . La funzione f risulta costante in ciascuna delle seguenti ipotesi: (a) f è reale; (b) f è immaginaria; (c) $|f|$ è costante; (d) $\arg f$ è costante.*

Dim. (a) In effetti, l'ipotesi che $f = u + j v$ abbia valori reali significa $v \equiv 0$ e quindi (1.6) implicano che u ha gradiente nullo in Ω , pertanto è costante. Analogamente (b). La condizione in (c) è $u^2 + v^2 = k$ costante. La conclusione è banale se $k = 0$: supponiamo quindi $k > 0$. Derivando rispetto a x e a y , otteniamo le uguaglianze

$$(1.8) \quad \begin{cases} u u_x + v v_x = 0 \\ u u_y + v v_y = 0 \end{cases}$$

Questo, per ogni punto $z = x + j y \in \Omega$ fissato, può essere interpretato come un sistema lineare nelle due incognite $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$, il cui determinante dei coefficienti è (1.7). Essendo $|f(z)| > 0$, il sistema ha una soluzione non banale e il determinante è nullo, quindi sono nulle in ogni punto di Ω le derivate delle funzioni u e v , che dunque risultano costanti. (d) I valori di f giacciono su una fissata semiretta uscente dall'origine, quindi esistono $a, b \in \mathbb{R}$, non entrambi nulli, tali che

$$a u(x, y) + b v(x, y) = 0,$$

per ogni $(x, y) \in \Omega$. La tesi si ottiene allora similmente al caso (c), osservando che il determinante in (1.7) è nullo, avendo le colonne proporzionali.

Geometricamente, nei casi (a), (b) e (d) i valori assunti dalla funzione f appartengono ad una retta, nel caso (c) essi sono su una circonferenza. Più in generale, si mostra che, essendo f olomorfa in un aperto connesso, se i valori di f appartengono ad una *linea unidimensionale* del piano, la funzione è costante. (Vedere anche osservazione IV.2.3.)

Valgono regole di derivazione per somma, prodotto, rapporto, funzione composta, funzione inversa, formalmente identiche a quelle nel caso delle funzioni di variabile

reale. Ad esempio, seguendo le notazioni del paragrafo I.5.2, fissando nell'insieme A_{ϑ_0} una determinazione di $\log z$, otteniamo una funzione olomorfa e risulta

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}.$$

Conseguentemente alla scelta della determinazione di $\log z$, dato $\alpha \in \mathbb{C}$, in A_{ϑ_0} abbiamo una determinazione olomorfa della potenza $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$:

$$\frac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha-1} = \alpha \frac{z^\alpha}{z}.$$

1.1. Funzioni armoniche. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^2 .

DEFINIZIONE 1.6. Si dice che una funzione u definita in Ω è *armonica* nell'aperto se è di classe $C^2(\Omega)$ e soddisfa identicamente la condizione

$$(1.9) \quad \Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u = 0.$$

Il simbolo Δ denota *l'operatore di Laplace* (talvolta indicato anche con ∇^2), che applicato alla funzione u è la somma delle derivate seconde pure; la (1.9) prende il nome di *equazione di Laplace* e (insieme alla condizione che le derivate seconde siano continue) definisce le funzioni armoniche. Esempi banali di funzioni armoniche sono i polinomi di grado (non superiore a) 1 in x e y , che hanno le derivate seconde nulle. Per mostrare altri esempi di funzioni armoniche, mettiamo in luce un fondamentale legame con le funzioni olomorfe.

PROPOSIZIONE 1.7. *Parte reale e coefficiente dell'immaginario di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche.*

Dim. Sia $f = u + jv$ olomorfa nell'aperto Ω . Per il teorema di Goursat $f \in C^\infty(\Omega)$ e quindi tali risultano anche u e v . Inoltre, vale la condizione di Cauchy-Riemann, che in termini di u e v si scrive mediante il sistema (1.6). Derivando la prima equazione rispetto a x , la seconda rispetto a y e sommando membro a membro, essendo le derivate seconde miste di v uguali per il teorema di Schwarz, troviamo $u_{xx} + u_{yy} = 0$ in ogni punto, quindi u è armonica in Ω . Analogamente possiamo ragionare su v .

ESEMPIO 1.8. In virtù della proposizione 1.7, considerando la funzione intera $f(z) = e^z = e^x(\cos y + j \sin y)$, troviamo le funzioni armoniche in tutto il piano $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$.

Essendo $z^2 = (x+jy)^2 = x^2 - y^2 + 2jxy$, troviamo le funzioni armoniche $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = 2xy$. Più in generale, parte reale e coefficiente dell'immaginario di $f(z) = z^n$ sono *polinomi armonici omogenei* di grado n .

Considerando $f(z) = \log z$, troviamo le funzioni $u(x, y) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, armonica in $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, e $v(x, y) = \arctan(y/x)$, armonica in ciascuno dei semipiani $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$.

ESERCIZIO 1.9. (a) Verificare direttamente in base alla definizione che le funzioni u e v dell'esempio 1.8 sono armoniche. (b) Sia $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ un polinomio omogeneo di grado 2; dire sotto quale condizione sui coefficienti a , b e c esso risulta armonico in \mathbb{R}^2 .

Torneremo sulle funzioni armoniche nel capitolo XIII.

2. Serie di potenze nel campo complesso

Una *serie di funzioni* è una serie del tipo

$$(2.1) \quad f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

dove f_1, f_2, \dots sono funzioni (a valori complessi) definite in uno stesso insieme E . Fissato $z \in E$, resta individuata la serie numerica

$$(2.2) \quad f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

Se tale serie numerica risulta convergente, diremo che la serie di funzioni (2.1) *converge* nel punto z . L'insieme (eventualmente vuoto) dei punti $z \in E$ nei quali la serie (2.1) converge si dice *insieme di convergenza puntuale*; in esso risulta definita la funzione somma. La convergenza puntuale è spesso insufficiente per garantire alcune proprietà della somma, o la possibilità di effettuare alcune operazioni sulla serie; si introducono nozioni più forti di convergenza. Diremo che la serie (2.1) *converge totalmente* in $F \subseteq E$ se in tale insieme è maggiorata da una serie numerica convergente, cioè esiste una serie numerica

$$(2.3) \quad M_1 + M_2 + \cdots + M_n + \cdots$$

convergente tale che $\forall z \in F$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ risulti $|f_n(z)| \leq M_n$. È chiaro che la convergenza totale implica quella puntuale. Come accennato, l'importanza della convergenza totale è che essa permette di estendere alla somma di una serie alcune proprietà dei termini della serie stessa. Ad esempio

PROPOSIZIONE 2.1. *La somma di una serie totalmente convergente di funzioni continue è continua.*

OSSERVAZIONE 2.2. Per il seguito sarà utile il risultato seguente. Se $\sum f_n$ converge totalmente in F e g è una funzione limitata in F , anche la serie $\sum g f_n$ ottenuta moltiplicando ogni termine per g converge totalmente in F . In effetti, se $|g| \leq K$ e la (2.3) maggiora $\sum f_n$, la serie numerica (2.3) moltiplicata per K maggiora $\sum g f_n$.

Una serie di potenze è una serie di funzioni i cui termini sono delle potenze, cioè una serie del tipo

$$(2.4) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

I numeri complessi a_n , $n \in \mathbb{N}_0$, sono detti coefficienti della (2.4). Più in generale, possiamo considerare serie del tipo

$$(2.5) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

essendo z_0 un fissato numero complesso; z_0 si dice *punto iniziale* della serie. Poiché i risultati nel caso generale sono perfettamente analoghi a quelli nel caso particolare della serie (2.4) in cui $z_0 = 0$, ci limiteremo a quest'ultimo. Un esempio è fornito dalla serie geometrica. Essa converge nel cerchio aperto $D(0; 1)$ e totalmente in ogni cerchio $\bar{D}(0; r)$, con $0 < r < 1$.

La serie converge nel punto iniziale $z = 0$, riducendosi al termine costante a_0 . Fondamentale è il seguente risultato, noto come *lemma di Abel*.

TEOREMA 2.3. *Se la serie (2.4) converge in un punto $\zeta \neq 0$, essa converge assolutamente in ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |\zeta|$.*

Dim. Poiché la serie $\sum a_n \zeta^n$ converge, il termine generale è infinitesimo, quindi limitato, cioè risulta $|a_n \zeta^n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, per un'opportuna costante $M > 0$. Ne segue $|a_n \zeta^n| = |a_n \zeta^n| |z/\zeta|^n \leq M |z/\zeta|^n$ e la serie (2.4) è maggiorata da un multiplo della serie geometrica di ragione $|z/\zeta| < 1$.

Definiamo il *raggio di convergenza* della serie (2.4):

$$\rho = \sup \{ |z| : z \in \mathbb{C}, \text{ la (2.4) converge in } z \}.$$

Osserviamo che $\rho \in [0, +\infty]$. Usando il teorema 2.3, è possibile mostrare che ρ è caratterizzato nel modo seguente:

- (1) la serie (2.4) converge solo per $z = 0$ se e solo se $\rho = 0$;
- (2) se $\rho \in]0, +\infty[$, la serie (2.4) converge assolutamente per $|z| < \rho$ e non converge per $|z| > \rho$;
- (3) la serie converge in ogni $z \in \mathbb{C}$ se e solo se $\rho = +\infty$.

Inoltre

TEOREMA 2.4. *Una serie di potenze con raggio di convergenza positivo converge totalmente in ogni cerchio compatto contenuto internamente al cerchio di convergenza.*

In altri termini, detto $\rho > 0$ il raggio di convergenza, la serie converge totalmente nel cerchio dei numeri z tali che $|z| \leq r$, per ogni fissato $r < \rho$.

Proviamo a studiare la convergenza assoluta della serie (2.4) mediante il criterio del rapporto; a tal fine, supponiamo che i termini della successione (a_n) siano non-nulli per n abbastanza grande. Il rapporto tra il modulo di un termine e quello del precedente è

$$(2.6) \quad \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |z|.$$

Supponiamo che la successione dei rapporti $|a_{n+1}|/|a_n|$ ammetta limite: $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. È chiaro che, se $l = 0$, i rapporti in (2.6) convergono a 0 per ogni $z \in \mathbb{C}$, quindi la serie (2.4) converge assolutamente in ogni punto e ha pertanto raggio di convergenza infinito: $\rho = +\infty$. Se $l = +\infty$, i rapporti in (2.6) divergono per $z \neq 0$, quindi la serie converge solo nel punto iniziale e ha raggio di convergenza 0: $\rho = 0$. Se $0 < l < +\infty$, i rapporti in (2.6) convergono a $l|z|$, quindi, per il criterio del rapporto, la serie converge per $|z| < 1/l$ e non converge per $|z| > 1/l$: il raggio di convergenza è dunque $\rho = 1/l$. Con le convenzioni $1/0 = +\infty$, $1/+\infty = 0$, in ogni caso possiamo dire che il raggio di convergenza è $\rho = 1/l$. Otteniamo dunque

PROPOSIZIONE 2.5. (a) *Se $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$, il raggio di convergenza è $\rho = 1/l$.* (b) *Se $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = l \in [0, +\infty]$, il raggio di convergenza è $\rho = 1/l$.*

Il risultato in (b) si ottiene analogamente ad (a), utilizzando però il criterio della radice.

In generale, vale la seguente formula di Cauchy-Hadamard

$$\rho = \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

ESEMPIO 2.6. La serie esponenziale $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ha raggio di convergenza infinito,

converge cioè $\forall z \in \mathbb{C}$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n! z^n$ ha raggio di convergenza 0, cioè converge solo in 0. La serie geometrica ovviamente ha raggio di convergenza $\rho = 1$.

Supponiamo che la serie (2.4) abbia raggio di convergenza positivo e finito, $0 < \rho < +\infty$. In generale, nulla si può dire nei punti della circonferenza del cerchio di convergenza, potendosi presentare tutte le eventualità.

ESEMPIO 2.7. Le tre serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2},$$

hanno tutte raggio di convergenza $\rho = 1$. La prima è la serie geometrica e, come è noto, non converge in alcun punto z con $|z| = 1$. È possibile mostrare che la seconda serie converge in ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| = 1$, escluso $z = 1$. Infine, la terza serie converge in ogni z con $|z| = 1$.

ESERCIZIO 2.8. Dimostrare il teorema 2.4. (Suggerimento: scegliere ζ verificante $r < |\zeta| < \rho$ e adattare la dimostrazione del lemma di Abel.)

2.1. Proprietà della somma di una serie di potenze. Data la serie (2.4), la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1},$$

i cui termini sono le derivate dei termini della (2.4), si dice *serie derivata (prima)*.

PROPOSIZIONE 2.9. La serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della (2.4).

Limitiamoci a verificare l'enunciato nel caso in cui sia possibile calcolare il raggio di convergenza della (2.4) mediante il punto (a) della proposizione 2.5, cioè risulti $\rho = 1/l$, dove $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Possiamo allora valutare il raggio di convergenza della serie derivata con lo stesso criterio:

$$\lim_n \frac{(n+1) |a_{n+1}|}{n |a_n|} = \lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \frac{n+1}{n} = l \cdot 1 = l.$$

Possiamo considerare le serie derivate successive:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}, \\ & \dots \\ & \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) a_n z^{n-k}, \\ & \dots \end{aligned}$$

si dicono serie derivata seconda, ..., k -sima, ... La serie derivata seconda è serie derivata della serie derivata prima e così via. Esse hanno tutte lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza (2.4). Si dimostra il seguente

TEOREMA 2.10. *La somma di una serie di potenze con raggio di convergenza positivo (eventualmente infinito) è indefinitamente derivabile nei punti interni al cerchio di convergenza. Le derivate successive si calcolano derivando termine a termine la serie.*

Più esplicitamente, detto $\rho \in]0, +\infty]$ il raggio di convergenza della (2.4) e indicata con

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

la somma, f è indefinitamente derivabile per $|z| < \rho$ e risulta, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}.$$

Alla dimostrazione del teorema 2.10, premettiamo il

LEMMA 2.11. *Per ogni $z_0, \Delta z \in \mathbb{C}$, con $\Delta z \neq 0$, e $n \geq 2$, risulta*

$$(2.7) \quad \left| \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} - n z_0^{n-1} \right| \leq \binom{n}{2} |\Delta z| (|z_0| + |\Delta z|)^{n-2}.$$

Dim. Usando la formula del binomio di Newton, maggioriamo il primo membro di (2.7) con

$$\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} |z_0|^{n-k} |\Delta z|^k = |\Delta z| \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} |z_0|^{n-k-2} |\Delta z|^k$$

D'altra parte,

$$(|z_0| + |\Delta z|)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} |z_0|^{n-k-2} |\Delta z|^k$$

e per $k = 0, \dots, n-2$

$$\binom{n}{k+2} = \frac{n(n-1)}{(k+2)(k+1)} \frac{(n-2)!}{k!(n-k-2)!} \leq \binom{n}{2} \binom{n-2}{k}$$

La tesi (2.7) segue mettendo insieme le tre relazioni precedenti.

Dim. (del teor. 2.10) Basta mostrare il risultato per la derivata prima. Fissato z_0 interno al cerchio di convergenza, cioè verificante $|z_0| < \rho$, scegliamo $r \in]|z_0|, \rho[$. Detta f_1 la somma della serie derivata prima, per Δz verificante $0 < |\Delta z| < r - |z_0|$, abbiamo $|z_0| + |\Delta z| < r$ e usando il lemma 2.11 troviamo

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f_1(z_0) \right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} - n z_0^{n-1} \right| \\ &\leq |\Delta z| \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{n}{2} |a_n| r^{n-2} \end{aligned}$$

ed è sufficiente passare al limite per $\Delta z \rightarrow 0$, poiché la serie nell'ultimo membro converge, essendo la serie dei moduli della serie derivata seconda calcolata in r (e divisa per 2).

È facile legare i coefficienti della (2.4) ai valori della somma f e delle sue derivate in 0. In effetti, risulta $f(0) = a_0$. Inoltre $f'(0) = 1 \cdot a_1$ e in generale $f^{(k)}(0) = k! a_k$, ovvero

$$(2.8) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

In virtù di queste uguaglianze, la serie (2.4) si riscrive

$$(2.9) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Data una funzione f , indefinitamente derivabile intorno a 0, la serie (2.9) si dice *serie di Mac Laurin* di f . Nel caso di una serie di potenze (2.5) di punto iniziale $z_0 \in \mathbb{C}$, alle (2.8) subentrano le uguaglianze

$$(2.10) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

e alla (2.9) subentra la

$$(2.11) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

che si dice *serie di Taylor* di f di punto iniziale z_0 . Dunque la serie di Mac Laurin è la serie di Taylor di punto iniziale $z_0 = 0$. Le uguaglianze (2.10) forniscono il seguente *principio di identità* delle serie di potenze:

TEOREMA 2.12. *Una serie di potenze con raggio di convergenza positivo coincide con la serie di Taylor della sua somma (con lo stesso punto iniziale).*

L'enunciato precedente estende il principio di identità dei polinomi.

ESEMPIO 2.13. La serie esponenziale considerata nell'esempio 2.6 è la serie di Mac Laurin della funzione esponenziale $f(z) = e^z$. Come subito si verifica, le due serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

sono le serie di Mac Laurin di $\cos z$ e $\sin z$, rispettivamente. Entrambe hanno raggio di convergenza infinito. Ricordando la serie geometrica, abbiamo l'uguaglianza

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

che fornisce lo sviluppo di Mac Laurin della funzione $f(z) = 1/(1-z)$.

Gli sviluppi

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

sono ben noti nel campo reale, cioè valgono $\forall x \in \mathbb{R}$. Essi permettono di prolungare a \mathbb{C} la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, in maniera diversa da quanto fatto nei paragrafi I.5.1 e I.5.3. Per la prima uguaglianza, ponendo

$$(2.12) \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ prolunghiamo a \mathbb{C} l'esponenziale. Calcoliamo e^{jy} in base alla definizione (2.12), per $y \in \mathbb{R}$; separando il reale dall'immaginario, troviamo:

$$e^{jy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(jy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e quindi, in virtù dei ricordati sviluppi di Mac Laurin di coseno e seno,

$$e^{jy} = \cos y + j \sin y.$$

Pertanto, a partire dalla *definizione* (2.12), *dimostriamo* la formula di Eulero (I.5.1), che precedentemente abbiamo usato come definizione. A partire dalla (2.12), è facile altresì mostrare che vale la (I.5.2).

Mettiamo in luce un'ulteriore proprietà della somma di una serie di potenze. Sia

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad |z| < \rho,$$

essendo il raggio di convergenza della serie $\rho > 0$. Consideriamo z_1 interno al cerchio di convergenza, $|z_1| < \rho$; potendosi la serie derivare indefinitamente termine a termine, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, abbiamo

$$(2.13) \quad \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n z_1^{n-k}.$$

D'altra parte,

$$(2.14) \quad z^n = (z - z_1 + z_1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} (z - z_1)^k,$$

in virtù della formula del binomio di Newton. Pertanto da (2.13) ricaviamo

$$(2.15) \quad \begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^{n-k} (z - z_1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (z - z_1)^k \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \binom{n}{k} z_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_1)}{k!} (z - z_1)^k. \end{aligned}$$

È possibile verificare che i passaggi indicati sono leciti per $|z - z_1| < \rho - |z_1|$. Dunque, per tali z , $f(z)$ si esprime come somma della serie di potenze di punto iniziale z_1 nell'ultimo membro della (2.15); il raggio di convergenza di tale serie è maggiore o uguale a $\rho - |z_1|$. (La serie è scritta come serie di Taylor di punto iniziale z_1 della sua somma f , com'è chiaro, per il principio di identità, teorema 2.12.)

DEFINIZIONE 2.14. Sia Ω un aperto di \mathbb{C} . Una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *analitica* in Ω se, per ogni $z_1 \in \Omega$, esiste un intorno di z_1 contenuto in Ω nel quale f risulta somma di una serie di potenze. Equivalentemente, per ogni $z_1 \in \Omega$, f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale z_1 .

È chiaro che una funzione analitica è indefinitamente derivabile. Inoltre, la somma di una serie di potenze con raggio di convergenza positivo è analitica nel cerchio di convergenza. Mostriamo in seguito l'analiticità delle funzioni olomorfe e quindi (nell'ambito della teoria da noi sviluppata) analiticità e olomorfia saranno sinonimi.

ESERCIZIO 2.15. Scrivere la serie di Mac Laurin di $f(z) = ze^z$. Scrivere la serie di Taylor di punto iniziale $z_0 = 1$ della funzione $f(z) = e^z$.

ESERCIZIO 2.16. Sia $f(z) = z^5 \sin z$. Valutare $f^{(100)}(0)$. (Suggerimento: scrivere lo sviluppo di Mac Laurin.)

ESERCIZIO 2.17. Scrivere lo sviluppo di Taylor di $f(z) = z^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, essendo $n \in \mathbb{N}$, di punto iniziale $z_1 \in \mathbb{C}$. Confrontare con (2.14).

CAPITOLO III

Integrazione nel campo complesso

1. Integrali curvilinei

Consideriamo inizialmente il caso di una funzione complessa di variabile reale. Sia $f(t) = u(t) + j v(t)$ una funzione continua in un intervallo $[a, b]$; u e v denotano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario di f . Introduciamo l'integrale definito di f su $[a, b]$ ponendo

$$(1.1) \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + j \int_a^b v(t) dt.$$

Poniamo inoltre $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$ e $\int_a^a f(t) dt = 0$. Molte delle note proprietà fondamentali dell'integrale di funzioni reali continuano a valere. Ad esempio, la linearità rispetto all'integrando (in effetti, è chiaro che la definizione (1.1) è *obbligata* per estendere l'integrale in modo da mantenere la linearità), o la proprietà additiva rispetto all'intervallo di integrazione. Un'altra proprietà è espressa dalla seguente disuguaglianza; supponiamo $a \leq b$:

$$(1.2) \quad \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Invero, la disuguaglianza è ovvia se il primo membro è nullo. In caso contrario, posto $w = \int_a^b f(t) dt$, risulta

$$|w| = \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{w}}{|w|} \int_a^b f(t) dt \right] = \int_a^b \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{w}}{|w|} f(t) \right] dt \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Sia ora γ un arco di curva regolare e sia $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, una rappresentazione parametrica regolare di γ . Scrivendo in forma algebrica, abbiamo

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

In particolare, $z \in C^1([a, b])$, ovvero $x, y \in C^1([a, b])$; inoltre $z'(t) = x'(t) + j y'(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Sia $f = f(z)$ una funzione continua nei punti di γ . Definiamo *l'integrale curvilineo* di f esteso a γ (orientata nel verso delle t crescenti) ponendo

$$(1.3) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Osserviamo che $f(z(t)) z'(t) = f(x(t), y(t)) [x'(t) + j y'(t)]$ e quindi $\int_{\gamma} f(z) dz$ è l'integrale curvilineo esteso a γ della forma differenziale

$$(1.4) \quad f dx + j f dy$$

i cui coefficienti sono f e $j f$, a valori complessi. Se scriviamo $f = u + j v$ in forma algebrica, abbiamo

$$\begin{aligned} f(z(t)) z'(t) &= [u(x(t), y(t)) + j v(x(t), y(t))] \cdot [x'(t) + j y'(t)] \\ &= [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] \\ &\quad + j [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] \end{aligned}$$

e quindi

$$(1.5) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + j \int_{\gamma} v dx + u dy,$$

dove i due integrali curvilinei a secondo membro sono di forme differenziali a coefficienti reali.

Si estendono all'integrale curvilineo in campo complesso le proprietà note per l'integrale curvilineo di forme differenziali a coefficienti reali. In particolare, l'integrale non dipende dalla rappresentazione parametrica fissata. Un'altra proprietà è che, invertendo il verso di percorrenza di γ , l'integrale si muta nell'opposto; formalmente,

$$(1.6) \quad \int_{-\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz,$$

dove appunto $-\gamma$ indica la curva percorsa in verso opposto.

ESEMPIO 1.1. Calcoliamo l'integrale curvilineo della funzione $f(z) = z^n$, esteso alla circonferenza γ di centro 0 e raggio ρ , percorsa in verso antiorario; $n \in \mathbb{Z}$ e $\rho > 0$ sono fissati. Una rappresentazione parametrica regolare di γ è

$$z(t) = \rho e^{jt}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Dunque $z'(t) = j \rho e^{jt}$ e

$$(1.7) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \rho^n e^{njt} j \rho e^{jt} dt = j \rho^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{(n+1)jt} dt.$$

Per $n \neq -1$, è $n+1 \neq 0$ e

$$e^{(n+1)jt} = \frac{1}{(n+1)j} \frac{d}{dt} e^{(n+1)jt}.$$

Dunque, per la formula fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_{\gamma} z^n dz = \frac{\rho^{n+1}}{n+1} [e^{(n+1)jt}]_{t=0}^{t=2\pi} = 0, \quad n \neq -1.$$

Per $n = -1$, l'integrando nell'ultimo membro di (1.7) vale costantemente 1, quindi

$$(1.8) \quad \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi j.$$

Notiamo che in ogni caso l'integrale non dipende da ρ . Analogamente, possiamo considerare il caso di $f(z) = (z - z_0)^n$, con γ circonferenza di centro z_0 .

Come osservato, l'integrale curvilineo appena introdotto è analogo a quello delle forme differenziali. Una nozione essenzialmente diversa di integrale curvilineo si ottiene integrando rispetto alla lunghezza d'arco ed è analoga a quella di integrale curvilineo di una funzione continua:

$$(1.9) \quad \int_{\gamma} f(z) ds = \int_a^b f(z(t)) |z'(t)| dt.$$

Tale nozione è indipendente dalla rappresentazione parametrica; essa è indipendente pure dal verso di percorrenza, cioè, in contrasto con (1.6), abbiamo

$$(1.10) \quad \int_{-\gamma} f(z) ds = \int_{\gamma} f(z) ds.$$

(In effetti, γ non è orientata.) La disuguaglianza

$$(1.11) \quad \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| ds \leq M l,$$

segue da (1.2); qui abbiamo posto $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$ e denotato con l la lunghezza di γ .

Le nozioni di integrale curvilineo introdotte si estendono subito al caso di una curva γ generalmente regolare.

L'integrale curvilineo spesso si considera come funzione di γ . Siano f una funzione continua in un aperto Ω e γ un arco di curva contenuto in Ω . Un caso in cui l'integrale $\int_{\gamma} f(z) dz$ si calcola facilmente è quello in cui f sia la derivata di una funzione olomorfa, esista cioè una F , olomorfa in Ω , *primitiva* di f : $f = F'$. Se $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, è una rappresentazione parametrica di γ , l'espressione $f(z(t)) z'(t)$ è allora la derivata (rispetto a t) della funzione composta $F(z(t))$. Dunque, per la formula fondamentale del calcolo integrale, abbiamo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = [F(z(t))]_{t=a}^{t=b} = F(z_1) - F(z_0),$$

dove abbiamo indicato con $z_1 = z(b)$ e $z_0 = z(a)$ gli estremi di γ . In particolare, l'integrale non dipende da γ , ma solo dagli estremi (e dal verso di percorrenza). Viceversa, supponiamo che l'integrale curvilineo di f abbia tale proprietà, sia cioè indipendente da γ . Separando il reale dall'immaginario, vediamo che questa proprietà di indipendenza vale per i due integrali a secondo membro della (1.5). Com'è noto, questo vuol dire che le forme

$$u dx - v dy, \quad v dx + u dy,$$

sono differenziali esatti, esistono cioè due funzioni $U = U(x, y)$ e $V = V(x, y)$ differenziabili in Ω , tali che

$$dU = u dx - v dy, \quad dV = v dx + u dy,$$

vale a dire, $U_x = u$, $U_y = -v$, $V_x = v$, $V_y = u$. La funzione $F = U + jV$ risulta differenziabile in Ω e verifica

$$F_x = U_x + jV_x = u + jv = f,$$

$$F_y = U_y + jV_y = -v + ju = jf.$$

Equivalentemente, dall'indipendenza dell'integrale dal cammino, ricaviamo che la forma differenziale (1.4) è esatta, cioè esiste F tale che $F_x = f$ e $F_y = j f$. Dunque F è olomorfa in Ω , in quanto verifica la condizione di Cauchy-Riemann (II.1.5), e risulta primitiva di f . In definitiva, l'indipendenza dal cammino dell'integrale curvilineo di f (che equivale a dire che l'integrale esteso ad una qualunque curva chiusa è nullo) è condizione necessaria e sufficiente perché la funzione sia dotata di primitiva. Come già osservato e come preciseremo in seguito (teorema di Goursat), questo implica che f è a sua volta olomorfa.

OSSERVAZIONE 1.2. Possiamo usare le considerazioni precedenti per ottenere immediatamente il caso $n \neq -1$ dell'esempio 1.1. In effetti, risulta

$$z^n = \frac{d}{dz} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

e quindi l'integrale in questione è nullo.

Un'operazione importante sarà quella di integrazione di una serie. Ci limitiamo ad enunciare il risultato seguente.

PROPOSIZIONE 1.3. *Supponiamo che la serie di funzioni continue*

$$(1.12) \quad f_1 + f_2 + \cdots + f_n + \cdots$$

converga totalmente sulla curva γ . In tali ipotesi, la somma f è anche essa continua e la serie può essere integrata termine a termine, cioè vale l'uguaglianza

$$(1.13) \quad \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

2. Teorema e formule integrali di Cauchy

Fin qui abbiamo semplicemente supposto f continua nei punti di γ . Supponiamo ora f olomorfa in Ω aperto contenente γ . Dunque, vale la condizione di Cauchy-Riemann (II.1.5), ovvero $f_y = j f_x$, che dice che la forma differenziale (1.4) è chiusa. Analogamente, usando la versione (II.1.6) della condizione di Cauchy-Riemann, vediamo che sono chiuse le forme differenziali che figurano a secondo membro in (1.5).

Per chiarire meglio le proprietà degli integrali curvilinei nel caso delle forme differenziali chiuse, ricordiamo le *formule di Gauss*. Sia D un dominio regolare, a $n+1$ contorni: Γ_0 contorno esterno e $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ contorni interni (eventualmente non presenti). Le curve $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sono dunque chiuse. Per convenzione, se Γ è una curva chiusa, la intenderemo orientata positivamente se percorsa in verso antiorario, e scriveremo $-\Gamma$ per indicare la curva percorsa in verso orario, cioè negativo. La frontiera FD del dominio D è l'unione dei suoi contorni $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$; essa viene usualmente orientata scegliendo il verso positivo sul contorno esterno e quello negativo sui contorni interni. Se indichiamo con $+FD$ la frontiera così orientata, in virtù della convenzione introdotta, possiamo scrivere

$$(2.1) \quad +FD = \Gamma_0 \cup (-\Gamma_1) \cup \cdots \cup (-\Gamma_n).$$

Siano ora $X = X(x, y)$ e $Y = Y(x, y)$ funzioni continue in D , con le derivate X_y e Y_x ; in tali ipotesi, valgono le uguaglianze

$$(2.2) \quad \iint_D Y_x dx dy = \int_{+FD} Y dy, \quad \iint_D X_y dx dy = - \int_{+FD} X dx.$$

Chiaramente, ogni integrale esteso a $+FD$ è somma di integrali estesi ai singoli contorni, ciascuno con l'orientamento che gli compete in quanto parte della frontiera di D :

$$\int_{+FD} = \int_{\Gamma_0} + \int_{-\Gamma_1} + \cdots + \int_{-\Gamma_n} = \int_{\Gamma_0} - \left(\int_{\Gamma_1} + \cdots + \int_{\Gamma_n} \right).$$

In particolare, se la forma $X dx + Y dy$ è chiusa, risulta

$$(2.3) \quad \int_{+FD} X dx + Y dy = \iint_D (-X_y + Y_x) dx dy = 0,$$

essendo l'integrando nell'ultimo membro nullo.

Per enunciare il seguente risultato, introduciamo una convenzione: l'ipotesi f olomorfa nel dominio D vuol dire che esiste un aperto $\Omega \supset D$ tale che f sia olomorfa in Ω .

TEOREMA 2.1 (Teorema integrale di Cauchy). *Se f è olomorfa nel dominio D , risulta*

$$(2.4) \quad \int_{+FD} f(z) dz = 0.$$

OSSERVAZIONE 2.2. La dimostrazione si ottiene subito dalle formule di Gauss, cfr. (2.3), supponendo f_x e f_y continue. È possibile dimostrare il teorema senza questa ipotesi aggiuntiva. Come abbiamo anticipato (teorema di Goursat), se f è olomorfa in Ω , risulta $f \in C^\infty(\Omega)$, ma questo risultato segue dal teorema di Cauchy.

ESEMPIO 2.3. $f(z) = 1/z$ è olomorfa per $z \neq 0$. Siano γ_1 e γ_2 due circonferenze di centro 0 e raggi r_1 e r_2 , con $0 < r_1 < r_2$. Se D è la corona circolare da esse delimitata, f è olomorfa in D e quindi vale (2.4). D'altra parte, $+FD = \gamma_2 \cup (-\gamma_1)$, dunque

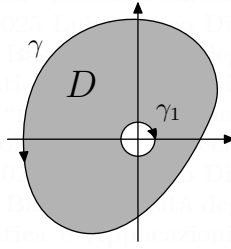
$$0 = \int_{+FD} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

ovvero

$$\int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz,$$

cioè l'integrale non dipende dal raggio della circonferenza; questo è in accordo con quanto visto precedentemente nell'esempio 1.1. Più in generale, sia γ una curva regolare chiusa che circonda 0 (vale a dire γ è la frontiera di un dominio limitato, a cui 0 è interno). Possiamo trovare la circonferenza γ_1 di raggio abbastanza piccolo in modo che γ e γ_1 formino la frontiera di un dominio regolare D , non contenete 0, in cui quindi f è olomorfa. Dunque, usando il teorema di Cauchy, troviamo

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 2\pi j.$$



ESEMPIO 2.4. Sia f olomorfa nell'aperto semplicemente connesso Ω . Fissato $z_0 \in \Omega$, possiamo definire la funzione

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Non c'è bisogno di specificare il cammino, poiché l'integrale è indipendente per il teorema di Cauchy. Si mostra che F è una primitiva di f .

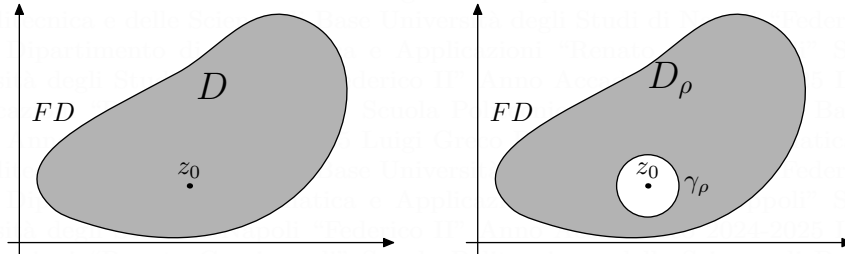
Ricaviamo ora alcune conseguenze del teorema di Cauchy. Cominciamo dalla seguente fondamentale *formula di rappresentazione*.

TEOREMA 2.5 (Formula di Cauchy). *Se f è olomorfa nel dominio D , per ogni punto z_0 interno a D risulta*

$$(2.5) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{+FD} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

La formula (2.5) lega i valori di f nei punti interni a D a quelli assunti sulla frontiera: la funzione è univocamente determinata dalla sua restrizione su FD .

Dim. La funzione $F: z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$ è olomorfa in $D - \{z_0\}$; se $0 < \rho < \text{dist}(z_0, FD)$, il cerchio chiuso di centro z_0 e raggio ρ è contenuto internamente a D ; diciamo D_ρ il dominio ottenuto privando D dei punti interni a detto cerchio.



La funzione F essendo olomorfa in D_ρ , possiamo applicare il teorema di Cauchy. A tal fine, osserviamo che risulta

$$+FD_\rho = +FD \cup (-\gamma_\rho),$$

dove γ_ρ indica la circonferenza di centro z_0 e raggio ρ (percorsa in verso antiorario). Pertanto

$$0 = \int_{+FD_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{+FD} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

ovvero

$$(2.6) \quad \int_{+FD} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Osserviamo che il primo membro non dipende da ρ , quindi il secondo membro è costante rispetto a tale parametro. Per calcolarne il valore, possiamo al limite per $\rho \rightarrow 0$.

LEMMA 2.6. *Risulta* $\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi j f(z_0)$.

Intuitivamente, il risultato è chiaro: essendo f continua in z_0 , per ρ piccolo i valori di $f(z)$ con $z \in \gamma_\rho$ sono vicini a $f(z_0)$ e quindi il valore dell'integrale è vicino a

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{z - z_0} dz = f(z_0) 2\pi j,$$

l'ultima uguaglianza essendo conseguenza delle considerazioni svolte nell'esempio 1.1. Questo ragionamento si può rendere rigoroso come segue. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$; ne segue, per $0 < \rho < \delta$,

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi j f(z_0) \right| = \left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq \int_{\gamma_\rho} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{\rho} ds \leq 2\pi \varepsilon,$$

ovvero vale la tesi.

A questo punto, è chiaro che per il lemma da (2.6) segue la tesi (2.5).

OSSERVAZIONE 2.7. L'uguaglianza (2.5) a volte è detta I formula di Cauchy, mentre la seguente è detta II formula di Cauchy:

$$\int_{+FD} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

per ogni z_0 esterno a D . Quest'ultima segue immediatamente dal teorema di Cauchy, osservando che per z_0 esterno la funzione $F(z) = f(z)/(z - z_0)$ è olomorfa nel dominio.

Il teorema di Cauchy ha il seguente *inverso*.

TEOREMA 2.8 (di Morera). *Sia f una funzione continua in un aperto Ω . Se l'integrale esteso ad ogni curva chiusa γ contenuta in Ω è nullo, f è olomorfa nell'aperto.*

Dim. In base alle considerazioni fatte nel paragrafo 1, l'ipotesi assicura che f è dotata di primitiva, quindi è derivata di una funzione olomorfa e, per il teorema di Goursat, è olomorfa a sua volta.

OSSERVAZIONE 2.9. Basta prendere $\gamma = FT$, con T triangolo contenuto in Ω .

3. Conseguenze della formula di Cauchy

Per studiare le proprietà locali delle funzioni olomorfe, studieremo come l'espressione integrale a secondo membro della (2.5) dipende dal punto z_0 . Per evidenziare il fatto che nella formula il punto sarà considerato variabile, conviene riscrivere la formula cambiando leggermente notazioni:

$$(3.1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{+FD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nell'espressione a secondo membro, dunque, z varia nell'interno di D e figura come parametro. Enunciamo il seguente risultato, che illustra alcune proprietà delle funzioni definite mediante integrale.

PROPOSIZIONE 3.1. *Dati un arco di curva γ e una funzione g continua nei punti di γ , la funzione*

$$f(z) = \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} - \gamma,$$

è indefinitamente derivabile. Le derivazioni possono essere effettuate sotto il segno di integrale, cioè $\forall n \in \mathbb{N}$ risulta

$$(3.2) \quad f^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} - \gamma.$$

Tralasciamo la dimostrazione, insistendo piuttosto sulla possibilità di derivare sotto il segno di integrale. Ad esempio, per la derivata prima, abbiamo

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta.$$

La derivazione sotto il segno di integrale consiste formalmente nello scambiare il simbolo di derivata con quello di integrale; nell'ultimo membro, abbiamo usato il simbolo di derivata parziale, perché l'integrando dipende dalla variabile di integrazione ζ , oltre che dal parametro z . Essendo $\frac{\partial}{\partial z} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$, ricaviamo il caso $n = 1$ della formula (3.2). In generale, abbiamo

$$f^{(n)}(z) = \frac{d^n}{dz^n} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

e poiché $\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} = n! \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}$ ricaviamo la (3.2).

È chiaro che unendo la formula di Cauchy (2.5) e la proposizione 3.1, otteniamo l'indefinita derivabilità delle funzioni olomorfe (teorema II.1.3 di Goursat). In effetti, data f olomorfa nell'aperto Ω , basta considerare i domini (ad esempio, i cerchi chiusi) contenuti in Ω .

TEOREMA 3.2. *Se f è olomorfa nel dominio D , essa è indefinitamente derivabile e nei punti interni, $\forall n \in \mathbb{N}_0$, valgono le uguaglianze*

$$(3.3) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{+FD} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Le (3.3) si dicono *formule di Cauchy per le derivate*.

In realtà, mediante la formula di Cauchy possiamo mostrare l'analiticità di una funzione olomorfa, cioè la possibilità di rappresentarla localmente come somma di una serie di potenze.

TEOREMA 3.3 (Analiticità delle funzioni olomorfe). *Se f è olomorfa in Ω , essa è analitica nell'aperto, cioè ogni $z_0 \in \Omega$ ha un intorno (contenuto in Ω) nel quale f è somma di una serie di potenze di punto iniziale z_0 :*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

In base al principio di identità delle serie di potenze (teorema II.2.12) risulta, $\forall n \in \mathbb{N}_0$,

$$(3.4) \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Dim. Fissato $z_0 \in \Omega$, sia D un cerchio chiuso di centro z_0 , contenuto in Ω ; diciamo $\rho > 0$ il raggio. Per la formula di Cauchy (2.5), abbiamo

$$(3.5) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta, \quad \text{se } |z-z_0| < \rho.$$

Riscriviamo l'integrando in (3.5). Osserviamo che

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0+z_0-z} = \frac{1}{\zeta-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

Inoltre, essendo $|\zeta-z_0| = \rho > |z-z_0|$ e quindi

$$\left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right| = \frac{|z-z_0|}{\rho} =: k < 1,$$

usando la serie geometrica, possiamo scrivere

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}},$$

la serie convergendo totalmente al variare di $\zeta \in FD$. Pertanto, da (3.5) ricaviamo

$$(3.6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right\} d\zeta, \quad \text{se } |z-z_0| < \rho.$$

Per la proposizione 1.3 è lecita l'integrazione termine a termine: per $|z-z_0| < \rho$ risulta

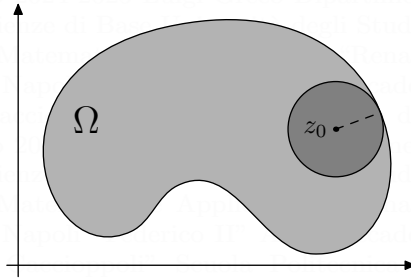
$$(3.7) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right\} (z-z_0)^n.$$

Ponendo $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

arriviamo allo sviluppo in serie di potenze.

OSSERVAZIONE 3.4. Le (3.4) seguono pure confrontando le espressioni dei coefficienti a_n con le formule di Cauchy per le derivate (3.3). Nel mostrare l'analiticità, non abbiamo supposto a priori l'infinita derivabilità, che dunque segue anche per questa via, ricordando i risultati sulle serie di potenze (teorema II.2.10). Lo sviluppo sussiste in ogni cerchio di centro z_0 contenuto in Ω . I coefficienti della serie non dipendono dal raggio del cerchio (si tratta della serie di Taylor di punto iniziale z_0), quindi il raggio di convergenza è almeno pari alla distanza di z_0 dalla frontiera di Ω (è $+\infty$, nel caso $\Omega = \mathbb{C}$).



CAPITOLO IV

Proprietà delle funzioni analitiche

1. Zeri delle funzioni analitiche. Principi di identità

Sia f definita in Ω ; diremo che $z_0 \in \Omega$ è uno *zero* di f se in tale punto la funzione si annulla: $f(z_0) = 0$. Supponiamo ora f analitica in Ω , quindi indefinitamente derivabile. Diremo che z_0 è zero di ordine $N \in \mathbb{N}$ di f se

$$(1.1) \quad f(z_0) = \cdots = f^{(N-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(N)}(z_0) \neq 0,$$

cioè z_0 è zero di f , ma non annulla tutte le derivate, N essendo l'ordine della prima derivata di f diversa da 0 in z_0 ; uno zero di ordine 1 è detto anche *zero semplice*. Dunque, z_0 zero di ordine N di f significa che lo sviluppo di Taylor di f intorno a z_0 è

$$f(z) = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!} (z - z_0)^N + \frac{f^{(N+1)}(z_0)}{(N+1)!} (z - z_0)^{N+1} + \cdots,$$

essendo diverso da zero il coefficiente del primo termine.

ESEMPIO 1.1. Il punto $z_0 = 0$ è zero semplice della funzione $\sin z$, poiché $D \sin z|_{z=0} \neq 0$; lo sviluppo di Mac Laurin, com'è noto, è

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \cdots.$$

Il punto $z_0 = 0$ è zero doppio (di ordine 2) della funzione $f(z) = 1 - \cos z$, in quanto $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) \neq 0$; lo sviluppo di Mac Laurin è

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \frac{z^8}{40320} + \cdots.$$

Uno zero di un certo ordine $N \in \mathbb{N}$ sarà detto *zero di ordine finito*; diremo che z_0 è *zero di ordine infinito* se annulla f e tutte le derivate:

$$0 = f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n)}(z_0) = \cdots.$$

PROPOSIZIONE 1.2. Sia f analitica in un aperto Ω di \mathbb{C} e siano $z_0 \in \Omega$ e $N \in \mathbb{N}$. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

- (1) z_0 è zero di ordine N di f ;
- (2) intorno a z_0 risulta $f(z) = (z - z_0)^N \varphi(z)$, con φ analitica e priva di zeri;
- (3) $\frac{f(z)}{(z - z_0)^N}$ converge per $z \rightarrow z_0$ ad un valore non nullo.

Dim. Ci limitiamo a (1) \Rightarrow (2); le altre implicazioni seguono similmente. Sia z_0 zero di ordine N ; sviluppando f in serie di Taylor intorno a z_0 , in virtù delle (1.1), scriviamo

$$(1.2) \quad f(z) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = (z - z_0)^N \varphi(z),$$

dove

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n+N)}(z_0)}{(n+N)!} (z - z_0)^n$$

è una funzione definita intorno a z_0 , analitica e quindi in particolare continua in z_0 . Inoltre $\varphi(z_0) = \frac{f^{(N)}(z_0)}{N!} \neq 0$, quindi $\varphi(z) \neq 0$ in un intorno di z_0 .

ESEMPIO 1.3. Usando (3) \Rightarrow (1) della proposizione 1.2 è immediato verificare che $f(z) = (1 - \cos z^2) \sin(e^{z^3} - 1)$ ha in 0 uno zero di ordine 7.

COROLLARIO 1.4. *Uno zero di ordine finito è isolato, cioè esiste un suo intorno nel quale non cadono altri zeri della funzione.*

Ovviamente, se z_0 è zero di ordine infinito, f si annulla in un intorno: infatti

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = 0,$$

essendo per ipotesi i coefficienti della serie tutti nulli. Se Ω è connesso, in realtà la funzione è identicamente nulla. Precisamente, vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.5. *Se f è analitica nell'aperto connesso Ω ed ammette uno zero di ordine infinito, essa si annulla in ogni punto.*

Dim. Diciamo A l'insieme degli zeri di ordine infinito di f e $B = \Omega - A$ il complementare; dunque $z_0 \in B$ significa che tale punto non annulla f , o è zero di ordine finito. È facile convincersi che i due insiemi sono aperti. Questo vale per A , poiché per ogni suo punto, come visto, troviamo un intorno nel quale f è identicamente nulla, che è quindi formato da zeri di ordine infinito, cioè è contenuto in A . D'altra parte, se $z_0 \in B$, o $f(z_0) \neq 0$ e quindi per la continuità $f(z)$ rimane non nulla in un intorno, o z_0 è zero di ordine finito e quindi isolato: in ogni caso troviamo un intorno del punto in cui non cadono zeri di ordine infinito, cioè contenuto in B . Essendo evidentemente $\Omega = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$, per l'ipotesi di connessione di Ω uno tra i due insiemi è vuoto. Se f ha uno zero di ordine infinito, è $A \neq \emptyset$ e quindi necessariamente risulta $B = \emptyset$, cioè $\Omega = A$, vale a dire che ogni punto è zero (di ordine infinito).

Dal risultato precedente, segue il primo principio di identità.

TEOREMA 1.6 (I principio di identità delle funzioni analitiche). *Siano f e g funzioni analitiche in un aperto connesso. Se esiste un punto nel quale coincidono le due funzioni e ordinatamente tutte le derivate, le due funzioni coincidono ovunque.*

Dim. Per ipotesi, esiste z_0 in cui risulta $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Evidentemente, il caso $g = 0$ è contenuto nella proposizione 1.5. Il caso generale segue da questo particolare, ragionando sulla differenza $f - g$, per la quale z_0 è zero di ordine infinito.

Dal primo principio si ricava il secondo.

TEOREMA 1.7 (II principio di identità delle funzioni analitiche). *Siano f e g funzioni analitiche in un aperto connesso. Se l'insieme dei punti in cui le funzioni coincidono ammette un punto di accumulazione appartenente all'aperto, le due funzioni coincidono ovunque.*

Dim. Siano f e g funzioni analitiche in Ω aperto connesso. Per ipotesi, l'insieme

$$E = \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

ha un punto di accumulazione $z_0 \in \Omega$. Ovviamente E è l'insieme degli zeri della funzione differenza $h = f - g$, analitica in Ω . Il punto z_0 , essendo di analiticità e quindi di continuità, è zero di h . Esso non è isolato, in quanto per costruzione in ogni suo intorno cadono infiniti punti di E , cioè zeri di h . Pertanto z_0 è zero di ordine infinito e, in virtù del I principio (nella forma della proposizione 1.5), h è identicamente nulla, cioè f e g coincidono.

OSSERVAZIONE 1.8. L'ipotesi che z_0 appartenga a Ω è essenziale per la conclusione. Ad esempio, consideriamo la funzione $f(z) = \sin(1/z)$, analitica nell'aperto connesso $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$. L'insieme degli zeri è formato dai reciproci dei numeri $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, ed ammette $z_0 = 0$ come punto di accumulazione, che però non è di analiticità. Evidentemente f non è identicamente nulla in Ω .

Come conseguenza dei risultati precedenti, abbiamo il seguente principio.

TEOREMA 1.9 (Permanenza delle proprietà analitiche). *Una proprietà espressa da un'uguaglianza tra funzioni analitiche in un aperto connesso, che valga in un insieme dotato di punti di accumulazione appartenenti all'aperto, vale in tutto l'aperto.*

ESEMPIO 1.10. Per il II principio di identità esiste un'unica estensione dell'esponenziale come funzione intera.

ESEMPIO 1.11. A scopo illustrativo, consideriamo un'applicazione alle funzioni circolari. Quando abbiamo esteso seno e coseno al campo complesso, abbiamo osservato che continua a valere la relazione fondamentale

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

La verifica si ottiene con un calcolo diretto. Vogliamo ricavare tale relazione in applicazione del principio di permanenza delle proprietà analitiche. Osserviamo che essa consiste nell'uguaglianza tra le funzioni $f(z) = \cos^2 z + \sin^2 z$ e $g(z) = 1$, analitiche in \mathbb{C} . L'uguaglianza è nota per $z = x \in \mathbb{R}$, cioè nei punti dell'asse reale, e può essere estesa al piano complesso mediante il secondo principio di identità.

Come ulteriore applicazione, ricaviamo la formula di addizione del coseno:

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w.$$

Tale formula è ben nota per z e w reali. Fissato $w \in \mathbb{R}$, estendiamo la formula a $z \in \mathbb{C}$ mediante il principio di permanenza delle proprietà analitiche e, successivamente, mantenendo z fissato, allo stesso modo estendiamo la formula a $w \in \mathbb{C}$.

ESERCIZIO 1.12. Sia z_0 zero di ordine $N > 1$ di f . Osservare che z_0 è zero di ordine $N - 1$ della derivata f' .

ESERCIZIO 1.13. Mostrare che se z_0 è zero di ordine M di f e zero di ordine N di g , esso è zero di ordine $M + N$ del prodotto fg . Ad esempio, dire qual è l'ordine di $z_0 = 0$ come zero della funzione

$$f(z) = (e^z - 1)(1 - \cos z) \sin^2 z.$$

ESERCIZIO 1.14. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza ρ_0 tale che $0 < \rho_0 < +\infty$. Scelto z_1 nel cerchio di convergenza, $|z_1 - z_0| < \rho_0$, e detto ρ_1 il raggio di convergenza della serie di Taylor di punto iniziale z_1 della somma, mostrare le disuguaglianze

$$\rho_0 - |z_1 - z_0| \leq \rho_1 \leq \rho_0 + |z_1 - z_0|.$$

2. Proprietà di media e principio di massimo modulo

Come conseguenza della formula di Cauchy, ricaviamo la proprietà di media delle funzioni analitiche.

TEOREMA 2.1. *Sia f una funzione analitica nell'aperto Ω . Se il cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r è contenuto in Ω , risulta*

$$(2.1) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z) ds.$$

Osserviamo che nell'uguaglianza (2.1) la quantità $2\pi r$ è la lunghezza della circonferenza di centro z_0 e raggio r , alla quale è esteso l'integrale, quindi a secondo membro figura l'integrale diviso per la lunghezza, cioè la media integrale di f : essa uguaglia il valore di f nel centro.

Dim. Applichiamo la formula di Cauchy a f sul cerchio chiuso di centro z_0 e raggio r ; una rappresentazione parametrica della circonferenza è $z = z_0 + r e^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{jt})}{r e^{jt}} j r e^{jt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{jt}) dt = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} f(z) ds, \end{aligned}$$

poiché $r dt = ds$.

Mediante la proprietà di media, possiamo ricavare il seguente

TEOREMA 2.2 (Principio di massimo modulo). *Sia f olomorfa nell'aperto connesso Ω . Se f non è costante, $|f|$ è privo di massimi relativi.*

Dim. Mostriamo che, se $|f|$ ha un massimo relativo, f risulta costante. Sia dunque $z_0 \in \Omega$ punto di massimo relativo per $|f|$: esiste quindi un intorno di tale punto nel quale $|f|$ assume valori non superiori a $|f(z_0)|$, vale a dire che per $r > 0$ opportuno risulta

$$(2.2) \quad |z - z_0| < r \Rightarrow z \in \Omega \text{ e } |f(z)| \leq |f(z_0)|.$$

Per la proprietà di media, se $0 < \rho < r$ abbiamo

$$\int_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| ds = 2\pi \rho |f(z_0)| = \left| \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) ds \right| \leq \int_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| ds$$

e quindi

$$\int_{|z-z_0|=\rho} (|f(z)| - |f(z_0)|) ds \geq 0.$$

Poiché per (2.2) l'integrando è non-positivo, questo implica che esso è identicamente nullo, cioè $|f(z)|$ vale costantemente $|f(z_0)|$ sulla circonferenza di centro z_0 e raggio ρ . Per l'arbitrarietà di $\rho < r$, risulta $|f|$ costante nel cerchio di centro z_0 e raggio r . In virtù della proposizione II.1.5, f risulta costante in tale cerchio e quindi, per il secondo principio di identità, in Ω .

OSSERVAZIONE 2.3. In effetti si dimostra che, se f non costante è olomorfa in un aperto connesso Ω , essa è un'applicazione aperta, cioè trasforma sottoinsiemi aperti di Ω in aperti, quindi l'immagine di un intorno di z_0 contiene un intorno di $f(z_0)$, nel quale cadono punti $w = f(z)$ tali che $|f(z)| > |f(z_0)|$. Questo implica che $|f|$ sia priva di massimi relativi.

Dal teorema 2.2 ricaviamo subito

TEOREMA 2.4. *Se f è continua in un dominio limitato ed olomorfa nei punti interni, il massimo di $|f|$ è assunto sulla frontiera.*

Osserviamo che il massimo esiste essendo $|f|$ continua su un compatto. Detto D il dominio, la tesi vuol dire che risulta $\forall z \in D$

$$|f(z)| \leq \max_{FD} |f|.$$

3. Ulteriori proprietà

Se f è una funzione intera, possiamo svilupparla in serie di Mac Laurin:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$$

dove

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

con $r > 0$ arbitrario. Ne segue

$$(3.1) \quad |a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right| ds \leq \frac{M_r}{r^n},$$

essendo $M_r = \max_{|z|=r} |f(z)|$. (Queste sono dette *disuguaglianze di Cauchy*.) Una immediata applicazione delle (3.1) è il seguente

TEOREMA 3.1 (di Liouville). *Ogni funzione intera limitata è costante.*

Dim. Dalle (3.1) passando al limite per $r \rightarrow +\infty$, otteniamo $a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, quindi $f(z) = a_0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Il teorema di Liouville consente di dimostrare facilmente il seguente

TEOREMA 3.2 (fondamentale dell'Algebra). *Nel campo complesso ogni polinomio di grado positivo ha almeno uno zero.*

Dim. Sia P un polinomio di grado positivo. Per assurdo, supponiamo $P(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Ne segue che $f = 1/P$ è una funzione intera. Inoltre, essendo $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$, risulta $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ e f è limitata. Per il teorema di Liouville, f è costante, quindi tale risulta pure P , contro il fatto che esso ha grado positivo.

4. Sviluppo di Laurent

Nel paragrafo III.3 abbiamo mostrato la sviluppabilità in serie di Taylor delle funzioni olomorfe, lo sviluppo valendo in ogni cerchio contenuto nell'aperto di olomorfia. Otterremo in questo paragrafo uno sviluppo più generale, che consentirà di rappresentare una funzione olomorfa mediante una *serie bilatera* di potenze, anche in situazioni in cui lo sviluppo di Taylor non è applicabile.

Una serie bilatera di potenze è una serie del tipo

$$(4.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

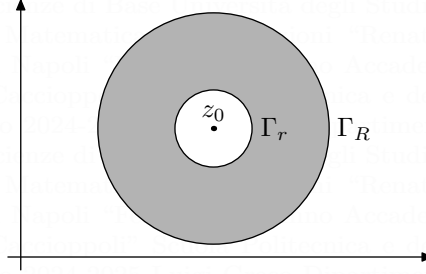
dove $z_0 \in \mathbb{C}$ è fissato e i coefficienti c_n sono assegnati numeri complessi. Compagiono dunque in generale anche potenze di $z - z_0$ con esponente negativo; se $c_n = 0$, $\forall n < 0$, la serie si riduce ad una ordinaria serie di potenze. Diremo che la serie (4.1) converge se risultano convergenti separatamente le due serie

$$(4.2) \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

e in tal caso porremo chiaramente

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \right).$$

Osserviamo che la seconda serie in (4.2) è una serie di potenze di punto iniziale z_0 , quindi converge in un cerchio di centro z_0 , cioè per $|z - z_0| < R$, con $R \in]0, +\infty]$. La prima serie in (4.2) è una serie di potenze in $1/(z - z_0)$, quindi converge per $|z - z_0| > r$, dove $r \in [0, +\infty[$; noi supporremo $r < R$, in modo che la serie (4.1) converga nella corona circolare $r < |z - z_0| < R$.



Più precisamente, le due serie (4.2) convergono totalmente in ogni corona circolare del tipo $r' \leq |z - z_0| \leq R'$, con $r < r' < R' < R$, e quindi la (4.1) può essere integrata termine a termine. Una serie bilatera può essere altresì derivata termine a termine nei punti interni alla corona circolare in cui converge.

Mostriamo la possibilità di sviluppare in serie bilatera di potenze una funzione olomorfa in una corona circolare.

TEOREMA 4.1 (Sviluppo di Laurent). *Sia f olomorfa nella corona circolare di centro z_0 determinata dalle disuguaglianze $r \leq |z - z_0| \leq R$, dove $0 < r < R < +\infty$. In questa ipotesi, esistono dei coefficienti c_n complessi in modo che risulti*

$$(4.3) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R.$$

Ricordiamo che l'ipotesi significa che esiste un aperto Ω contenente la corona circolare chiusa (cioè comprendente le due circonferenze che la delimitano), nel quale f è olomorfa.

Dim. La dimostrazione è analoga a quella del teorema III.3.3. Diciamo D la corona circolare, Γ_r e Γ_R le due circonferenze che la delimitano e rappresentiamo f nei punti interni mediante la formula di Cauchy. Osserviamo che $+FD = \Gamma_R \cup (-\Gamma_r)$, quindi per $r < |z - z_0| < R$ abbiamo

$$(4.4) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{+FD} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Procedendo esattamente come per la (III.3.7), il primo integrale nell'ultimo membro si scrive

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

avendo posto $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$$(4.5) \quad a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Per trattare il secondo integrale nell'ultimo membro della (4.4), procediamo analogamente. Essendo in tale integrale $|\zeta - z_0| = r < |z - z_0|$, possiamo scrivere

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0 - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}}$$

e quindi, posto $n = -(m+1)$, ovvero $m = -(n+1)$,

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Dunque

$$-\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z - z_0)^n,$$

dove per $n = -1, -2, \dots$

$$(4.6) \quad b_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Pertanto otteniamo l'uguaglianza (4.3) ponendo $c_n = a_n$, per $n \geq 0$, e $c_n = b_n$, per $n < 0$.

Osserviamo che le formule (4.5) e (4.6) sono molto simili, l'unica differenza essendo nella circonferenza su cui si integra. Poiché in entrambi i casi l'integrando è olomorfo nella corona circolare, in ciascun integrale possiamo sostituire la circonferenza di integrazione con un'altra Γ , di centro z_0 , intermedia, cioè di raggio ρ con $r \leq \rho \leq R$, ottenendo $\forall n \in \mathbb{Z}$

$$(4.7) \quad c_n = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Quando faremo riferimento allo sviluppo di Laurent di f nella corona circolare, ci riferiremo all'uguaglianza (4.3), con i coefficienti dati dalle (4.7). In effetti, lo sviluppo di Laurent è l'unico mediante il quale si può rappresentare una funzione olomorfa in una corona circolare in serie bilatera, come si ricava dalla seguente

PROPOSIZIONE 4.2 (Principio di identità delle serie bilatere di potenze). *Se le due serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n,$$

convergono in una stessa corona circolare di centro z_0 (dotata di punti interni) e hanno la medesima somma, esse sono identiche, cioè $\forall n \in \mathbb{Z}$ risulta $c_n = d_n$.

Dim. Poniamo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^n,$$

per $r \leq |z - z_0| \leq R$, con $0 < r < R < +\infty$ opportuni, e facciamo vedere che i coefficienti d_n coincidono con i coefficienti c_n dello sviluppo di Laurent di f nella corona, dati dalle (4.7). Infatti, per $k \in \mathbb{Z}$ fissato, abbiamo

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z - z_0)^{n-k-1} dz \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz = d_k \end{aligned}$$

in quanto (cfr. esempio III.1.1)

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (z - z_0)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k \\ 1, & \text{se } n = k \end{cases}$$

Esaminiamo ora alcune situazioni frequenti in cui useremo lo sviluppo di Laurent per studiare una funzione f olomorfa intorno ad un punto z_0 .

Il primo caso che consideriamo è quello in cui f è olomorfa in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$. In tal caso, possiamo considerare una corona circolare di centro z_0 descritta dalle disuguaglianze $r \leq |z - z_0| \leq R$, con R fissato e $r > 0$ arbitrariamente piccolo, e scrivere lo sviluppo di Laurent di f in tale corona. Osserviamo che i coefficienti non dipendono da r . Inoltre, per il teorema di Cauchy, risulta $c_n = 0$, per $n < 0$, essendo per tali indici le funzioni

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = f(\zeta) (\zeta - z_0)^{-n-1}$$

olomorfe intorno a z_0 , e lo sviluppo si riduce a quello di Taylor. (Questo segue pure in base al principio di identità delle serie bilatere, proposizione 4.2.)

Il caso successivo è quello in cui f è olomorfa in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$, escluso il punto z_0 , cioè in un cerchio bucato privandolo del centro. In questo caso, con le corone circolari del tipo $r \leq |z - z_0| \leq R$ per $r \rightarrow 0$ invadiamo tutto il cerchio bucato $0 < |z - z_0| \leq R$. Troviamo pertanto che lo sviluppo vale in tale insieme e, come vedremo, permetterà di studiare la funzione intorno a z_0 .

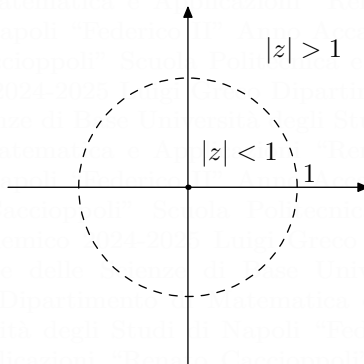
Un altro caso è quello di una funzione f olomorfa in un intorno del punto ∞ . Consideriamo ora corone circolari di centro 0, del tipo $r \leq |z| \leq R$, con $r > 0$ fissato e $R \rightarrow +\infty$. In questo modo otteniamo lo sviluppo per $r \leq |z|$, che useremo per studiare f intorno a ∞ .

Una funzione olomorfa è rappresentabile mediante serie di Laurent in ogni corona circolare contenuta nell'aperto di olomorfia. Fissato il centro, per una stessa funzione possono esserci diverse corone circolari con tale proprietà.

ESEMPIO 4.3. La funzione

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

è olomorfa in $\mathbb{C} - \{1\}$; può essere sviluppata in serie di Laurent in due corone circolari di centro 0: a) il cerchio $|z| < 1$, b) l'insieme $|z| > 1$.



In entrambi i casi, lo sviluppo cercato è una serie di potenze in z (eventualmente con esponenti anche negativi).

a) Essendo f olomorfa nel cerchio $|z| < 1$, lo sviluppo di Laurent coincide con quello di Taylor. Per scriverlo, basta ricordare la serie geometrica:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots.$$

b) Anche per $|z| > 1$ possiamo utilizzare la serie geometrica, ma di ragione $1/z$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots - \frac{1}{z^n} - \cdots. \end{aligned}$$

La funzione

$$h(z) = \frac{e^z}{z}$$

è olomorfa nell'insieme $\mathbb{C} - \{0\}$, che può essere considerato una corona circolare di centro 0. Per scrivere lo sviluppo di Laurent, è sufficiente ricordare lo sviluppo di Mac Laurin della funzione esponenziale:

$$h(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Questo è lo sviluppo di Laurent di h sia intorno a 0 che intorno a ∞ .

5. Singolarità isolate

Diremo che $z_0 \in \mathbb{C}$ è una *singolarità isolata* della funzione f se f è olomorfa in un intorno di z_0 , escluso il punto; vale a dire che esiste $R > 0$ tale che f sia olomorfa per $0 < |z - z_0| < R$.

Diremo che la singolarità isolata z_0 di f è *eliminabile* se f ha un prolungamento olomorfo in z_0 , cioè esiste una funzione g , olomorfa in un intorno di z_0 (incluso z_0), coincidente con f nei punti di tale intorno distinti da z_0 .

ESEMPIO 5.1. La funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ha in $z_0 = 0$ una singolarità isolata; essa è eliminabile. È ben noto che f si prolunga per continuità in 0, assegnandole in tale punto il valore 1. Per rendersi conto che il prolungamento per continuità è olomorfo in 0, basta usare lo sviluppo di Mac Laurin di $\sin z$:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \\ &= 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots \end{aligned}$$

La serie di potenze ha raggio di convergenza $+\infty$ e la sua somma g , che è una funzione intera, coincide con f in $\mathbb{C} - \{0\}$.

ESERCIZIO 5.2. Verificare che le funzioni

$$f_1(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

presentano entrambe una singolarità eliminabile in $z_0 = 0$.

Il seguente risultato fornisce alcune caratterizzazioni del fatto che una singolarità isolata sia eliminabile.

PROPOSIZIONE 5.3. *Sia z_0 una singolarità isolata della funzione f . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (1) z_0 è singolarità eliminabile;
- (2) f converge in z_0 ;
- (3) f è limitata intorno a z_0 ;
- (4) nello sviluppo di Laurent di f intorno a z_0 sono nulli i coefficienti c_n con indice $n < 0$, cioè lo sviluppo consiste in una ordinaria serie di potenze.

Dim. È chiaro che (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3). Mostriamo l'implicazione (3) \Rightarrow (4). Supponiamo quindi che esistano $R > 0$ e $M > 0$ tali che $|f(z)| \leq M$, per $0 < |z - z_0| \leq R$; scegliamo $\rho \in]0, R[$ e consideriamo la circonferenza $\Gamma = \Gamma_\rho$ di centro z_0 e raggio ρ nella formula (4.7) per calcolare i coefficienti c_n dello sviluppo di Laurent. In tal modo per $n < 0$ otteniamo

$$|c_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\rho} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} ds \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \rho \frac{M}{\rho^{n+1}} = M \rho^{-n} \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

Mostriamo l'implicazione (4) \Rightarrow (1). Per ipotesi, lo sviluppo di Laurent è privo di potenze con esponente negativo; per $0 < |z - z_0| < R$ (con $R > 0$ opportuno)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

La serie a secondo membro converge per $|z - z_0| < R$, compreso z_0 , e la sua somma fornisce il prolungamento di f olomorfo in z_0 .

Nel seguito, nel caso di una singolarità eliminabile noi prolungheremo la funzione nel punto in modo da ottenere una funzione olomorfa. Consideriamo ora le singolarità isolate non eliminabili. Le classificheremo in base al comportamento della funzione intorno ad esse. Per studiare tale comportamento, useremo lo sviluppo di Laurent. Sia dunque z_0 una singolarità isolata della funzione f ; scriviamo lo sviluppo di Laurent di f intorno a z_0 separando le potenze con esponente negativo e quelle con esponente non-negativo:

$$(5.1) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

Le potenze con esponente negativo sono singolari in z_0 ; chiamiamo *caratteristica*, o *parte singolare*, di f intorno a z_0 la somma:

$$(5.2) \quad S(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n,$$

mentre chiamiamo *parte olomorfa* di f intorno a z_0 :

$$(5.3) \quad O(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Osserviamo che la serie (5.2) converge in $\mathbb{C} - \{z_0\}$, la somma S essendo olomorfa in tale insieme. La serie (5.3) converge per $|z - z_0| < R$ (z_0 compreso) e la somma O è olomorfa; lo sviluppo di Laurent (5.1) si riscrive

$$f(z) = S(z) + O(z).$$

Il comportamento di f intorno a z_0 dipende dalla parte singolare S .

DEFINIZIONE 5.4. Diremo che z_0 è un *polo* di f se la serie (5.2) si riduce ad una somma finita, cioè solo un numero finito di coefficienti c_n con $n < 0$ sono diversi da 0 (non sono tutti nulli, poiché z_0 non è eliminabile). Precisamente, diremo che z_0 è polo di ordine $N \in \mathbb{N}$ se $c_{-N} \neq 0$, mentre $c_{-n} = 0$, $\forall n > N$. Un polo di ordine 1 è detto anche *polo semplice*.

Diremo che z_0 è una *singolarità essenziale* se infiniti c_n con indice $n < 0$ sono diversi da 0. In altri termini, una singolarità essenziale è una singolarità isolata che non sia eliminabile, né polo.

Dunque, se z_0 è polo di ordine N , la parte singolare è un polinomio di grado N in $1/(z - z_0)$:

$$(5.4) \quad S(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \cdots + \frac{c_{-N}}{(z - z_0)^N},$$

mentre nel caso di singolarità essenziale essa è effettivamente una serie con infiniti termini non nulli.

ESEMPIO 5.5. Consideriamo le funzioni dell'esempio 4.3. f ha in $z_0 = 1$ un polo semplice; lo sviluppo di Laurent intorno a 1 è

$$f(z) = \frac{-1}{z - 1}.$$

La funzione h presenta in $z_0 = 0$ un polo semplice.

Vediamo qualche altro esempio. La funzione

$$(5.5) \quad g(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1}$$

ha in 1 e 2 poli semplici. Ad esempio, scriviamo lo sviluppo di Laurent intorno a 1, quindi per $0 < |z - 1| < 1$; essendo

$$\frac{1}{2 - z} = \frac{1}{1 - (z - 1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z - 1)^n, \quad |z - 1| < 1,$$

abbiamo

$$g(z) = \frac{-1}{z - 1} - \sum_{n=0}^{+\infty} (z - 1)^n.$$

Dunque la parte singolare e la parte olomorfa intorno a 1 sono rispettivamente

$$S(z) = \frac{-1}{z - 1}, \quad O(z) = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z - 1)^n = \frac{1}{z - 2}.$$

La funzione

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$$

ha in $z_0 = 0$ un polo di ordine 2.

La funzione

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1/z)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(-n)!}$$

ha in $z_0 = 0$ una singolarità essenziale.

ESERCIZIO 5.6. Determinare lo sviluppo di Laurent, la parte singolare e la parte olomorfa intorno a 2 della funzione g definita in (5.5).

ESERCIZIO 5.7. Mostrare che, se $z_0 \in \mathbb{C}$ è polo di ordine N di f , esso è polo di ordine $N + 1$ di f' . Se z_0 è singolarità essenziale di f , lo è anche di tutte le sue derivate.

Vediamo ora alcune caratterizzazioni.

PROPOSIZIONE 5.8. *La singolarità isolata z_0 di f è un polo se e solo se f diverge in z_0 :*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Dim. Se z_0 è polo di ordine $N \in \mathbb{N}$, intorno a z_0 abbiamo

$$(5.6) \quad f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^N} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n-N} (z - z_0)^n, \quad z \neq z_0.$$

La somma $\varphi(z)$ della serie di potenze a secondo membro è olomorfa intorno a z_0 , compreso il punto, con $\varphi(z_0) = c_{-N} \neq 0$, quindi f diverge in z_0 . Supponiamo f divergente. Poiché $|f|$ diverge positivamente in z_0 , intorno a z_0 f è diversa da 0 e possiamo considerare $g = 1/f$ (z_0 è escluso perché f non è definita in tale punto). Inoltre g è infinitesima in z_0 , quindi ponendo $g(z_0) = 0$ otteniamo il prolungamento per continuità in z_0 ; per la proposizione 5.3, esso è olomorfo e la funzione g ha uno zero isolato, quindi di ordine finito, in z_0 . Detto N l'ordine, possiamo scrivere $g(z) = (z - z_0)^N \varphi(z)$, con φ funzione olomorfa e non nulla intorno a z_0 . Pertanto $1/\varphi$ è analitica e sviluppandola in serie di potenze intorno a z_0 abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^N} \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^N} = \frac{a_0}{(z - z_0)^N} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{N-1}} + \dots$$

Questo è lo sviluppo di Laurent di f intorno a z_0 ; per concludere, osserviamo che $a_0 = 1/\varphi(z_0) \neq 0$.

Nella caratterizzazione precedente non interviene esplicitamente l'ordine del polo, come invece accade nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 5.9. *Sia z_0 una singolarità isolata della funzione f . Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (1) z_0 è polo di ordine N ;
- (2) $(z - z_0)^N f(z)$ converge in z_0 ad un valore non nullo;
- (3) f è non nulla intorno a z_0 e la funzione

$$g(z) = \begin{cases} 1/f(z), & z \neq z_0 \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$$

ha in z_0 uno zero di ordine N ;

- (4) esiste una funzione φ analitica e priva di zeri in un intorno di z_0 , tale che per $z \neq z_0$ risulti $f(z) = (z - z_0)^{-N} \varphi(z)$.

ESERCIZIO 5.10. Ragionando direttamente con gli sviluppi di Laurent, o usando la proposizione 5.9 e l'esercizio 1.13, provare che, se z_0 è polo di ordine M di f e di ordine N di g , esso è polo di ordine $M + N$ del prodotto fg . Cosa si può dire se z_0 è polo di ordine M di f e zero di ordine N di g ?

Dalle caratterizzazioni precedenti, segue una caratterizzazione per le singolarità essenziali.

PROPOSIZIONE 5.11. *La singolarità isolata z_0 è essenziale se e solo se f non ammette limite in z_0 .*

Più precisamente, se I è un qualsiasi intorno della singolarità essenziale z_0 nel quale f è olomorfa (escluso z_0), risulta

$$(5.7) \quad \sup_{z \in I - \{z_0\}} |f(z)| = +\infty, \quad \inf_{z \in I - \{z_0\}} |f(z)| = 0.$$

Infatti, se l'estremo superiore fosse finito, f sarebbe limitata e z_0 sarebbe una singolarità eliminabile, per la proposizione 5.3. Se l'estremo inferiore fosse positivo, f sarebbe diversa da zero intorno a z_0 e $1/f$ sarebbe limitata, quindi prolungabile come funzione olomorfa in z_0 ; ne seguirebbe z_0 singolarità eliminabile o polo di f , contro l'ipotesi. Se z_0 è singolarità essenziale di f , lo è anche della funzione $f - w$, $\forall w \in \mathbb{C}$, quindi, oltre le (5.7), abbiamo

$$(5.8) \quad \inf_{z \in I - \{z_0\}} |f(z) - w| = 0.$$

Segue il

TEOREMA 5.12 (di Casorati-Weierstrass). *In ogni intorno di una singolarità essenziale, una funzione assume valori arbitrariamente prossimi a qualsiasi numero complesso fissato.*

Tale teorema mostra il comportamento estremamente irregolare di una funzione nell'intorno di una sua singolarità essenziale. In effetti, sussiste un risultato più preciso, che ci limitiamo ad enunciare.

TEOREMA 5.13 (di Picard). *In ogni intorno di una singolarità essenziale, una funzione assume come valori tutti i numeri complessi, con al più un'unica eccezione.*

Che un valore eccezionale possa effettivamente presentarsi è mostrato dalla funzione $e^{1/z}$, che non si annulla.

ESEMPIO 5.14. In relazione a quanto detto nell'esercizio 5.10, è interessante osservare che, invece, se z_0 è singolarità essenziale delle funzioni f e g , non è detto che lo sia pure del prodotto fg . Considerare il caso delle funzioni $f(z) = e^{1/z}$ e $g(z) = e^{-1/z}$, con $z_0 = 0$.

Siano ora f e g due funzioni olomorfe in un intorno di z_0 (compreso), non identicamente nulle, ma con $g(z_0) = 0$. Pertanto z_0 è zero isolato di g e possiamo considerare la funzione rapporto

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

intorno a z_0 , escluso però il punto z_0 che risulta quindi una singolarità isolata. Vogliamo studiare tale singolarità. Sia z_0 zero di ordine $M \in \mathbb{N}_0$ di f ($M = 0$ significa che z_0 non è zero) e di ordine $N \in \mathbb{N}$ di g . Valgono dunque i seguenti risultati:

- se $M \geq N$, il punto z_0 è una singolarità eliminabile; precisamente, se $M > N$ il punto è uno zero di ordine $M - N$ del prolungamento;
- se $M < N$, il punto z_0 è un polo di ordine $N - M$.

Per la verifica, in base alle ipotesi scriviamo

$$f(z) = (z - z_0)^M \varphi(z), \quad g(z) = (z - z_0)^N \psi(z),$$

con φ e ψ funzioni olomorfe e diverse da zero intorno a z_0 . Pertanto

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{M-N} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

È allora chiaro il risultato per $M \geq N$. Nel caso $M < N$, sviluppiamo in serie di potenze intorno a z_0 la funzione φ/ψ :

$$h(z) = (z - z_0)^{M-N} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_0}{(z - z_0)^{N-M}} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{N-M-1}} + \dots$$

e osserviamo che $a_0 = \varphi(z_0)/\psi(z_0) \neq 0$. Possiamo anche usare la proposizione 5.9.

ESEMPIO 5.15. Esaminare alla luce del risultato precedente la funzione dell'esempio 5.1 e quelle dell'esercizio 5.2. Inoltre studiare le funzioni

$$h_1(z) = \frac{\sin z}{1 - \cos z}, \quad h_2(z) = \frac{e^z - 1}{\sin z}.$$

ESEMPIO 5.16. Se f è olomorfa e non identicamente nulla, l'espressione

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \log f(z)$$

si dice *derivata logaritmica* di f . Se il punto z_0 è uno zero (isolato) di f , esso è polo semplice della derivata logaritmica. Se z_0 è un polo di f , esso è uno zero di $g = 1/f$ (proposizione 5.9). Essendo $g'/g = -f'f'/f^2 = -f'/f$ la derivata logaritmica di g , anche in questo caso z_0 è polo semplice della derivata logaritmica di f .

6. Olomorfia e singolarità all' ∞

Sia f una funzione olomorfa intorno all' ∞ ; possiamo quindi rappresentarla in serie di Laurent

$$(6.1) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n.$$

Per $z \rightarrow \infty$, sono convergenti le potenze con esponente non-positivo, mentre le altre risultano divergenti. Chiameremo dunque *parte olomorfa* di f intorno a ∞ la somma delle potenze con esponente non-positivo in (6.1):

$$O(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n,$$

e chiameremo *caratteristica*, o *parte singolare*, di f intorno a ∞ la somma delle potenze con esponente positivo:

$$S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n.$$

Diremo che f è *olomorfa* in ∞ se $S \equiv 0$, cioè se risulta $c_n = 0$, $\forall n > 0$; in tal caso, porremo $f(\infty) = c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$. Diremo che ∞ è *polo di ordine* $N \in \mathbb{N}$ se risulta $c_N \neq 0$ e $c_n = 0$, $\forall n > N$; pertanto l'uguaglianza (6.1) si riduce a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n + c_1 z + \cdots + c_N z^N.$$

Diremo che ∞ è una singolarità essenziale se infiniti coefficienti c_n con $n > 0$ sono diversi da 0.

OSSERVAZIONE 6.1. Studiare f intorno all' ∞ equivale a studiare $g(z) = f(1/z)$ intorno a 0.

Valgono caratterizzazioni analoghe a quelle viste nel caso di un punto al finito. Ad esempio, l'olomorfia all' ∞ equivale sia alla convergenza all' ∞ , che alla limitatezza in un intorno dell' ∞ ; in base a questo, il teorema 3.1 di Liouville si può enunciare nel modo seguente: “Ogni funzione olomorfa in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è costante”.

ESEMPIO 6.2. Sia $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ una funzione razionale, rapporto tra i polinomi P , di grado M , e Q , di grado N . Essa è olomorfa all' ∞ se $M \leq N$; ha un polo di ordine $M - N$ se $M > N$.

Le funzioni e^z , $\sin z$, $\cos z$, hanno nel punto ∞ una singolarità essenziale.

ESERCIZIO 6.3. Sia f una funzione intera. Se ∞ è un polo di ordine N , f è un polinomio di grado N .

ESERCIZIO 6.4. Sia f una funzione con un numero finito di singolarità in $\hat{\mathbb{C}}$. Mostrare che f differisce per una costante dalla somma delle caratteristiche nei punti di singolarità. (Suggerimento: osservare che la differenza è priva di singolarità in $\hat{\mathbb{C}}$ e applicare il teorema di Liouville.)

CAPITOLO V

Residui e applicazioni

1. Residui

Siano $z_0 \in \mathbb{C}$ e f una funzione olomorfa in un intorno di z_0 , escluso al più z_0 . Si chiama *residuo* di f in z_0 la quantità

$$(1.1) \quad R[z_0] = R_f[z_0] = R[z_0; f] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) dz,$$

essendo Γ una circonferenza di centro z_0 contenuta nell'intorno. Osserviamo innanzitutto che, per il teorema di Cauchy, l'integrale in (1.1) non dipende da Γ . È chiaro inoltre che, se f è olomorfa anche in z_0 , il residuo è nullo. Confrontando (1.1) con le formule (IV.4.7) che definiscono i coefficienti dello sviluppo di Laurent intorno a z_0 , vediamo che risulta

$$(1.2) \quad R[z_0] = c_{-1}.$$

ESEMPIO 1.1. Ricordando lo sviluppo di Laurent della funzione $f(z) = 1/(1-z)$ intorno a $z_0 = 1$, vediamo subito che il residuo è $R_f[1] = -1$.

La funzione $g(z) = z^{-2}$ ha residuo nullo in $z_0 = 0$, ma non è olomorfa in tale punto, che è un polo doppio.

Sia ora f olomorfa intorno a ∞ . Si dice *residuo nel punto all'∞* di f la quantità

$$(1.3) \quad R[\infty] = R_f[\infty] = R[\infty; f] = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\Gamma} f(z) dz,$$

dove Γ è una circonferenza di centro 0 contenuta nell'intorno; l'orientamento scelto è quello negativo (orario), che le compete come frontiera di un intorno di ∞ . Vediamo che risulta

$$(1.4) \quad R[\infty] = -c_{-1},$$

dove c_{-1} è coefficiente dello sviluppo di Laurent di f intorno a ∞ . Osserviamo che c_{-1} è, nel caso del punto ∞ , un coefficiente della parte olomorfa; in effetti, può risultare $R_f[\infty] \neq 0$ anche se f è olomorfa in ∞ .

ESEMPIO 1.2. La funzione $f(z) = 1/z$ è olomorfa all'∞ e risulta $f(\infty) = 0$, ma $R_f[\infty] = -1$.

Riguardo al calcolo del residuo nel punto all'∞, diamo i seguenti risultati.

LEMMA 1.3. *Sia f olomorfa intorno a ∞ .*

- *Se $f(z)$ converge per $z \rightarrow \infty$, cioè f è olomorfa anche all'∞, risulta*

$$R[\infty] = \lim_{z \rightarrow \infty} z[f(\infty) - f(z)].$$

In particolare, se $z f(z)$ converge per $z \rightarrow \infty$, è $f(\infty) = 0$ e

$$R[\infty] = - \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z).$$

- Il calcolo del residuo di f all' ∞ equivale a quello del residuo della funzione

$$g(z) = -f\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2}$$

nel punto 0, cioè risulta $R_f[\infty] = R_g[0]$.

OSSERVAZIONE 1.4. Ovviamente $R[\infty]$ non dipende da $\sum_0^{+\infty} c_n z^n$ nello sviluppo di Laurent. Ad esempio, se $f(z) = \mathcal{R}(z) = P(z)/Q(z)$ è una funzione razionale, effettuando la divisione tra P e Q come nella (3.2) che segue, troviamo

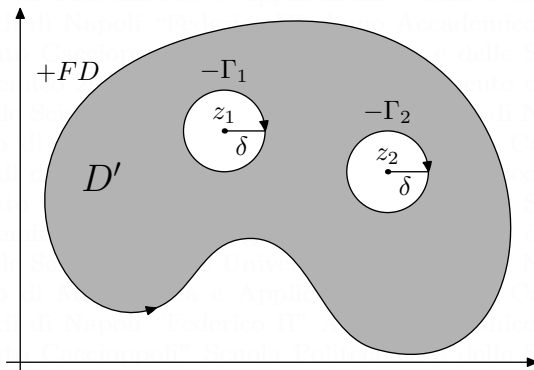
$$R[\infty; f] = R[\infty; R/Q].$$

Vediamo due teoremi fondamentali per il seguito.

TEOREMA 1.5 (I teorema dei residui). *Se f è olomorfa nel dominio regolare D , escluso un numero finito di punti interni z_1, \dots, z_n , risulta*

$$\int_{+FD} f(z) dz = 2\pi j (R[z_1] + \dots + R[z_n]).$$

Dim. Scegliamo $\delta > 0$ in modo che i cerchi chiusi di raggio δ e centri z_1, \dots, z_n siano a due a due disgiunti e contenuti internamente a D , e consideriamo il dominio D' ottenuto privando D dei punti interni a tali cerchi, in modo che f sia olomorfa in D' .



Applichiamo il teorema III.2.1 di Cauchy a f in D' ; a tal fine, osserviamo che, dette $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ le circonferenze che delimitano i cerchi, risulta

$$+FD' = +FD \cup (-\Gamma_1) \cup \dots \cup (-\Gamma_n).$$

Pertanto

$$0 = \int_{+FD} f(z) dz - \int_{\Gamma_1} f(z) dz - \dots - \int_{\Gamma_n} f(z) dz,$$

ovvero

$$\int_{+FD} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz$$

e per concludere basta riconoscere che risulta

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = 2\pi j R[z_1], \dots, \int_{\Gamma_n} f(z) dz = 2\pi j R[z_n].$$

TEOREMA 1.6 (II teorema dei residui). *Se f è olomorfa in \mathbb{C} , escluso un numero finito di punti z_1, \dots, z_n , risulta*

$$R[z_1] + \dots + R[z_n] + R[\infty] = 0.$$

Dim. Sia D un cerchio di centro 0 e raggio maggiore di $\max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$, in modo che z_1, \dots, z_n siano interni, e applichiamo il I teorema dei residui:

$$\int_{+FD} f(z) dz = 2\pi j (R[z_1] + \dots + R[z_n]).$$

È sufficiente allora osservare che risulta

$$\int_{+FD} f(z) dz = -2\pi j R[\infty].$$

ESEMPIO 1.7. Verifichiamo la tesi del II teorema dei residui nel caso della funzione

$$(1.5) \quad \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1},$$

che ha poli semplici nei punti 1 e 2 ed è olomorfa all' ∞ . Da (1.5) ricaviamo $R[1] = -1$, $R[2] = 1$, mentre usando il lemma 1.3 troviamo $R[\infty] = 0$ e quindi

$$R[1] + R[2] + R[\infty] = 0.$$

OSSERVAZIONE 1.8. L'enunciato del I teorema dei residui estende quello del teorema di Cauchy, che riguarda il caso in cui non ci siano singolarità. Il I teorema generalizza inoltre la formula di Cauchy, in quanto, se f è olomorfa, la funzione $g: z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$ ha in z_0 residuo pari a $f(z_0)$; per vedere ciò, basta sviluppare in serie di Taylor f :

$$\frac{f(z)}{z - z_0} = \frac{f(z_0)}{z - z_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1},$$

ottenendo così lo sviluppo di Laurent intorno a z_0 .

2. Calcolo del residuo nei poli

Nelle applicazioni, sarà fondamentale per calcolare i residui avere dei procedimenti che non richiedano di valutare l'integrale che compare nella definizione, cfr. (1.1) e (1.3). È possibile dare metodi elementari per il calcolo del residuo nei poli. Per cominciare, supponiamo $z_0 \in \mathbb{C}$ polo semplice di f . Dunque, la parte singolare di f intorno al punto si riduce ad un unico termine:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + O(z),$$

essendo O la parte olomorfa. Ne ricaviamo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (c_{-1} + (z - z_0) O(z)) = c_{-1} + 0 = c_{-1}$$

e quindi per (1.2) abbiamo subito

LEMMA 2.1. *Se z_0 è polo semplice di f , vale la formula*

$$(2.1) \quad R_f[z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

È frequente l'uso della formula precedente quando f è espressa come rapporto di funzioni olomorfe:

$$(2.2) \quad f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}.$$

In questo caso (2.1) si particolarizza come segue.

LEMMA 2.2. *Se f è espressa mediante la (2.2), con z_0 zero semplice di B , risulta*

$$(2.3) \quad R_f[z_0] = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$

Dim. Osserviamo che $B'(z_0) \neq 0$, quindi il secondo membro di (2.3) è definito, e z_0 è polo semplice di f se $A(z_0) \neq 0$, o singolarità eliminabile se $A(z_0) = 0$. Per verificare la formula, scriviamo

$$(z - z_0) f(z) = (z - z_0) \frac{A(z)}{B(z)} = A(z) \frac{z - z_0}{B(z) - B(z_0)}$$

e passiamo al limite per $z \rightarrow z_0$ usando (2.1) a primo membro e osservando che nell'ultimo membro figura il reciproco del rapporto incrementale di B in z_0 .

OSSERVAZIONE 2.3. Benché la formula sia valida, se $A(z_0) = 0$ la funzione f ha prolungamento olomorfo in z_0 , dunque il residuo è banalmente nullo e quindi il ricorso alla (2.3) è superfluo.

ESEMPIO 2.4. Per calcolare il residuo della funzione

$$\frac{e^z}{\sin z}$$

in 0, possiamo usare (2.3):

$$R[0] = \left. \frac{e^z}{\cos z} \right|_{z=0} = 1.$$

Nell'applicare (2.3) la scelta delle funzioni A e B non è unica. Calcoliamo ad esempio il residuo in $z_0 = 0$ della funzione

$$\frac{z^2 + z + 2}{\cos z (z^2 - z)}.$$

Una scelta naturale è $A(z) = z^2 + z + 2$ e $B(z) = \cos z (z^2 - z)$:

$$\frac{A(z)}{B'(z)} = \frac{z^2 + z + 2}{-\sin z (z^2 - z) + \cos z (2z - 1)}.$$

La scelta $A(z) = \frac{z^2 + z + 2}{\cos z}$ e $B(z) = z^2 - z$ porta una leggera semplificazione nel calcolo della derivata:

$$\frac{A(z)}{B'(z)} = \frac{z^2 + z + 2}{\cos z} \cdot \frac{1}{2z - 1}.$$

Il residuo vale -2 .

ESERCIZIO 2.5. Calcolare il residuo di $\tan z$ in $\pi/2$. Calcolare il residuo in 0 di

$$(2.4) \quad \frac{e^z - 1}{1 - \cos z}.$$

Calcolare i residui di

$$\frac{1}{(z^2 - 4z + 3) \sin z}$$

nei punti 0, 1, 3.

La formula (2.3) si generalizza come segue.

LEMMA 2.6. Se f è espressa mediante la (2.2), con z_0 zero di ordine (maggiore di o uguale a) $N - 1$ di A e zero di ordine N di B , con $N \in \mathbb{N}$, risulta

$$(2.5) \quad R_f[z_0] = N \frac{A^{(N-1)}(z_0)}{B^{(N)}(z_0)}.$$

Evidentemente, il lemma 2.2 contiene il caso $N = 1$.

Dim. Le ipotesi assicurano che z_0 sia polo semplice (o singolarità eliminabile, se esso è zero di ordine maggiore di $N - 1$ di A) di f , quindi il residuo si calcola con la formula (2.1). A tale scopo, usando gli sviluppi di Taylor di A e B intorno a z_0 , scriviamo

$$(z - z_0) f(z) = \frac{\frac{A^{(N-1)}(z_0)}{(N-1)!} + \frac{A^{(N)}(z_0)}{N!}(z - z_0) + \frac{A^{(N+1)}(z_0)}{(N+1)!}(z - z_0)^2 + \dots}{\frac{B^{(N)}(z_0)}{N!} + \frac{B^{(N+1)}(z_0)}{(N+1)!}(z - z_0) + \frac{B^{(N+2)}(z_0)}{(N+2)!}(z - z_0)^2 + \dots}$$

e quindi abbiamo la (2.5) passando al limite per $z \rightarrow z_0$.

ESEMPIO 2.7. La funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{1 - \cos z}$$

ha in $z_0 = 0$ un polo semplice, essendo tale punto zero semplice del numeratore e zero doppio del denominatore. Per calcolare il residuo, usiamo la formula (2.5) con $N = 2$:

$$R[0] = 2 \left. \frac{\cos z}{\cos z} \right|_{z=0} = 2.$$

ESEMPIO 2.8. Come osservato nell'esempio IV.5.16, se z_0 è uno zero di f , esso è un polo semplice della derivata logaritmica f'/f . Detto N l'ordine, mediante la formula (2.5) con $A = f'$ e $B = f$, troviamo subito che il residuo è $R_{f'/f}[z_0] = N$. (Cfr. Esempio 2.7.)

Mediante la (2.1) troviamo facilmente che, se z_0 è polo di ordine N di f , risulta $R_{f'/f}[z_0] = -N$. Notiamo che questo risultato si può anche ottenere dal caso precedente, considerando $g = 1/f$. Infatti, per la proposizione IV.5.9 z_0 è uno zero di ordine N di g e, come visto nell'esempio IV.5.16 le derivate logaritmiche di g e f sono opposte.

OSSERVAZIONE 2.9. Siano A , B e C funzioni olomorfe intorno a z_0 , zero di ordine $N - 1$ di A , di ordine N di B , mentre $C(z_0) \neq 0$. Il punto z_0 è quindi polo semplice di

$$f(z) = \frac{A(z)}{B(z)} C(z).$$

È chiaro che

$$\begin{aligned} R_f[z_0] &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{A(z)}{B(z)} C(z) = \left[\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{A(z)}{B(z)} \right] C(z_0) \\ &= N \frac{A^{(N-1)}(z_0)}{B^{(N)}(z_0)} C(z_0). \end{aligned}$$

Ad esempio, se

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z - 1)^2(z^3 + 1)},$$

con $A(z) = \sin \pi z$, $B(z) = (z - 1)^2$ e $C(z) = 1/(z^3 + 1)$, per $z_0 = 1$ abbiamo $N = 2$ e

$$R_f[1] = 2 \frac{\pi \cos \pi}{2} \frac{1}{1^3 + 1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Consideriamo adesso il caso di un polo di ordine superiore. Sia z_0 polo di ordine N della funzione f : lo sviluppo di Laurent intorno a z_0 è dunque

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

e quindi abbiamo

$$(z - z_0)^N f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z - z_0)^{N+n}.$$

La serie a secondo membro è lo sviluppo di Taylor del prolungamento olomorfo in z_0 del primo membro e in tale sviluppo $c_{-1} = R_f[z_0]$ è il coefficiente della potenza $(z - z_0)^{N-1}$. Pertanto (cfr. (III.3.4)) abbiamo la formula

$$(2.6) \quad R_f[z_0] = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} [(z - z_0)^N f(z)].$$

Osserviamo che nella (2.6) è necessario il passaggio al limite formalmente, poiché $(z - z_0)^N f(z)$ non è definita in z_0 .

Per il seguito, è utile generalizzare la (2.6) ed indicare una formula per tutti i coefficienti della parte singolare di f intorno a z_0 :

$$(2.7) \quad c_{-n} = \frac{1}{(N-n)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{N-n}}{dz^{N-n}} [(z - z_0)^N f(z)], \quad n = 1, \dots, N.$$

OSSERVAZIONE 2.10. I coefficienti c_{-n} si possono scrivere come residui in z_0 di opportune funzioni:

$$c_{-n} = R[z_0; (z - z_0)^{n-1} f(z)].$$

Una proprietà ovvia (essendo il residuo definito mediante un integrale), ma talvolta utile per semplificare i calcoli, è la *linearità* di $R[z_0; \cdot]$:

$$(2.8) \quad R[z_0; \alpha f + \beta g] = \alpha R[z_0; f] + \beta R[z_0; g],$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e f, g olomorfe intorno a z_0 . Tale formula è interessante nel caso che g abbia residuo nullo, ad esempio, sia olomorfa in $z_0 \in \mathbb{C}$.

ESEMPIO 2.11. La funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$

ha in $z_0 = 0$ un polo doppio; calcoliamo il residuo. Applicando la (2.6), troviamo

$$R_f[0] = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2} \Big|_{z=0} = 1.$$

Il residuo può essere calcolato anche in applicazione del II teorema dei residui, osservando che l'unica altra singolarità di f è il polo semplice 1 e con la formula (2.1) abbiamo $R[1] = -1$; inoltre per il primo caso del lemma 1.3 troviamo subito $R[\infty] = 0$. Pertanto ricaviamo $R[0] = -R[1] = 1$.

In questo semplice esempio, *volendo evitare* il ricorso alla formula (2.6), possiamo usare la linearità. Poiché come è ovvio $R[0; 1/z^2] = 0$, troviamo

$$R \left[0; \frac{1}{z^2(1-z)} \right] = R \left[0; \frac{1}{z^2(1-z)} - \frac{1}{z^2} \right] = R \left[0; \frac{1}{z(1-z)} \right] = 1.$$

ESEMPIO 2.12. Consideriamo la funzione razionale

$$f(z) = \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2(z^2 + 4z + 1)}.$$

Essa ha un polo doppio in 0, poli semplici nei punti $-2 \mp \sqrt{3}$; il punto ∞ è di olomorfia, in quanto f converge, e $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1$. Calcoliamo i residui. Usando (2.3) troviamo

$$R[-2 \mp \sqrt{3}] = \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2(2z + 4)} \Big|_{z=-2 \mp \sqrt{3}}$$

Per il calcolo effettivo, vale la pena notare che $-2 - \sqrt{3}$ e $-2 + \sqrt{3}$ sono reciproci, quindi

$$R[-2 \mp \sqrt{3}] = \frac{z^2 + 2 + z^{-2}}{2z + 4} \Big|_{z=-2 \mp \sqrt{3}} = \frac{(-2 \mp \sqrt{3})^2 + 2 + (-2 \pm \sqrt{3})^2}{\mp 2\sqrt{3}}$$

e dunque $R[-2 \mp \sqrt{3}] = \mp \frac{8}{\sqrt{3}}$.

In 0 usiamo (2.6):

$$R[0] = \frac{d}{dz} \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2 + 4z + 1} \Big|_{z=0} = -4.$$

Il calcolo si semplifica leggermente nell'applicare la formula (2.6) osservando che $f(z) = \frac{z^2 + 2 + z^{-2}}{z^2 + 4z + 1}$ e che $g(z) = \frac{z^2 + 2}{z^2 + 4z + 1}$ è olomorfa in 0; pertanto il residuo di f coincide con quello della funzione $h(z) = \frac{z^{-2}}{z^2 + 4z + 1} = f(z) - g(z)$:

$$R[0; f] = R[0; h] = \frac{d}{dz} \frac{1}{z^2 + 4z + 1} \Big|_{z=0} = -4.$$

Per calcolare il residuo in ∞ usiamo il lemma 1.3:

$$R[\infty; f] = \lim_{z \rightarrow \infty} z[1 - f(z)] = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2(z^2 + 4z + 1) - (z^4 + 2z^2 + 1)}{z(z^2 + 4z + 1)} = 4.$$

Osserviamo che, in accordo con il II teorema dei residui, risulta

$$(2.9) \quad R[0] + R[-2 + \sqrt{3}] + R[-2 - \sqrt{3}] + R[\infty] = 0.$$

ESEMPIO 2.13. Calcoliamo il residuo della funzione $f(z) = \frac{e^z}{1 - \cos z}$ nel polo doppio $z_0 = 0$. In base alla (2.6), abbiamo

$$\begin{aligned} R[0] &= \lim_{z \rightarrow 0} D \frac{z^2 e^z}{1 - \cos z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(2z e^z + z^2 e^z)(1 - \cos z) - z^2 e^z \sin z}{(1 - \cos z)^2} \\ &= 2 + \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z(1 - \cos z) - z^2 \sin z}{(1 - \cos z)^2} \end{aligned}$$

e l'ultimo limite vale 0, in quanto in quanto (esiste finito e) la funzione è dispari. Dunque $R[0] = 2$. Conviene in effetti più semplicemente scrivere

$$D \frac{z^2 e^z}{1 - \cos z} = e^z \frac{z^2}{1 - \cos z} + e^z D \frac{z^2}{1 - \cos z}$$

e notare che $D \frac{z^2}{1 - \cos z}$ è funzione dispari, in quanto derivata di una funzione pari, quindi (il limite) in 0 si annulla.

ESERCIZIO 2.14. Ricordando lo sviluppo di Mac Laurin di e^z , osservare che

$$R\left[0; \frac{e^z}{1 - \cos z}\right] = R\left[0; \frac{1+z}{1 - \cos z}\right] = R\left[0; \frac{1}{1 - \cos z}\right] + R\left[0; \frac{z}{1 - \cos z}\right]$$

e, nell'ultimo membro, il secondo residuo è relativo ad un polo semplice, mentre il primo è nullo, poiché $1/(1 - \cos z)$ è una funzione pari. Per lo stesso motivo, il residuo coincide con quello della funzione (2.4), che ha un polo semplice.

Calcolare il residuo pure osservando che $1/(1 - \cos z) - 2/z^2$ ha in 0 una singolarità eliminabile.

ESERCIZIO 2.15. Mostrare che la funzione f dell'esempio 2.12 verifica

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = f(z),$$

per ogni z nell'aperto di olomorfia. Per il secondo punto del lemma 1.3 risulta quindi $R[\infty] = -R[0]$. Dunque è pure $R[-2 + \sqrt{3}] = -R[-2 - \sqrt{3}]$.

ESERCIZIO 2.16. Calcolare i residui di

$$\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

nei punti $\mp j$. Verificare che essi sono coniugati. Valutare il residuo all' ∞ e verificare che la somma dei residui è nulla.

ESERCIZIO 2.17. Osservare che, nel ricavare (2.6), l'ipotesi che z_0 sia polo di ordine N non è stata usata interamente: è servito solo $c_{-n} = 0$, $\forall n > N$. Cosa si può dire su (2.6) se $c_{-N} = 0$ (cioè z_0 è polo di ordine minore di N , o punto di olomorfia)?

ESERCIZIO 2.18. Calcolare $R[0, z(1 - \cos z)^{-2}]$ osservando che esso coincide con quello di $z[(1 - \cos z)^{-2} - (z^2/2)^{-2}]$, che ha in 0 un polo semplice. Osservare anche che non è lecito sostituire direttamente $1 - \cos z$ con l'infinitesimo equivalente $z^2/2$, in quanto $R[0, z/(z^2/2)^2] = 0$. Confrontare con l'esercizio 44 del Fascicolo.

3. Applicazioni alla decomposizione in fratti semplici

In questo paragrafo ci occupiamo di funzioni razionali, cioè rapporti tra polinomi

$$(3.1) \quad \mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

Innanzitutto, richiamiamo l'operazione di *divisione euclidea*: data una coppia di polinomi (P, Q) , con Q diverso dal polinomio nullo, è univocamente determinata un'altra coppia di polinomi (S, R) con le seguenti proprietà

- risulta $P = SQ + R$;
- R è il polinomio nullo, o ha grado minore del grado di Q .

L'operazione $(P, Q) \mapsto (S, R)$ è detta appunto divisione di P per Q , S si dice *quoziente* e R si dice *resto* della divisione; se R è il polinomio nullo, si dice che P è *divisibile* per Q , o anche che Q *divide* P . Dunque, possiamo riscrivere la (3.1) come segue:

$$(3.2) \quad \mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}.$$

La funzione razionale nell'ultimo membro della (3.2) ha numeratore con grado minore del denominatore; una funzione razionale siffatta è detta *funzione razionale propria*.

A meno del termine polinomiale S , possiamo sempre ridurci ad una funzione razionale propria.

Richiamiamo ora la *decomposizione in fratti semplici* delle funzioni razionali. Per fare questo, dobbiamo prima parlare della *fattorizzazione* dei polinomi. Sia

$$(3.3) \quad Q(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$$

un polinomio di grado $N > 0$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, Q ha almeno uno zero in \mathbb{C} . In effetti, usando questo insieme al ben noto teorema di Ruffini (il resto della divisione di Q per $z - c$ è la costante $Q(c)$, quindi Q è divisibile per $z - c$ se e solo se $Q(c) = 0$), si mostra che nel campo complesso Q ha esattamente N zeri, se ciascuno viene contato secondo il suo ordine. Detti dunque z_1, \dots, z_k gli zeri a due a due distinti e N_1, \dots, N_k i rispettivi ordini, risulta

$$(3.4) \quad N_1 + \cdots + N_k = N$$

e Q si fattorizza come segue:

$$(3.5) \quad Q(z) = a_N (z - z_1)^{N_1} \cdots (z - z_k)^{N_k}.$$

Un errore frequente nello scrivere la fattorizzazione è quello di dimenticare il coefficiente direttivo a_N . Data la funzione razionale \mathcal{R} in (3.1), possiamo fattorizzare numeratore e denominatore e semplificare gli eventuali fattori comuni, in modo da rappresentare \mathcal{R} come rapporto di polinomi *primi tra loro*. Nel seguito supporremo che il grado di P sia minore del grado di Q e che i due polinomi siano primi tra loro.

3.1. Fratti semplici nel campo complesso. Nel campo complesso si dicono *fratti semplici* le espressioni del tipo

$$\frac{c}{(z - z_0)^n},$$

dove $c, z_0 \in \mathbb{C}$ ($c \neq 0$) e $n \in \mathbb{N}$. Data la funzione razionale \mathcal{R} , supponiamo che il denominatore Q sia fattorizzato come in (3.5); in questa ipotesi, \mathcal{R} si decompone in un unico modo come somma di fratti semplici:

$$(3.6) \quad \mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^{N_m} \frac{c_{m,n}}{(z - z_m)^n}.$$

I coefficienti $c_{m,n}$ sono opportuni numeri complessi, univocamente determinati dalla (3.6). Frequentemente nel seguito avremo bisogno di decomporre una funzione razionale in questa maniera. Per ottenere la decomposizione, al lettore è certamente noto il *metodo dei coefficienti indeterminati*, che consiste nello scrivere formalmente la (3.6) con i coefficienti incogniti da determinare appunto, liberare dal denominatore, ottenendo così un'uguaglianza tra due polinomi, e ricavare i coefficienti della decomposizione come soluzioni del sistema lineare ottenuto uguagliando ordinatamente i loro coefficienti. Tale procedimento diventa laborioso al crescere del grado N di Q . Esponiamo ora un modo di procedere basato sul calcolo dei residui.

Nella decomposizione evidentemente figurano fratti semplici con denominatori del tipo $(z - z_m)^n$, che dividono Q , cioè i numeri z_m , $m = 1, \dots, k$, sono gli zeri di Q . La somma dei termini corrispondenti ad un fissato zero z_m è esplicitamente

$$(3.7) \quad \frac{c_{m,1}}{z - z_m} + \cdots + \frac{c_{m,N_m}}{(z - z_m)^{N_m}}.$$

La somma degli altri termini nella (3.6) è olomorfa in z_m , quindi (3.7) è la parte singolare di \mathcal{R} intorno a z_m e può essere determinata mediante le formule (2.7). In altre parole, per $n = 1, \dots, N_m$,

$$c_{m,n} = c_{-n}[z_m]$$

è il coefficiente di $(z - z_m)^{-n}$ nello sviluppo di Laurent di \mathcal{R} intorno a z_m .

ESEMPIO 3.1. Decomponiamo in fratti semplici la funzione dell'esempio 2.11:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}.$$

La decomposizione è del tipo

$$(3.8) \quad \frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z-1},$$

con a, b, c costanti opportune. Moltiplicando ambo i membri per $z^2(1-z)$, otteniamo

$$1 = a z (1-z) + b (1-z) - c z^2 = -(a+c) z^2 + (a-b) z + b$$

e uguagliando ordinatamente i coefficienti dei polinomi nei due membri

$$\begin{cases} a+c &= 0 \\ a-b &= 0 \\ b &= 1 \end{cases}$$

Dunque $a = b = 1$, $c = -1$ e la decomposizione è

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z-1}.$$

Procediamo ora mediante il calcolo dei residui. Con riferimento alla (3.8), per quanto visto nell'esempio 2.11 abbiamo $a = R_f[0] = 1$, $c = R_f[1] = -1$; inoltre

$$b = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \frac{1}{1-z} \Big|_{z=0} = 1$$

e ritroviamo la decomposizione.

Vale la pena sottolineare che in questo semplice esempio possiamo arrivare alla decomposizione direttamente

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{(1-z^2) + z^2}{z^2(1-z)} = \frac{1+z}{z^2} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}.$$

ESERCIZIO 3.2. Decomporre in fratti semplici $\frac{1}{z^2(z^2-1)}$.

OSSERVAZIONE 3.3. Dalla (3.6) e da quanto detto, ricaviamo il seguente enunciato: *Una funzione razionale propria è somma delle caratteristiche nei suoi poli.* Questo vale a meno di una costante additiva pure se il grado del numeratore è maggiore o uguale di quello del denominatore. In tal caso, il polinomio S nella (3.2), privato del termine costante, è la caratteristica nel punto all' ∞ . (Confrontare con l'esercizio IV.6.4.)

3.2. Fratti semplici nel campo reale. Ci occupiamo qui di funzioni razionali a coefficienti reali. Una tale funzione razionale può essere decomposta in fratti semplici nel campo complesso come visto prima; vogliamo però discutere una decomposizione in fratti direttamente nel campo reale, che spesso è più opportuna. Svolgiamo preliminarmente alcune ulteriori considerazioni sui polinomi nel campo reale. Sia dunque Q un polinomio a coefficienti reali, dato dalla (3.3). Poiché $Q(z)$ si calcola a partire da z e dai coefficienti mediante sole addizioni e moltiplicazioni, abbiamo $\overline{Q(z)} = Q(\bar{z})$ (cfr. esempio I.1.3):

$$\overline{Q(z)} = \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N} = \overline{a_0} + \overline{a_1} \bar{z} + \cdots + \overline{a_N} \bar{z}^N = Q(\bar{z})$$

poiché i coefficienti sono reali. Una funzione con la proprietà $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ si dice *hermitiana*; dunque un polinomio a coefficienti reali è hermitiano. Ne segue chiaramente che, se z_0 è uno zero non reale di Q , è zero pure \bar{z}_0 : $Q(\bar{z}_0) = \overline{Q(z_0)} = 0$. Più precisamente, essendo anche le derivate di Q a coefficienti reali e quindi hermitiane, vediamo che z_0 e \bar{z}_0 hanno lo stesso ordine. Dunque, se nella fattorizzazione (3.5) compare il fattore $(z - z_0)^{N_0}$, compare anche $(z - \bar{z}_0)^{N_0}$ e quindi Q è divisibile per il prodotto. Scrivendo $z_0 = \sigma + j\omega$ in forma algebrica, è $\bar{z}_0 = \sigma - j\omega$ e

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = (z - \sigma)^2 + \omega^2 = z^2 + pz + q,$$

dove $p = -2\sigma$ e $q = \sigma^2 + \omega^2$; notiamo che il trinomio nell'ultimo membro ha coefficienti reali e discriminante negativo: $\Delta = p^2 - 4q = -4\omega^2 < 0$.

In generale, il polinomio Q avrà degli zeri reali a due a due distinti x_1, \dots, x_k , di ordini rispettivamente N_1, \dots, N_k , e degli zeri complessi non reali a due a due distinti, che si presentano a coppie di numeri coniugati $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_h, \bar{z}_h$, di ordini rispettivamente M_1, \dots, M_h (eventualmente $k = 0$, cioè nessuno zero è reale, o $h = 0$, cioè ogni zero è reale). Alla (3.4) subentra

$$(3.9) \quad N_1 + \cdots + N_k + 2(M_1 + \cdots + M_h) = N$$

e la fattorizzazione (3.5) si riscrive (indicando con x la variabile reale)

$$(3.10) \quad Q(x) = a_N (x - x_1)^{N_1} \cdots (x - x_k)^{N_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{M_1} \cdots (x^2 + p_h x + q_h)^{M_h},$$

con i trinomi di secondo grado che vi figurano aventi ciascuno discriminante negativo.

Nel campo reale chiameremo fratti semplici, oltre le espressioni precedentemente considerate

$$\frac{c}{(x - x_0)^n}$$

con $c, x_0 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, anche espressioni del tipo

$$\frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n}$$

con $a, b, p, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e il trinomio a denominatore con discriminante negativo: $\Delta = p^2 - 4q < 0$.

Se la funzione razionale \mathcal{R} ha coefficienti reali e il denominatore Q si fattorizza come in (3.10), \mathcal{R} ha la seguente decomposizione in fratti semplici nel campo reale:

$$(3.11) \quad \mathcal{R}(x) = \sum_{m=1}^k \sum_{n=1}^{N_m} \frac{c_{m,n}}{(x - x_m)^n} + \sum_{m=1}^h \sum_{n=1}^{M_m} \frac{a_{m,n}x + b_{m,n}}{(x^2 + p_m x + q_m)^n}.$$

La prima doppia sommatoria corrisponde agli zeri reali di Q (chiaramente, non è presente se $k = 0$) e coincide nelle decomposizioni (3.6) e (3.11), mentre la seconda è determinata dagli zeri complessi (e manca se $h = 0$). Anche i coefficienti della decomposizione (3.11) sono univocamente determinati e, per calcolarli, si può adottare il metodo dei coefficienti indeterminati, analogamente a prima. Alternativamente, i coefficienti $c_{m,n}$ relativi agli zeri reali si possono calcolare mediante la teoria dei residui. È possibile ricavare una formula per scrivere il fratto in (3.11) corrispondente ad una coppia di zeri complessi coniugati *semplici* di Q . Siano dunque $z_0 = \sigma + j\omega$ e $\bar{z}_0 = \sigma - j\omega$ zeri semplici. Osserviamo che, essendo \mathcal{R} hermitiana, risulta

$$(3.12) \quad R[\bar{z}_0] = \overline{R[z_0]},$$

quindi i termini in (3.6) corrispondenti a z_0 e \bar{z}_0 (per $z = x \in \mathbb{R}$) sono coniugati, dunque, posto $R[z_0] = \alpha + j\beta$, la loro somma è

$$(3.13) \quad 2 \operatorname{Re} \frac{\alpha + j\beta}{x - \sigma - j\omega} = 2 \frac{\alpha(x - \sigma) - \beta\omega}{(x - \sigma)^2 + \omega^2}.$$

ESEMPIO 3.4. Decomponiamo nel campo reale la funzione

$$\mathcal{R}(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Gli zeri del denominatore sono 1 e $\mp j$, tutti semplici, quindi poli semplici di \mathcal{R} . Inoltre

$$R[1] = \frac{1}{2}, \quad R[j] = \frac{1}{(x-1)2x} \Big|_{z=j} = \frac{1}{2(-1-j)} = \frac{-1+j}{4},$$

dunque

$$\mathcal{R}(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{-x-1}{x^2+1}.$$

ESEMPIO 3.5. Decomponiamo nel campo reale la funzione

$$\mathcal{R}(x) = \frac{4x-16}{(x^2-8x+65)(x^2-4x+49)}.$$

Essendo $(x^2-4x+49) - (x^2-8x+65) = 4x-16$, è chiaro che risulta

$$(3.14) \quad \mathcal{R}(x) = \frac{1}{x^2-8x+65} - \frac{1}{x^2-4x+49}.$$

Dato che i due trinomi a denominatore hanno entrambi discriminante negativo, procediamo alla decomposizione anche mediante la formula (3.13). Gli zeri del denominatore sono $4 \pm 7j$ e $2 \pm 3\sqrt{5}j$; inoltre

$$\begin{aligned} R[4+7j] &= \frac{4x-16}{x^2-4x+49} \Big|_{x=4+7j} = \frac{28j}{(4+7j)^2 - 4(4+7j) + 49} \\ &= \frac{2}{16+56j-49-16-28j+49} = -\frac{j}{14}, \end{aligned}$$

quindi il fratto corrispondente alla coppia di zeri coniugati $4 \pm 7j$ si scrive

$$2 \frac{\frac{1}{14} 7}{(x-4)^2 + 7^2} = \frac{1}{(x-4)^2 + 7^2}.$$

Analogamente

$$R[2 + 3\sqrt{5}j] = \frac{4x - 16}{x^2 - 8x + 65} \Big|_{x=2+3\sqrt{5}j} = \frac{j}{6\sqrt{5}},$$

quindi il fratto corrispondente alla coppia di zeri coniugati $2 \pm 3\sqrt{5}j$ si scrive

$$2 \frac{-\frac{1}{6\sqrt{5}} 3\sqrt{5}}{(x-2)^2 + (3\sqrt{5})^2} = -\frac{1}{(x-2)^2 + (3\sqrt{5})^2}$$

e ritroviamo la (3.14).

OSSERVAZIONE 3.6. Come vedremo, nelle applicazioni capita spesso di dovere scrivere una funzione razionale

$$\mathcal{R}(x) = \frac{ax + b}{x^2 + px + q}$$

a coefficienti reali e con discriminante del denominatore negativo, $\Delta = p^2 - 4q < 0$, nella forma

$$\mathcal{R}(x) = \frac{c(x - \sigma) + d}{(x - \sigma)^2 + \omega^2},$$

essendo $\sigma \mp j\omega$ gli zeri complessi coniugati del denominatore e c e d opportuni coefficienti. Per arrivare a tale espressione non vale assolutamente la pena di usare la formula (3.13), ma molto più semplicemente

$$\mathcal{R}(x) = \frac{ax + b}{x^2 + px + q} = \frac{a(x - \sigma) + b + a\sigma}{(x - \sigma)^2 + \omega^2}.$$

ESERCIZIO 3.7. Mediante la teoria dei residui, decomporre in fratti semplici nel campo reale $\frac{1}{z(z^2 + 2z + 5)}$. Osservare che la decomposizione si ottiene direttamente:

$$\frac{1}{z(z^2 + 2z + 5)} = \frac{1}{5} \frac{5 + z^2 + 2z - z^2 - 2z}{z(z^2 + 2z + 5)}.$$

Decomporre in fratti semplici $\frac{1}{z^3 + 1}$ e $\frac{1}{z^4 + 1}$ sia in \mathbb{C} che in \mathbb{R} .

3.3. La formula di Hermite. È opportuno illustrare una decomposizione che consiste nello scrivere una funzione razionale come somma di fratti semplici con esponente $n = 1$ nella (3.6) e (3.11) e di un termine sotto forma di derivata di un'altra funzione razionale. La decomposizione differisce formalmente da quella in fratti semplici nel caso di zeri multipli del denominatore e in alcune applicazioni è preferibile.

Nel campo complesso, osserviamo che i termini nella (3.6) con esponente $n > 1$ sono derivate di funzioni razionali. In questo modo, arriviamo alla uguaglianza

$$\mathcal{R}(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{m=1}^k \frac{c_{m,1}}{z - z_m} + \frac{d}{dz} \frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{Q}(z)},$$

dove

$$\tilde{Q}(z) = (z - z_1)^{N_1-1} \dots (z - z_k)^{N_k-1}$$

(con riferimento alla (3.5), gli esponenti sono tutti abbassati di una unità) e \tilde{P} è un polinomio di grado minore di $N - k$.

Accoppiando i termini coniugati (per $z = x \in \mathbb{R}$), nel campo reale arriviamo ad una decomposizione del tipo

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{m=1}^k \frac{c_{m,1}}{x - x_m} + \sum_{m=1}^h \frac{a_{m,1}x + b_{m,1}}{x^2 + p_m x + q_m} + \frac{d}{dx} \frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)},$$

dove

$$\tilde{Q}(x) = (x - x_1)^{N_1-1} \dots (x - x_k)^{N_k-1} (x^2 + p_1 x + q_1)^{M_1-1} \dots (x^2 + p_h x + q_h)^{M_h-1}$$

(con riferimento alla (3.10), gli eponenti sono tutti abbassati di una unità) e \tilde{P} è un polinomio di grado minore di $N - k - 2h$.

OSSERVAZIONE 3.8. Risulta $c_{m,1} = R[x_m]$ e i fratti semplici corrispondenti a coppie di zeri coniugati si calcolano come in (3.13) anche se l'ordine è maggiore di 1.

Riportiamo un caso particolare che ricorre spesso nelle applicazioni e che può facilmente essere verificato direttamente ($\omega \in \mathbb{C} - \{0\}$):

$$\frac{1}{(z^2 + \omega^2)^2} = \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{z^2 + \omega^2} + \frac{d}{dz} \frac{z}{z^2 + \omega^2} \right).$$

ESERCIZIO 3.9. Scrivere mediante la formula di Hermite

$$\frac{1}{(z^2 + z + 1)^2}, \quad \frac{1}{z(z^2 + 2z + 5)^2}.$$

(Per la seconda espressione, cfr. esercizio 3.7.)

CAPITOLO VI

Z-trasformazione

1. Generalità sulle successioni

In questo paragrafo consideriamo funzioni complesse definite sull'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} , cioè successioni con insieme degli indici \mathbb{Z} . Invece di denotare una tale funzione con $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, la indicheremo con $(a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$, o semplicemente con $(a(n))$, o anche con $a(n)$. Esempi notevoli sono

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases} \quad u(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \geq 0 \\ 0, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 1.1. Dati $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\tau > 0$, la successione

$$a(n) = f(n\tau), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

si dice *campionamento* di f con passo τ .

Se $(a(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ è una successione con indici in \mathbb{N}_0 , cioè definita per $n \geq 0$, possiamo *canonicamente* prolungarla a \mathbb{Z} ponendo $a(n) = 0, \forall n < 0$. Per sottolineare il fatto che la successione così ottenuta ha i termini con indice negativo nulli, scriveremo a volte $a(n)u(n)$. Nel seguito considereremo prevalentemente successioni definite in \mathbb{Z} .

È chiaro che due successioni possono essere sommate o moltiplicate termine a termine. Introduciamo ora l'operazione di *prodotto di convoluzione*, o semplicemente convoluzione. Date $a(n)$ e $b(n)$, si chiama convoluzione la successione $c(n)$ definita ponendo

$$(1.1) \quad c(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(n-k)b(k), \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

supposta la serie convergente. Per indicare che $c(n)$ è la convoluzione di $a(n)$ e $b(n)$, scriveremo $c(n) = a(n) * b(n)$.

ESEMPIO 1.2. La successione $\delta(n)$ è l'unità rispetto al prodotto di convoluzione: $a(n) * \delta(n) = a(n)$, per ogni successione $a(n)$. Più in generale, per $m \in \mathbb{Z}$ fissato, la convoluzione con $\delta(n-m)$ è la traslazione

$$a(n) * \delta(n-m) = a(n-m).$$

ESEMPIO 1.3. Calcoliamo $u(n) * u(n)$. Il termine n -simo è

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(n-k)u(k).$$

Notiamo che $u(n-k)u(k) \neq 0$ se e solo se $n-k \geq 0$ e $k \geq 0$, ovvero $0 \leq k \leq n$. Questo è impossibile se $n < 0$, quindi per tali indici risulta $u(n-k)u(k) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Inoltre, per $n \geq 0$ e $0 \leq k \leq n$, è $u(n-k)u(k) = 1$ e quindi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(n-k)u(k) = \sum_{k=0}^n 1 = n+1.$$

Dunque $u(n) * u(n) = (n+1)u(n)$.

2. Trasformazione e trasformazione inversa

DEFINIZIONE 2.1. Diremo che $a(n)$ è \mathcal{Z} -trasformabile se esiste $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ che rende la serie

$$(2.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a(n)}{z^n}$$

convergente. Chiameremo allora la somma in (2.1) \mathcal{Z} -trasformata della successione $a(n)$ (nel punto z) e la indicheremo con $\mathcal{Z}[a(n)]$ (o $\mathcal{Z}[a(n)](z)$).

Data una successione $a(n)$ in \mathbb{N}_0 , diremo che essa è \mathcal{Z} -trasformabile in senso unilatero se la serie

$$(2.2) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{z^n}$$

converge. In tal caso diremo la somma \mathcal{Z} -trasformata unilatera di $a(n)$ e la indicheremo con $\mathcal{Z}_u[a(n)]$. A volte, in contrapposizione alla \mathcal{Z} -trasformazione unilatera, chiameremo la trasformazione definita dalla (2.1) \mathcal{Z} -trasformata bilatera.

Più precisamente, la (2.1) è una serie bilatera di potenze, che noi supporremo convergente in una corona circolare aperta di centro 0 e in tale corona considereremo la \mathcal{Z} -trasformata, che è una funzione olomorfa. La corona si dice dominio della trasformata. Osserviamo che il dominio è parte integrante della definizione di \mathcal{Z} -trasformata.

La serie (2.2) è una serie di potenze in $1/z$ e quindi, se converge in un punto $z \in \mathbb{C}$, essa converge in tutti i punti esterni ad un cerchio di centro 0. Pertanto, il dominio di una \mathcal{Z} -trasformata unilatera è un intorno di ∞ , nel quale essa è olomorfa, ∞ compreso. La \mathcal{Z} -trasformata unilatera è un caso particolare di \mathcal{Z} -trasformata:

$$\mathcal{Z}_u[a(n)] = \mathcal{Z}[a(n)u(n)].$$

La \mathcal{Z} -trasformazione è la corrispondenza che associa ad una successione trasformabile $a(n)$ la sua \mathcal{Z} -trasformata. Analogamente per la trasformazione unilatera. La \mathcal{Z} -trasformazione è invertibile: interpretare una funzione f , olomorfa in un'assegnata corona circolare di centro 0, come \mathcal{Z} -trasformata equivale a sviluppare la funzione in serie di Laurent nella corona. Se c_n sono i coefficienti di Laurent di f , abbiamo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \text{ nella corona circolare e confrontando con (2.1) troviamo}$$

$$f(z) = \mathcal{Z}[a(n)],$$

dove

$$(2.3) \quad a(n) = c_{-n} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} f(z) z^{n-1} dz,$$

e Γ è una circonferenza di centro 0 nella corona. In particolare, f è una trasformata unilatera se è olomorfa in un intorno di ∞ , compreso ∞ . In tal caso, le (2.3) forniscono $a(n) = 0, \forall n < 0$, mentre

$$(2.4) \quad a(n) = -R[\infty; f(z) z^{n-1}], \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Se f è una funzione razionale, applicando il II teorema dei residui troviamo

$$(2.5) \quad a(n) = \sum_k R[z_k; f(z) z^{n-1}]$$

dove i punti z_k sono le singolarità al finito di $f(z) z^{n-1}$.

ESEMPIO 2.2. Ovviamente $\mathcal{Z}[\delta] = 1$, il dominio essendo \mathbb{C} . Immediatamente dalla definizione, abbiamo pure

$$(2.6) \quad \mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| > 1.$$

Inoltre

$$(2.7) \quad \mathcal{Z}[-u(-n - 1)] = - \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = 1 - \frac{1}{1 - z} = \frac{z}{z - 1}, \quad |z| < 1.$$

OSSERVAZIONE 2.3. Le due trasformate in (2.6) e (2.7) sono date dalla stessa espressione $z/(z - 1)$, che però nei due casi va considerata in due corone circolari di centro 0 distinte: l'insieme dei punti esterni al cerchio di raggio 1 e il cerchio stesso, rispettivamente. Appare quindi evidente la necessità di indicare il dominio, oltre alla espressione della trasformata.

Nel caso di trasformata unilatera (la (2.6) tra i due esempi), il dominio è implicito nell'espressione della trasformata, essendo il più ampio intorno di ∞ nel quale essa è olomorfa.

3. Proprietà della trasformazione

Illustriamo ora alcune proprietà della \mathcal{Z} -trasformazione, che si ricavano facilmente dalla definizione. Innanzitutto, la \mathcal{Z} -trasformazione è un operatore lineare, cioè, date due successioni $a(n)$ e $b(n)$ trasformabili in una stessa corona circolare e due numeri complessi α e β , la successione $\alpha a(n) + \beta b(n)$ è trasformabile e risulta

$$(3.1) \quad \mathcal{Z}[\alpha a(n) + \beta b(n)] = \alpha \mathcal{Z}[a(n)] + \beta \mathcal{Z}[b(n)].$$

• (Riscaldamento) Dati ora $a(n)$ trasformabile e $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$, vogliamo calcolare $\mathcal{Z}[\lambda^n a(n)]$ (o meglio, vogliamo legare questa trasformata a quella di $a(n)$):

$$\mathcal{Z}[\lambda^n a(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^n a(n)}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a(n)}{(z/\lambda)^n}$$

e quindi

$$(3.2) \quad \mathcal{Z}[\lambda^n a(n)](z) = \mathcal{Z}[a(n)]\left(\frac{z}{\lambda}\right).$$

Il dominio della trasformata di $\lambda^n a(n)$ è la corona dei numeri z tali che z/λ appartenga al dominio della trasformata di $a(n)$. Ad esempio, abbiamo

$$\mathcal{Z}[\lambda^n u(n)] = \frac{z}{z - \lambda}, \quad |z| > |\lambda| > 0.$$

In particolare, per $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{Z}[e^{nj\vartheta} u(n)] = \frac{z}{z - e^{j\vartheta}}, \quad |z| > 1$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\cos n\vartheta u(n)] &= \mathcal{Z}_u \left[\frac{e^{nj\vartheta} + e^{-nj\vartheta}}{2} \right] = \frac{\mathcal{Z}_u[e^{nj\vartheta}] + \mathcal{Z}_u[e^{-nj\vartheta}]}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z - e^{j\vartheta}} + \frac{z}{z - e^{-j\vartheta}} \right). \end{aligned}$$

Essendo inoltre $(z - e^{j\vartheta})(z - e^{-j\vartheta}) = (z - \cos \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta = z^2 - 2z \cos \vartheta + 1$, troviamo in definitiva

$$(3.3) \quad \mathcal{Z}[\cos n\vartheta u(n)] = z \frac{z - \cos \vartheta}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}, \quad |z| > 1.$$

Analogamente,

$$(3.4) \quad \mathcal{Z}[\sin n\vartheta u(n)] = z \frac{\sin \vartheta}{z^2 - 2z \cos \vartheta + 1}, \quad |z| > 1.$$

- (Traslazione) Fissato $k \in \mathbb{Z}$, calcoliamo

$$\mathcal{Z}[a(n+k)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a(n+k)}{z^n} = z^k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a(n+k)}{z^{n+k}} = z^k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a(n)}{z^n}$$

e quindi (il dominio non cambia)

$$(3.5) \quad \mathcal{Z}[a(n+k)] = z^k \mathcal{Z}[a(n)].$$

Ad esempio,

$$\mathcal{Z}[u(n-1)] = z^{-1} \mathcal{Z}[u(n)] = \frac{1}{z-1}.$$

Sia ora $k \in \mathbb{N}$ e calcoliamo

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_u[a(n+k)] &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n+k)}{z^n} = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n+k)}{z^{n+k}} = z^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a(n)}{z^n} \\ &= z^k \left(\mathcal{Z}_u[a(n)] - a(0) - \frac{a(1)}{z} - \dots - \frac{a(k-1)}{z^{k-1}} \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$(3.6) \quad \mathcal{Z}_u[a(n+k)] = z^k \mathcal{Z}_u[a(n)] - a(0)z^k - a(1)z^{k-1} - \dots - a(k-1)z.$$

OSSERVAZIONE 3.1. È chiaro dalla definizione (2.2) che risulta

$$a(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_u[a(n)].$$

Analogamente

$$a(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} \mathcal{Z}_u[a(n+k)].$$

e quindi da (3.6) ricaviamo una formula ricorrente per invertire la \mathcal{Z}_u :

$$a(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} \{z^k \mathcal{Z}_u[a(n)] - a(0)z^k - a(1)z^{k-1} - \dots - a(k-1)z\}.$$

- La serie in (2.2) può essere derivata termine a termine:

$$\frac{d}{dz} \mathcal{Z}_u[a(n)] = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n) \frac{a(n)}{z^{n+1}}$$

e quindi ricaviamo la *formula fondamentale*

$$(3.7) \quad \mathcal{Z}_u[n a(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}_u[a(n)].$$

Ad esempio

$$(3.8) \quad \mathcal{Z}[n u(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[u(n)] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z-1} = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

- (Trasformata della convoluzione) Supponiamo $a(n)$ e $b(n)$ trasformabili in una stessa corona circolare. Nei punti di tale corona vale l'uguaglianza

$$(3.9) \quad \mathcal{Z}[a(n) * b(n)] = \mathcal{Z}[a(n)] \cdot \mathcal{Z}[b(n)],$$

cioè la trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate. Invero

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[a(n) * b(n)] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^{-n} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(n-k)b(k) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a(n-k)z^{-(n-k)}b(k)z^{-k}. \end{aligned}$$

È lecito invertire le due sommatorie

$$\mathcal{Z}[a(n) * b(n)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a(n-k)z^{-(n-k)}.$$

A questo punto la formula (3.9) segue subito, osservando che la sommatoria più interna fatta al variare di n non dipende da k , la somma valendo $\mathcal{Z}[a(n)]$.

- Diremo che la successione $a(n)$ è *periodica* di periodo $k \in \mathbb{N}$ se verifica $a(n+k) = a(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Una successione periodica assume un numero finito di valori, quindi è limitata e dunque trasformabile in senso unilatero per $|z| > 1$, la (2.2) essendo maggiorata da un multiplo della serie geometrica di ragione $1/|z|$, e vale la formula:

$$(3.10) \quad \mathcal{Z}_u[a(n)] = \frac{a(0)z^k + a(1)z^{k-1} + \dots + a(k-1)z}{z^k - 1}.$$

La (3.10) si ottiene raggruppando a k a k i termini nella serie (2.2) e tenendo conto della periodicità:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a(m+nk)}{z^{m+nk}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^{nk}} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{a(m)}{z^m} = \frac{\sum_{m=0}^{k-1} a(m)z^{k-m}}{z^k - 1}.$$

ESEMPIO 3.2. Calcoliamo la trasformata unilatera della successione $\sin n\frac{\pi}{2}$. Come è noto,

$$\mathcal{Z}_u \left[\sin n\frac{\pi}{2} \right] = z \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{2} + 1} = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Possiamo procedere anche mediante la formula per la trasformata unilatera di una successione periodica:

$$a(n) = \sin n\frac{\pi}{2} = \dots, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

è periodica di periodo 4, con $a(0) = 0$, $a(1) = 1$, $a(2) = 0$ e $a(3) = -1$, quindi

$$\mathcal{Z}_u \left[\sin n\frac{\pi}{2} \right] = \frac{z^3 - z}{z^4 - 1} = z \frac{z^2 - 1}{(z^2 - 1)(z^2 + 1)} = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

ESERCIZIO 3.3. Ricavare in dettaglio la (3.4). Fissato $\rho > 0$, in applicazione della (3.2) mostrare inoltre per $|z| > \rho$ le uguaglianze

$$\mathcal{Z}[\rho^n \cos n\vartheta u(n)] = z \frac{z - \rho \cos \vartheta}{z^2 - 2z\rho \cos \vartheta + \rho^2},$$

$$\mathcal{Z}[\rho^n \sin n\vartheta u(n)] = z \frac{\rho \sin \vartheta}{z^2 - 2z\rho \cos \vartheta + \rho^2}.$$

Calcolare $\mathcal{Z}[(n+1)u(n)]$ sia osservando che $\mathcal{Z}[(n+1)u(n)] = \mathcal{Z}[nu(n)] + \mathcal{Z}[u(n)]$ e quindi ricordando alcune trasformate calcolate, sia in applicazione della (3.6), sia ricordando l'esempio 1.3 e usando la formula (3.9) per la trasformata della convoluzione.

Mostrare le uguaglianze $\mathcal{Z}[(n-1)u(n-1)] = \frac{1}{(z-1)^2}$ e

$$(3.11) \quad \mathcal{Z}[n(n-1)u(n-1)] = \frac{2z}{(z-1)^3}.$$

4. Equazioni ricorrenti, problemi ai valori iniziali

Un'applicazione importante della \mathcal{Z} -trasformazione riguarda i problemi ai valori iniziali per le equazioni ricorrenti in \mathbb{N}_0 .

Un'equazione ricorrente (lineare a coefficienti costanti) è un'equazione del tipo

$$(4.1) \quad y(n+k) + A_{k-1}y(n+k-1) + \dots + A_0y(n) = a(n),$$

dove A_0, \dots, A_{k-1} costanti e $a(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, successione sono date; l'equazione (4.1) si dice *di ordine k*. Una soluzione è una successione $y(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, che la rende soddisfatta per ogni n . Un problema ai valori iniziali per la (4.1) consiste nel ricercare soluzioni con i primi k termini assegnati:

$$(4.2) \quad \begin{cases} y(n+k) + A_{k-1}y(n+k-1) + \dots + A_0y(n) = a(n) \\ y(0), y(1), \dots, y(k-1) \text{ assegnati} \end{cases}$$

Tale problema è analogo a quello per le equazioni differenziali. Valgono per il problema (4.2) *esistenza e unicità* di soluzione; la soluzione si costruisce induttivamente. Fissati i valori iniziali, possiamo considerare la soluzione come “risposta” al dato $a(n)$: $a(n) \mapsto y(n)$.

ESEMPIO 4.1. Possiamo formulare come problema ai valori iniziali quello della ricerca di una espressione per la somma dei primi n numeri naturali: $y(n) = 1 + 2 + \dots + n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. In effetti $y(n+1) = y(n) + n + 1$ e questa uguaglianza vale anche per $n = 0$ se poniamo $y(0) = 0$. Arriviamo dunque al problema del primo ordine

$$(4.3) \quad \begin{cases} y(n+1) - y(n) = n + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Per risolvere il problema (4.2) mediante la \mathcal{Z} -trasformazione, supponiamo che il termine noto $a(n)$ e la soluzione $y(n)$ siano trasformabili ed effettuiamo i seguenti passi. Applichiamo la trasformazione unilatera ad ambo i membri dell'equazione; nel fare questo, usiamo la formula (3.6), tenendo presenti i valori iniziali. Ricaviamo dall'uguaglianza così ottenuta la trasformata della successione incognita $Y = Y(z) = \mathcal{Z}_u[y(n)]$. Per ottenere la soluzione, antitrasformiamo. Illustriamo questo modo di procedere per risolvere il problema (4.3). La trasformata del primo membro dell'equazione è

$$\mathcal{Z}_u[y(n+1) - y(n)] = zY - zy(0) - Y = (z-1)Y$$

mentre (cfr. esercizio 3.3) la trasformata del secondo membro è

$$\mathcal{Z}_u[n+1] = \frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

Dunque ricaviamo

$$Y = \frac{z^2}{(z-1)^3}.$$

Ricordando la (3.11) e la (3.5), troviamo

$$y(n) = \mathcal{Z}_u^{-1} \left[z \frac{z}{(z-1)^3} \right] = \frac{n(n-1)}{2} u(n-1) \Big|_{n=n+1} = \frac{(n+1)n}{2} u(n).$$

Usiamo il procedimento per il problema generale (4.2). Trasformando ambo i membri dell'equazione, otteniamo

$$P(z)Y(z) - Q(z) = \mathcal{Z}_u[a(n)],$$

dove

$$P(z) = z^k + A_{k-1}z^{k-1} + \dots + A_0$$

è il polinomio caratteristico, ottenuto sostituendo alla traslazione la corrispondente potenza di z , mentre

$$Q(z) = \sum_{m=1}^k A_m [z^m y(0) + z^{m-1} y(1) + \dots + z y(m-1)]$$

è un polinomio di grado al più k , i cui coefficienti dipendono dai valori iniziali e dai coefficienti della equazione. (Per uniformità, abbiamo posto $A_k = 1$.) Dunque ricaviamo

$$(4.4) \quad Y(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} + \frac{1}{P(z)} \mathcal{Z}_u[a(n)].$$

Il reciproco $H = 1/P$ del polinomio caratteristico è detto *funzione di trasferimento*. L'antitrasformazione si riduce a quella di una funzione razionale olomorfa all' ∞ . Questo è chiaro per il termine Q/P a secondo membro di (4.4). Per quanto riguarda

l'altro termine, detta $h(n) = \mathcal{Z}_u^{-1}[H]$ l'antitrasformata della funzione di trasferimento, ricordando la formula (3.9) per la trasformata della convoluzione, abbiamo

$$H(z) \mathcal{Z}_u[a(n)] \xrightarrow{\mathcal{Z}_u^{-1}} h(n) * a(n).$$

Pertanto, troviamo la formula

$$(4.5) \quad y(n) = \mathcal{Z}_u^{-1}[Q/P] + h(n) * a(n).$$

OSSERVAZIONE 4.2. Per la linearità del problema (4.2), la soluzione si ottiene come somma $y(n) = y_1(n) + y_2(n)$ delle soluzioni dei problemi

$$(4.6) \quad \begin{cases} y_1(n+k) + A_{k-1} y_1(n+k-1) + \cdots + A_0 y_1(n) = a(n) \\ y_1(0) = y_1(1) = \cdots = y_1(k-1) = 0 \end{cases}$$

$$(4.7) \quad \begin{cases} y_2(n+k) + A_{k-1} y_2(n+k-1) + \cdots + A_0 y_2(n) = 0 \\ y_2(0) = y_2(1) = \cdots = y_2(k-1) = 0 \end{cases}$$

Il problema (4.6) ha la stessa equazione di (4.2) e valori iniziali nulli, mentre il problema (4.7) è relativo all'equazione omogenea associata e i valori iniziali coincidono con quelli di (4.2). È chiaro che

$$y_1(n) = h(n) * a(n), \quad y_2(n) = \mathcal{Z}_u^{-1}[Q/P].$$

OSSERVAZIONE 4.3. L'inversa $h(n) = \mathcal{Z}_u^{-1}[H]$ della funzione di trasferimento risolve il problema

$$\begin{cases} h(n+k) + A_{k-1} h(n+k-1) + \cdots + A_0 h(n) = \delta(n) \\ h(0) = h(1) = \cdots = h(k-1) = 0 \end{cases}$$

Discutiamo il problema della inversione della \mathcal{Z}_u -trasformazione. Come indicato, il problema equivale ad effettuare lo sviluppo in serie di Laurent intorno all' ∞ .

ESEMPIO 4.4. Mediante la formula di antitrasformazione (2.4) calcoliamo

$$a(n) = \mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{(z-\lambda)^k} \right],$$

dove $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $k \in \mathbb{N}$. Dunque $a(n)$ è l'opposto del residuo all' ∞ della funzione razionale $g(z) = \frac{z^n}{(z-\lambda)^k}$. È dunque chiaro che $a(n) = 0$ se $n - k + 1 < 0$, cioè $n < k - 1$. Per $n \geq k - 1$, la funzione g è olomorfa in 0 e ha come unica singolarità (al finito) il punto λ , che è un polo di ordine k . Quindi

$$a(n) = R_g[\lambda] = \frac{1}{(k-1)!} [D^{k-1} z^n]_{z=\lambda} = \binom{n}{k-1} \lambda^{n-k+1}.$$

Per $n \geq 0$, il risultato segue anche usando la formula di Cauchy per le derivate (III.3.3) per la funzione $f(z) = z^n$.

Quando possibile di ricondursi a sviluppi noti.

ESEMPIO 4.5. Per calcolare

$$\mathcal{Z}_u^{-1}[e^{1/z} z^{-2}]$$

ricordiamo lo sviluppo di Mac Laurin dell'esponenziale:

$$e^{1/z} z^{-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n+2}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} \frac{1}{z^n} = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{(n-2)!} u(n-2) \right].$$

Come anticipato, frequente nelle applicazioni è la \mathcal{Z}_u -antitrasformazione di una funzione razionale, cioè rapporto tra polinomi $\mathcal{R} = P/Q$. Questa è una trasformata unilatera se e solo se è olomorfa all' ∞ , quindi se e solo se P ha grado non superiore a Q ; a meno di un termine costante, \mathcal{R} è una funzione razionale propria e può allora essere decomposta in fratti semplici, cfr. paragrafo V.3, e per la linearità il problema si riduce all'antitrasformazione di questi ultimi. A tale scopo, notiamo per $k \geq 2$ la formula

$$(4.8) \quad \mathcal{Z} \left[\lambda^{n-k} \binom{n-1}{k-1} u(n-k) \right] = \frac{1}{(z-\lambda)^k}, \quad |z| > |\lambda| > 0,$$

dove naturalmente la successione da trasformare si intende nulla per $n < k$. La (4.8) segue dal caso particolare $\lambda = 1$ mediante la (3.2). Nel caso particolare, la formula segue da (2.6) derivando $k-1$ volte:

$$\begin{aligned} \frac{(k-1)!}{(z-1)^k} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \cdots (n+k-2) z^{-n-k+1} \\ &= \sum_{m=k}^{+\infty} (m-k+1)(m-k+2) \cdots (m-1) z^{-m} \end{aligned}$$

e quindi è sufficiente dividere ambo i membri per $(k-1)!$. La (4.8) segue pure dall'esempio 4.4 mediante la (3.5).

Chiaramente da (4.8) segue una formula di antitrasformazione. Ad esempio

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{1}{(z-1)^3} \right] = \binom{n-1}{2} u(n-3) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} u(n-3)$$

e quindi per la (3.5) ritroviamo

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z^2}{(z-1)^3} \right] = \frac{(n+1)n}{2} u(n-1) = \frac{(n+1)n}{2} u(n).$$

Possiamo anche dedurre dalle formule per la trasformazione ricavate nei paragrafi precedenti altrettante formule di antitrasformazione.

ESEMPIO 4.6. Come illustrazione, consideriamo le formule (3.5) e (3.6) per la traslazione. Posto $f(z) = \mathcal{Z}[a(n)]$, la (3.5) si scrive $\mathcal{Z}[a(n+k)] = z^k f(z)$, per $k \in \mathbb{Z}$ fissato, e quindi

$$\mathcal{Z}^{-1}[z^k f(z)] = a(n+k) = \mathcal{Z}^{-1}[f(z)](n+k).$$

In particolare,

$$\mathcal{Z}_u^{-1}[z^k f(z)] = \mathcal{Z}_u^{-1}[f(z)](n+k);$$

notiamo che, per $k \in \mathbb{N}$, dobbiamo supporre $z^k f(z)$ olomorfa all' ∞ e questo implica che $a(n) = 0$, per $n \leq k-1$, quindi non c'è differenza tra (3.6) e (3.5).

Altre formule di antitrasformazione sono indicate nel capitolo XIV.

ESEMPIO 4.7. Calcoliamo

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z^2 - 1} \right].$$

A scopo illustrativo, proponiamo diversi modi di calcolo dell'antitrasformata.

I) decomponendo in fratti semplici:

$$\frac{z}{z^2 - 1} = \frac{z}{2} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) = \mathcal{Z}_u \left[\frac{1 - (-1)^n}{2} \right].$$

II) Mediante la formula di antitrasformazione (2.5). Per $n \geq 0$, le singolarità al finito di $\frac{z^n}{z^2-1}$ sono i poli semplici ∓ 1 . Essendo

$$R[1] = \frac{z^n}{2z} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2}, \quad R[-1] = \frac{z^n}{2z} \Big|_{z=-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2},$$

ritroviamo

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z^2 - 1} \right] = \frac{1 - (-1)^n}{2}.$$

III) riconducendoci all'antitrasformata di $z/(z^2 + 1)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z^2 - 1} \right] &= -\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{(z/j)^2 + 1} \right] = \frac{1}{j} \mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z/j}{(z/j)^2 + 1} \right] \\ &= j^{n-1} \mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z^2 + 1} \right] = j^{n-1} \sin n \frac{\pi}{2} u(n). \end{aligned}$$

IV) basato sulla serie geometrica:

$$\frac{z}{z^2 - 1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - (1/z)^2} = \frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^5} + \dots.$$

V) basato sulla formula per la trasformata di successioni periodiche:

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z^2 - 1} \right] = \mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{0 \cdot z^2 + 1 \cdot z}{z^2 - 1} \right] = 0, 1, 0, 1, \dots$$

periodica di periodo 2.

ESEMPIO 4.8. Calcoliamo

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z^3 - 1} \right].$$

Ragioniamo in base alla definizione; per $|z| > 1$:

$$\frac{z}{z^3 - 1} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 - 1/z^3} = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^6} + \dots \right) = \mathcal{Z}_u \left[\{0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots\} \right].$$

Allo stesso risultato arriviamo ricordando la formula per la trasformata di una successione periodica; se $a(n)$ ha periodo 3, risulta

$$\mathcal{Z}_u[a(n)] = \frac{a(0)z^3 + a(1)z^2 + a(2)z}{z^3 - 1},$$

che coincide con l'espressione da antitrasformare se $a(0) = a(1) = 0$ e $a(2) = 1$.

Decomponendo in fratti semplici:

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^3-1} &= z \frac{1}{z^3-1} = z \left(\frac{1/3}{z-1} - \frac{z/3+2/3}{z^2+z+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \mathcal{Z}_u \left[1 - \left(\cos n \frac{2}{3} \pi + \sqrt{3} \sin n \frac{2}{3} \pi \right) \right].\end{aligned}$$

Mediante la formula di antitrasformazione. Per $n \geq 0$, le singolarità di $\frac{z^n}{z^3-1}$ sono i poli semplici $z_0 = 1$, $z_1 = e^{j\frac{2}{3}\pi}$, $z_2 = e^{j\frac{4}{3}\pi}$. Inoltre

$$R[z_k] = \frac{z^n}{3z^2} \Big|_{z=z_k} = \frac{z_k^{n-2}}{3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z^3-1} \right] &= \frac{1}{3} \left(1 + e^{j\frac{2}{3}\pi(n-2)} + e^{j\frac{4}{3}\pi(n-2)} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + 2e^{j\pi(n-2)} \frac{e^{j\frac{\pi}{3}(n-2)} + e^{-j\frac{\pi}{3}(n-2)}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + 2(-1)^n \cos \frac{\pi}{3}(n-2) \right).\end{aligned}$$

ESEMPIO 4.9. Risolviamo il problema in \mathbb{N}_0

$$(4.9) \quad \begin{cases} y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 1 \\ y(0) = 1, \quad y(1) = 2 \end{cases}$$

La trasformata unilatera del primo membro è

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_u[y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n)] &= z^2Y - z^2y(0) - zy(1) \\ &\quad - 3[zY - zy(0)] + 2Y \\ &= (z^2 - 3z + 2)Y - z^2 + z\end{aligned}$$

Notiamo che il fattore che moltiplica Y è il polinomio caratteristico. Come è noto, la trasformata del secondo membro è

$$\mathcal{Z}_u[1] = \mathcal{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1}.$$

Dunque ricaviamo

$$Y = \frac{z^2 - z}{z^2 - 3z + 2} + \frac{z}{(z-1)(z^2 - 3z + 2)}.$$

Osservando che $z^2 - 3z + 2 = (z-1)(z-2)$, otteniamo

$$Y = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Antitrasformiamo.

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z-2} \right] = 2^n u(n).$$

Per antitrasformare l'altro termine, decomponiamolo in fratti semplici (mettendo da parte un fattore z):

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{c_{-2}[1]}{(z-1)^2} + \frac{R[1]}{z-1} + \frac{R[2]}{z-2}.$$

Inoltre

$$c_{-2}[1] = \frac{1}{z-2} \Big|_{z=1} = -1, \quad R[1] = D \frac{1}{z-2} \Big|_{z=1} = -1$$

e

$$R[2] = \frac{1}{(z-1)^2} \Big|_{z=2} = 1.$$

Pertanto

$$\frac{z}{(z-1)(z^2-3z+2)} = -\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z-2}.$$

Chiaramente

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z-1} \right] = u(n), \quad \mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{z-2} \right] = 2^n u(n).$$

D'altra parte, dalla (3.8) vediamo che

$$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{z}{(z-1)^2} \right] = nu(n).$$

In definitiva,

$$y(n) = 2^n u(n) - nu(n) - u(n) + 2^n u(n) = [2^{n+1} - (n+1)]u(n).$$

ESEMPIO 4.10. Risolviamo il problema ai valori iniziali:

$$\begin{cases} y(n+2) + y(n) = (-1)^n n \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

La trasformata del primo membro dell'equazione è $(z^2+1)Y$. Inoltre

$$\mathcal{Z}_u[(-1)^n n] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}_u[(-1)^n] = -z \frac{d}{dz} \frac{z}{z+1} = -\frac{z}{(z+1)^2}.$$

Dunque

$$(z^2+1)Y = -\frac{z}{(z+1)^2} \Rightarrow Y = -\frac{z}{(z^2+1)(z+1)^2}.$$

Resta da antitrasformare, e a tal fine decomponiamo in fratti semplici il secondo membro, tenendo un fattore z “da parte”:

$$\frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{Cz+D}{z^2+1}.$$

Moltiplicando per $(z+1)^2$ e ponendo $z = -1$, troviamo $B = 1/2$. La costante A è il residuo del primo membro in $z = -1$, che è polo di ordine 2, quindi si calcola, dopo aver moltiplicato per $(z+1)^2$, derivando e ponendo $z = -1$; dunque $A = 1/2$. Moltiplicando per z e passando al limite per $z \rightarrow \infty$, troviamo $0 = A + C$, quindi $C = -1/2$. Infine, ponendo $z = 0$ troviamo $D = 0$. Pertanto

$$-\frac{z}{(z^2+1)(z+1)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{z}{z+1} + \frac{z}{(z+1)^2} - \frac{z^2}{z^2+1} \right).$$

Come visto, i primi due fratti sono le \mathcal{Z}_u -trasformate di $(-1)^n$ e $(-1)^n n$, rispettivamente. D'altra parte, evidentemente il terzo fratto è la trasformata della successione $1, 0, -1, 0, \dots = \cos n \frac{\pi}{2}$. In definitiva

$$y(n) = \frac{1}{2} \left((-1)^n (n-1) + \cos n \frac{\pi}{2} \right).$$

Per antitrasformare, potevamo anche osservare che

$$Y = -\frac{z}{(z^2 + 1)(z + 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{z^2 + 1 - (z + 1)^2}{(z^2 + 1)(z + 1)^2}.$$

CAPITOLO VII

Estensioni della nozione di integrale

1. Funzioni integrabili e sommabili

In questo paragrafo estendiamo la teoria dell'integrazione, a partire dal caso delle funzioni continue su intervalli compatti. Vogliamo rimuovere l'ipotesi di compattezza. Il primo caso che consideriamo è quello di una funzione continua su un intervallo non compatto perché non limitato superiormente o inferiormente, o limitato ma privato di un estremo. Sia dunque f continua in $[a, b[$, dove $-\infty < a < b \leq +\infty$. Per ogni $T \in]a, b[$, f è continua sull'intervallo compatto $[a, T]$ ed ha quindi significato l'integrale

$$(1.1) \quad \int_a^T f(t) dt.$$

Esaminiamo tale espressione come funzione di T , per $T \rightarrow b-$.

DEFINIZIONE 1.1. La funzione f si dice *integrabile* in $[a, b[$ se l'integrale in (1.1) converge per $T \rightarrow b-$. In tal caso, poniamo

$$(1.2) \quad \int_a^b f(t) dt = \lim_{T \rightarrow b-} \int_a^T f(t) dt.$$

La funzione f si dice *sommabile* in $[a, b[$ se il modulo $|f|$ è integrabile.

Notiamo che l'espressione

$$(1.3) \quad \int_a^T |f(t)| dt,$$

analogamente a (1.1), ma con $|f|$ in luogo di f , è funzione crescente di T , quindi regolare in b : la condizione di sommabilità consiste dunque nella finitezza del limite.

Analogamente si ragiona nel caso che f sia continua in un intervallo del tipo $]a, b]$. Esaminiamo l'espressione

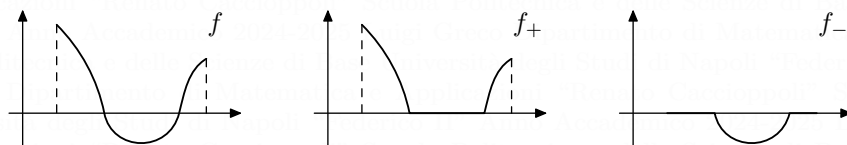
$$(1.4) \quad \int_S^b f(t) dt,$$

definita per $S \in]a, b[$, al tendere di $S \rightarrow a+$; f è integrabile se l'espressione converge, e in tal caso l'integrale su $]a, b]$ è per definizione pari al limite. Similmente per la sommabilità.

LEMMA 1.2. *Una funzione sommabile è integrabile.*

Dim. Basta esaminare il caso f reale, continua in $[a, b[$. Definiamo la *parte positiva* e la *parte negativa* di f :

$$(1.5) \quad f_+(t) = \max \{f(t), 0\} = \frac{f(t) + |f(t)|}{2}, \quad f_-(t) = \min \{f(t), 0\} = \frac{f(t) - |f(t)|}{2}.$$



È chiaro che $f_- \leq 0 \leq f_+$, $f = f_+ + f_-$, $|f| = f_+ - f_-$, dunque $-|f| \leq f_- \leq 0 \leq f_+ \leq |f|$ e quindi

$$-\int_a^T |f(t)| dt \leq \int_a^T f_-(t) dt \leq \int_a^T f_+(t) dt \leq \int_a^T |f(t)| dt.$$

Notiamo che l'integrale di f_+ è crescente e quello di f_- è decrescente, quindi sono entrambi regolari e, se f è sommabile, convergono. Pertanto risulta convergente pure

$$\int_a^T f(t) dt = \int_a^T f_-(t) dt + \int_a^T f_+(t) dt,$$

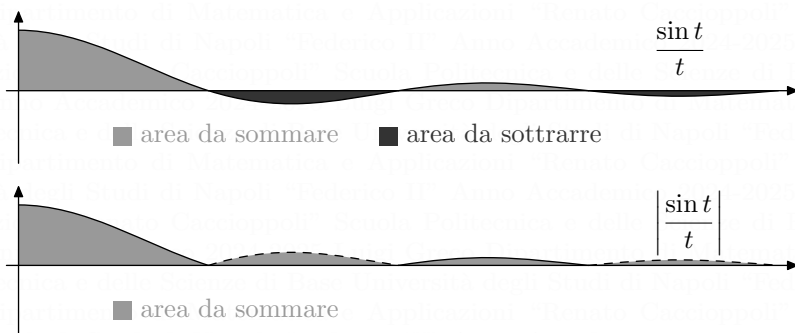
vale cioè la tesi.

Il risultato del lemma 1.2 non si inverte, esistono infatti funzioni integrabili, ma non sommabili. Una tale funzione si dice *semplicemente integrabile* e si parla di *integrale improprio*.

ESEMPIO 1.3. Consideriamo la funzione

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

sull'intervallo $[0, +\infty[$. In 0 la funzione non è definita, ma si prolunga per continuità assegnandole il valore 1. Tracciamo i diagrammi di f e $|f|$:



Il diagramma di f oscilla intorno all'asse delle ascisse e, intuitivamente, l'integrale di f su $[0, +\infty[$ è somma delle aree dei rettangoloidi relativi a f aventi per basi gli intervalli $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k = 0, 1, 2, \dots$; tali aree vanno però prese con segno: quelle dei rettangoloidi al disopra dell'asse vanno sommate, quelle dei rettangoloidi al disotto dell'asse vanno sottratte, e in questa operazione c'è una compensazione per la quale l'integrale è finito (converge), cioè f è integrabile.

D'altra parte, il diagramma di $|f|$ si ottiene da quello di f ribaltandone le porzioni al disotto dell'asse, quindi l'integrale di $|f|$ su $[0, +\infty[$ si ottiene sommando le aree dei rettangoloidi, tutte con segno positivo, senza alcuna compensazione, per cui l'integrale è infinito (diverge), dunque f non è sommabile.

In effetti, l'integrabilità non è difficile da verificare. Essendo la funzione continua, la questione è l'integrabilità intorno a $+\infty$, ad esempio su $[1, +\infty[$; per $T > 1$, integrando per parti troviamo

$$\int_1^T \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^T - \int_1^T \frac{\cos t}{t^2} dt$$

ed entrambi i termini a secondo membro convergono per $T \rightarrow +\infty$, il secondo essendo la funzione integranda sommabile. Verifichiamo pure che la funzione non è sommabile. Anche in questo caso,

basta considerare l'intervallo $[1, +\infty[$. Notiamo la disuguaglianza $|\sin t| \geq \sin^2 t$, quindi

$$\int_1^T \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \int_1^T \frac{\sin^2 t}{t} dt = \frac{1}{2} \int_1^T \frac{1}{t} dt - \frac{1}{2} \int_1^T \frac{\cos 2t}{t} dt$$

e per concludere osserviamo che nell'ultimo membro il primo integrale diverge, poiché $1/t$ non è integrabile, mentre il secondo integrale converge, in quanto, ragionando come prima, vediamo che $(\cos 2t)/t$ è integrabile.

In definitiva, f è semplicemente integrabile su $[0, +\infty[$ e

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

è un integrale improprio.

Proseguiamo nell'estensione della nozione di integrale e consideriamo il caso di una funzione f continua su un intervallo del tipo $]a, b[$, con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Scegliamo $c \in]a, b[$ e studiamo f su ciascuno degli intervalli $]a, c[$ e $[c, b[$: ad entrambi manca un solo estremo e quindi essi sono del tipo considerato precedentemente.

DEFINIZIONE 1.4. Diciamo che f è integrabile in $]a, b[$ se essa risulta integrabile su entrambi gli intervalli $]a, c[$ e $[c, b[$ (nel senso della definizione 1.1). In tal caso, poniamo

$$(1.6) \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Anche in questo caso, diremo f sommabile se $|f|$ è integrabile.

I due integrali a secondo membro della (1.6) sono intesi secondo la definizione 1.1. In altri termini, se f è integrabile in $]a, b[$, definiamo l'integrale ponendo

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{s \rightarrow a+} \int_s^c f(t) dt + \lim_{T \rightarrow b-} \int_c^T f(t) dt,$$

dove i limiti devono esistere finiti *entrambi, separatamente*.

Notiamo che la definizione *non* dipende da c : vale a dire che per ogni altra scelta di un punto $c' \in]a, b[$, né la condizione di integrabilità, né il valore dell'integrale cambiano. Infatti abbiamo

$$\int_s^{c'} f(t) dt = \int_s^c f(t) dt + \int_c^{c'} f(t) dt, \quad \int_{c'}^T f(t) dt = \int_c^T f(t) dt - \int_c^{c'} f(t) dt.$$

Infine, consideriamo il caso di f continua in un intervallo $]a, b[$ privato di un numero finito di punti interni $c_1 < \dots < c_n$. Poniamo $c_0 = a$ e $c_{n+1} = b$, quindi

$$c_0 < c_1 < \dots < c_n < c_{n+1},$$

ed esaminiamo f su ciascuno degli intervalli $]c_i, c_{i+1}[$, $i = 0, 1, \dots, n$.

DEFINIZIONE 1.5. Diciamo che f è integrabile in $]a, b[$ se essa risulta integrabile in ogni intervallo $]c_i, c_{i+1}[$, $i = 0, 1, \dots, n$. In tal caso, poniamo

$$(1.7) \quad \int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^n \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t) dt.$$

Diremo f sommabile se $|f|$ è integrabile.

OSSERVAZIONE 1.6. L'integrale non cambia modificando l'integrando f in un numero finito di punti. Precisamente, sia f integrabile in (a, b) e sia g definita in (a, b) tale che $g(t) = f(t)$ salvo che in un numero finito di punti. In queste ipotesi, pure g è integrabile e risulta

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

ESERCIZIO 1.7. Verificare che la funzione $(\sin t)/t^p$ è integrabile in $[1, +\infty[$ per $p > 0$ ed è sommabile per $p > 1$. (Confrontare con l'esempio 1.3.) Notare che, con opportuni cambiamenti di variabile, si ricava in particolare che gli integrali

$$\int_0^{+\infty} \sin e^u du, \quad \int_1^{+\infty} \sin u^2 du \quad (p = 1/2),$$

sono semplicemente convergenti, pur non essendo infinitesimi gli integrandi.

1.1. Integrale a valor principale. Diamo in questo paragrafo una nozione di integrale più debole di quella introdotta per le funzioni integrabili.

DEFINIZIONE 1.8. Sia f continua nell'intervallo $[a, b]$, escluso un punto interno $c \in]a, b[$. L'espressione

$$(1.8) \quad \int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t) dt = \int_{[a, b] -]c-\varepsilon, c+\varepsilon[} f(t) dt$$

è definita per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo. Diremo che l'integrale di f esiste nel senso del valor principale se l'espressione in (1.8) converge per $\varepsilon \rightarrow 0+$. In tal caso, il limite si dice integrale di f su $[a, b]$ nel senso del valor principale e si indica con v.p. $\int_a^b f(t) dt$. In altri termini, poniamo

$$\text{v.p.} \int_a^b f(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(t) dt + \int_{c+\varepsilon}^b f(t) dt \right).$$

Sia ora f continua in $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Diremo che l'integrale di f su \mathbb{R} esiste nel senso del valor principale se l'espressione

$$(1.9) \quad \int_{-R}^R f(t) dt$$

converge per $R \rightarrow +\infty$. In tal caso poniamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(t) dt.$$

OSSERVAZIONE 1.9. Secondo la definizione 1.5, f è integrabile in $[a, b]$ se è integrabile in $[a, c[$ e in $]c, b]$, dunque per $\varepsilon \rightarrow 0+$ entrambi gli integrali che figurano a primo membro in (1.8) sono convergenti e tale risulta pure la somma, quindi l'integrale di f esiste nel senso del valor principale; chiaramente (nel caso di convergenza, il limite della somma è la somma dei limiti) i valori dell'integrale secondo le due nozioni coincidono. D'altra parte, può accadere che *separatamente* i due integrali a primo membro in (1.8) non convergano, mentre converge la somma; cioè l'integrale esiste nel senso del valor principale, ma non del senso dell'integrabilità. Ad esempio, questo

accade per la funzione $f(t) = 1/t$ sull'intervallo $[-1, 1]$. Osserviamo che f è continua in $[-1, 1] - \{0\}$ ed è dispari, quindi $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{t} dt + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t} dt = 0$$

e v.p. $\int_{-1}^1 1/t dt = 0$. È chiaro che $1/t$ non è integrabile, poiché ciascuno degli integrali diverge:

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{t} dt = -\log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} +\infty$$

e, similmente, l'altro diverge negativamente (l'espressione (1.8) si presenta in forma indeterminata $\infty - \infty$).

Analoghe considerazioni valgono nel caso dell'intervallo $]-\infty, +\infty[$. La funzione f è integrabile in $]-\infty, +\infty[$ se lo è in $[0, +\infty[$ e in $]-\infty, 0]$, cioè se le due espressioni

$$(1.10) \quad \int_0^R f(t) dt, \quad \int_{-R}^0 f(t) dt,$$

convergono *separatamente* per $R \rightarrow +\infty$. L'integrale in (1.9) è la loro somma e quindi converge anch'esso. D'altra parte, l'integrale in (1.9) può risultare convergente anche senza che convergano gli integrali (1.10). Questo accade ad esempio per la funzione $f(t) = t/(t^2 + 1)$: essa non è integrabile in $[0, +\infty[$ né in $]-\infty, 0]$ poiché

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{t}{t^2 + 1} dt = +\infty, \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^0 \frac{t}{t^2 + 1} dt = -\infty,$$

mentre (per la simmetria) $\forall R > 0$ risulta $\int_{-R}^R \frac{t}{t^2 + 1} dt = 0$ e quindi

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + 1} dt = 0.$$

1.2. Criteri di sommabilità. In generale, studiare l'integrabilità o la sommabilità di una funzione in base alla definizione può essere molto laborioso. Formuliamo in questo paragrafo alcune condizioni sufficienti ad assicurare la sommabilità (o la non sommabilità) di una funzione, che non richiedono di valutarne esplicitamente l'integrale. In base al lemma 1.2 (dato nel primo caso di definizione di sommabilità, ma che si estende ovviamente a tutti gli altri casi considerati), queste permettono di mostrare anche l'integrabilità. Possiamo chiaramente limitarci a considerare funzioni non-negative. Stabiliremo i nostri *criteri di sommabilità* e di *non sommabilità* procedendo per confronto, in base alla ovvia osservazione seguente. Se f e g sono due funzioni verificanti $0 \leq f \leq g$, valgono le implicazioni:

$$\begin{aligned} g \text{ sommabile} &\Rightarrow f \text{ sommabile;} \\ f \text{ non sommabile} &\Rightarrow g \text{ non sommabile.} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.10. È chiara l'analogia con il caso delle serie a termini non-negativi, cfr. paragrafo I.A.

Considereremo dunque una classe di funzioni per le quali la sommabilità si studia facilmente in base alla definizione e con queste confronteremo la generica funzione

assegnata. Poiché tutti i casi in cui abbiamo dato la nozione di sommabilità si riconducono a quello della definizione 1.1 di una funzione continua in un intervallo del tipo $[a, b[$, o $]a, b]$, ci limiteremo a questo caso.

La classe di funzioni che considereremo è quella delle potenze. Nel caso dell'intervallo $[a, b[$ limitato (cioè $b \in \mathbb{R}$), consideriamo la funzione

$$(1.11) \quad g(t) = \frac{1}{(b-t)^\alpha},$$

e determiniamo i valori di $\alpha > 0$ per cui essa è sommabile. Notiamo che la funzione diverge in b . Per $\alpha \neq 1$, abbiamo

$$\int_a^T \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt = -\frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{(b-t)^{\alpha-1}} \right]_{t=a}^{t=T} = \frac{(b-a)^{1-\alpha} - (b-T)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

e quindi l'integrale diverge per $\alpha > 1$ e converge per $\alpha < 1$; in quest'ultimo caso, abbiamo

$$\lim_{T \rightarrow b-} \int_a^T \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Per $\alpha = 1$, abbiamo:

$$\int_a^T \frac{1}{b-t} dt = -\log \frac{b-T}{b-a} \xrightarrow{T \rightarrow b-} +\infty.$$

In definitiva, g è sommabile se e solo se $\alpha < 1$. Ricaviamo facilmente il seguente criterio di sommabilità, o non sommabilità.

PROPOSIZIONE 1.11. *Sia $f \geq 0$ continua in $[a, b[$. Se esistono $K > 0$ e $\alpha < 1$ tali che risulti*

$$f(t) \leq \frac{K}{(b-t)^\alpha}$$

in un intorno sinistro di b , la funzione è sommabile. Se risulta

$$f(t) \geq \frac{K}{b-t}$$

in un intorno sinistro di b , con $K > 0$, la funzione f non è sommabile.

Lasciamo al lettore il compito di svolgere analoghe considerazioni nel caso dell'intervallo $]a, b]$ limitato. Noi esaminiamo il caso di un intervallo non limitato. Per semplicità, consideriamo l'intervallo $[1, +\infty[$ e determiniamo per quali $\alpha > 0$ la funzione

$$(1.12) \quad g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$$

è sommabile. Notiamo che la funzione è infinitesima a $+\infty$. Per $\alpha \neq 1$, abbiamo

$$\int_1^T \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{T^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

quindi l'integrale diverge se $\alpha < 1$ e converge per $\alpha > 1$. Con calcoli analoghi a quelli già svolti, vediamo che l'integrale diverge anche per $\alpha = 1$. Dunque la funzione g è sommabile se e solo se $\alpha > 1$. Ne ricaviamo subito il seguente criterio.

PROPOSIZIONE 1.12. *Sia $f \geq 0$ continua in $[1, +\infty[$. Se esistono $K > 0$ e $\alpha > 1$ tali che risulti*

$$f(t) \leq \frac{K}{t^\alpha}$$

per t abbastanza grande, la funzione è sommabile. Se risulta

$$f(t) \geq \frac{K}{t}$$

per t abbastanza grande, con $K > 0$, la funzione f non è sommabile.

OSSERVAZIONE 1.13. È opportuno illustrare graficamente le considerazioni svolte. Consideriamo prima l'intervallo limitato $[a, b]$. L'espressione che definisce g in (1.11) è crescente con α (per la precisione, questo vale per ogni t fissato se l'intervallo ha ampiezza non superiore a 1, come è lecito supporre essendo i nostri ragionamenti significativi per t vicino a b). Nella figura seguente consideriamo l'intervallo $[1, 2]$, per alcuni valori di α . Geometricamente, la sommabilità di g significa che il rettangoloide ad essa relativo ha area finita e questo accade se il diagramma non *sale* troppo rapidamente. Se f diverge, la disuguaglianza

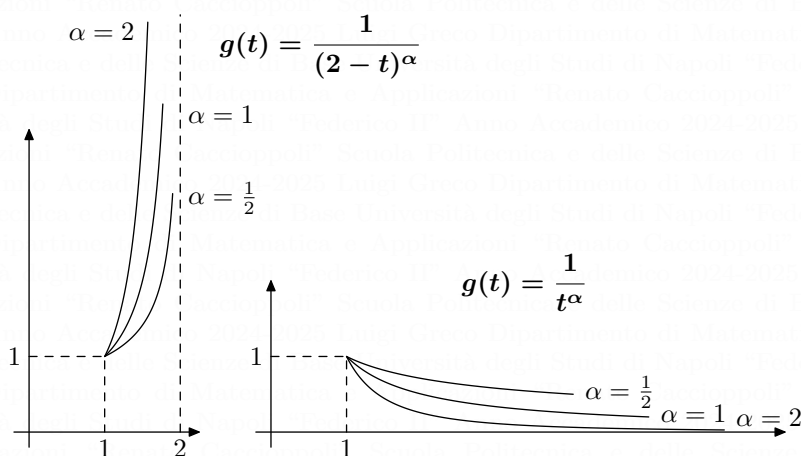
$$f(t) \leq \frac{K}{(b-t)^\alpha}$$

del lemma si enuncia dicendo che f è infinita in b di ordine non superiore a α .

Consideriamo ora l'intervallo non limitato $[1, +\infty[$. L'espressione (1.12) che definisce g in questo caso è decrescente con α . Stavolta, il rettangoloide relativo a g ha area finita se il diagramma della funzione *si schiaccia* sull'asse delle ascisse abbastanza rapidamente. La disuguaglianza

$$f(t) \leq \frac{K}{t^\alpha}$$

si enuncia dicendo che f è infinitesima a $+\infty$ di ordine non inferiore a α .



ESEMPIO 1.14. La funzione $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1-t^2}}$ è sommabile in $(-1, 1)$, essendo infinita in entrambi gli estremi di ordine $1/2$. La funzione $t \mapsto e^{-t^2}$ è sommabile in \mathbb{R} , in quanto infinitesima di ordine infinitamente grande a $\mp\infty$.

ESEMPIO 1.15. Studiamo la sommabilità su $[0, \pi]$ della funzione

$$f(t) = \frac{1}{a + b \cos t}$$

al variare di $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Se $|a| > |b|$ il denominatore non si annulla e f è continua, quindi sommabile su $[0, \pi]$. Supponiamo ora $|a| \leq |b|$, quindi $b \neq 0$, e mostriamo che f non è sommabile facendo vedere che essa è infinita di ordine maggiore o uguale a 1 in un punto. Poiché risulta $a/b \in [-1, 1]$, esiste $t_0 \in [0, \pi]$ tale che $\cos t_0 = -a/b$. Ne segue

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |(t - t_0)f(t)| = \frac{1}{|b|} \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{t - t_0}{\cos t - \cos t_0} \right| = \frac{1}{|b \sin t_0|} \in [1/|b|, +\infty],$$

avendo posto $1/|\sin t_0| = +\infty$ se $\sin t_0 = 0$. Scelto $k \in]0, 1/|b|$, risulta $|f(t)| > k/|t - t_0|$ per $|t - t_0| > 0$ abbastanza piccolo, quindi f non è sommabile per il lemma 1.11.

ESERCIZIO 1.16. Studiare la sommabilità su $[0, 2\pi]$ della funzione

$$g(t) = \frac{1}{a + b \cos t + c \sin t}$$

al variare di $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tutti nulli. (Suggerimento: osservare che

$$b \cos t + c \sin t = \sqrt{b^2 + c^2} \cos(t - t_1)$$

per un opportuno $t_1 \in [0, 2\pi]$, quindi ci si riconduce al caso precedente della funzione f .)

1.3. Sommabilità per funzioni di più variabili. Esaminiamo il caso delle funzioni di due variabili; considerazioni analoghe si possono fare nel caso generale.

Nel seguito, quando parleremo di insiemi misurabili, intenderemo misurabili secondo Peano-Jordan. Sia f una funzione continua in un insieme misurabile X non compatto. Indichiamo con $\mathcal{K}(X)$ la classe degli insiemi compatti misurabili contenuti in X . Dunque, per ogni $K \in \mathcal{K}(X)$ ha significato l'integrale

$$(1.13) \quad \iint_K |f| \, dx \, dy.$$

Diremo che f è sommabile in X se l'insieme numerico descritto dall'integrale (1.13) al variare di $K \in \mathcal{K}(X)$ è limitato.

Sia f sommabile in X . Se $f \geq 0$, definiamo l'integrale ponendo

$$(1.14) \quad \iint_X f \, dx \, dy = \sup_{K \in \mathcal{K}(X)} \iint_K f \, dx \, dy.$$

In generale, se f è reale, la decomponiamo nella somma della sua parte positiva e della sua parte negativa, $f = f_+ + f_-$, come nella dimostrazione del lemma 1.2, e poniamo

$$(1.15) \quad \iint_X f \, dx \, dy = \iint_X f_+ \, dx \, dy - \iint_X (-f_-) \, dx \, dy,$$

dove gli integrali a secondo membro sono di funzioni non-negative e sono intesi nel senso della (1.14). Per f complessa, ragioniamo su parte reale e coefficiente dell'immaginario.

Osserviamo che non è necessario considerare tutti gli elementi di $\mathcal{K}(X)$. Diremo che la successione $(K_n)_n$ di elementi di $\mathcal{K}(X)$ è *invadente* X se gode delle proprietà:

- è crescente, cioè risulta $K_n \subseteq K_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- per ogni $K \in \mathcal{K}(X)$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq K_n$.

LEMMA 1.17. *La funzione f è sommabile se e solo se il limite*

$$\lim_n \iint_{K_n} |f| dx dy$$

è finito. In caso di sommabilità, risulta

$$\iint_X f dx dy = \lim_n \iint_{K_n} f dx dy.$$

Applicando il lemma 1.17, verifichiamo che la funzione $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ è sommabile in \mathbb{R}^2 . Scegliamo come domini invadenti i cerchi chiusi di centro l'origine:

$$C_n = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2 \}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Su ogni cerchio l'integrale di f si calcola facilmente passando a coordinate polari:

$$\iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = 2\pi \int_0^n e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi(1 - e^{-n^2}).$$

Pertanto, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, troviamo f sommabile e

$$(1.16) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi.$$

D'altra parte, come domini invadenti possiamo anche scegliere i quadrati

$$Q_n = [-n, n] \times [-n, n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Essendo f prodotto di funzioni di una sola variabile, l'integrale su Q_n si scrive come prodotto di due integrali semplici:

$$\iint_{Q_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy = \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2,$$

poiché i due integrali differiscono solo per il nome della variabile di integrazione. Passando al limite e confrontando con (1.16), troviamo infine

$$(1.17) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Notiamo che le primitive di e^{-x^2} non sono elementarmente esprimibili.

Osserviamo che per le funzioni di più variabili non abbiamo dato la nozione di integrabilità.

ESERCIZIO 1.18. Denotato con P il punto di coordinate (x, y) , considerare per $\alpha > 0$ la funzione

$$f(P) = f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha/2} = \frac{1}{\overline{OP}^\alpha}.$$

Mostrare che f è sommabile in $A = \{P : 0 < \overline{OP} \leq 1\}$ se e solo se $\alpha < 2$ ed è sommabile in $B = \{P : \overline{OP} \geq 1\}$ se e solo se $\alpha > 2$.

1.4. Cenni sull'integrale di Lebesgue. Per motivi di spazio e per non appesantire queste lezioni, non riteniamo opportuno introdurre la teoria dell'integrazione di Lebesgue, ma in questo paragrafo ci limiteremo a pochi cenni, sottolineando alcune esigenze di una teoria dell'integrazione più generale di quella esposta, che riguarda le funzioni con un numero finito di discontinuità.

Uno dei problemi fondamentali dell'analisi è quello del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Nella sua formulazione più semplice, il problema è il seguente. Siano f_n , $n \in \mathbb{N}$, e f definite nell'intervallo (a, b) e supponiamo che $f(x) = \lim_n f_n(x)$, per $x \in (a, b)$. In queste ipotesi, vogliamo ottenere

$$(1.18) \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx.$$

L'uguaglianza si può riscrivere

$$\int_a^b \lim_n f_n(x) dx = \lim_n \int_a^b f_n(x) dx,$$

che giustifica la terminologia usata. Abbiamo già incontrato il problema del passaggio al limite sotto il segno di integrale. Ad esempio, il risultato del lemma III.2.6 può essere visto in questa ottica. Questo vale anche per i lemmi 2.11 e 2.12 che seguono. Essendo la somma di una serie convergente il limite della successione delle somme parziali, anche il problema di integrare termine a termine una serie rientra in quello di passaggio al limite sotto il segno di integrale, come pure quello di derivare sotto il segno di integrale, essendo la derivata il limite del rapporto incrementale.

Prima di porre il problema della validità dell'uguaglianza (1.18), bisogna vedere se il primo membro ha significato, cioè la teoria dell'integrazione nota è applicabile alla funzione f . È chiaro che supponiamo integrabile ogni f_n , ma può accadere che il limite puntuale f sia, ad esempio, discontinua in ogni punto dell'intervallo (a, b) , quindi tale funzione non rientra nella teoria da noi esposta. Non rientra in generale neppure nella teoria dell'integrazione secondo Riemann, che non abbiamo discusso. Le ipotesi che si fanno usualmente sul tipo di convergenza delle f_n verso f servono soprattutto ad assicurare che f sia integrabile. Per ottenere risultati generali di passaggio al limite sotto il segno di integrale, occorre poter considerare classi più ampie di funzioni. Le funzioni di cui tratta la teoria della misura di Lebesgue si chiamano *funzioni misurabili (secondo Lebesgue)*. Esse costituiscono una classe estremamente ampia; diventa *delicato* dare un esempio di funzione non misurabile. Tale classe è chiusa rispetto alla convergenza puntuale di successioni.

D'altra parte, le funzioni con cui avremo a che fare saranno nella maggior parte dei casi del tipo considerato sin qui, avranno cioè un numero finito di punti di discontinuità, o, se definite in intervalli non limitati, avranno un numero finito di discontinuità in ogni sottointervallo limitato. Più in generale, supporremo che ogni funzione considerata sia di questo tipo, una volta modificata opportunamente. Diamo la definizione di *insieme di misura nulla*.

DEFINIZIONE 1.19. Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ ha misura nulla secondo Lebesgue se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una successione (finita o numerabile) di intervalli $]a_n, b_n[$ che ricoprono E e tali che la somma delle ampiezze sia minore di ε :

$$\bigcup_n]a_n, b_n[\supseteq E, \quad \sum_n (b_n - a_n) < \varepsilon.$$

Gli insiemi di misura nulla si dicono anche *trascurabili*.

Si dice che una proprietà \mathcal{P} è verificata quasi ovunque (q.o.) nell'insieme $X \subseteq \mathbb{R}$ se esiste un sottoinsieme trascurabile $E \subset X$ tale che \mathcal{P} valga in $X \setminus E$. In altri termini, l'insieme

$$\{ x \in X : \mathcal{P} \text{ è falsa in } x \}$$

ha misura nulla.

Chiaramente, ogni insieme finito o numerabile è trascurabile; in particolare, \mathbb{Q} è trascurabile. Esistono insiemi trascurabili più che numerabili. Vediamo qualche esempio di proprietà verificata q.o.: risulta $x^2 > 0$ per q.o. $x \in \mathbb{R}$; la successione di funzioni $f_n(x) = x^n$ converge q.o. nell'intervallo $[0, 1]$ alla funzione $f \equiv 0$.

La teoria dell'integrazione di Lebesgue non distingue tra funzioni coincidenti quasi ovunque (quello che accade negli insiemi di misura nulla è ininfluente: per tal motivo, essi sono detti trascurabili). Questo è analogo a quanto detto nell'osservazione 1.6 per la teoria dell'integrazione qui esposta. Consideriamo ad esempio la seguente funzione di Dirichlet, definita nell'intervallo $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0, & \text{se } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

La funzione f è discontinua in ogni punto dell'intervallo $[0, 1]$, ma risulta $f(x) = 0$ q.o. e quindi, modificandola in un insieme trascurabile, otteniamo la funzione identicamente nulla: ai fini dell'integrazione, f può essere sostituita con quest'ultima.

Nel seguito, supporremo che ogni funzione considerata possa essere modificata su un insieme trascurabile in modo da rientrare nella teoria dell'integrazione da noi esposta, cioè abbia su ogni intervallo limitato un numero finito di discontinuità. Questo consente anche di considerare funzioni definite q.o., poiché queste possono essere prolungate in maniera arbitraria sui sottoinsiemi trascurabili.

Diamo ora alcuni risultati fondamentali della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue. In ciascuno degli enunciati seguenti, il lettore può intendere l'ipotesi di sommabilità per le funzioni considerate nel senso della teoria qui esposta; in ogni caso però cercheremo di formulare gli enunciati nella maniera più aderente alla teoria dell'integrazione di Lebesgue. Ci occupiamo innanzitutto del passaggio al limite sotto il segno di integrale.

TEOREMA 1.20 (di Lebesgue della convergenza dominata). *Siano f_n , $n \in \mathbb{N}$, funzioni sommabili in X e convergenti q.o. a f in X . Supponiamo inoltre che esista g sommabile in X e verificante*

$$(1.19) \quad |f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{per q.o. } x \in X, \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

In queste ipotesi, la funzione f è sommabile in X ed è lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale

$$\int_X f(x) dx = \lim_n \int_X f_n(x) dx.$$

La condizione (1.19), cioè che le f_n siano maggiorate da una stessa funzione sommabile, dà il nome al teorema.

ESEMPIO 1.21. Risulta

$$\lim_n \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = 1.$$

Ci occupiamo ora delle formule di riduzione. Ci limitiamo al caso delle funzioni di due variabili; nel caso generale si possono svolgere considerazioni analoghe.

TEOREMA 1.22 (di Fubini). *Sia $f = f(x, y)$ una funzione sommabile in \mathbb{R}^2 . Per q.o. $y \in \mathbb{R}$, la funzione $x \mapsto f(x, y)$ è sommabile in \mathbb{R} e la funzione*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

è sommabile in \mathbb{R} . Per q.o. $x \in \mathbb{R}$, la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è sommabile in \mathbb{R} e la funzione

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

è sommabile in \mathbb{R} . Inoltre risulta

$$(1.20) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy.$$

In particolare, l'uguaglianza tra il secondo e il terzo membro in (1.20) significa che è possibile invertire l'ordine di integrazione.

Il seguente teorema fornisce un criterio di sommabilità.

TEOREMA 1.23 (di Tonelli). *Se uno dei due integrali iterati*

$$(1.21) \quad \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dx, \quad \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| dy,$$

è finito, la funzione $f = f(x, y)$ è sommabile in \mathbb{R}^2 .

Frequentemente, si usa il teorema di Tonelli per assicurare la condizione di sommabilità di f , in modo da applicare poi il teorema di Fubini.

Una applicazione importante dei teoremi di Fubini e Tonelli riguarda la definizione del *prodotto di convoluzione* (o semplicemente convoluzione) tra due funzioni sommabili.

DEFINIZIONE 1.24. Date le funzioni g e h sommabili in \mathbb{R} , si chiama convoluzione di g per h la funzione $g * h$ sommabile in \mathbb{R} definita ponendo

$$(1.22) \quad g * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) h(x - y) dy, \quad \text{per q.o. } x \in \mathbb{R}.$$

(Osservare l'analogia con la formula (VI.1.1).)

Per giustificare la definizione 1.24, osserviamo che la funzione $f(x, y) = g(y) h(x - y)$ è sommabile in \mathbb{R}^2 per il teorema di Tonelli, in quanto, ponendo $t = x - y$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y) h(x - y)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)| dy \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty.$$

Il teorema di Fubini garantisce allora la possibilità di definire la funzione $g * h$ mediante la (1.22) e la sua sommabilità. Inoltre, invertendo l'ordine di integrazione,

$$(1.23) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g * h(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) dy \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx.$$

OSSERVAZIONE 1.25. Il prodotto di convoluzione è associativo e commutativo, cioè, se f , g e h sono sommabili, risulta

$$(f * g) * h = f * (g * h), \quad f * g = g * f.$$

OSSERVAZIONE 1.26. Mostriamo che risulta

$$(1.24) \quad f(-x) * g(-x) = (f * g)(-x).$$

In effetti

$$\begin{aligned} f(-x) * g(-x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(-y) g(-(x-y)) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-y) g(-x+y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(-x-t) dt = (f * g)(-x). \end{aligned}$$

In particolare, (1.24) implica che $f * g$ è pari se f e g sono entrambe funzioni pari o funzioni dispari.

2. Calcolo degli integrali definiti

In questo paragrafo mostriamo l'applicazione dei teoremi dei residui al calcolo di alcuni integrali definiti.

2.1. Integrali di funzioni razionali di coseno e seno. Consideriamo integrali del tipo

$$(2.1) \quad \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta,$$

essendo $\mathcal{R}(X, Y)$ una funzione razionale delle due variabili reali X e Y , continua sulla circonferenza unitaria di equazione $X^2 + Y^2 = 1$. Valendo la relazione fondamentale $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$, la funzione integranda in (2.1) è continua. Ricordando le espressioni (I.5.6) di $\cos \vartheta$ e $\sin \vartheta$ mediante la formula di Eulero e ponendo $z = e^{j\vartheta}$, scriviamo

$$\cos \vartheta = \frac{z + 1/z}{2}, \quad \sin \vartheta = \frac{z - 1/z}{2j}, \quad dz = j e^{j\vartheta} d\vartheta \Rightarrow d\vartheta = \frac{1}{j} \frac{dz}{z}.$$

Inoltre, al variare di ϑ in $[0, 2\pi]$, z descrive (in verso antiorario) la circonferenza unitaria Γ nel piano complesso. Pertanto, l'integrale (2.1) si trasforma nel seguente

$$\frac{1}{j} \int_{\Gamma} \mathcal{R} \left(\frac{z + 1/z}{2}, \frac{z - 1/z}{2j} \right) \frac{dz}{z},$$

che è del tipo

$$\frac{1}{j} \int_{\Gamma} \mathcal{R}_1(z) dz$$

per un'opportuna funzione razionale \mathcal{R}_1 , e può essere calcolato mediante il I teorema dei residui:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta = 2\pi (R[z_1] + \dots + R[z_n]),$$

essendo chiaramente $R[z_1], \dots, R[z_n]$ i residui di \mathcal{R}_1 nei suoi poli che cadono internamente a Γ , cioè di modulo minore di 1.

OSSERVAZIONE 2.1. Qualche semplice considerazione permette di estendere il procedimento ad integrali leggermente più generali di (2.1).

(i) Poiché l'integrando $\mathcal{R}(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$ è periodico di periodo 2π , l'integrale esteso ad un qualsiasi intervallo di ampiezza pari al periodo $[a, a + 2\pi]$, $\forall a \in \mathbb{R}$, uguaglia quello esteso all'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$\int_a^{a+2\pi} \mathcal{R}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \mathcal{R}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) d\vartheta.$$

(ii) Notiamo che

$$\int_0^\pi \mathcal{R}(\cos \vartheta) d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \mathcal{R}(\cos \vartheta) d\vartheta,$$

poiché l'integrando $\mathcal{R}(\cos \vartheta)$ è funzione pari.

(iii) Consideriamo l'integrale

$$\int_0^\pi \mathcal{R}(\cos^2 \vartheta, \sin \vartheta \cos \vartheta, \sin^2 \vartheta) d\vartheta,$$

essendo \mathcal{R} funzione razionale. Le espressioni da cui dipende \mathcal{R} nell'integrando possono essere scritte come funzioni razionali di $\cos 2\vartheta$ e $\sin 2\vartheta$:

$$\cos^2 \vartheta = \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2}, \quad \sin \vartheta \cos \vartheta = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta, \quad \sin^2 \vartheta = \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2}$$

e quindi chiaramente con la sostituzione $t = 2\vartheta$ l'integrale si trasforma in uno del tipo (2.1).

ESEMPIO 2.2. Consideriamo ad esempio l'integrale

$$\int_{-\pi}^\pi \frac{1 - 2 \cos \vartheta}{5 - 4 \cos \vartheta} d\vartheta.$$

Procedendo come indicato, giungiamo all'integrale

$$\frac{1}{j} \int_\Gamma \frac{1 - (z + 1/z)}{5 - 2(z + 1/z)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{j} \int_\Gamma \frac{z^2 - z + 1}{z(2z^2 - 5z + 2)} dz.$$

Le singolarità dell'integrando che cadono internamente al cerchio unitario sono 0 e $1/2$, con residui

$$R[0] = \left. \frac{z^2 - z + 1}{2z^2 - 5z + 2} \right|_{z=0} = \frac{1}{2}, \quad R[1/2] = \left. \frac{z^2 - z + 1}{z(4z - 5)} \right|_{z=1/2} = -\frac{1}{2}$$

e quindi l'integrale è nullo.

OSSERVAZIONE 2.3. Vale la pena, a scopo illustrativo, provare a calcolare l'integrale anche mediante la sostituzione razionalizzante $t = \tan \frac{\vartheta}{2}$, che comporta

$$\cos \vartheta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \vartheta = 2 \arctan t, \quad d\vartheta = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Quando ϑ varia tra $-\pi$ e π , t varia tra $-\infty$ e $+\infty$. Pertanto l'integrale si trasforma in

$$(2.2) \quad 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2 - 1}{(9t^2 + 1)(1 + t^2)} dt.$$

Per valutare tale integrale, bisogna decomporre in fratti semplici l'integrando. Nel paragrafo 2.2 illustreremo il calcolo mediante la teoria dei residui.

ESEMPIO 2.4. Ricaviamo una formula per l'integrale

$$(2.3) \quad I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ verificanti $a^2 > b^2 + c^2$ (cfr. esercizio 1.16). Questa condizione assicura che il denominatore non si annulli e sia concorde col coefficiente a , $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi l'integrando è continuo. Chiaramente, anche I è concorde con a . Il caso $b = c = 0$ è banale, poiché l'integrando risulta costante, quindi supponiamo che uno almeno dei due coefficienti sia non nullo. Con la posizione $z = e^{jx}$, abbiamo

$$a + b \cos x + c \sin x = a + b \frac{z + 1/z}{2} + c \frac{z - 1/z}{2j} = \frac{1}{2z} (\alpha z^2 + 2a z + \bar{\alpha}),$$

dove $\alpha = b - jc \neq 0$, e

$$I = \frac{2}{j} \int_{|z|=1} \frac{dz}{\alpha z^2 + 2a z + \bar{\alpha}}.$$

Osserviamo che $|z| = 1 \Rightarrow \alpha z^2 + 2a z + \bar{\alpha} \neq 0$ (questa è la continuità dell'integrando). Infatti, se $|z| = 1$, per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$|\alpha z^2 + 2a z + \bar{\alpha}| \geq 2|a z| - (|\alpha z^2| + |\bar{\alpha}|) = 2(|a| - |\alpha|) > 0.$$

Detti z_1 e z_2 gli zeri di $\alpha z^2 + 2a z + \bar{\alpha}$ e supposto com'è lecito $|z_1| \leq |z_2|$, risulta $z_1 z_2 = \bar{\alpha}/\alpha$, quindi $|z_1| |z_2| = |\bar{\alpha}|/|\alpha| = 1$ e dunque $|z_1| < 1 < |z_2|$. Per il I teorema dei residui, l'integrale vale $I = (2/j) 2\pi j R[z_1]$. D'altra parte

$$R[z_1] = \frac{1}{\alpha(z_1 - z_2)} = \frac{1}{\pm 2\sqrt{a^2 - |\alpha|^2}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}},$$

dove la determinazione della radice è quella aritmetica del numero reale positivo $a^2 - |\alpha|^2 = a^2 - b^2 - c^2$.

In definitiva,

$$(2.4) \quad I = 2\pi \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}.$$

Ad esempio,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + 3 \cos x + 2 \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 \cos x + 3 \sin x - 7} = -\frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$$

Chiaramente, usando il suggerimento dell'esercizio 1.16, sarebbe bastato stabilire una formula per integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

ESEMPIO 2.5. Calcoliamo l'integrale

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{2 + \cos x} dx.$$

Effettuando la sostituzione $z = e^{jx}$ come indicato, l'integrale si trasforma in

$$I = \frac{1}{2j} \int_{\Gamma} \frac{z^4 + 2z^2 + 1}{z^2(z^2 + 4z + 1)} dz$$

il cui integrando è stato studiato nell'esempio V.2.12. Per quanto visto, l'integrale vale

$$I = \pi(R[0] + R[-2 + \sqrt{3}]) = 4\pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right).$$

2.2. Integrali di funzioni razionali. Ci occupiamo ora di integrali di funzioni razionali del tipo

$$(2.5) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

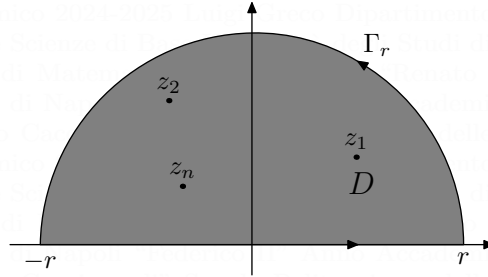
con P e Q polinomi primi tra loro.

2.2.1. *Integrale nel caso di sommabilità.* Cominciamo dal caso in cui P e Q verificano le seguenti ipotesi:

- (a) Q è privo di zeri reali, cioè $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- (b) grado $Q \geq$ grado $P + 2$.

L'ipotesi (a) assicura che l'integrando $\mathcal{R} = P/Q$ in (2.5) sia continuo in \mathbb{R} , mentre l'ipotesi (b) assicura che esso sia infinitesimo a $\mp\infty$ di ordine almeno 2. Pertanto l'integrale converge assolutamente.

Le singolarità della funzione $\mathcal{R}(z) = P(z)/Q(z)$ sono gli zeri del denominatore e non cadono sull'asse reale, per l'ipotesi (a). Scegliamo il semicerchio D di centro 0 formato dai punti z con $\text{Im } z \geq 0$, con raggio r abbastanza grande in modo che le (eventuali) singolarità con coefficiente dell'immaginario positivo, diciamole z_1, \dots, z_n , cadano internamente.



Applicando il teorema dei residui, otteniamo quindi

$$(2.6) \quad \int_{-r}^r \mathcal{R}(x) dx + \int_{\Gamma_r} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi j (R[z_1] + \dots + R[z_n]).$$

Per $r \rightarrow +\infty$ il primo integrale converge all'integrale cercato (2.5). In virtù dell'ipotesi (b), l'integrale su Γ_r è infinitesimo; essendo la funzione $z^2 \mathcal{R}(z)$ convergente per $z \rightarrow \infty$, essa è limitata, cioè $|z^2 \mathcal{R}(z)| \leq M$, per $|z|$ abbastanza grande, quindi

$$\left| \int_{\Gamma_r} \mathcal{R}(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma_r} \frac{z^2 \mathcal{R}(z)}{z^2} dz \right| \leq \pi r \frac{M}{r^2} = \pi \frac{M}{r} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

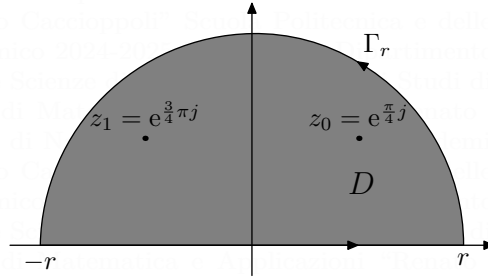
Pertanto, passando al limite in (2.6), otteniamo la formula

$$(2.7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi j (R[z_1] + \dots + R[z_n]).$$

ESEMPIO 2.6. Consideriamo

$$(2.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Le singolarità della funzione $\mathcal{R}(z) = 1/(1+z^4)$ sono le soluzioni dell'equazione $z^4 = -1$, vale a dire $\sqrt[4]{-1}$, cioè $z_k = e^{j\frac{\pi}{4}+jk\frac{\pi}{2}}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Quelle che cadono nel semipiano $\text{Im } z > 0$ sono $z_0 = e^{j\frac{\pi}{4}}$ e $z_1 = e^{j\frac{3}{4}\pi}$. Sia D il semicerchio di raggio $r > 1$.



Applicando il teorema dei residui, troviamo dunque

$$\int_{-r}^r \mathcal{R}(x) dx + \int_{\Gamma_r} \mathcal{R}(z) dz = 2\pi j (R[z_0] + R[z_1])$$

e passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ ricaviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi j (R[z_0] + R[z_1]).$$

Inoltre, ricordando che $z_k^4 = -1$, abbiamo

$$R[z_k] = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -2\pi j \frac{z_0 + z_1}{4} = -\frac{\pi}{2} j \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{j}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

OSSERVAZIONE 2.7. Per rendersi conto dell'efficienza del metodo di calcolo esposto, calcolare l'integrale (2.8) in maniera elementare.

ESEMPIO 2.8. Calcoliamo col metodo dei residui l'intergrale (2.2). Consideriamo dunque la funzione razionale

$$\mathcal{R}(z) = \frac{3z^2 - 1}{(9z^2 + 1)(1 + z^2)},$$

che verifica le condizioni (a) e (b). Le singolarità sono $\mp j/3$ e $\mp j$, quindi quelle con coefficiente dell'immaginario positivo sono $j/3$ e j . Pertanto, applicando la formula (2.7) abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3t^2 - 1}{(9t^2 + 1)(1 + t^2)} dt = 2\pi j (R[j/3] + R[j]).$$

Inoltre

$$R[j/3] = \frac{3z^2 - 1}{1 + z^2} \cdot \frac{1}{18z} \Big|_{z=j/3} = \frac{j}{4}, \quad R[j] = \frac{3z^2 - 1}{9z^2 + 1} \cdot \frac{1}{2z} \Big|_{z=j} = -\frac{j}{4}$$

e quindi l'integrale è nullo.

ESEMPIO 2.9. Calcoliamo l'integrale

$$(2.9) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6 - 2x^3 + 4}.$$

Le singolarità dell'integrando

$$\mathcal{R}(z) = \frac{1}{z^6 - 2z^3 + 4}$$

sono gli zeri del denominatore, determinati nell'esempio I.4.3. Usando (2.7), troviamo quindi

$$I = 2\pi j (R[2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}] + R[2^{1/3} e^{j\frac{5}{9}\pi}] + R[2^{1/3} e^{j\frac{7}{9}\pi}])$$

e bisogna solo calcolare i residui. Abbiamo

$$\begin{aligned} R[2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}] &= \frac{1}{6z^5 - 6z^2} \Big|_{z=2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}} = \frac{z}{6(z^6 - z^3)} \Big|_{z=2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}} \\ &= \frac{z}{6(z^3 - 4)} \Big|_{z=2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}}, \end{aligned}$$

l'ultima uguaglianza essendo conseguenza del fatto che, per $z = 2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}$, risulta $z^6 - 2z^3 + 4 = 0$ e quindi $z^6 - z^3 = z^3 - 4$. A questo punto, il residuo si calcola molto facilmente:

$$R[2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}] = \frac{2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}}}{6(1 + \sqrt{3}j - 4)} = \frac{2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}} (-\sqrt{3} - j)}{24\sqrt{3}}.$$

Analogamente possiamo procedere per gli altri:

$$R[2^{1/3} e^{j\frac{7}{9}\pi}] = \frac{2^{1/3} e^{j\frac{7}{9}\pi} (-j - \sqrt{3})}{24\sqrt{3}} = \frac{2^{1/3} e^{j\frac{\pi}{9}} (\sqrt{3} - j)}{24\sqrt{3}},$$

$$R[2^{1/3} e^{j\frac{5}{9}\pi}] = \frac{2^{1/3} e^{j\frac{5}{9}\pi} (j - \sqrt{3})}{24\sqrt{3}} = \frac{2^{1/3} e^{-j\frac{\pi}{9}} (-2j)}{24\sqrt{3}}$$

e dunque

$$I = 2\pi j \frac{2^{1/3} (e^{j\frac{\pi}{9}} + e^{-j\frac{\pi}{9}}) (-2j)}{24\sqrt{3}} = \frac{2^{1/3} \pi}{3\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{9}.$$

ESERCIZIO 2.10. Verificare l'uguaglianza

$$(2.10) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Mostrare che l'uguaglianza (2.10) si ricava anche mediante derivazione sotto il segno di integrale, come indicato. Per $a > 0$ troviamo ovviamente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{a}},$$

quindi derivando rispetto ad a

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(a+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{a\sqrt{a}}$$

da cui segue (2.10) ponendo $a = 1$.

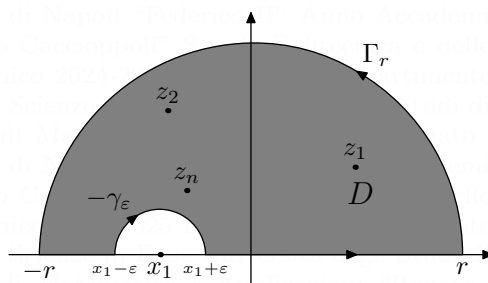
Calcolare l'integrale anche tenendo conto della formula di Hermite del paragrafo V.3.3.

2.2.2. Integrale a valor principale. Indeboliamo le ipotesi del paragrafo 2.2.1. Precisamente, sostituiamo le condizioni (a) e (b) con le più deboli:

- (a') gli (eventuali) zeri reali di Q sono semplici;
- (b') grado $Q \geq \text{grado } P + 1$.

Se le condizioni (a) e (b) non valgono entrambe, l'integrale (2.5) non è assolutamente convergente, ma sotto le ipotesi (a'), (b') si dimostra che esso esiste nel senso del valor principale. (In effetti, questo seguirà pure dal ragionamento che stiamo per esporre.)

Consideriamo per semplicità il caso in cui Q abbia un unico zero reale x_1 , che per ipotesi è semplice. Il ragionamento seguito precedentemente deve essere modificato, sia perché se D è un semicerchio, (per r grande) sul diametro che fa parte della frontiera cadrà la singolarità x_1 , sia perché il passaggio al limite per l'integrale esteso a Γ_r è meno immediato se la condizione (b') sostituisce (b). La prima difficoltà si supera scegliendo come dominio D il semicerchio di centro 0 e raggio r formato dai punti del semipiano dei numeri z con $\text{Im } z \geq 0$, privato dei punti del cerchio aperto di centro x_1 e raggio ε che gli appartengono; per $r > 0$ sufficientemente grande e $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo (in particolare, $|x_1| + \varepsilon < r$), tutte le (eventuali) singolarità di $\mathcal{R}(z) = P(z)/Q(z)$ con coefficiente dell'immaginario positivo sono interne a D e \mathcal{R} è olomorfa sulla frontiera, che è composta dai segmenti di estremi $-r$, $x_1 - \varepsilon$ e $x_1 + \varepsilon$, r dell'asse reale, dalla semicirconferenza Γ_r e dalla semicirconferenza γ_ε di centro x_1 , raggio ε , formata dai punti z con $\text{Im } z \geq 0$ e percorsa da $x_1 - \varepsilon$ a $x_1 + \varepsilon$.



Applicando il I teorema dei residui, troviamo quindi

$$\begin{aligned}
 (2.11) \quad & \int_{-r}^{x_1 - \varepsilon} \mathcal{R}(x) dx + \int_{-\gamma_\varepsilon} \mathcal{R}(z) dz + \int_{x_1 + \varepsilon}^r \mathcal{R}(x) dx + \int_{\Gamma_r} \mathcal{R}(z) dz \\
 & = 2\pi j (R[z_1] + \cdots + R[z_n]).
 \end{aligned}$$

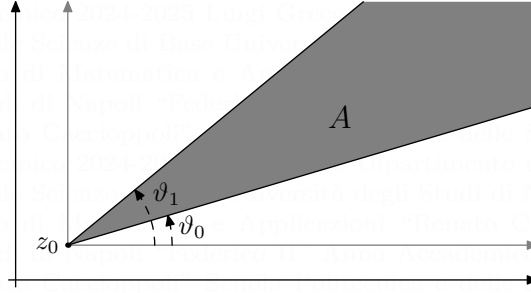
La somma dei due integrali estesi ad intervalli dell'asse reale tende, per $r \rightarrow +\infty$ e $\varepsilon \rightarrow 0+$, all'integrale (2.5) inteso nel senso del valor principale:

$$\int_{-r}^{x_1-\varepsilon} \mathcal{R}(x) dx + \int_{x_1+\varepsilon}^r \mathcal{R}(x) dx \xrightarrow{r \rightarrow +\infty, \varepsilon \rightarrow 0+} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(x) dx.$$

Esaminiamo i due integrali estesi alle semicirconferenze, nel passaggio al limite. Come già osservato, se $\text{grado } Q = \text{grado } P + 1$ lo studio del limite dell'integrale esteso a Γ_r richiede un ragionamento più preciso di quello fatto precedentemente, che era basato sull'ipotesi (b). Inoltre, lo studio dell'integrale esteso a γ_ε è una difficoltà nuova.

Vediamo ora due risultati che ci permetteranno di effettuare i passaggi al limite. Fissato $z_0 \in \mathbb{C}$, consideriamo l'angolo A di vertice z_0 e delimitato dalle semirette uscenti da z_0 di anomalie ϑ_0 e ϑ_1 , dove $0 < \vartheta_1 - \vartheta_0 \leq 2\pi$:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : \vartheta_0 \leq \arg(z - z_0) \leq \vartheta_1 \}.$$



LEMMA 2.11 (del grande cerchio). *Sia f continua nei punti di A con $|z - z_0| \geq r_0$, per un $r_0 > 0$. Se $z f(z)$ converge per $z \rightarrow \infty$, ($z \in A$), detto*

$$l = \lim_{z \rightarrow \infty} z f(z)$$

ed indicato con Γ_r l'arco di circonferenza di centro z_0 e raggio $r > r_0$ contenuto in A , risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} f(z) dz = j l (\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

LEMMA 2.12 (del piccolo cerchio). *Sia f continua nei punti di A con $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon_0$, per un $\varepsilon_0 > 0$. Se $(z - z_0) f(z)$ converge per $z \rightarrow z_0$, ($z \in A$), detto*

$$l = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

ed indicato con γ_ε l'arco di circonferenza di centro z_0 e raggio $\varepsilon < \varepsilon_0$ contenuto in A , risulta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = j l (\vartheta_1 - \vartheta_0).$$

Nei due enunciati, gli archi Γ_r e γ_ε sono percorsi in verso antiorario, cioè nel verso indotto da quello positivo sulle circonferenze di centro z_0 di cui essi fanno parte. Le dimostrazioni dei due lemmi sono analoghe e si possono effettuare ragionando come in quella del lemma III.2.6.

Torniamo al calcolo dell'integrale (2.5). Per passare al limite nell'integrale esteso a Γ_r in (2.11), usiamo il lemma 2.11 con $f = \mathcal{R}$, $z_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = \pi$, quindi l'angolo

A è il semipiano rappresentato da $y = \operatorname{Im} z \geq 0$; nell'ipotesi (b'), $z\mathcal{R}(z)$ converge per $z \rightarrow \infty$ e per il lemma V.1.3 risulta

$$l = \lim_{z \rightarrow \infty} z\mathcal{R}(z) = -R[\infty].$$

Pertanto

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \mathcal{R}(z) dz = -\pi j R[\infty].$$

Per passare al limite nell'integrale esteso a γ_ε , usiamo il lemma 2.12 con $f = \mathcal{R}$, $z_0 = x_1$, $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_1 = \pi$; nell'ipotesi (a'), $(z - x_1)\mathcal{R}(z)$ converge per $z \rightarrow x_1$ e risulta (cfr. (V.2.1))

$$l = \lim_{z \rightarrow x_1} (z - x_1)\mathcal{R}(z) = R[x_1].$$

Pertanto

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\gamma_\varepsilon} \mathcal{R}(z) dz = -\pi j R[x_1].$$

In definitiva, passando al limite in (2.11), otteniamo

$$(2.12) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi j (R[z_1] + \cdots + R[z_n]) + \pi j R[x_1] + \pi j R[\infty].$$

È facile convincersi che, nel caso generale, dette x_1, \dots, x_m le singolarità reali di $\mathcal{R} = P/Q$, che sono tutte poli semplici, e z_1, \dots, z_n le singolarità con coefficiente dell'immaginario positivo, la formula (2.12) si generalizza come segue

$$(2.13) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n R[z_k] + \pi j \sum_{k=1}^m R[x_k] + \pi j R[\infty].$$

OSSERVAZIONE 2.13. Se \mathcal{R} ha coefficienti reali, i residui $R[x_k]$ e $R[\infty]$ sono reali come pure l'integrale di \mathcal{R} , quindi prendendo le parti reali di ambo i membri in (2.13) abbiamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(x) dx = 2\pi \operatorname{Re} \left\{ j \sum_{k=1}^n R[z_k] \right\} = -2\pi \operatorname{Im} \left\{ \sum_{k=1}^n R[z_k] \right\}.$$

ESEMPIO 2.14. Le singolarità della funzione $\mathcal{R}(z) = \frac{1}{1+z^3}$ sono i punti $z_k = e^{j\frac{\pi}{3} + j\frac{2}{3}\pi k}$, $k = 0, 1, 2$. Di queste, $z_0 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ha coefficiente dell'immaginario positivo, $z_1 = -1$ è reale e $z_2 = \bar{z}_0$ ha coefficiente dell'immaginario negativo. Inoltre $R[\infty] = 0$ e (analogamente al caso dell'integrale (2.8))

$$R[z_k] = \frac{1}{3z_k^2} = \frac{z_k}{3z_k^3} = -\frac{z_k}{3}.$$

Pertanto dalla formula (2.13) otteniamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = -2\pi j \frac{z_0}{3} - \pi j \frac{-1}{3} = \frac{\pi}{3} (-j + \sqrt{3} + j) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

2.2.3. *Osservazioni.* Se \mathcal{R} è funzione pari, abbiamo

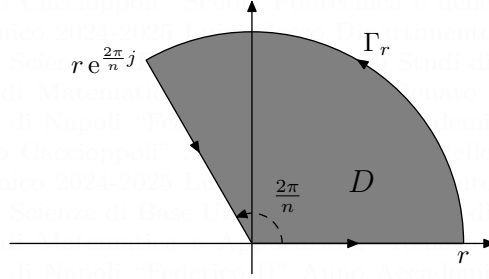
$$\int_0^{+\infty} \mathcal{R}(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(x) dx$$

e l'ultimo integrale è del tipo (2.5).

Consideriamo ora l'integrale

$$(2.14) \quad \int_0^{+\infty} \mathcal{R}(x^n) dx,$$

dove $n \geq 2$ e $\mathcal{R} = P/Q$, con grado $Q \geq \text{grado } P + 1$. Notiamo che per $n = 2$ ricadiamo nel caso precedente. Supponiamo per semplicità che la funzione razionale \mathcal{R} non abbia singolarità sul semiasse reale non-negativo. Consideriamo come dominio D il settore circolare formato dai punti z del cerchio di centro 0 e raggio $r > 0$ con $0 \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{n}$:



Applichiamo il I teorema dei residui. A tal fine, osserviamo che sul raggio di estremi $r e^{j \frac{2\pi}{n}}$, 0 risulta $z = z(t) = e^{j \frac{2\pi}{n}} t$, con t che varia da r a 0. Pertanto

$$(2.15) \quad \int_0^r \mathcal{R}(x^n) dx + \int_{\Gamma_r} \mathcal{R}(z^n) dz - e^{j \frac{2\pi}{n}} \int_0^r \mathcal{R}(t^n) dt = 2\pi j \sum_{k=1}^m R_f[z_k],$$

dove z_1, \dots, z_m sono le singolarità di $\mathcal{R}(z^n)$ interne a D . Il primo e l'ultimo integrale coincidono e per $r \rightarrow +\infty$ convergono all'integrale cercato (2.14), mentre l'integrale esteso a Γ_r è infinitesimo (grado $Q(z^n) \geq \text{grado } P(z^n) + n \geq \text{grado } P(z^n) + 2$). Pertanto da (2.15) ricaviamo

$$(2.16) \quad \int_0^{+\infty} \mathcal{R}(x^n) dx = \frac{2\pi j}{1 - e^{j \frac{2\pi}{n}}} \sum_{k=1}^m R_f[z_k] = -e^{-j \frac{\pi}{n}} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \sum_{k=1}^m R_f[z_k].$$

ESEMPIO 2.15. Le singolarità della funzione $f(z) = \frac{1}{1+z^n}$ sono i poli semplici $z_k = e^{j \frac{\pi}{n} + j \frac{2\pi}{n} k}$, $k = 0, \dots, n-1$, e risulta

$$R[z_k] = \frac{1}{n z_k^{n-1}} = \frac{z_k}{n z_k^n} = -\frac{z_k}{n}.$$

L'unica singolarità con argomento tra 0 e $\frac{2\pi}{n}$ è z_0 . Pertanto la (2.16) ci dà

$$(2.17) \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = -e^{-j \frac{\pi}{n}} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \left(-\frac{e^{j \frac{\pi}{n}}}{n} \right) = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}.$$

Confrontare con (2.8) ed esaminare per $n \rightarrow +\infty$.

ESERCIZIO 2.16. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6 - 2x^3 + 4}$$

cfr. esempio 2.9, osservando che l'integrando è funzione di x^3 .

2.3. Altri integrali. Ci occupiamo ora di integrali del tipo

$$(2.18) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{j\alpha x} dx,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$. Per $\alpha = 0$ l'integrale si riduce a quello già considerato (2.5), quindi supporremo $\alpha \neq 0$.

Osserviamo che, se P e Q hanno coefficienti reali, la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di (2.18) sono rispettivamente

$$(2.19) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos \alpha x dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin \alpha x dx.$$

Notiamo che le proprietà di sommabilità della funzione integranda sono le stesse di $\mathcal{R} = P/Q$, poiché $|e^{j\alpha x}| = 1, \forall x \in \mathbb{R}$; quindi, se valgono le ipotesi (a) e (b), l'integrale converge assolutamente. Se vale (a) e $\text{grado } Q = \text{grado } P + 1$, l'integrale converge semplicemente. Se Q ha zeri reali semplici, l'integrale va inteso nel senso del valor principale.

Cosideriamo il caso $\alpha > 0$. Poiché se $\text{Im } z \geq 0$, risulta $|e^{j\alpha z}| \leq 1$, se vale l'ipotesi (b) possiamo ragionare come nel paragrafo 2.2.1, risultando infinitesimo l'integrale esteso a Γ_r . D'altra parte, se $\text{grado } Q = \text{grado } P + 1$, il lemma del grande cerchio non è sufficiente per passare al limite nell'integrale su Γ_r , poiché l'espressione $z \mathcal{R}(z) e^{j\alpha z}$ non ammette limite per $z \rightarrow \infty, \text{Im } z \geq 0$. In questo caso usiamo invece il seguente.

LEMMA 2.17 (di Jordan). *Sia g continua nei punti $z \in \mathbb{C}$ con $\text{Im } z \geq 0$ e $|z| \geq r_0$, per un $r_0 > 0$. Se $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$ e $\alpha > 0$, risulta*

$$(2.20) \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} g(z) e^{j\alpha z} dz = 0.$$

In questo modo, otteniamo la formula

$$(2.21) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{j\alpha x} dx = 2\pi j \sum_{k=1}^n R[z_k] + \pi j \sum_{k=1}^m R[x_k],$$

dove z_1, \dots, z_n sono gli zeri di Q con coefficiente dell'immaginario positivo, x_1, \dots, x_m sono gli zeri reali (tutti semplici) e i residui a secondo membro sono relativi alla funzione $z \mapsto e^{j\alpha z} P(z)/Q(z)$.

ESEMPIO 2.18. Calcoliamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{x^2 + 14x + 50} dx.$$

Gli zeri del trinomio a denominatore nell'integrando sono $-7 \pm j$ complessi coniugati non reali, quindi l'integrando è continuo in \mathbb{R} ; inoltre esso è infinitesimo di ordine 2 per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi l'integrale converge assolutamente. Come caso particolare della

formula (2.21), abbiamo $I = 2\pi j R[-7+j]$, il residuo essendo relativo alla funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{z^2 + 14z + 50},$$

che per $z = x \in \mathbb{R}$ si riduce all'integrando. Essa ha in $-7+j$ un polo semplice, quindi

$$R[-7+j] = \left. \frac{e^{jz}}{2z+14} \right|_{z=-7+j} = \frac{e^{-7j-1}}{2j}$$

e dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{x^2 + 14x + 50} dx = \pi e^{-7j-1} = \frac{\pi}{e} (\cos 7 - j \sin 7).$$

ESERCIZIO 2.19. Verificare l'uguaglianza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{x^2 - 6x + 25} dx = \frac{\pi}{4e^4} (\cos 3 + j \sin 3).$$

ESEMPIO 2.20. Calcoliamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ricordiamo che l'integrale converge semplicemente, ma non assolutamente, cfr. esempio 1.3. Inoltre, essendo l'integrando funzione pari, abbiamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Consideriamo dunque l'integrale

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{x} dx.$$

Tale integrale è inteso nel senso del valor principale, poiché la funzione integranda e^{jz}/z ha in 0 un polo semplice; il residuo vale 1. La formula (2.21) fornisce

$$(2.22) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jx}}{x} dx = \pi j$$

e quindi, prendendo il coefficiente dell'immaginario in entrambi i membri, troviamo

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

OSSERVAZIONE 2.21. Passando alle parti reali in (2.22), otteniamo

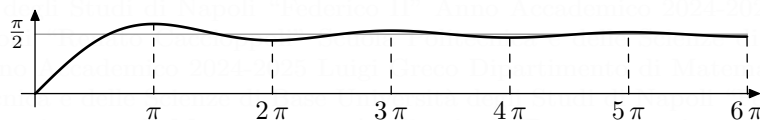
$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0,$$

che è ovvia, poiché l'integrando è funzione dispari. Osservazioni elementari di questo tipo possono aiutare a controllare i calcoli.

OSSERVAZIONE 2.22. La funzione

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

si chiama *seno integrale*, o *seno campionatore*. Evidentemente è una funzione dispari, il cui diagramma è asintotico a destra alla retta orizzontale di equazione $y = \frac{\pi}{2}$ ed è tracciato in figura.



ESEMPIO 2.23. Calcoliamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^2 - 16x + 15} dx.$$

Il denominatore si annulla nei punti $3/2$ e $5/2$; tali punti annullano anche il numeratore e sono discontinuità eliminabili per l'integrando, che quindi risulta continuo in \mathbb{R} . Inoltre l'integrando è $O(x^{-2})$ per $x \rightarrow \pm\infty$, quindi l'integrale converge assolutamente. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{e^{j\pi z}}{4z^2 - 16z + 15};$$

per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è la parte reale di $f(x)$, quindi risulta

$$I = \operatorname{Re} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right).$$

L'integrale di f è inteso nel senso del valor principale per i poli reali $3/2$ e $5/2$, essendo l'esponentiale privo di zeri. Per la (2.21), abbiamo

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = j \pi (R_f[3/2] + R_f[5/2]).$$

Poiché

$$R_f[3/2] = \frac{e^{j\frac{3}{2}\pi}}{8\frac{3}{2} - 16} = \frac{-j}{-4} = \frac{j}{4}, \quad R_f[5/2] = \frac{e^{j\frac{5}{2}\pi}}{8\frac{5}{2} - 16} = \frac{j}{4},$$

troviamo infine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^2 - 16x + 15} dx = \operatorname{Re} \left(j \pi \frac{j}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Osserviamo che risulta

$$f(x) = \frac{e^{j\pi x}}{4x^2 - 16x + 15} = \frac{e^{j\pi(x-2)}}{4(x-2)^2 - 1},$$

quindi

$$\begin{aligned} I &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\pi t}}{4t^2 - 1} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \pi t}{4t^2 - 1} dt + j \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi t}{4t^2 - 1} dt \end{aligned}$$

e l'ultimo integrale è nullo, in quanto l'integrando è funzione dispari. Dunque I è reale.

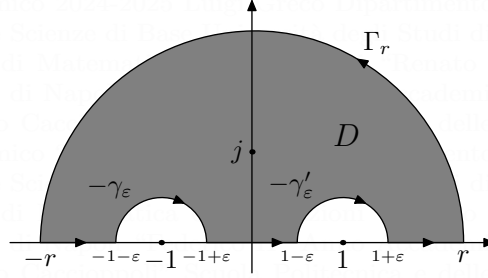
ESEMPIO 2.24. Calcoliamo

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2\pi x}{(x^4 - 1)^2} dx.$$

La funzione integranda è continua in \mathbb{R} (in ∓ 1 presenta discontinuità eliminabili) ed è $O(x^{-8})$ per $x \rightarrow \mp\infty$, quindi l'integrale converge assolutamente. Consideriamo la funzione ausiliaria

$$f(z) = \frac{1 - e^{j2\pi z}}{(z^4 - 1)^2};$$

per $z = x \in \mathbb{R}$, l'integrando è la parte reale di $f(x)$. Il denominatore ha zeri doppi nei punti $\sqrt[4]{1}$, ovvero $\mp 1, \mp j$. I punti reali ∓ 1 sono poli semplici, essendo zeri semplici del numeratore. I punti $\mp j$ sono poli doppi. Appliciamo il I teorema dei residui a f sul dominio D in figura:



L'unica singolarità interna è j . In questo modo otteniamo

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \int_{+FD} f(z) dz &= \int_{-r}^{-1-\epsilon} f(x) dx - \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz + \int_{-1+\epsilon}^{1-\epsilon} f(x) dx \\ &\quad - \int_{\gamma'_\epsilon} f(z) dz + \int_{1+\epsilon}^r f(x) dx + \int_{\Gamma_r} f(z) dz = 2\pi j R[j]. \end{aligned}$$

Per il lemma 2.11 del grande cerchio, risulta

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} f(z) dz = 0,$$

mentre per il lemma 2.12 del piccolo cerchio

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = j\pi R[-1], \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma'_\epsilon} f(z) dz = j\pi R[1].$$

Dunque, passando al limite per $r \rightarrow +\infty$ e $\epsilon \rightarrow 0+$, troviamo

$$I = \operatorname{Re} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) = \pi \operatorname{Re} \left\{ j(R[-1] + R[1] + 2R[j]) \right\}.$$

(L'integrale di f è inteso nel senso del valor principale per la presenza dei poli reali.)

Abbiamo

$$\begin{aligned} R[1] &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 - e^{j2\pi z}}{z-1} \left(\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z^4-1} \right)^2 \\ &= -2\pi j \left(\frac{1}{4z^3} \Big|_{z=1} \right)^2 = -\frac{\pi}{8} j \end{aligned}$$

e, analogamente, $R[-1] = -\frac{\pi}{8} j$. Inoltre, essendo

$$z^4 - 1 = (z-j)(z^3 + jz^2 + j^2z + j^3) = (z-j)(z^3 + jz^2 - z - j),$$

troviamo

$$\begin{aligned}
 R[j] &= \lim_{z \rightarrow j} D[(z-j)^2 f(z)] = D \frac{1 - e^{j2\pi z}}{(z^3 + jz^2 - z - j)^2} \Big|_{z=j} \\
 &= \frac{-2\pi j e^{j2\pi z} (z^3 + jz^2 - z - j) - (1 - e^{j2\pi z}) 2(3z^2 + 2jz - 1)}{(z^3 + jz^2 - z - j)^3} \Big|_{z=j} \\
 &= \frac{-8\pi e^{-2\pi} + 12(1 - e^{-2\pi})}{(-4j)^3} = \frac{3 - (2\pi + 3)e^{-2\pi}}{16j}.
 \end{aligned}$$

Pertanto

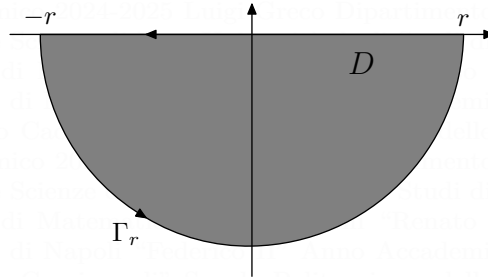
$$I = \pi \operatorname{Re} \left\{ 2j \left(-\frac{\pi}{8} j + \frac{3 - (2\pi + 3)e^{-2\pi}}{16j} \right) \right\} = \frac{\pi}{8} (2\pi + 3)(1 - e^{-2\pi}).$$

(Notiamo che

$$\begin{aligned}
 \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi x}{(x^4 - 1)^2} dx &= \operatorname{Im} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right) \\
 &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\pi}{8} (2\pi + 3)(1 - e^{-2\pi}) \right\} = 0,
 \end{aligned}$$

che è immediato, essendo la funzione integranda dispari.)

Il caso $\alpha < 0$ può essere ricondotto al precedente mutando x in $-x$, o trattato ragionando in maniera analoga, considerando però domini del tipo



Il lemma di Jordan si modifica subito per mostrare che, nel caso $\alpha < 0$, l'integrale esteso alla semicirconfenza Γ_r considerata ora è infinitesimo. In tal modo, la formula (2.21) si modifica come segue:

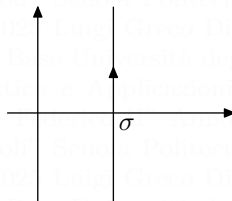
$$(2.24) \quad \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{j\alpha x} dx = -2\pi j \sum_{k=1}^n R[z_k] - \pi j \sum_{k=1}^m R[x_k],$$

dove però questa volta z_1, \dots, z_n sono gli zeri di Q con coefficiente dell'immaginario negativo.

Consideriamo ora l'integrale

$$(2.25) \quad \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{\alpha z} dz,$$

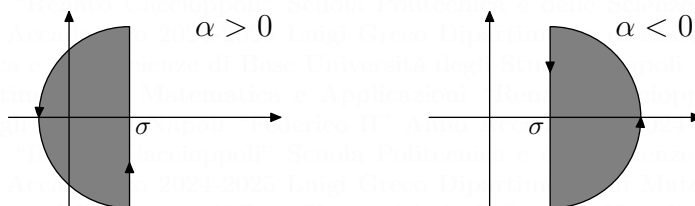
dove $\sigma, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. L'integrale è esteso alla retta verticale di equazione $\operatorname{Re} z = \sigma$, orientata dal basso verso l'alto.



Facciamo le seguenti ipotesi:

- (a'') Q non ha zeri con parte reale uguale a σ ;
- (b') grado $Q \geq$ grado $P + 1$.

L'integrale è (almeno) semplicemente convergente. Notiamo che se $\alpha > 0$ l'esponentiale $e^{\alpha z}$ è limitato per $x = \operatorname{Re} z \leq \sigma$, essendo $|e^{\alpha z}| = e^{\alpha x} \leq e^{\alpha \sigma}$, mentre se $\alpha < 0$ risulta limitato per $x = \operatorname{Re} z \geq \sigma$. Consideriamo i domini



Con opportune versioni del lemma di Jordan per mostrare che gli integrali sulle semicirconferenze sono infinitesimi al divergere del raggio, otteniamo le formule seguenti, analoghe alle (2.21) e (2.24).

Per $\alpha > 0$:

$$(2.26) \quad \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{\alpha z} dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n R[z_k],$$

dove z_1, \dots, z_n sono gli zeri di Q con parte reale minore di σ . I residui sono relativi alla funzione $z \mapsto e^{\alpha z} P(z)/Q(z)$.

Per $\alpha < 0$:

$$(2.27) \quad \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{\alpha z} dz = -2\pi j \sum_{k=1}^n R[z_k],$$

dove z_1, \dots, z_n sono gli zeri di Q con parte reale maggiore di σ .

Il procedimento si estende, con ovvie modifiche, al caso in cui Q ha zeri semplici con parte reale uguale a σ ; l'integrale dovrà essere inteso nel senso del valor principale.

È possibile analogamente trattare il caso $\alpha = 0$, usando il lemma del grande cerchio. Ad esempio, se vale (a'') e grado $Q \geq$ grado $P + 2$, l'integrale

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} dz$$

è assolutamente convergente. Inoltre risulta $R[\infty] = 0$, quindi per il II teorema dei residui (Teorema V.1.6) i secondi membri di (2.26) e (2.27) coincidono (dove chiaramente i residui sono relativi alla funzione P/Q); il valore comune è quello dell'integrale.

ESEMPIO 2.25. Sia $\sigma > 0$. Abbiamo

$$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{e^{\alpha z}}{1+z^2} dz = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \leq 0; \\ 2\pi j (R[j] + R[-j]) = 2\pi j \sin \alpha, & \text{se } \alpha \geq 0. \end{cases}$$

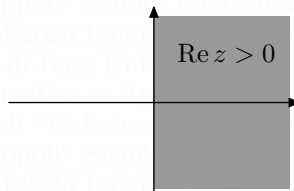
3. La funzione gamma

La funzione gamma è definita mediante l'integrale euleriano di seconda specie

$$(3.1) \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

dove z è un numero complesso.

La sommabilità della funzione integranda $t \mapsto e^{-t} t^{z-1}$ per $z = x + jy$ fissato dipende da $x = \operatorname{Re} z$, in quanto $|t^{z-1}| = t^{x-1}$. L'integrando è continuo, quindi localmente sommabile, in $]0, +\infty[$, mentre per alcuni valori di z non risulta continuo in 0, dunque la sommabilità va studiata intorno a 0 e a $+\infty$. Intorno a 0 il fattore e^{-t} è ininfluenza, essendo continuo e positivo; in altri termini, l'integrando ha le stesse proprietà di sommabilità della potenza t^{x-1} ed è dunque sommabile se e solo se $x > 0$. Intorno a $+\infty$, per la presenza dell'esponenziale l'integrando è sommabile per ogni x . In definitiva, la (3.1) consente di definire $\Gamma(z)$ nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$.



Si mostra che Γ è olomorfa in tale semipiano.

TEOREMA 3.1. *La funzione Γ è olomorfa nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ e si può derivare indefinitamente sotto il segno di integrale:*

$$(3.2) \quad \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} (\log t)^k dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Calcoliamo qualche valore della funzione Γ . Evidentemente $\Gamma(1) = 1$. È facile mostrare una fondamentale relazione per la Γ , detta *relazione di ricorrenza*:

$$(3.3) \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Basta infatti supporre inizialmente $z > 0$ ed integrare per parti. Ne segue, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$(3.4) \quad \Gamma(z+k+1) = (z+k)(z+k-1) \cdots z\Gamma(z).$$

In particolare,

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

In questo senso, Γ generalizza il fattoriale. Usando (1.17) troviamo un altro valore notevole

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}.$$

Usando la (3.4), troviamo

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

e in generale

$$(3.5) \quad \Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right) = \left(k+\frac{1}{2}\right) \left(k-\frac{1}{2}\right) \cdots \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

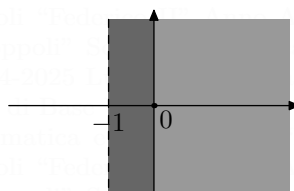
ESERCIZIO 3.2. Verificare, $\forall k \in \mathbb{N}_0$, l'uguaglianza

$$(3.6) \quad 2^{2k+1} k! \Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right) = (2k+1)! \sqrt{\pi}.$$

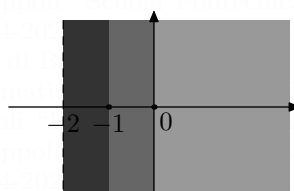
Mediante la relazione di ricorrenza è possibile prolungare la funzione Γ . In effetti, scritta la relazione di ricorrenza nel modo seguente

$$(3.7) \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

osserviamo che il secondo membro ha significato per $\operatorname{Re}(z+1) > 0$, vale a dire $\operatorname{Re} z > -1$, e $z \neq 0$. Dunque l'uguaglianza (3.7) consente di definire $\Gamma(z)$ per tali valori. Geometricamente, al semipiano $\operatorname{Re} z > 0$ viene aggiunta la striscia $-1 < \operatorname{Re} z \leq 0$, privata del punto 0.

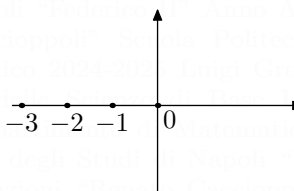


A questo punto, il secondo membro della (3.7) ha significato per $z \neq 0$ verificante $\operatorname{Re}(z+1) > -1$, cioè $\operatorname{Re} z > -2$, e $z+1 \neq 0$, cioè $z \neq -1$; geometricamente, all'insieme cui eravamo arrivati al passo precedente aggiungiamo la striscia $-2 < \operatorname{Re} z \leq -1$ privata del punto -1 .

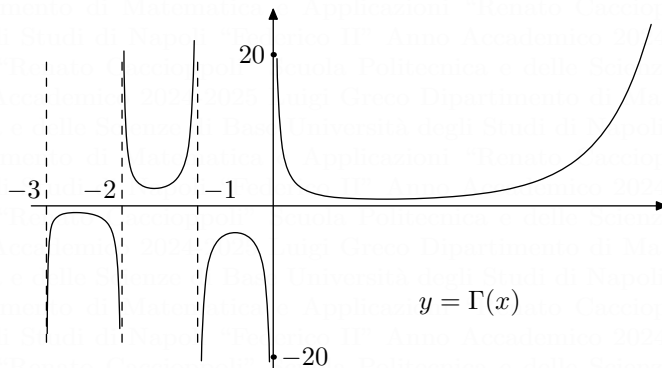


È chiaro ora che iterando il procedimento si estende Γ a $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$. È chiaro pure che il prolungamento risulta olomorfo in tale insieme, quindi gli interi non-positivi sono singolarità isolate della funzione Γ . Essi risultano poli semplici; ad esempio, risulta

$$\lim_{z \rightarrow 0} z \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z+1) = \Gamma(1) = 1.$$



Nella figura seguente è tracciato il diagramma della funzione $y = \Gamma(x)$, restrizione di Γ all'asse reale (privato dei punti $0, -1, -2, \dots$).



È interessante mostrare un altro modo di studiare la Γ e giungere al suo prolungamento. Per $\operatorname{Re} z > 0$, decomponiamo l'integrale (3.1) che definisce $\Gamma(z)$ nella somma di due termini, uno “cattivo” ed uno “buono”:

$$(3.8) \quad \Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = P(z) + Q(z).$$

L'integrale

$$(3.9) \quad Q(z) = \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

è assolutamente convergente, senza alcuna limitazione su z , per la presenza dell'esponenziale nell'integrando. È possibile mostrare che Q è olomorfa, quindi è una funzione intera.

Per $P(z)$, come detto, la sommabilità dell'integrando va studiata intorno a 0 e sussiste per $\operatorname{Re} z > 0$; P risulta olomorfa nel semipiano definito da tale limitazione. Ne segue l'olomorfia della Γ . Essendo Q intera, la regolarità di Γ dipende da quella di P : esaminiamola in maggiore dettaglio. Usando lo sviluppo di Mac Laurin, scriviamo

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t)^n}{n!}$$

e quindi

$$e^{-t} t^{z-1} = t^{z-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}.$$

La serie nell'ultimo membro, per z fissato con $\operatorname{Re} z > 0$, è totalmente convergente per $t \in [0, 1]$. In effetti,

$$|t^{z+n-1}| = t^{\operatorname{Re} z + n - 1} \leq 1,$$

in quanto $\operatorname{Re} z + n - 1 > 0$, quindi la serie è maggiorata dalla serie numerica convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. È dunque possibile integrare termine a termine:

$$P(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt,$$

ovvero

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z+n)n!}.$$

Pertanto, per $\operatorname{Re} z > 0$,

$$(3.10) \quad \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(z+n)n!} + Q(z).$$

Il secondo membro di tale uguaglianza ha significato anche per z fuori dal semipiano $\operatorname{Re} z > 0$. L'espressione

$$\frac{(-1)^n}{(z+n)n!},$$

che al variare di n costituisce il termine generale della serie, è olomorfa in $\mathbb{C} - \{-n\}$ e in $-n$ ha un polo semplice. La serie converge (totalmente in ogni $E \subset \mathbb{C}$ con distanza positiva da $\{0, -1, -2, \dots\}$, cioè per il quale esista $\delta > 0$ tale che risulti $|z+n| \geq \delta$, $\forall z \in E, \forall n \in \mathbb{N}_0$) e la somma è olomorfa in $\mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$. Calcoliamo il residuo di Γ in $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$:

$$R_{\Gamma}[-n] = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Si prova che Γ è priva di zeri, quindi il reciproco $\frac{1}{\Gamma}$ è una funzione intera, presentando nei punti $0, -1, -2, \dots$ singolarità eliminabili, che risultano zeri semplici per il prolungamento.

CAPITOLO VIII

Elementi di analisi funzionale

1. Spazi di Lebesgue

Fondamentale per il seguito è lo spazio $L^1(a, b)$ delle funzioni sommabili in un dato intervallo (a, b) di \mathbb{R} . Ricordiamo che due funzioni uguali quasi ovunque si identificano. La quantità

$$(1.1) \quad \|x\|_1 = \int_a^b |x(t)| dt.$$

si chiama *norma* (in L^1) e gode delle seguenti proprietà

- (1) $\|x\|_1 = 0$ se e solo se $x = 0$;
- (2) (omogeneità) $\|\alpha x\|_1 = |\alpha| \|x\|_1$;
- (3) (disuguaglianza triangolare) $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$,

per ogni $x, y \in L^1(a, b)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.

Denotiamo inoltre con $L^1_{\text{loc}}(a, b)$ lo spazio vettoriale delle funzioni *localmente sommabili* in (a, b) , cioè sommabili sui sottointervalli compatti.

Il prodotto di convoluzione, introdotto nel paragrafo VII.1.4 per funzioni sommabili, in alcuni casi può essere definito per $x, y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Supponiamo ad esempio $x(t) = y(t) = 0$, per q.o. $t < 0$. In tale ipotesi, $x(s)y(t-s)$ può risultare non-nullo solo se $0 < s < t$; questo è chiaramente impossibile, se $t < 0$. Pertanto risulta

$$(1.2) \quad x * y(t) = u(t) \int_0^t x(s)y(t-s) ds,$$

dove

$$(1.3) \quad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \geq 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

è detta funzione *gradino unitario* (o anche funzione di Heaviside). In particolare,

$$u * u(t) = t u(t).$$

È definita pure la convoluzione di $x \in L^1(\mathbb{R})$ con il gradino, che è limitato, e risulta

$$x * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)u(t-s) ds = \int_{-\infty}^t x(s) ds,$$

cioè $x * u$ è la funzione integrale di x (con estremo inferiore $-\infty$).

Sia $f \in L^1(a, b)$. Si dimostra che la funzione integrale

$$F(t) = \int_a^t f(s) ds$$

è continua in (a, b) (F è continua pure in ciascuno degli estremi che risultasse finito), derivabile q.o. e risulta $F'(t) = f(t)$ per q.o. $t \in (a, b)$ (teorema fondamentale del calcolo integrale).

DEFINIZIONE 1.1. Una funzione continua x sull'intervallo $[a, b]$ si dice *assolutamente continua* se è derivabile q.o., $x' \in L^1(a, b)$, e $\forall t \in [a, b]$ risulta

$$(1.4) \quad x(t) = x(a) + \int_a^t x'(s) ds.$$

Osserviamo che la (1.4) non segue dall'ipotesi di derivabilità e dalla sommabilità della derivata. Esistono funzioni continue strettamente crescenti con derivata q.o. nulla, che quindi non verificano (1.4).

ESEMPIO 1.2. Chiaramente è assolutamente continua una funzione di classe $C^1([a, b])$, o C^1 a tratti (cioè continua, con derivata continua in $[a, b]$ privato un numero finito di punti interni, che siano discontinuità di prima specie). Più in generale, è assolutamente continua ogni funzione lipschitziana.

Se x e y sono assolutamente continue in $[a, b]$, vale la formula di *integrazione per parti*:

$$\int_a^b x(t) y'(t) dt = [x(t) y(t)]_a^b - \int_a^b x'(t) y(t) dt.$$

Analogamente a L^1 , consideriamo lo spazio $L^2(a, b)$ delle funzioni x a quadrato sommabile su (a, b) , con la norma (in L^2)

$$(1.5) \quad \|x\|_2 = \left\{ \int_a^b |x(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

che gode delle stesse proprietà di $\|\cdot\|_1$. Notiamo che il prodotto di due funzioni a quadrato sommabile è sommabile, come conseguenza della ovvia disuguaglianza

$$(1.6) \quad |xy| \leq \frac{|x|^2 + |y|^2}{2}.$$

Per $y = 1$, abbiamo $|x| \leq (|x|^2 + 1)/2$. Ne segue l'inclusione $L^2(a, b) \subset L^1(a, b)$, se l'intervallo (a, b) è limitato, poiché in tal caso le funzioni costanti sono sommabili.

La (1.6) implica la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz*

$$(1.7) \quad \|xy\|_1 \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

La quantità

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt,$$

si dice *prodotto scalare* in $L^2(a, b)$ e ha le seguenti proprietà: per ogni $x, y, z \in L^2(a, b)$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$, risulta

- (1) $(x, x) \geq 0$, e $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
- (2) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;
- (3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
- (4) $(y, x) = \overline{(x, y)}$.

DEFINIZIONE 1.3. Il quadrato della norma

$$(1.8) \quad \|x\|_2^2 = (x, x) = \int_a^b |x(t)|^2 dt$$

è detto *energia* di x . Si dice che una successione (x_n) di funzioni in $L^2(a, b)$ converge nel senso dell'energia a $x \in L^2(a, b)$ se risulta

$$\lim_n \|x_n - x\|_2 = 0.$$

DEFINIZIONE 1.4. Due vettori x e y si dicono *ortogonali* se $(x, y) = 0$. Il vettore nullo è banalmente ortogonale ad ogni vettore, quindi considereremo vettori non nulli. Un insieme di vettori $S \subset L^2(a, b)$ (non contenente il vettore nullo) si dice *sistema ortogonale* se i suoi elementi sono a due a due ortogonali, cioè

$$x, y \in S, x \neq y \Rightarrow (x, y) = 0.$$

S si dice *ortonormale* se inoltre i suoi elementi hanno tutti norma 1: $\|x\| = 1, \forall x \in S$. In altri termini, S è ortonormale se, per ogni coppia di vettori x e y in S , risulta

$$(1.9) \quad (x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

È chiaro che, se S è un sistema ortogonale, dividendo ciascun elemento per la sua norma otteniamo un sistema ortonormale. Inoltre, se x_1, \dots, x_n sono vettori a due a due ortogonali, si verifica facilmente che risulta

$$(1.10) \quad \|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Questa uguaglianza generalizza il teorema di Pitagora.

ESEMPIO 1.5. Consideriamo il *sistema trigonometrico* in $L^2(0, 2\pi)$:

$$(1.11) \quad 1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos nt, \sin nt, \dots$$

Tale sistema è ortogonale, risultando per $m, n \in \mathbb{N}$

$$(1, \cos nt) = (1, \sin nt) = (\cos mt, \sin nt) = 0$$

e per $m \neq n$

$$(\cos mt, \cos nt) = (\sin mt, \sin nt) = 0.$$

Inoltre

$$\|1\|_2^2 = 2\pi, \quad \|\cos nt\|_2^2 = \|\sin nt\|_2^2 = \pi$$

e quindi il sistema

$$(1.12) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

è ortonormale.

Analoghe considerazioni valgono per il *sistema esponenziale* in $L^2(0, 2\pi)$:

$$(1.13) \quad e^{jkt}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esso è ortogonale, risultando

$$(e^{jkt}, e^{jht}) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq h, \\ 2\pi, & \text{se } k = h. \end{cases}$$

Il sistema

$$(1.14) \quad \frac{e^{j k t}}{\sqrt{2\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

è ortonormale.

Le funzioni dei sistemi trigonometrico ed esponenziale sono periodiche di periodo 2π . Più in generale, sia $\tau > 0$ e indichiamo con $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ la *pulsazione*. I sistemi di vettori:

$$(1.15) \quad \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \frac{\cos \omega_0 t}{\sqrt{\tau/2}}, \frac{\sin \omega_0 t}{\sqrt{\tau/2}}, \dots, \frac{\cos n \omega_0 t}{\sqrt{\tau/2}}, \frac{\sin n \omega_0 t}{\sqrt{\tau/2}}, \dots$$

e

$$(1.16) \quad \frac{e^{j k \omega_0 t}}{\sqrt{\tau}}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono formati da funzioni periodiche di periodo τ . Essi si dicono rispettivamente sistema trigonometrico (normalizzato) e sistema esponenziale (normalizzato), in $L^2(0, \tau)$.

OSSERVAZIONE 1.6. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, le coppie di vettori

$$\cos k \omega_0 t, \quad \sin k \omega_0 t, \quad \text{e} \quad e^{j k \omega_0 t}, \quad e^{-j k \omega_0 t},$$

generano lo stesso sottospazio, poiché per la formula di Eulero i vettori di una coppia si esprimono come combinazione lineare degli altri; in effetti, risulta $\forall t \in (0, \tau)$

$$(1.17) \quad a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t = c_k e^{j k \omega_0 t} + c_{-k} e^{-j k \omega_0 t}$$

se e solo se i coefficienti a_k , b_k , c_k e c_{-k} sono legati dalle relazioni

$$(1.18) \quad c_k = \frac{a_k - j b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + j b_k}{2},$$

che equivalentemente si scrivono

$$(1.19) \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = j(c_k - c_{-k}).$$

Ad esempio, le (1.19) si ottengono ponendo $t = 0$ e $t = \tau/(4k)$ in (1.17).

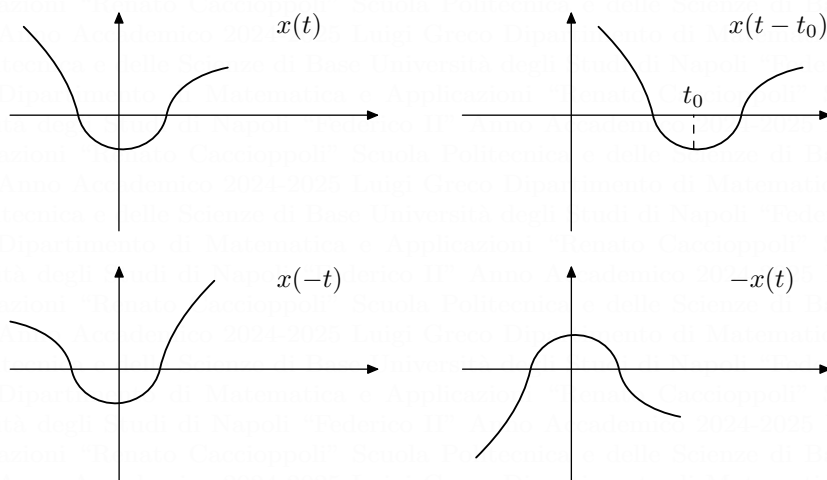
2. Generalità sui segnali

Un segnale è una funzione di variabile reale

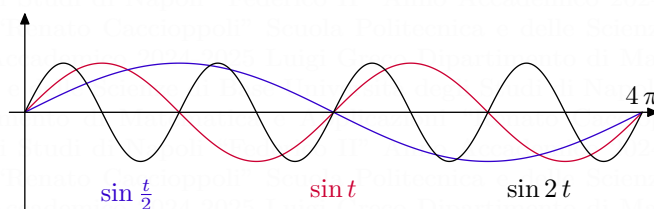
$$x: t \in E \subseteq \mathbb{R} \mapsto x(t) \in \mathbb{C}.$$

In molte questioni, è comodo considerare segnali definiti q.o. Definiamo varie operazioni sui segnali; le illustrazioni grafiche saranno date supponendo i segnali reali.

Dato $t_0 \in \mathbb{R}$, il segnale $t \mapsto x(t - t_0)$ si dice *traslato* del segnale $x(t)$: *ritardato* di t_0 se $t_0 > 0$, *anticipato* di $-t_0$ se $t_0 < 0$; esso è definito per $t - t_0 \in E$. Si dice *riflesso* nel tempo il segnale $t \mapsto x(-t)$; è definito per $-t \in E$. Il segnale $t \mapsto -x(t)$ si dice *ribaltato*; è definito in E .



Dato $a > 0$, il segnale $t \mapsto x(at)$ si dice *riscalato* di fattore a : *compresso* o *dilatato* a seconda che sia $a > 1$ o $0 < a < 1$; è definito per $at \in E$.



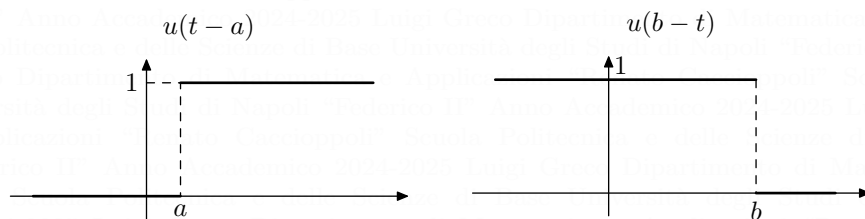
ESERCIZIO 2.1. Disegnare il diagramma di $x_n(t) = \arctan nt$, $t \in \mathbb{R}$, al variare di $n \in \mathbb{N}$. Disegnare il diagramma del limite puntuale della successione $(x_n)_n$.

Ricordiamo che u indica il gradino unitario. Per $a, b \in \mathbb{R}$

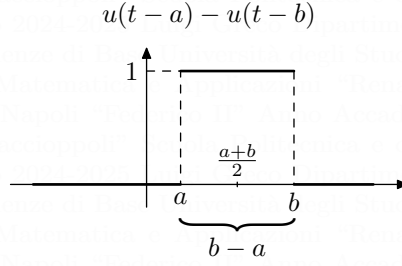
$$u(t-a) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > a \\ 0, & \text{se } t < a \end{cases} \quad u(b-t) = \begin{cases} 1, & \text{se } b > t \\ 0, & \text{se } b < t \end{cases}$$

e, se $a < b$,

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 1, & \text{se } a < t < b \\ 0, & \text{se } t < a \text{ e se } t > b \end{cases}$$



Il segnale $u(t-a) - u(t-b)$ si chiama *impulso unitario rettangolare*, o *finestra rettangolare*, di durata $b-a$ e centrato in $\frac{a+b}{2}$.



Il simbolo Π , o anche RECT, indica la finestra di durata 1 centrata in 0:

$$\Pi(t) = \text{RECT}(t) = u(t + 1/2) - u(t - 1/2) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1/2 < t < 1/2 \\ 0, & \text{se } t < -1/2 \text{ e se } t > 1/2 \end{cases}$$

Osserviamo che la moltiplicazione di un segnale per $u(t - a)$ ha l'effetto di azzerarne i valori per $t < a$, la moltiplicazione per $u(b - t)$ azzerava i valori per $t > b$, mentre la moltiplicazione per la finestra $u(t - a) - u(t - b)$ azzerava i valori per t non appartenente all'intervallo (a, b) .

Un segnale x definito nell'intervallo $(0, \tau)$ può essere sempre visto come la restrizione a tale intervallo di un segnale periodico di periodo τ ; in altri termini, x può essere prolungato a \mathbb{R} per periodicità con tale periodo.

Un segnale periodico può essere visto come sovrapposizione di traslati. Dato x , definiamo $x_0(t) = x(t)[u(t) - u(t - \tau)]$, che coincide con x nell'intervallo $(0, \tau)$ ed è nullo fuori di questo. Se x ha periodo τ , risulta q.o.

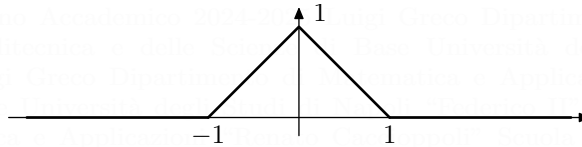
$$(2.1) \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - k\tau).$$

È possibile considerare in luogo di $u(t) - u(t - \tau)$ qualsiasi finestra $u(t - a) - u(t - a - \tau)$, $a \in \mathbb{R}$, di durata pari al periodo τ , cioè posto $x_a(t) = x(t)[u(t - a) - u(t - a - \tau)]$, risulta pure

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_a(t - k\tau).$$

Inversamente, assegnato x_0 q.o. su \mathbb{R} , non necessariamente nullo fuori dell'intervallo $(0, \tau)$, se la serie in (2.1) converge, il segnale x è periodico di periodo τ : esso si chiama *replica periodica di periodo τ* di x_0 . La serie converge certamente se x_0 è nullo fuori di un intervallo limitato (non necessariamente $(0, \tau)$), poiché in tal caso essa è in ogni punto t una somma finita, o anche se $x_0(t)$ è infinitesimo per $t \rightarrow \mp\infty$ di ordine abbastanza grande.

ESEMPIO 2.2. Consideriamo la *finestra triangolare* (centrata in 0, di durata 2) $\Lambda(t)$ rappresentata in figura:



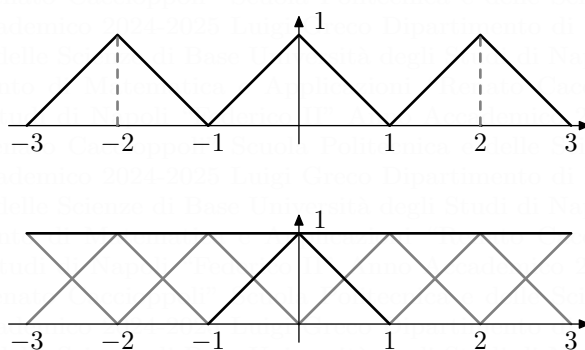
Evidentemente

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < -1 \text{ o } t > 1 \\ 1+t, & \text{se } -1 \leq t < 0 \\ 1-t, & \text{se } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)] = (1-|t|)[u(t+1) - u(t-1)].$$

Tracciamo i diagrammi delle repliche periodiche di Λ di periodi 2 e 1:



In particolare, la replica di periodo 1 è la funzione costante uguale a 1. Invero, detta x , per definizione risulta

$$(2.2) \quad x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda(t-k).$$

Essendo x periodica di periodo 1, basta calcolarla per $0 \leq t < 1$. Per tali valori di t , se $k \neq 0$ e $k \neq 1$, il corrispondente addendo in (2.2) è nullo, quindi

$$(2.3) \quad x(t) = \Lambda(t) + \Lambda(t-1).$$

Inoltre è $\Lambda(t) = 1-t$ e, poiché $-1 \leq t-1 < 0$, è pure $\Lambda(t-1) = 1+(t-1) = t$. Pertanto (2.3) implica

$$x(t) = 1-t+t = 1.$$

Osserviamo che risulta

$$(2.4) \quad \Lambda(t) = \Pi * \Pi(t).$$

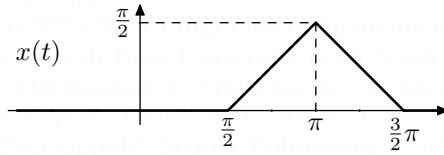
Invero, essendo Π pari, abbiamo

$$\Pi * \Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(s) \Pi(t-s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(s) \Pi(s-t) ds$$

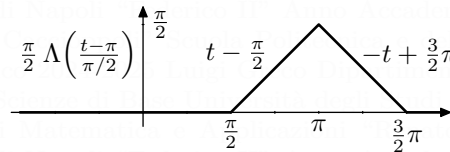
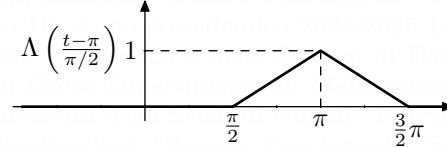
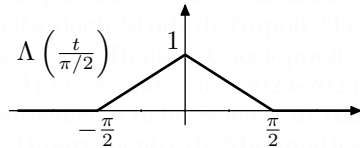
e

$$\Pi * \Pi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < -1, \text{ o } t > 1, \\ 1+t, & \text{se } -1 < t < 0, \\ 1-t, & \text{se } 0 < t < 1. \end{cases}$$

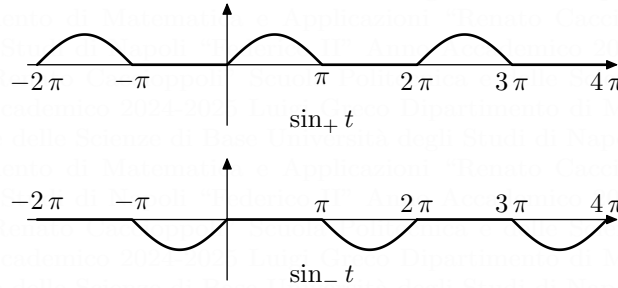
ESEMPIO 2.3. Trasformiamo $\Lambda(t)$ nel segnale $x(t)$ rappresentato in figura:



Abbiamo $x(t) = \frac{\pi}{2} \Lambda\left(\frac{t-\pi}{\pi/2}\right)$. Graficamente



ESEMPIO 2.4. Siano $\sin_+ t$ e $\sin_- t$ la parte positiva e la parte negativa di $\sin t$, cfr. (VII.1.5).

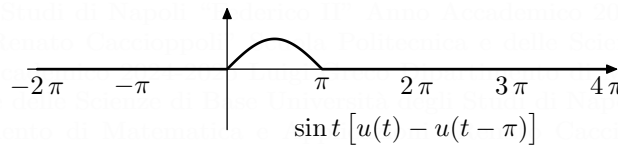


Osserviamo che

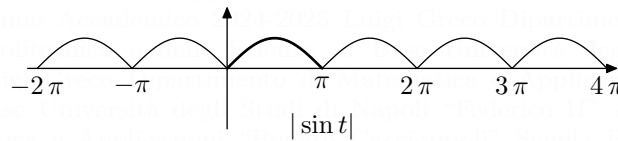
$$\sin_- t = -\sin_+(t - \pi).$$

Inoltre $\sin_+ t$ si ottiene come replica periodica di periodo 2π di

$$(2.5) \quad \sin t [u(t) - u(t - \pi)],$$



mentre la replica periodica di periodo π del segnale (2.5) è $|\sin t|$.



Sia x un segnale positivo. Da $-1 \leq \cos t \leq 1$ segue $-x(t) \leq x(t) \cos t \leq x(t)$, quindi il diagramma del segnale $x(t) \cos t$ è compreso tra quelli di x e del segnale ribaltato $-x$: graficamente, il fattore $x(t)$ modifica l'ampiezza delle oscillazioni di $\cos t$. Questa operazione si chiama *modulazione* del segnale *portante* $\cos t$ per mezzo del segnale *modulante* $x(t)$. Più in generale di $\cos t$, si può considerare $\cos(\omega t - \varphi)$, o $\sin(\omega t - \varphi)$.

3. Serie di Fourier

Si dice *polinomio trigonometrico* di ordine (minore o uguale a) $n \in \mathbb{N}_0$ un'espressione del tipo

$$(3.1) \quad p_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{j k \omega_0 t},$$

essendo $c_0 = a_0$ e i coefficienti c_k e c_{-k} legati ad a_k e b_k dalle (1.18), ovvero (1.19), per $k \in \mathbb{N}$. Calcoliamo l'energia di p_n ; ricordando l'ortogonalità del sistema trigonometrico e del sistema esponenziale, per il teorema di Pitagora abbiamo

$$\|p_n\|_2^2 = \tau |a_0|^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \tau \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Assegnato $x \in L^2(0, \tau)$, cerchiamo la migliore approssimazione nel senso dell'energia mediante polinomi trigonometrici. In altri termini, cerchiamo p_n in modo da minimizzare l'energia $\|x - p_n\|_2^2$.

LEMMA 3.1. *L'energia è minima se e solo se i coefficienti sono definiti dalle formule*

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{\tau} \int_0^\tau x(t) \cos k \omega_0 t dt, \quad b_k = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau x(t) \sin k \omega_0 t dt, \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, n$, ovvero

$$(3.3) \quad c_k = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt,$$

$|k| \leq n$.

Con tale scelta dei coefficienti, $x - p_n$ è ortogonale agli elementi $e^{j h \omega_0 t}$ del sistema esponenziale, con $|h| \leq n$. Inoltre risulta

$$(3.4) \quad \|x - p_n\|_2^2 = \|x\|_2^2 - \tau \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Dim. Sia p_n il polinomio trigonometrico definito in (3.1), con i coefficienti (3.3) e mostriamo la proprietà di ortogonalità. In effetti, usando l'ortogonalità del sistema esponenziale e ricordando che gli elementi hanno tutti energia pari a τ , abbiamo

$$(x - p_n, e^{j h \omega_0 t}) = (x, e^{j h \omega_0 t}) - c_h (e^{j h \omega_0 t}, e^{j h \omega_0 t}) = \tau c_h - \tau c_h = 0.$$

Sia ora $q(t) = \sum_{k=-n}^n d_k e^{j k \omega_0 t}$ un arbitrario polinomio trigonometrico di ordine n e mostriamo che risulta

$$\|x - p_n\|^2 \leq \|x - q\|^2.$$

Essendo anche $p_n - q$ un polinomio trigonometrico di ordine n , per quanto visto esso è ortogonale a $x - p_n$. Per il teorema di Pitagora, abbiamo

$$(3.5) \quad \|x - q\|^2 = \|x - p_n\|^2 + \|p_n - q\|^2 = \|x - p_n\|^2 + \tau \sum_{k=-n}^n |c_k - d_k|^2.$$

Il primo termine nell'ultimo membro non dipende dalla scelta di q . Il secondo termine è chiaramente non-negativo e nullo se e solo se $q = p_n$, mostrando evidentemente che p_n è l'unico polinomio che rende minima l'energia. Infine, scegliendo invece $q = 0$ in (3.5) otteniamo la (3.4):

$$\|x\|_2^2 = \|x - p_n\|_2^2 + \tau \sum_{k=-n}^n |c_k|^2.$$

Notiamo che i coefficienti definiti in (3.2) e (3.3) non dipendono da n . Consideriamo le serie

$$(3.6) \quad a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j k \omega_0 t},$$

che si dicono *serie trigonometrica* e *serie esponenziale di Fourier* di x . Il polinomio trigonometrico p_n è la somma parziale n -sima. La minimalità di p_n consente di ottenere il seguente risultato.

TEOREMA 3.2. *Ogni $x \in L^2(0, \tau)$ è somma della sua serie di Fourier nel senso dell'energia:*

$$(3.7) \quad x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j k \omega_0 t}.$$

Esplicitamente, la convergenza delle serie vuol dire che risulta

$$(3.8) \quad \lim_n \|x - p_n\|_2 = 0.$$

Noi ci limitiamo ad osservare che, se per $x \in L^2(0, \tau)$ vale la (3.7) per certi coefficienti a_k , b_k e c_k , questi sono dati *necessariamente* dalle (3.2) e (3.3). In effetti, ad esempio, dall'uguaglianza

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j k \omega_0 t}$$

nel senso dell'energia, moltiplicando scalarmente ambo i membri per $e^{j h \omega_0 t}$, con $h \in \mathbb{Z}$ fissato, per la continuità del prodotto scalare e l'ortogonalità del sistema esponenziale, abbiamo

$$(x, e^{j h \omega_0 t}) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j k \omega_0 t}, e^{j h \omega_0 t} \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (e^{j k \omega_0 t}, e^{j h \omega_0 t}) = c_h \tau$$

e quindi otteniamo la (3.3) con h in luogo di k .

Da (3.4) e (3.8) segue

$$(3.9) \quad \|x\|_2^2 = \tau |a_0|^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2,$$

che prende il nome di *uguaglianza di Parseval*. Essa implica che

$$(3.10) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \mp\infty} c_k = 0.$$

L'uguaglianza di Parseval (3.9) si generalizza come segue. Se oltre alla (3.7) vale la seguente

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k e^{j k \omega_0 t}$$

nel senso dell'energia, risulta

$$(3.11) \quad (x, y) = \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \overline{d_k}.$$

3.1. Osservazioni. Ricordiamo che $L^2(0, \tau) \subset L^1(0, \tau)$, essendo l'intervallo limitato. Le formule (3.2) e (3.3) hanno significato anche per $x \in L^1(0, \tau)$, poiché i fattori per cui è moltiplicato x nei rispettivi integrandi sono limitati. Se $x \notin L^2(0, \tau)$, viene meno la convergenza nel senso dell'energia del teorema 3.2. Dato $x \in L^1(0, \tau)$, si usa la notazione

$$x \sim a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k \omega_0 t + b_k \sin k \omega_0 t)$$

per indicare che la serie a destra è la serie di Fourier di x , cioè i coefficienti sono definiti dalle (3.2); non è supposto alcun tipo di convergenza per la serie.

Sia $x \in L^1(0, \tau)$ un segnale periodico di periodo τ ; in questo paragrafo facciamo alcune osservazioni sui coefficienti della serie di Fourier. Se sarà necessario far riferimento esplicito al segnale, indicheremo i coefficienti con $a_k[x]$, $b_k[x]$, $c_k[x]$.

(1) Per la periodicità, possiamo sostituire nelle formule (3.2) e (3.3) all'intervallo $(0, \tau)$ un qualsiasi intervallo $(a, a + \tau)$ di ampiezza pari a τ , cioè risulta

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\tau} \int_a^{a+\tau} x(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{\tau} \int_a^{a+\tau} x(t) \cos k \omega_0 t dt, \quad b_k = \frac{2}{\tau} \int_a^{a+\tau} x(t) \sin k \omega_0 t dt, \quad k \in \mathbb{N}, \\ c_k &= \frac{1}{\tau} \int_a^{a+\tau} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(2) In particolare, possiamo scegliere l'intervallo $(-\tau/2, \tau/2)$. È chiaro allora che, se x è pari, sono nulli tutti i coefficienti b_k e la serie di Fourier è in soli coseni, cioè si riduce a

$$a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos k \omega_0 t;$$

se x è dispari, sono nulli tutti i coefficienti a_k e la serie di Fourier è in soli seni, cioè si riduce a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin k \omega_0 t.$$

(3) I coefficienti sono infinitesimi, cioè valgono le (3.10). Se $x \notin L^2(0, \tau)$, queste non seguono come prima, non valendo l'uguaglianza di Parseval, ma sono conseguenza del

TEOREMA 3.3 (di Riemann-Lebesgue). *Se $x \in L^1(a, b)$, con (a, b) intervallo di \mathbb{R} , risulta*

$$(3.12) \quad \lim_{\omega \rightarrow \mp\infty} \int_a^b x(t) e^{j\omega t} dt = 0.$$

Chiaramente in (3.12) è $\omega \in \mathbb{R}$.

(4) Siano a e b numeri reali, non entrambi nulli: esiste quindi $\varphi \in \mathbb{R}$ tale che

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Dunque, per $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \varphi).$$

È chiaro che questa uguaglianza vale ($\forall \varphi \in \mathbb{R}$) se $a = b = 0$.

Sia x un segnale reale. Procediamo in questo modo con ciascun termine della serie trigonometrica di Fourier. Posto $A_0 = a_0$ e $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $k \in \mathbb{N}$, possiamo pertanto scrivere la serie come segue

$$A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k).$$

3.2. Convergenza puntuale della serie di Fourier. Il teorema 3.2 mostra la convergenza della serie di Fourier nel senso dell'energia, non in senso puntuale. Per enunciare un risultato sulla convergenza puntuale, premettiamo la seguente

DEFINIZIONE 3.4. Sia x un segnale definito in \mathbb{R} . Diciamo che x è regolarizzato in $t_0 \in \mathbb{R}$ se valgono le condizioni

- x è continuo in t_0 , o t_0 è discontinuità di I specie e risulta

$$x(t_0) = \frac{x(t_0-) + x(t_0+)}{2};$$

- esistono finite in t_0 derivata sinistra e derivata destra:

$$(3.13) \quad \lim_{t \rightarrow t_0-} \frac{x(t) - x(t_0-)}{t - t_0}, \quad \lim_{t \rightarrow t_0+} \frac{x(t) - x(t_0+)}{t - t_0}.$$

In particolare, x è regolarizzato in ogni punto in cui è derivabile. Assegnando il valore 1/2 al gradino in 0, otteniamo un segnale regolarizzato in ogni punto di \mathbb{R} :

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ 1/2, & \text{se } t = 0 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Sussiste il

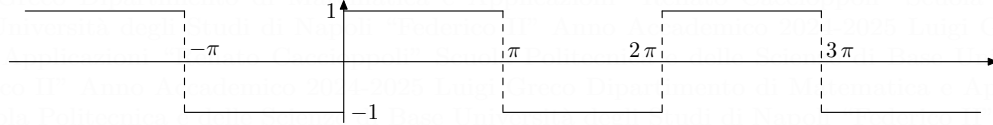
TEOREMA 3.5. *Sia $x \in L^1(0, \tau)$ periodico di periodo τ . Se x è regolarizzato in t_0 , la sua serie di Fourier converge a $x(t_0)$ in tale punto.*

OSSERVAZIONE 3.6. Il teorema 3.5 assicura, in particolare, che se x è derivabile in \mathbb{R} , la sua serie di Fourier converge a x in ogni punto. Osserviamo esplicitamente che, invece, esistono funzioni continue con serie di Fourier divergente in qualche punto.

3.3. Esempi.

ESEMPIO 3.7. Scriviamo la serie di Fourier del segnale x periodico di periodo 2π tale che

$$(3.14) \quad x(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t < \pi \\ -1, & \text{se } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$



Essendo il segnale dispari, risulta

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

mentre

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin k t \, dt = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ pari,} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Inoltre, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ pari,} \\ \frac{2}{j k \pi}, & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Pertanto

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)t = \frac{2}{j\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} e^{j(2k-1)t}.$$

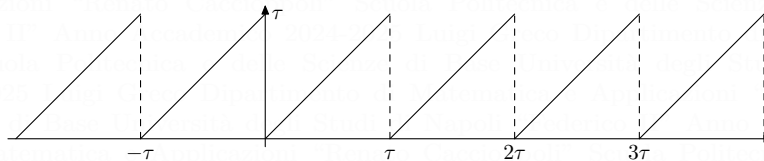
Questa uguaglianza vale nel senso dell'energia. Ponendo $x(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, il segnale x è regolarizzato in ogni punto, quindi l'uguaglianza vale anche in senso puntuale, $\forall t \in \mathbb{R}$. Riportiamo qui di seguito i diagrammi dei primi polinomi trigonometrici di Fourier p_n di x :



ESEMPIO 3.8. Scriviamo la serie di Fourier del segnale periodico di periodo τ tale che

$$(3.15) \quad x(t) = t, \quad 0 < t < \tau.$$

(Onda a dente di sega.) Il diagramma di $x(t)$ è tracciato in figura:



Valutiamo esplicitamente gli integrali (3.2) con $x(t) = t$, per $0 < t < \tau$:

$$a_0 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau t \, dt = \frac{\tau}{2} \quad (= \frac{1}{\tau} \times \text{area triangolo}).$$

Per $k \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$a_k = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau t \cos k \omega_0 t \, dt = \frac{\tau}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} s \cos k s \, ds$$

con la sostituzione $\omega_0 t = s$. Inoltre, integrando per parti

$$\int_0^{2\pi} s \cos k s \, ds = \frac{1}{k} [s \sin k s]_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin k s \, ds = 0$$

e quindi $a_k = 0$. Con analoghi calcoli, troviamo

$$b_k = \frac{\tau}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} s \sin k s \, ds = -\frac{1}{k} [s \cos k s]_0^{2\pi} \frac{\tau}{2\pi^2} = -\frac{\tau}{k\pi}.$$

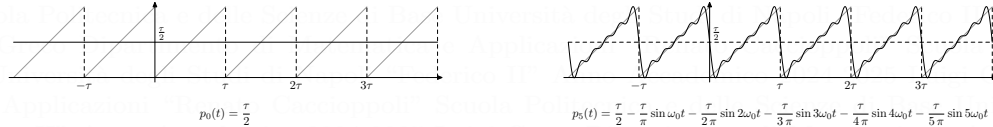
Pertanto, nel senso dell'energia (cioè in $L^2(0, \tau)$), risulta

$$(3.16) \quad x(t) = \frac{\tau}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\tau}{k\pi} \sin k \omega_0 t.$$

Notiamo che l'uguaglianza $a_k = 0$, per $k \in \mathbb{N}$, segue facilmente se osserviamo che il segnale $x(t) - \tau/2$ è dispari e la sua serie trigonometrica di Fourier (che è quindi di soli seni) differisce solo per il termine costante da quella di x :

$$a_k[x(t) - \tau/2] = a_k[x(t)] - a_k[\tau/2] = a_k[x(t)] - 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Riportiamo qui di seguito i diagrammi di alcuni polinomi trigonometrici di Fourier p_n di x , cioè somme parziali della serie (3.16):



Questi diagrammi mostrano la convergenza puntuale della serie di Fourier. In effetti, ponendo $x(k\tau) = \tau/2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, otteniamo un segnale regolarizzato in ogni punto, quindi possiamo applicare il teorema 3.5 e pertanto l'uguaglianza (3.16) vale anche in senso puntuale, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Analogamente possiamo scrivere la serie esponenziale di Fourier, oppure possiamo ricordare le (1.18):

$$c_k = -j \frac{b_k}{2} = j \frac{\tau}{2\pi k}, \quad c_{-k} = j \frac{b_k}{2} = j \frac{\tau}{2\pi(-k)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dunque

$$x(t) = \frac{\tau}{2} + j \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k \omega_0} e^{jk \omega_0 t}.$$

ESEMPIO 3.9. Scriviamo la serie di Fourier dell'onda triangolare $x(t)$, replica periodica di periodo 2 del segnale $\Lambda(t)$, cfr. esempio 2.2. Cominciamo con la serie trigonometrica. Essendo il periodo $\tau = 2$, è $\omega_0 = \pi$. Poiché x è un segnale pari, abbiamo

$$b_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Risulta poi

$$a_0 = \frac{1}{2}.$$

Inoltre, ricordando come è definito Λ , per $k \in \mathbb{N}$ troviamo

$$a_k = \int_{-1}^1 x(t) \cos k \pi t dt = \int_{-1}^0 (1+t) \cos k \pi t dt + \int_0^1 (1-t) \cos k \pi t dt$$

ed essendo

$$\int_{-1}^1 \cos k \pi t dt = 0,$$

integrando per parti, abbiamo ancora

$$\begin{aligned} a_k &= -2 \int_0^1 t \cos k \pi t dt = -\frac{2}{k \pi} \left([t \sin k \pi t]_0^1 - \int_0^1 \sin k \pi t dt \right) \\ &= -\frac{2}{(k \pi)^2} [\cos k \pi t]_0^1 = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ pari,} \\ \frac{4}{k^2 \pi^2}, & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases} \end{aligned}$$

D'altra parte $c_0 = a_0 = \frac{1}{2}$ e per $k \in \mathbb{N}$, essendo $b_k = 0$, risulta

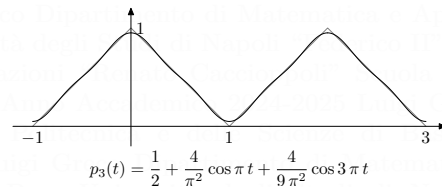
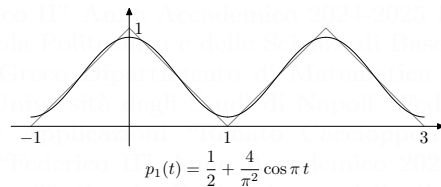
$$c_k = c_{-k} = \frac{a_k}{2} = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ pari,} \\ \frac{2}{k^2 \pi^2}, & \text{per } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Pertanto la serie di Fourier è

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j(2n+1)\pi t}}{(2n+1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(2n+1)\pi t}{(2n+1)^2}.$$

Osserviamo che il segnale considerato nell'esempio 3.7 è $-x'(t/\pi)$.

Riportiamo qui di seguito i diagrammi dei primi polinomi trigonometrici di Fourier p_n di x :



Questi diagrammi mostrano la convergenza puntuale della serie di Fourier. Valgono le ipotesi del teorema di convergenza puntuale.

ESEMPIO 3.10. Scriviamo la serie di Fourier di $|\sin t|$, cfr. esempio 2.4. Essendo il periodo π , abbiamo $\omega_0 = 2$ e, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t e^{-j 2 k t} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{j t} - e^{-j t}}{2j} e^{-j 2 k t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi j} \left(\left[\frac{e^{j(1-2k)t}}{j(1-2k)} \right]_0^\pi - \left[\frac{e^{-j(1+2k)t}}{-j(1+2k)} \right]_0^\pi \right) = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}. \end{aligned}$$

Quindi $c_{-k} = c_k$. Ne segue

$$a_0 = c_0 = \frac{2}{\pi}$$

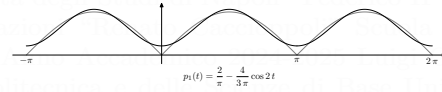
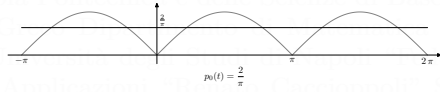
e per $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2c_k = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}, \quad b_k = j(c_k - c_{-k}) = 0,$$

l'ultima uguaglianza essendo chiara poiché $|\sin t|$ è funzione pari. Pertanto

$$(3.17) \quad |\sin t| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos 2kt = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-4k^2} e^{j 2 k t}.$$

Le uguaglianze (3.17) valgono sia nel senso dell'energia che in senso puntuale $\forall t \in \mathbb{R}$. Riportiamo qui di seguito i diagrammi dei primi polinomi trigonometrici di Fourier p_n di x :



Analogamente, si può scrivere la serie di Fourier di $\sin_+ t$. Il periodo è 2π e $\omega_0 = 1$; con calcoli simili ai precedenti, troviamo, $\forall k \in \mathbb{Z} - \{1\}$,

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ dispari,} \\ \frac{1}{\pi(1-k^2)}, & \text{per } k \text{ pari,} \end{cases}$$

$$c_{\mp 1} = \mp \frac{1}{4j}.$$

D'altra parte $a_0 = c_0 = 1/\pi$ e, $\forall k \in \mathbb{N} - \{1\}$,

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{per } k \text{ dispari,} \\ \frac{2}{\pi(1-k^2)}, & \text{per } k \text{ pari;} \end{cases} \quad b_k = 0.$$

Inoltre

$$a_1 = c_1 + c_{-1} = 0, \quad b_1 = j(c_1 - c_{-1}) = \frac{1}{2}.$$

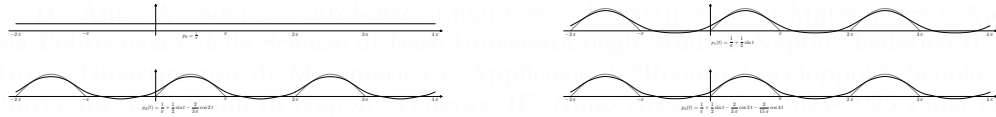
Pertanto

$$\begin{aligned}
 \sin_+ t &= \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-4k^2} \cos 2kt + \frac{1}{2} \sin t \\
 (3.18) \quad &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1-4k^2} e^{j2k\pi t} + \frac{e^{jt}}{4j} - \frac{e^{-jt}}{4j}.
 \end{aligned}$$

Osservato che

$$\sin_+ t = \frac{|\sin t| + \sin t}{2},$$

notiamo che la serie trigonometrica si scrive subito a partire dalla (3.17) sommando $\sin t$ e dividendo ambo i membri per 2: queste operazioni conservano la convergenza nel senso dell'energia, quindi la serie in (3.18) è la serie di Fourier di $\sin_+ t$. Riportiamo qui di seguito i diagrammi dei primi polinomi trigonometrici di Fourier di x :



CAPITOLO IX

Trasformazione di Laplace

In questo capitolo trattiamo la trasformazione di Laplace, che presenta diverse analogie con la \mathcal{Z} -trasformazione, sia per quanto riguarda la teoria, sia per i problemi che si risolvono mediante le due trasformazioni.

1. La trasformata di Laplace

DEFINIZIONE 1.1. Sia $x \in L^1_{\text{loc}}([0, +\infty[)$. Si dice che x è trasformabile (in senso unilatero) in $s \in \mathbb{C}$ se $t \mapsto x(t)e^{-st}$ è integrabile in $[0, +\infty[$. La trasformata unilatera di x è la funzione di variabile complessa

$$(1.1) \quad \mathcal{L}_u[x] = X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T x(t)e^{-st} dt.$$

Si dice che x è assolutamente trasformabile in $s \in \mathbb{C}$ se $t \mapsto x(t)e^{-st}$ è sommabile in $[0, +\infty[$. È chiaro che l'assoluta trasformabilità implica la trasformabilità.

Fondamentale è il seguente

TEOREMA 1.2. *Se il segnale x è \mathcal{L}_u -trasformabile in $s_0 \in \mathbb{C}$, esso è trasformabile anche in ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\text{Re } s > \text{Re } s_0$.*

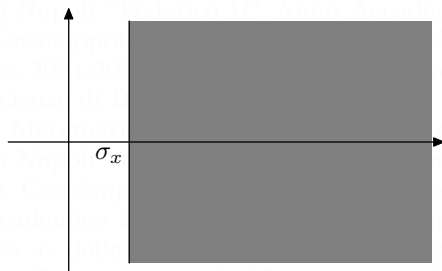
La trasformabilità significa integrabilità della funzione integranda; riguardo al teorema, ci limitiamo ad osservare che un risultato analogo a proposito della assoluta trasformabilità è banale, poiché

$$\text{Re } s > \text{Re } s_0 \quad \Rightarrow \quad |x(t)e^{-st}| \leq |x(t)e^{-s_0 t}|, \text{ per q.o. } t \geq 0.$$

La quantità

$$(1.2) \quad \sigma_x = \inf \{ \text{Re } s : x \text{ è trasformabile in } s \}$$

si chiama *ascissa di convergenza*. La trasformata $X(s)$ è dunque definita nel *semipiano di convergenza* formato dai numeri $s \in \mathbb{C}$ tali che $\text{Re } s > \sigma_x$.



Notiamo che il semipiano di convergenza coincide con l'intero piano complesso nel caso $\sigma_x = -\infty$.

Nelle applicazioni, useremo la trasformata unilatera; è comodo però considerare la trasformata bilatera.

DEFINIZIONE 1.3. Sia $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Si dice che x è trasformabile secondo Laplace in $s \in \mathbb{C}$ se $t \mapsto x(t)e^{-st}$ è integrabile in \mathbb{R} . La trasformata (bilatera) di x è la funzione di variabile complessa

$$(1.3) \quad \mathcal{L}[x] = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt.$$

Si dice che x è assolutamente trasformabile in s se $t \mapsto x(t)e^{-st}$ è sommabile in \mathbb{R} .

L'integrabilità in \mathbb{R} vuol dire integrabilità in $] -\infty, 0]$ e in $[0, +\infty[$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 x(t) e^{-st} dt + \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt,$$

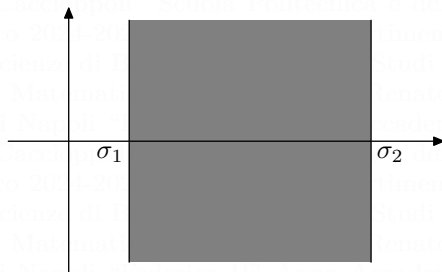
dove ciascuno dei due integrali a secondo membro è inteso come limite. L'ultimo integrale è la trasformata unilatera del segnale x (ristretto a $[0, +\infty[$). Il primo integrale a secondo membro mutando t in $-t$ si riscrive

$$\int_0^{+\infty} x(-t) e^{-(-s)t} dt$$

e quindi rappresenta la trasformata unilatera di $t \mapsto x(-t)$, valutata in $-s$. Pertanto

$$(1.4) \quad \mathcal{L}[x(t)](s) = \mathcal{L}_u[x(-t)](-s) + \mathcal{L}_u[x(t)](s).$$

Detto σ_1 l'ascissa di convergenza di $\mathcal{L}_u[x(t)]$ e $-\sigma_2$ quella di $\mathcal{L}_u[x(-t)]$, il secondo termine a secondo membro di (1.4) è definito per $\text{Re } s > \sigma_1$, mentre il primo per $\text{Re}(-s) > -\sigma_2$, ovvero $\text{Re } s < \sigma_2$. Noi supporremo $\sigma_1 < \sigma_2$ e quindi la trasformata bilatera $\mathcal{L}[x(t)]$ è definita nella striscia verticale, detta *striscia di convergenza*, degli $s \in \mathbb{C}$ tali che $\sigma_1 < \text{Re } s < \sigma_2$:



La striscia di convergenza, che può essere un semipiano destro ($\sigma_2 = +\infty$) o sinistro ($\sigma_1 = -\infty$) o l'intero piano complesso, è detta *dominio della trasformata*.

La (1.4) esprime la trasformata bilatera come somma di trasformate unilatera; d'altra parte chiaramente la trasformata unilatera è un caso particolare della bilatera:

$$(1.5) \quad \mathcal{L}_u[x(t)] = \mathcal{L}[x(t)u(t)].$$

Prevalentemente ci occuperemo della trasformata bilatera, limitandoci ad indicare le modifiche, quando necessarie, per la trasformata unilatera. La trasformazione (bilatera o unilatera) è la corrispondenza che associa al segnale trasformabile la sua trasformata:

$$\mathcal{L}: x \mapsto \mathcal{L}[x], \quad \mathcal{L}_u: x \mapsto \mathcal{L}_u[x].$$

Evidentemente sono operatori lineari: se x e y sono trasformabili in una stessa striscia verticale e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha x + \beta y$ è trasformabile e risulta

$$\mathcal{L}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{L}[x] + \beta \mathcal{L}[y].$$

Vediamo qualche esempio di \mathcal{L} -trasformata.

ESEMPIO 1.4. In base alla definizione, abbiamo

$$(1.6) \quad \mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}_u[1] = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Analogamente

$$(1.7) \quad \mathcal{L}[-u(-t)] = - \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s < 0.$$

Confrontando (1.6) e (1.7) appare chiara la necessità di indicare il dominio della trasformata. Altre semplici trasformate sono

$$(1.8) \quad \mathcal{L}[u(t - t_0)] = \int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{e^{-st_0}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}[u(t) e^{s_0 t}] &= \mathcal{L}_u[e^{s_0 t}] = \int_0^{+\infty} e^{-(s-s_0)t} dt \\ &= \frac{1}{s - s_0}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0, \end{aligned}$$

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_u[\sin t] &= \frac{\mathcal{L}_u[e^{jt}] - \mathcal{L}_u[e^{-jt}]}{2j} = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s - j} - \frac{1}{s + j} \right) \\ &= \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} j = 0, \end{aligned}$$

e analogamente

$$(1.11) \quad \mathcal{L}_u[\cos t] = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Introduciamo una classe di funzioni importante nella teoria della trasformazione di Laplace.

DEFINIZIONE 1.5. Un segnale $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ è detto *di ordine esponenziale* se esistono $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}$, con $\sigma_1 < \sigma_2$, tali che

$$(1.12) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) e^{-\sigma_1 t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) e^{-\sigma_2 t} = 0.$$

Ad esempio, per $x(t) = e^{-|t|}$ possiamo scegliere σ_1 e σ_2 qualsiasi verificanti $-1 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$. Se x è di ordine esponenziale, la funzione $t \mapsto x(t) e^{-st}$ è sommabile in \mathbb{R} , per ogni $s \in \mathbb{C}$ verificante

$$(1.13) \quad \sigma_1 < \operatorname{Re} s < \sigma_2.$$

In effetti, data la locale sommabilità di x , occorre verificare la sommabilità solo intorno a $\mp\infty$. Per la prima delle (1.12), intorno a $+\infty$ risulta $|x(t)| \leq e^{\sigma_1 t}$, da cui segue

$$|x(t) e^{-st}| \leq e^{(\sigma_1 - \operatorname{Re} s)t}$$

e quindi la sommabilità intorno a $+\infty$. Analogamente si stabilisce la sommabilità intorno a $-\infty$. Pertanto x è trasformabile (l'integrale di Laplace è assolutamente convergente) nella striscia formata dagli s verificanti (1.13).

OSSERVAZIONE 1.6. Se il segnale $x(t)$ è nullo intorno a $-\infty$, la seconda delle (1.12) è verificata con σ_2 arbitrariamente grande, quindi la striscia (1.13) diviene un semipiano destro $\sigma_1 < \operatorname{Re} s$; questo è in accordo col caso della trasformata unilatera, in cui il segnale è $x(t)u(t)$. Alla stessa maniera, se $x(t)$ è nullo intorno a $+\infty$, si può prendere σ_1 arbitrariamente vicino a $-\infty$ e la striscia (1.13) diviene un semipiano sinistro $\operatorname{Re} s < \sigma_2$.

2. Proprietà fondamentali

Cominciamo con l'osservare che la trasformata di Laplace è una funzione olomorfa nel dominio.

TEOREMA 2.1. *La trasformata di Laplace è olomorfa nella striscia di convergenza. Le derivate si calcolano derivando sotto il segno di integrale:*

$$(2.1) \quad X^{(k)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-t)^k x(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}[(-t)^k x(t)], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

La (2.1) si dice *I formula fondamentale* (iterata) per la trasformata di Laplace.

ESEMPIO 2.2. Dalla I formula fondamentale, ricaviamo

$$(2.2) \quad \mathcal{L}[t^k u(t)] = \mathcal{L}_u[t^k] = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

Più in generale, ricordando la (1.9)

$$(2.3) \quad \mathcal{L}_u[t^k e^{s_0 t}] = \frac{k!}{(s - s_0)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0.$$

ESEMPIO 2.3. L'olomorfia permette di calcolare facilmente $X(s) = \mathcal{L}[e^{-t^2}]$. Invero, per i criteri di sommabilità vediamo che $t \mapsto e^{-t^2} e^{-st}$ è sommabile in \mathbb{R} , $\forall s \in \mathbb{C}$, quindi X è funzione intera. Dalla definizione di \mathcal{L} -trasformata, abbiamo

$$e^{-s^2/4} X(s) = e^{-s^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+s/2)^2} dt$$

e l'ultimo integrale non dipende da $\operatorname{Re} s$, come si vede con la sostituzione $\tau = t + \operatorname{Re} s/2$. Per la condizione di Cauchy-Riemann, la funzione intera $s \mapsto e^{-s^2/4} X(s)$ è indipendente anche da $\operatorname{Im} s$, quindi è costante; per $s = 0$ vale $\sqrt{\pi}$, per la (VII.1.17). Pertanto

$$(2.4) \quad X(s) = \mathcal{L}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{s^2/4}.$$

Vediamo ora la seconda formula fondamentale, per la trasformata della derivata. Ci limitiamo ai segnali di ordine esponenziale.

TEOREMA 2.4. *(a) Se x è assolutamente continuo (sugli intervalli compatti) e di ordine esponenziale, vale la formula*

$$(2.5) \quad \mathcal{L}[x'(t)] = s X(s).$$

(b) Se x è assolutamente continuo (sugli intervalli compatti contenuti) in $[0, +\infty[$ e di ordine esponenziale, vale la formula

$$(2.6) \quad \mathcal{L}_u[x'(t)] = sX(s) - x(0).$$

Dim. Le formule si ottengono integrando per parti; ad esempio

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x'(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-st} dt \\ &= \left[x(t) e^{-st} \right]_{-\infty}^{+\infty} + s \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = sX(s) \end{aligned}$$

poiché da (1.12) e (1.13) segue $\lim_{t \rightarrow \mp\infty} x(t) e^{-st} = 0$.

Le (2.5) e (2.6) si iterano: se x è di classe C^{k-1} e $x^{(k-1)}$ è assolutamente continua, valgono le formule

$$(2.7) \quad \mathcal{L}[x^{(k)}(t)] = s^k X(s);$$

$$(2.8) \quad \mathcal{L}_u[x^{(k)}(t)] = s^k X(s) - s^{k-1} x(0) - s^{k-2} x'(0) - \dots - x^{(k-1)}(0).$$

Mettiamo in luce una proprietà della trasformata unilatera.

TEOREMA 2.5 (comportamento asintotico). *Se l'integrale di Laplace di x converge assolutamente (ad esempio, x è di ordine esponenziale), risulta*

$$(2.9) \quad \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x(t)] = 0.$$

Dim. Ricordiamo innanzitutto che il dominio di $\mathcal{L}_u[x]$ è un semipiano destro, quindi possiamo far tendere $\operatorname{Re} s$ a $+\infty$. Poiché per q.o. $t \in [0, +\infty[$ risulta

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} x(t) e^{-st} = 0,$$

la (2.9) segue, se possiamo giustificare il passaggio al limite sotto il segno di integrale nell'espressione che definisce $\mathcal{L}_u[x]$. A tale scopo, usiamo il teorema di Lebesgue della convergenza dominata: per trovare una maggiorante sommabile, fissiamo s_0 tale che la funzione $t \mapsto x(t) e^{-s_0 t}$ sia sommabile in $[0, +\infty[$ e osserviamo che, per $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$, risulta

$$|x(t) e^{-s_0 t}| \geq |x(t) e^{-st}|, \quad \text{per q.o. } t \in [0, +\infty[.$$

Spesso si cerca di ricavare informazioni sul segnale x dalla sua trasformata X . Dalla formula (2.6) otteniamo due risultati di questo tipo: i teoremi del valore iniziale e finale.

TEOREMA 2.6. *Sia x assolutamente continuo (sugli intervalli compatti contenuti) in $[0, +\infty[$. Sia $X(s) = \mathcal{L}_u[x(t)]$.*

(Valore iniziale) Se x e x' sono di ordine esponenziale, vale la formula

$$(2.10) \quad x(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} sX(s).$$

(Valore finale) Se x' è sommabile, risulta x convergente a $+\infty$, assolutamente trasformabile per $\operatorname{Re} s > 0$ e vale l'uguaglianza

$$(2.11) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} sX(s).$$

Dim. La (2.10) segue da (2.6), poiché per il teorema 2.5 risulta $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x'(t)] = 0$.

Riguardo al teorema del valore finale, osserviamo innanzitutto che la sommabilità significa assoluta trasformabilità in $s = 0$. Questo implica che x' sia assolutamente trasformabile per $\operatorname{Re} s > 0$. Inoltre, per l'assoluta continuità abbiamo

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau) d\tau$$

e quindi $x(t)$ converge per $t \rightarrow +\infty$, essendo x' sommabile:

$$(2.12) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x(0) + \int_0^{+\infty} x'(\tau) d\tau.$$

Ne segue che $x(t)$ è limitato e dunque anch'esso assolutamente trasformabile, quindi $X(s)$ è definita, per $\operatorname{Re} s > 0$. D'altra parte, poiché per $\operatorname{Re} s > 0$ risulta $|x'(t)e^{-st}| \leq |x'(t)|$, per q.o. $t \in [0, +\infty[$, mediante il teorema della convergenza dominata, abbiamo

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} s X(s) = x(0) + \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} \int_0^{+\infty} x'(t) e^{-st} dt = x(0) + \int_0^{+\infty} x'(\tau) d\tau.$$

Confrontando questa uguaglianza con la (2.12), otteniamo la (2.11).

3. Proprietà formali

Elenchiamo alcune formule, che seguono subito dalla definizione, mediante le quali si opera con la trasformata.

- Traslazione in t :

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = e^{-st_0} X(s),$$

$$\mathcal{L}[x(t)u(t - t_0)] = e^{-st_0} \mathcal{L}[x(t + t_0)u(t)].$$

- Traslazione in s :

$$\mathcal{L}[x(t)e^{s_0 t}] = X(s - s_0).$$

- Riscaldamento e riflessione: $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,

$$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right).$$

- Coniugazione:

$$\mathcal{L}[\overline{x(t)}] = \overline{X(\bar{s})}.$$

In particolare, x reale $\iff X$ hermitiana.

Per la formula di traslazione in t , basta effettuare un cambiamento di variabile:

$$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-s(\tau+t_0)} d\tau = e^{-st_0} \mathcal{L}[x(t)].$$

Analoghi passaggi portano alla formula di traslazione in s . Vediamo la formula di riscaldamento, per $a > 0$; con la sostituzione $\tau = at$, troviamo

$$\mathcal{L}[x(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) e^{-st} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau$$

e quindi la formula. Per il caso della riflessione, cioè $a < 0$, l'unica modifica è che nell'ultimo integrale in questo caso gli estremi sono invertiti. Anche la formula per la trasformata del segnale coniugato è semplice:

$$\mathcal{L}[\overline{x(t)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)} e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t) e^{-\bar{s}t}} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-\bar{s}t} dt},$$

poiché l'integrale del coniugato è il coniugato dell'integrale e quindi la formula.

Illustriamo le proprietà precedenti con qualche esempio. La (1.9) è un caso particolare della formula di traslazione in s . Generalizziamo le (1.10) e (1.11); per $\omega \in \mathbb{R} - \{0\}$, per $\operatorname{Re} s > 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_u[\cos \omega t] = \frac{\mathcal{L}_u[e^{j\omega t}] + \mathcal{L}_u[e^{-j\omega t}]}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega} \right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

e analogamente

$$\mathcal{L}_u[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Osserviamo inoltre che queste seguono da (1.11) e (1.10) mediante la formula di cambiamento di scala: è sufficiente considerare il caso $\omega > 0$. Ancora, le due formule si ricavano l'una dall'altra per derivazione rispetto a t , mediante la II formula fondamentale.

ESEMPIO 3.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin t u(t - \pi/4)] &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \mathcal{L}_u[\sin(t + \pi/4)] \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \frac{\mathcal{L}_u[\sin t] + \mathcal{L}_u[\cos t]}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{\sqrt{2}} \frac{1 + s}{s^2 + 1}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.2. Calcoliamo $\mathcal{L}[e^{-|t|}]$. Possiamo scrivere per q.o. t

$$e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t).$$

Per la formula di traslazione

$$\mathcal{L}[e^{-t}u(t)] = \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re} s > -1.$$

D'altra parte, per la formula di riflessione

$$\mathcal{L}[e^t u(-t)](s) = \mathcal{L}[e^{-t}u(t)](-s) = \frac{1}{-s+1}$$

per $\operatorname{Re}(-s) > -1$, ovvero $\operatorname{Re} s < 1$. Dunque per $-1 < \operatorname{Re} s < 1$ abbiamo

$$(3.1) \quad \mathcal{L}[e^{-|t|}] = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{-s+1} = \frac{2}{1-s^2}.$$

4. La trasformata della convoluzione

TEOREMA 4.1. *Se x e y sono assolutamente trasformabili (cioè gli integrali di Laplace convergono assolutamente) in una stessa striscia, risulta*

$$(4.1) \quad \mathcal{L}[x * y] = \mathcal{L}[x] \cdot \mathcal{L}[y].$$

La formula si ricava similmente all'analogia formula (X.4.1) per la \mathcal{F} -trasformata. Notiamo che $x * y$ può essere definita anche se x e y non sono sommabili.

ESEMPIO 4.2. Data $x \in L^1(0, +\infty)$, la funzione integrale

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$$

è limitata in $[0, +\infty[$, quindi assolutamente trasformabile per $\operatorname{Re} s > 0$; è facile mostrare che

$$(4.2) \quad \mathcal{L}_u \left[\int_0^t x(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}_u[x(t)]$$

in applicazione della II formula fondamentale, poiché $y' = x$ e $y(0) = 0$. La (4.2) segue pure dalla formula per la trasformata della convoluzione, in quanto (prolungando x a \mathbb{R} ponendo $x(t) = 0$ per $t < 0$) risulta $\forall t \in \mathbb{R}$, cfr. (VIII.1.2)

$$u(t) \int_0^t x(\tau) d\tau = (x(t) u(t)) * u(t).$$

5. Trasformata unilatera di segnali periodici

TEOREMA 5.1. *Sia x un segnale periodico di periodo $\tau > 0$, sommabile in $(0, \tau)$. In queste ipotesi, la funzione $t \mapsto x(t) e^{-st}$ è sommabile su $(0, +\infty)$ per ogni $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > 0$, quindi x è assolutamente \mathcal{L}_u -trasformabile. Inoltre, posto $x_0(t) = x(t)[u(t) - u(t - \tau)]$, risulta*

$$(5.1) \quad \mathcal{L}_u[x(t)] = \frac{\mathcal{L}[x_0(t)]}{1 - e^{-s\tau}}.$$

Dando per buona la assoluta trasformabilità, ci limitiamo a mostrare la formula. Per la periodicità, abbiamo

$$x_0(t) = x(t) u(t) - x(t) u(t - \tau) = x(t) u(t) - x(t - \tau) u(t - \tau)$$

e quindi, per la formula di traslazione in t , ricaviamo

$$\mathcal{L}[x_0(t)] = \mathcal{L}_u[x(t)] - e^{-s\tau} \mathcal{L}_u[x(t)]$$

da cui segue subito la (5.1).

ESEMPIO 5.2. Calcoliamo la trasformata di $x_0(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi)]$: per la formula di traslazione in t ,

$$(5.2) \quad \mathcal{L}[x_0(t)] = \mathcal{L}[\sin t u(t)] + \mathcal{L}[\sin(t - \pi) u(t - \pi)] = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Notiamo che $\mathcal{L}[x_0]$ è funzione intera. Dalla (5.2) possiamo ricavare ad esempio $\mathcal{L}_u[|\sin t|]$ mediante la (5.1), poiché $|\sin t|$ si ottiene come replica periodica di periodo π di $x_0(t)$:

$$(5.3) \quad \mathcal{L}_u[|\sin t|] = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Facendo la replica periodica di periodo 2π di x_0 , otteniamo $\sin_+ t$, quindi, analogamente a prima, troviamo

$$(5.4) \quad \mathcal{L}_u[\sin_+ t] = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)}.$$

ESERCIZIO 5.3. Calcolare $\mathcal{L}[x_0]$ in (5.2) direttamente dalla definizione della trasformata mediante integrale.

6. Antitrasformazione

La trasformazione di Laplace è iniettiva, cioè segnali con la stessa trasformata in una stessa striscia sono uguali q.o. Vale inoltre la seguente formula di antitrasformazione di Riemann-Fourier: se il segnale $x(t)$ è regolarizzato in ogni punto, risulta

$$(6.1) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \text{v.p.} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds,$$

essendo la retta di equazione $\operatorname{Re} s = \sigma$ interna al dominio della trasformata.

Il problema di antitrasformare una funzione razionale fratta può essere risolto in maniera completamente elementare. Osserviamo che, se la funzione razionale

$$X(s) = \mathcal{R}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

è una \mathcal{L}_u -trasformata, deve essere infinitesima all'infinito, quindi è una funzione razionale propria. Basta allora decomporla in fratti semplici e ricordare la (2.3):

$$\frac{c}{(s - s_0)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}_u^{-1}} c \frac{e^{s_0 t}}{(n-1)!} t^{n-1}.$$

Ad esempio, se gli zeri di Q sono semplici s_1, \dots, s_n , la decomposizione è

$$\mathcal{R}(s) = \frac{R[s_1]}{s - s_1} + \dots + \frac{R[s_n]}{s - s_n}$$

e quindi, antitrasformando otteniamo la *formula dello sviluppo di Heaviside*:

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \dots + \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)} e^{s_n t}, \quad t \geq 0.$$

Se \mathcal{R} ha coefficienti reali, conviene decomporre in fratti nel campo reale. Se Q ha zeri multipli, si può usare la formula di Hermite.

ESEMPIO 6.1.

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right] = u(t) - u(t) \cos t.$$

Alternativamente, usiamo la (4.2):

$$(6.2) \quad \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 1)} \right] = \int_0^t \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] (\tau) d\tau = \int_0^t \sin \tau d\tau.$$

ESEMPIO 6.2. Per $\omega > 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2} \right] &= \frac{1}{2\omega^2} \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + \omega^2} + \frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\omega^2} \left(\frac{1}{\omega} \sin \omega t - t \cos \omega t \right) u(t). \end{aligned}$$

ESEMPIO 6.3. Antitrasformiamo $\mathcal{R}(s) = \frac{2}{1-s^2}$. Le singolarità sono ∓ 1 . $\mathcal{R}(s)$ è olomorfa in ciascuna delle “strisce” verticali $A = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < -1\}$, $B = \{s \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} s < 1\}$ e $C = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1\}$. Dall'esempio 3.2 sappiamo che in B è

$$\mathcal{R}(s) = \mathcal{L}[e^{-|t|}].$$

Consideriamo $s \in C$:

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1} \xrightarrow{\mathcal{L}_u^{-1}} (e^{-t} - e^t)u(t).$$

In A , essendo \mathcal{R} pari, risulta

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}(s)] = (e^t - e^{-t})u(-t).$$

Il calcolo della \mathcal{L}_u^{-1} di una funzione razionale propria si effettua facilmente anche mediante la formula (6.1) di Riemann-Fourier. Si perviene ad un integrale del tipo

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} e^{st} ds,$$

con $t \geq 0$. La funzione P/Q è olomorfa in un semipiano destro e l'integrale è esteso ad una retta verticale contenuta in tale semipiano, cioè con σ sufficientemente grande; il denominatore Q è privo di zeri sulla retta. Se $\text{grado } Q \geq \text{grado } P + 2$, l'integrale è assolutamente convergente. Se $\text{grado } Q = \text{grado } P + 1$ esso è semplicemente convergente per $t > 0$ e va inteso nel senso del valor principale per $t = 0$.

L'integrale è del tipo (VII.2.25). Per $t > 0$ abbiamo

$$\mathcal{L}_u^{-1}[P/Q] = \sum R[s_k; e^{st}P(s)/Q(s)],$$

dove i punti $s_k \in \mathbb{C}$ sono i poli di P/Q . Così abbiamo, ad esempio

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+1)} \right] = R[0] + R[j] + R[-j]$$

dove i residui sono relativi alla funzione $\frac{e^{st}}{s(s^2+1)}$. Dunque ritroviamo ($t > 0$)

$$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2+1)} \right] = 1 + \frac{e^{st}}{2s^2} \Big|_{s=j} + \frac{e^{st}}{2s^2} \Big|_{s=-j} = 1 - \cos t.$$

7. Applicazioni

Mediante l'uso della \mathcal{L}_u -trasformazione risolviamo i problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti in $[0, +\infty[$. Il modo di procedere è analogo a quello usato per risolvere i problemi ai valori iniziali per le equazioni ricorrenti mediante la \mathcal{Z} -trasformazione. Consideriamo ad esempio il problema del secondo ordine

$$(7.1) \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = x(t) \\ y(0) \text{ e } y'(0) \text{ assegnati} \end{cases}$$

È noto il teorema di esistenza e unicità, nel caso che il termine noto sia continuo. Se x è localmente sommabile in $[0, +\infty[$, esiste un'unica $y \in C^1([0, +\infty[)$, soddisfacente le condizioni iniziali, con y' localmente assolutamente continua in $[0, +\infty[$ e tale che l'equazione sia verificata per q.o. $t \in (0, +\infty)$.

Illustriamo ora il metodo risolutivo basato sulla \mathcal{L}_u -trasformazione.

(a) Supponiamo che il termine noto x e la soluzione y siano \mathcal{L}_u -trasformabili e applichiamo la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione. Per trasformare il primo membro, usiamo la linearità e la seconda formula fondamentale (2.8): è necessario conoscere i valori iniziali. Posto $Y = \mathcal{L}_u[y]$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[y'' + ay' + by] &= s^2 Y - y(0)s - y'(0) + asY - ay(0) + bY \\ &= (s^2 + as + b)Y - y(0)s - y'(0) - ay(0) = X. \end{aligned}$$

(b) Ricaviamo Y da questa uguaglianza:

$$(7.2) \quad Y(s) = \frac{1}{s^2 + as + b} X(s) + \frac{y(0)s + y'(0) + ay(0)}{s^2 + as + b}.$$

(c) A questo punto antitrasformiamo. Notiamo che $s^2 + a s + b$ è il polinomio caratteristico dell'operatore differenziale. Il secondo termine a secondo membro della (7.2) è una funzione razionale, i cui coefficienti dipendono dai valori iniziali e l'antitrasformazione non presenta problemi. La funzione

$$(7.3) \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b},$$

cioè il reciproco del polinomio caratteristico, si dice *funzione di trasferimento*.

Osserviamo che per la linearità del problema, la soluzione di (7.1) si può decomporre nella somma $y = y_1 + y_2$ delle soluzioni dei problemi

$$(7.4) \quad \begin{cases} y_1'' + a y_1' + b y_1 = x(t) \\ y_1(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(7.5) \quad \begin{cases} y_2'' + a y_2' + b y_2 = 0 \\ y_2(0) = y(0), \quad y_2'(0) = y'(0) \end{cases}$$

Il problema (7.4) ha valori iniziali nulli e il termine noto dell'equazione (detto *forzamento*) coincidente con quello del problema originale (7.1), mentre il problema (7.5) ha termine noto nullo e gli stessi valori iniziali del problema (7.1). In particolare, ragionando come prima per (7.1), posto $Y_1 = \mathcal{L}_u[y_1]$, troviamo

$$Y_1(s) = \frac{1}{s^2 + a s + b} X(s) = H(s) X(s)$$

e quindi, ricordando la formula per la trasformata della convoluzione, otteniamo la formula risolutiva

$$(7.6) \quad y_1(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] * x(t).$$

Il procedimento esposto si estende subito alle equazioni a coefficienti costanti di ordine qualsiasi

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = x(t).$$

Ad esempio, se i valori iniziali sono tutti nulli, trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo $Y(s) = H(s) X(s)$, essendo

$$H(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

la funzione di trasferimento, reciproco del polinomio caratteristico, e quindi perveniamo alla soluzione data da (7.6) con y in luogo di y_1 .

ESEMPIO 7.1. Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$(7.7) \quad \begin{cases} y'' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

Trasformando ambo i membri, ricaviamo

$$Y = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$$

e quindi $y(t) = 1 - \cos t$, per $t \geq 0$, ricordando l'antitrasformata dell'esempio 6.1. Alternativamente, essendo i valori iniziali nulli, è $y = y_1$ (con le notazioni precedenti), quindi

$$y(t) = \left(\sin t u(t) \right) * u(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau = -[\cos \tau]_0^t = 1 - \cos t.$$

ESERCIZIO 7.2. Mostrare che il problema:

$$(7.8) \quad \begin{cases} y'' + y = \sin t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

ha la soluzione $y(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$.

ESEMPIO 7.3. Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = t e^{4t} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$

\mathcal{L}_u -trasformiamo ambo i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u[y'' - 5y' + 6y] &= s^2 Y - s - 1 - 5(sY - 1) + 6Y \\ &= (s^2 - 5s + 6)Y - s + 4; \\ \mathcal{L}_u[t e^{4t}] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}_u[e^{4t}] = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-4} = \frac{1}{(s-4)^2}. \end{aligned}$$

Ricaviamo Y ; osservato che $s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$, possiamo scrivere

$$Y = \frac{s-4}{(s-2)(s-3)} + \frac{1}{(s-2)(s-3)(s-4)^2}.$$

Per antitrasformare, decomponiamo in fratti semplici. Risulta

$$\frac{s-4}{(s-2)(s-3)} = \frac{R[2]}{s-2} + \frac{R[3]}{s-3} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3}.$$

Analogamente

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)(s-4)^2} = \frac{R[2]}{s-2} + \frac{R[3]}{s-3} + \frac{R[4]}{s-4} + \frac{c_{-2}[4]}{(s-4)^2},$$

essendo $c_{-2}[4]$ un coefficiente dello sviluppo di Laurent intorno a 4. Inoltre

$$\begin{aligned} R[2] &= \frac{1}{(2-3)(2-4)^2} = -\frac{1}{4}, & R[3] &= \frac{1}{(3-2)(3-4)^2} = 1, \\ R[4] &= D \frac{1}{s^2 - 5s + 6} \Big|_{s=4} = -\frac{3}{4}, & c_{-2}[4] &= \frac{1}{(4-2)(4-3)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Potevamo ricavare $R[4]$ mediante il secondo teorema dei residui: essendo chiaramente $R[\infty] = 0$, risulta $R[4] = -R[2] - R[3]$.)

Pertanto

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-3} - \frac{1/4}{s-2} + \frac{1}{s-3} - \frac{3/4}{s-4} + \frac{1/2}{(s-4)^2} \\ &= \frac{7/4}{s-2} - \frac{3/4}{s-4} + \frac{1/2}{(s-4)^2} \end{aligned}$$

e quindi (per $t \geq 0$)

$$y(t) = \frac{7}{4} e^{2t} - \frac{3}{4} e^{4t} + \frac{t}{2} e^{4t}.$$

Alternativamente scriviamo $y = y_1 + y_2$ (con le notazioni usate precedentemente). Per quanto visto, risulta

$$y_2(t) = \mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s-4}{(s-2)(s-3)} \right] = 2e^{2t} - e^{3t}.$$

D'altra parte, osservato che la funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

e quindi

$$h(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)] = e^{3t} - e^{2t},$$

abbiamo

$$y_1(t) = ((e^{3t} - e^{2t})u(t)) * (te^{4t}u(t)).$$

Inoltre (per $t \geq 0$)

$$\begin{aligned} (e^{2t}u(t)) * (te^{4t}u(t)) &= \int_0^t \tau e^{4\tau} e^{2(t-\tau)} d\tau = e^{2t} \int_0^t \tau e^{2\tau} d\tau \\ &= \frac{t}{2} e^{4t} - \frac{e^{4t}}{4} + \frac{e^{2t}}{4} \end{aligned}$$

e similmente

$$(e^{3t}u(t)) * (te^{4t}u(t)) = te^{4t} - e^{4t} + e^{3t}.$$

Dunque

$$y_1(t) = \frac{t}{2} e^{4t} - \frac{3}{4} e^{4t} - \frac{e^{2t}}{4} + e^{3t}$$

e arriviamo nuovamente alla soluzione $y(t)$ trovata prima.

ESERCIZIO 7.4. Risolvere il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' - 12y' + 27y = te^{7t} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$$

e verificare che la soluzione è

$$y(t) = \frac{95}{96} e^{3t} + \frac{1}{24} e^{9t} - \frac{1}{32} e^{7t} - \frac{t}{8} e^{7t}.$$

Analogamente, risolvere il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' - 9y' + 14y = te^{5t} \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 9 \end{cases}$$

e verificare che la soluzione è

$$y(t) = \frac{44}{45} e^{2t} - \frac{1}{36} e^{5t} - \frac{t}{6} e^{5t} + \frac{21}{20} e^{7t}.$$

ESEMPIO 7.5. Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' + 10y' + 41y = e^{-5t} \sin 4t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

\mathcal{L}_u -trasformando ambo i membri dell'equazione, troviamo

$$(s^2 + 10s + 41)Y - s - 9 = \frac{4}{(s+5)^2 + 16}$$

e quindi ricaviamo mediante la formula di Hermite

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s+9}{(s+5)^2+16} + \frac{4}{[(s+5)^2+16]^2} \\ &= \frac{s+5+4}{(s+5)^2+16} + \frac{4}{2 \cdot 16} \left(\frac{1}{(s+5)^2+16} + \frac{d}{ds} \frac{s+5}{(s+5)^2+16} \right). \end{aligned}$$

Dunque

$$y(t) = e^{-5t} \left[\left(1 - \frac{t}{8} \right) \cos 4t + \frac{33}{32} \sin 4t \right].$$

ESEMPIO 7.6. Risolviamo il problema in $[0, +\infty[$:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 49y = 4e^{4t} \cos 7t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 4 \end{cases}$$

Procedendo come indicato, ricaviamo

$$Y = \frac{s}{s^2 - 4s + 49} + \frac{4(s-4)}{(s^2 - 4s + 49)[(s-4)^2 + 49]}$$

e ricordando la decomposizione dell'esempio V.3.5

$$Y = \frac{s-1}{s^2 - 4s + 49} + \frac{1}{(s-4)^2 + 49}.$$

Infine, essendo

$$\frac{s-1}{s^2 - 4s + 49} = \frac{s-2+1}{(s-2)^2 + 45},$$

vediamo facilmente che la soluzione è

$$y(t) = e^{2t} \left(\cos 3\sqrt{5}t + \frac{1}{3\sqrt{5}} \sin 3\sqrt{5}t \right) + \frac{e^{4t}}{7} \sin 7t.$$

CAPITOLO X

Trasformazione di Fourier

1. Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$

DEFINIZIONE 1.1. Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$ un segnale sommabile. La trasformata di Fourier di x è la funzione di variabile reale definita ponendo

$$(1.1) \quad \mathcal{F}[x] = \hat{x}(\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

La trasformazione di Fourier è l'operatore $\mathcal{F}: x \rightarrow X$ che associa a x la sua trasformata X .

Osserviamo che

$$e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$$

e per $\omega \in \mathbb{R}$ risulta $|e^{-j\omega t}| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$, quindi l'integrale in (1.1) è assolutamente convergente.

Segnaliamo che la definizione data in (1.1), che noi seguiremo qui, non è l'unica usata per la trasformata di Fourier, che a volte viene definita ponendo

$$\mathcal{F}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j \omega t} dt, \quad \text{o} \quad \mathcal{F}[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

OSSERVAZIONE 1.2. È evidente il legame tra la trasformazione di Fourier e quella di Laplace: se l'integrale di Laplace è assolutamente convergente, per ogni $s = \sigma + j\omega$ nella striscia di convergenza, risulta

$$(1.2) \quad \mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}](\omega).$$

In particolare, se l'asse immaginario è interno alla striscia di convergenza assoluta, è $\mathcal{F}[x](\omega) = \mathcal{L}[x](j\omega)$.

Alcune proprietà fondamentali della trasformazione sono contenute nella seguente

PROPOSIZIONE 1.3. La trasformazione è lineare, cioè per ogni $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, risulta

$$(1.3) \quad \mathcal{F}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{F}[x] + \beta \mathcal{F}[y].$$

La trasformata $X(\omega)$ è continua e limitata; essa inoltre è infinitesima per $\omega \rightarrow \mp\infty$.

Dim. La (1.3) è ovvia. È immediata anche la limitatezza della trasformata:

$$(1.4) \quad |X(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \|x\|_1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

La continuità vuol dire che per ogni $\omega_0 \in \mathbb{R}$ risulta

$$(1.5) \quad X(\omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} X(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

e segue dal teorema VII.1.20 di Lebesgue sulla convergenza dominata. Infine l'uguaglianza

$$(1.6) \quad \lim_{\omega \rightarrow \mp\infty} X(\omega) = 0$$

è conseguenza del teorema VIII.3.3 di Riemann-Lebesgue.

ESEMPIO 1.4. Calcoliamo $\mathcal{F}[\Pi]$. In base alla definizione, abbiamo

$$(1.7) \quad \mathcal{F}[\Pi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin \omega/2}{\omega/2}$$

(ovviamente prolungata in $\omega = 0$). Più in generale,

$$\mathcal{F}[\Pi(t/T)] = \frac{\sin(T\omega/2)}{\omega/2}.$$

Questo esempio mostra che in generale $X \notin L^1(\mathbb{R})$.

ESEMPIO 1.5. Abbiamo

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}] = \int_{-\infty}^0 e^{t-j\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t-j\omega t} dt = \frac{1}{1-j\omega} - \frac{1}{-1-j\omega}$$

e quindi

$$(1.8) \quad \mathcal{F}[e^{-|t|}] = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

Questa uguaglianza segue subito dalla formula (IX.3.1) mediante il legame con la trasformata di Laplace.

ESEMPIO 1.6. Calcoliamo $\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]$. In base alla definizione,

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{1+t^2} dt$$

e questo integrale si calcola col metodo dei residui, esposto nel paragrafo VII.2.3.

Essendo i residui della funzione ausiliaria $f(z) = \frac{e^{-j\omega z}}{1+z^2}$

$$R[\mp j] = \frac{e^{\mp\omega}}{\mp 2j},$$

abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{1+t^2} dt = \begin{cases} \pi e^{-\omega}, & \text{se } \omega > 0 \\ \pi, & \text{se } \omega = 0 \\ \pi e^{\omega}, & \text{se } \omega < 0 \end{cases}$$

e quindi in definitiva

$$(1.9) \quad \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right] = \pi e^{-|\omega|}.$$

Confrontare con (1.8).

ESEMPIO 1.7. Per calcolare la trasformata $\mathcal{F}[e^{-t^2}]$ possiamo usare il legame con la trasformazione di Laplace e la formula (IX.2.4):

$$(1.10) \quad \mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} [e^{s^2/4}]_{s=j\omega} = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.$$

Un'altra formula che si verifica facilmente è la seguente.

TEOREMA 1.8 (formula di moltiplicazione). *Per $x, y \in L^1(\mathbb{R})$, dette X e Y le rispettive \mathcal{F} -trasformate, risulta*

$$(1.11) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) Y(t) dt.$$

Dim. Notiamo che $X(t)y(t)$ è sommabile in \mathbb{R} , in quanto prodotto della funzione sommabile $y(t)$ per la funzione limitata $X(t)$; analogamente, $x(t)Y(t)$ è sommabile. Per mostrare la (1.11), basta osservare che per il teorema di Tonelli la funzione $f(t, \tau) = y(t)e^{-j t \tau} x(\tau)$ è sommabile in \mathbb{R}^2 e quindi usare il teorema di Fubini per invertire l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) y(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j t \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j t \tau} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) Y(t) dt. \end{aligned}$$

1.1. Inversione della trasformazione di Fourier. La trasformazione di Fourier è iniettiva, nel senso che

$$\mathcal{F}[x] \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \text{ per q.o. } t \in \mathbb{R}.$$

Più in generale, vale il seguente

TEOREMA 1.9. *Se $x \in L^1(\mathbb{R})$ e pure $X = \mathcal{F}[x] \in L^1(\mathbb{R})$, risulta, per q.o. $t \in \mathbb{R}$,*

$$(1.12) \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Notiamo che, se $X \in L^1(\mathbb{R})$, x coincide q.o. con una funzione continua. Senza supporre X sommabile, l'integrale va inteso nel senso del valor principale.

TEOREMA 1.10 (Formula di antitrasformazione). *Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se x è regolarizzato in $t_0 \in \mathbb{R}$, risulta*

$$(1.13) \quad x(t_0) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t_0} d\omega.$$

In particolare, se $x \in L^1(\mathbb{R})$ è continuo e C^1 a tratti e $X \in L^1(\mathbb{R})$, vale (1.12) per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Il secondo membro della (1.12) definisce l'antitrasformazione di Fourier $\mathcal{F}^{-1}[X]$. Notiamo che essa è analoga alla trasformazione: mutando t in $-t$ in (1.12), troviamo $2\pi x(-t) = \mathcal{F}[X(\omega)]$, che si riscrive

$$(1.14) \quad \mathcal{F}[\mathcal{F}[x(t)]] = 2\pi x(-t).$$

Se in aggiunta x è pari, abbiamo $\mathcal{F}[\mathcal{F}[x]] = 2\pi x$. In questo modo, ad esempio, possiamo ricavare la (1.8) da (1.9) e viceversa.

ESERCIZIO 1.11. Verificare la validità di (1.13) nel caso $x(t) = \Pi(t)$, regolarizzato in $\mp 1/2$ assegnando il valore $1/2$.

2. Proprietà formali

Elenchiamo alcune proprietà della trasformata, facili da verificare in base alla definizione.

- Traslazione in t :

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[x(t)].$$

- Traslazione in ω :

$$\mathcal{F}[x(t) e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0).$$

- Modulazione:

$$\mathcal{F}[x(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{X(\omega - \omega_0) e^{j\varphi} + X(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi}}{2}.$$

- Riscaldamento e riflessione:

$$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

- Coniugazione:

$$\mathcal{F}[\overline{x(t)}] = \overline{X(-\omega)}.$$

- Se x è pari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt = 2 \int_0^{+\infty} x(t) \cos \omega t dt.$$

In particolare, x reale e pari $\iff X$ reale e pari.

- Se x è dispari, risulta

$$\mathcal{F}[x] = -j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt = -2j \int_0^{+\infty} x(t) \sin \omega t dt.$$

In particolare, x reale e dispari $\iff X$ immaginaria e dispari.

Le formule di traslazione in t , traslazione in ω , riscaldamento e riflessione si ricavano allo stesso modo delle corrispondenti formule per la trasformazione di Laplace. Per la formula della modulazione, è sufficiente scrivere

$$\cos(\omega_0 t + \varphi) = \frac{e^{j(\omega_0 t + \varphi)} + e^{-j(\omega_0 t + \varphi)}}{2}$$

mediante la formula di Eulero ed applicare le proprietà di linearità e di traslazione in ω . Anche la formula per la trasformata del segnale coniugato si prova come nel caso della trasformazione di Laplace:

$$\mathcal{F}[\overline{x(t)}] = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt}$$

e quindi la formula. Le altre proprietà sono immediate.

Illustriamo le proprietà precedenti con qualche esempio. Per la formula di riscaldamento, troviamo

$$\mathcal{F}[\Pi(t/T)] = T \frac{\sin(T\omega/2)}{T\omega/2},$$

in accordo con quanto visto nell'esempio 1.4. Ancora, da (1.10) ricaviamo

$$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}] = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2},$$

cioè per calcolarne la trasformata, basta moltiplicare $e^{-t^2/2}$ per $\sqrt{2\pi}$. Per la formula della modulazione, troviamo

$$\mathcal{F}[e^{-|t|} \cos t] = \frac{1}{1 + (\omega + 1)^2} + \frac{1}{1 + (\omega - 1)^2}.$$

3. Le formule fondamentali

Vediamo in questo paragrafo le formule per la derivata della trasformata e per la trasformata della derivata.

TEOREMA 3.1 (I formula fondamentale). *Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se anche $t \mapsto tx(t) \in L^1(\mathbb{R})$, la trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^1(\mathbb{R})$ e risulta*

$$(3.1) \quad X'(\omega) = \mathcal{F}[(-j)t x(t)].$$

La (3.1) si riscrive

$$\frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{\partial}{\partial \omega} e^{-j\omega t} dt$$

e consiste nella possibilità di derivare sotto il segno di integrale. La formula (3.1) si può iterare.

COROLLARIO 3.2. *Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$. Se anche $t \mapsto t^n x(t) \in L^1(\mathbb{R})$, per un $n \in \mathbb{N}$, la trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^n(\mathbb{R})$ e risulta*

$$(3.2) \quad X^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[(-j)t^k x(t)], \text{ per } k = 1, \dots, n.$$

Notiamo soltanto che dalla sommabilità di $x(t)$ e $t^n x(t)$ segue quella di $t^k x(t)$, per $k = 1, \dots, n$, in virtù della disuguaglianza $|t|^k \leq 1 + |t|^n$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Il fattore t^n pesa intorno a $\mp\infty$; il corollario 3.2 mostra dunque che il buon comportamento all'infinito del segnale x implica regolarità di carattere differenziale per la trasformata X . In particolare,

COROLLARIO 3.3. *Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$ nulla fuori di un intervallo limitato. La trasformata $X = \mathcal{F}[x]$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ e risulta*

$$(3.3) \quad X^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[(-j)t^k x(t)], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

ESEMPIO 3.4. Possiamo applicare il corollario 3.3 alla funzione $x(t) = \Pi(t)$ dell'esempio 1.4, ed il corollario 3.2, $\forall n \in \mathbb{N}$, alla funzione $x(t) = e^{-|t|}$ dell'esempio 1.5, ottenendo che entrambe le trasformate sono di classe $C^\infty(\mathbb{R})$. (Invero, tenendo presente il legame con la trasformazione di Laplace, le due trasformate di Fourier sono funzioni analitiche in \mathbb{R} .)

Invece la funzione $x(t) = 1/(1+t^2)$ dell'esempio 1.6 non verifica le ipotesi del teorema 3.1, non essendo $t \mapsto tx(t)$ sommabile in \mathbb{R} ; in effetti la trasformata non è derivabile in 0.

Vediamo ora la formula per la trasformata della derivata.

TEOREMA 3.5 (II formula fondamentale). *Se x è assolutamente continua e $x, x' \in L^1(\mathbb{R})$, risulta*

$$(3.4) \quad \mathcal{F}[x'(t)] = j\omega \mathcal{F}[x(t)].$$

Dim. Essendo x assolutamente continua, risulta, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau) d\tau$$

e quindi l'ipotesi $x' \in L^1(\mathbb{R})$ implica che $x(t)$ converge per $t \rightarrow \mp\infty$; poiché anche $x \in L^1(\mathbb{R})$, il limite è necessariamente 0:

$$(3.5) \quad \lim_{t \rightarrow \mp\infty} x(t) = 0.$$

Integrando per parti, allora abbiamo

$$\mathcal{F}[x'] = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) e^{-j\omega t} dt = [x(t) e^{-j\omega t}]_{-\infty}^{+\infty} + j\omega \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = j\omega \mathcal{F}[x].$$

Notiamo che la sola ipotesi $x \in L^1(\mathbb{R})$ non implica la (3.5).

Anche la (3.4) può essere iterata.

COROLLARIO 3.6. *Se x è di classe $C^{n-1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, e $x^{(n-1)}$ è assolutamente continua, con $x, x', \dots, x^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$, risulta*

$$(3.6) \quad \mathcal{F}[x^{(k)}(t)] = (j\omega)^k \mathcal{F}[x(t)], \text{ per } k = 1, \dots, n.$$

Dunque, essendo $\mathcal{F}[x^{(n)}]$ infinitesima per $\omega \rightarrow \mp\infty$, risulta

$$\mathcal{F}[x(t)] = \frac{\mathcal{F}[x^{(n)}]}{(j\omega)^n} = o(\omega^{-n}).$$

In particolare, per $n \geq 2$ è garantita la sommabilità della trasformata. Il corollario 3.6 mostra che la *regolarità di carattere differenziale del segnale x implica il buon comportamento all'infinito della trasformata X* . Pertanto le due proprietà si scambiano l'una nell'altra passando da x alla trasformata X .

OSSERVAZIONE 3.7. La proprietà fondamentale della \mathcal{F} -trasformazione è dunque di far corrispondere all'operazione algebrica di moltiplicazione del segnale $x(t)$ per $-jt$, l'operazione di derivazione per la trasformata e, viceversa, di far corrispondere all'operazione di derivazione del segnale $x(t)$, l'operazione algebrica di moltiplicazione per $j\omega$ per la trasformata.

ESEMPIO 3.8. Calcoliamo la \mathcal{F} -trasformata del segnale

$$\Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)],$$

cfr. esempio VIII.2.2. Essendo Λ assolutamente continua, calcoliamo la derivata:

$$(3.7) \quad \Lambda'(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1) = \Pi(t+1/2) - \Pi(t-1/2).$$

Applichiamo la trasformazione ad ambo i membri. Usiamo la II formula fondamentale per il primo membro; per il secondo membro, usiamo la formula di traslazione in t e ricordiamo la (1.7):

$$j\omega \mathcal{F}[\Lambda] = e^{j\omega/2} \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} - e^{-j\omega/2} \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} = (e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \frac{\sin \omega/2}{\omega/2}$$

e quindi ricaviamo

$$(3.8) \quad \mathcal{F}[\Lambda] = \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^2.$$

È possibile anche usare la I formula fondamentale. A tal fine, scriviamo

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= u(t+1) - u(t-1) + t[u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)] \\ &= \Pi(t/2) + j(-jt)[\Pi(t+1/2) - \Pi(t-1/2)] \end{aligned}$$

e quindi trasformando

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\Lambda] &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + j \frac{d}{d\omega} \left[(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right] \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} - 4 \frac{d}{d\omega} \frac{(\sin \omega/2)^2}{\omega} \\ &= 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + 4 \frac{(\sin \omega/2)^2}{\omega^2} - 4 \frac{\sin \omega/2 \cos \omega/2}{\omega}.\end{aligned}$$

Pertanto ritroviamo la (3.8). Notiamo che la trasformata è una funzione reale pari, come era prevedibile, essendo tale pure Λ .

ESEMPIO 3.9. Calcoliamo la trasformata di

$$x(t) = (1 - t^2) [u(t + 1) - u(t - 1)] = (1 - t^2) \Pi(t/2).$$

Per la formula di cambiamento di scala, da (1.7) ricaviamo

$$\mathcal{F}[\Pi(t/2)] = 2 \frac{\sin \omega}{\omega}$$

e quindi per la (3.1)

$$(3.9) \quad X(\omega) = 2 \frac{\sin \omega}{\omega} + 2 \frac{d^2}{d\omega^2} \frac{\sin \omega}{\omega}.$$

Calcoliamo la derivata in (3.9) mediante la formula¹ di Leibniz:

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \frac{\sin \omega}{\omega} = \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\sin \omega \times \frac{1}{\omega} \right) = -\frac{\sin \omega}{\omega} - 2 \frac{\cos \omega}{\omega^2} + 2 \frac{\sin \omega}{\omega^3}.$$

Dunque, per $\omega \neq 0$,

$$(3.10) \quad X(\omega) = 4 \left(\frac{\sin \omega}{\omega^3} - \frac{\cos \omega}{\omega^2} \right).$$

Inoltre chiaramente

$$X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = \frac{4}{3}.$$

ESEMPIO 3.10. La trasformata del segnale

$$x_0(t) = (t^2 - t) e^t [u(t) - u(t - 1)]$$

si trova facilmente in base alla definizione:

$$X_0(t) = \int_0^1 (t^2 - t) e^{(1-j\omega)t} dt$$

e l'integrale si calcola per parti. A scopo illustrativo, usiamo la I formula fondamentale; a tal fine, scriviamo $x_0(t) = -(jt)^2 y_0(t) - j(-jt) y_0(t)$, dove $y_0(t) = e^t [u(t) - u(t - 1)]$ e dunque

$$X_0(\omega) = -Y_0''(\omega) - j Y_0'(\omega),$$

¹La formula permette di calcolare le derivate di ordine superiore di un prodotto

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Essendo

$$Y_0(\omega) = \int_0^1 e^{(1-j\omega)t} dt = \frac{e^{1-j\omega} - 1}{1 - j\omega},$$

troviamo

$$\begin{aligned} Y_0'(\omega) &= \frac{-j e^{1-j\omega}}{1 - j\omega} + j \frac{e^{1-j\omega} - 1}{(1 - j\omega)^2}, \\ Y_0''(\omega) &= -\frac{e^{1-j\omega}}{1 - j\omega} + 2 \frac{e^{1-j\omega}}{(1 - j\omega)^2} - 2 \frac{e^{1-j\omega} - 1}{(1 - j\omega)^3}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$X_0(\omega) = 2 \frac{e^{1-j\omega} - 1}{(1 - j\omega)^3} - \frac{e^{1-j\omega} + 1}{(1 - j\omega)^2} = \frac{e^{1-j\omega}(1 + j\omega) + j\omega - 3}{(1 - j\omega)^3}.$$

ESEMPIO 3.11. Calcoliamo $X(\omega) = \mathcal{F}[e^{-t^2}]$ usando le proprietà fondamentali della trasformazione; la trasformata è stata calcolata nell'esempio 1.7.

Osserviamo che X è una funzione reale pari, poiché tale è $x(t) = e^{-t^2}$. Inoltre $j x'(t) = -2j t x(t)$ e quindi $j \mathcal{F}[x'(t)] = 2 \mathcal{F}[-j t x(t)]$, ovvero

$$-\omega X(\omega) = 2 X'(\omega).$$

Questa è un'equazione differenziale a variabili separabili, il cui integrale generale è $X(\omega) = X(0) e^{-\omega^2/4}$. Per concludere, basta osservare che $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

3.1. La trasformata di funzioni a decrescenza rapida. Una classe di funzioni particolarmente importante nella teoria della \mathcal{F} -trasformazione è quella $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ di Schwartz o delle funzioni a decrescenza rapida.

DEFINIZIONE 3.12. Una funzione $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ è detta a decrescenza rapida se, insieme con tutte le derivate, è infinitesima di ordine infinitamente grande a $\mp\infty$, cioè risulta, $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$,

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} t^n x^{(k)}(t) = 0.$$

ESEMPIO 3.13. Appartiene chiaramente a \mathcal{S} ogni funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ nulla fuori di un intervallo limitato. La funzione $x(t) = e^{-t^2}$ è a decrescenza rapida, pur essendo non-nulla in ogni punto.

Per quanto ovvio, osserviamo esplicitamente che la funzione $t \mapsto 1/(1+t^2)$ non è a decrescenza rapida, pur essendo infinitesima a $\mp\infty$.

Per i criteri di sommabilità, evidentemente $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. Inoltre le derivate di una funzione a decrescenza rapida sono anch'esse a decrescenza rapida, come pure il prodotto di una funzione a decrescenza rapida per un polinomio. Poiché le funzioni di \mathcal{S} hanno buon comportamento all'infinito e regolarità C^∞ , in virtù delle formule fondamentali, lo stesso vale per le loro trasformate di Fourier; dunque, $\mathcal{F}[x] \in \mathcal{S}$, $\forall x \in \mathcal{S}$. Inoltre si può applicare la formula di antitrasformazione. Pertanto vale il seguente

TEOREMA 3.14. *La trasformazione di Fourier*

$$\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

è biunivoca. La trasformazione inversa

$$\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

è definita nella (1.12).

4. La trasformata della convoluzione

TEOREMA 4.1. *Se $x, y \in L^1(\mathbb{R})$, risulta*

$$(4.1) \quad \mathcal{F}[x * y] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y].$$

Dim. Osserviamo che, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, risulta

$$\begin{aligned} e^{-j\omega t} x * y(t) &= e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega \tau} x(\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} y(t - \tau) d\tau \\ &= (e^{-j\omega t} x(t)) * (e^{-j\omega t} y(t)). \end{aligned}$$

Essendo $\mathcal{F}[x * y]$ l'integrale del primo membro, la formula (4.1) segue ricordando che l'integrale del prodotto di convoluzione è il prodotto degli integrali, cfr. la (VII.1.23):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x * y] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x * y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-j\omega t} x(t)) * (e^{-j\omega t} y(t)) dt \\ &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x(t) dt \right] \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} y(t) dt \right] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y]. \end{aligned}$$

ESEMPIO 4.2. La trasformata di Λ calcolata nell'esempio 3.8 può essere ottenuta anche dalla formula (4.1), ricordando la (VIII.2.4):

$$\mathcal{F}[\Lambda](\omega) = \mathcal{F}[\Pi * \Pi(t)] = \left(\frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^2.$$

Procedendo formalmente, ricaviamo la trasformata del prodotto dalla (4.1), che riscriviamo

$$\mathcal{F}[x * y] = XY.$$

Applicando ad ambo i membri la \mathcal{F} ed usando (1.14), troviamo

$$\mathcal{F}[XY] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[x * y]] = 2\pi x * y(-t).$$

Inoltre $\mathcal{F}[X] = 2\pi x(-t)$, $\mathcal{F}[Y] = 2\pi y(-t)$ e per l'osservazione VII.1.26 risulta $x(-t) * y(-t) = (x * y)(-t)$. Pertanto

$$(4.2) \quad \mathcal{F}[XY] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[X] * \mathcal{F}[Y].$$

È da notare a proposito di questa formula però che $X, Y \in L^1(\mathbb{R}) \not\Rightarrow X \cdot Y \in L^1(\mathbb{R})$. La (4.2) vale certamente per $X, Y \in \mathcal{S}$.

ESERCIZIO 4.3. Dimostrare che, se $x, y \in \mathcal{S}$, risulta $x * y \in \mathcal{S}$. (Suggerimento: passare alle trasformate di Fourier.)

CAPITOLO XI

Distribuzioni

1. Introduzione

In questo capitolo ci occupiamo della teoria delle distribuzioni, che dal punto di vista matematico nascono dall'esigenza di estendere alcune operazioni fondamentali dell'analisi, prima fra tutte la derivazione. Nell'ambito della teoria classica, l'operazione di derivazione non è sempre possibile; nell'ambito delle distribuzioni essa può essere effettuata senza restrizioni e risulta un'operazione continua. Vedremo anche che sarà possibile effettuare una notevole estensione della trasformazione di Fourier, rispetto alla definizione data nel capitolo X.

D'altra parte, bisogna pure sottolineare che le distribuzioni trovano notevoli applicazioni in fisica. La teoria delle distribuzioni permette ad esempio una trattazione rigorosa delle cosiddette *funzioni impulsive*, che erano già usate in fisica in maniera piuttosto empirica. Il prototipo delle funzioni impulsive è la δ di Dirac, introdotta in vari modi non rigorosi, più o meno equivalenti tra loro.

(a) Essa era definita come la *funzione* $\delta(t)$ su \mathbb{R} nulla per $t \neq 0$ e tale che

$$(1.1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1;$$

è chiaro che non esiste alcuna funzione con queste proprietà.

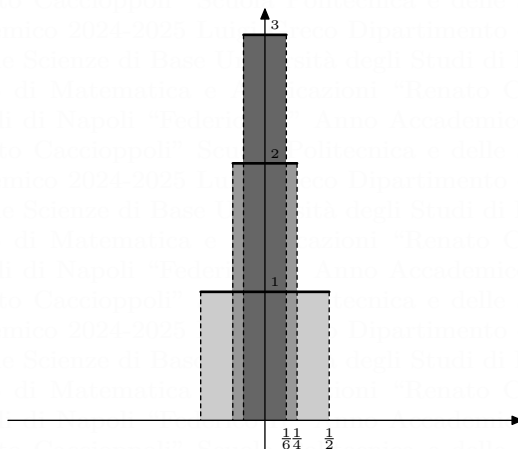
(b) Un altro modo di introdurre la δ era come limite di una successione di funzioni, ad esempio

$$(1.2) \quad \begin{aligned} x_n(t) &= n \Pi(nt) = n [u(t + 1/(2n)) - u(t - 1/(2n))] \\ &= \begin{cases} n, & \text{se } -\frac{1}{2n} \leq t < \frac{1}{2n}, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

Osserviamo che per $n \rightarrow \infty$, l'intervallo $[-1/(2n), 1/(2n)]$ si contrae al punto 0. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$(1.3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt = 1$$

e si desidera che tale proprietà valga anche per $\delta = \lim_n x_n$, cioè sia soddisfatta la (1.1). È evidente però che la relazione di limite non può essere intesa in senso puntuale, poiché in tal caso si ricade nella *definizione* precedente.



(c) $\delta(t)$ veniva pure introdotta come la *funzione* verificante, $\forall \varphi \in C^0(\mathbb{R})$,

$$(1.4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0).$$

Mostreremo che anche tale proprietà, con il concetto di funzione dell'analisi matematica classica, è impossibile.

L'introduzione delle distribuzioni richiede dunque di cambiare punto di vista, modificando il concetto di funzione. L'idea di funzione come legge di corrispondenza tra insiemi numerici risulta inadeguato. In effetti, tale idea mostra delle difficoltà già quando si considerano le funzioni sommabili o localmente sommabili secondo Lebesgue, che sono definite a meno di un insieme trascurabile. Per una tale funzione x , non è appropriato parlare di valore assunto in un punto preciso. Spesso essa figura sotto il segno di integrale, moltiplicata per una φ appartenente ad una classe di funzioni regolari, ed è determinata dalla *azione* che in tal modo esercita su φ :

$$(1.5) \quad \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt.$$

Per tal motivo, φ viene detta *funzione test*. Dunque x è interpretata come il *funzionale lineare* definito dalla (1.5) sulla classe delle funzioni test. Questo approccio è analogo al modo di introdurre la δ presentato nel punto (c); è necessario però definire la classe delle funzioni test e precisare quali saranno i funzionali lineari da considerare.

2. Lo spazio delle funzioni test

Cominciamo introducendo il supporto di una funzione continua.

DEFINIZIONE 2.1. Sia $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua. Il supporto di φ , che denoteremo con $\text{supp } \varphi$, è la chiusura dell'insieme

$$\{ t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \neq 0 \}.$$

Equivalentemente, $\text{supp } \varphi$ è il complementare del più grande aperto di \mathbb{R} sul quale φ è identicamente nulla.

Possiamo ora introdurre lo spazio delle funzioni test.

DEFINIZIONE 2.2. Lo spazio delle funzioni test, che indicheremo con $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R})$, è formato dalle funzioni (complesse) di classe $C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto. In particolare, per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}$, esiste un intervallo compatto $[a, b]$ (dipendente da φ) tale che $\varphi(t) = 0, \forall t \notin [a, b]$. \mathcal{D} risulta uno spazio vettoriale (su \mathbb{C}) definendo la somma ed il prodotto per uno scalare in senso puntuale.

ESEMPIO 2.3. La funzione

$$(2.1) \quad \alpha(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & \text{se } -1 < t < 1, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

appartiene a \mathcal{D} . In effetti, $t \mapsto e^{\frac{1}{t^2-1}}$ è indefinitamente derivabile in $] -1, 1[$ e tutte le derivate sono infinitesime per $t \rightarrow -1+$ e per $t \rightarrow 1-$. Inoltre chiaramente $\text{supp } \alpha = [-1, 1]$.

In \mathcal{D} si introduce una *nozione di convergenza*. Siano (φ_n) una successione in \mathcal{D} e $\varphi \in \mathcal{D}$; si dice che (φ_n) converge a φ in \mathcal{D} e si scrive $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ se valgono le condizioni

- (1) per ogni $k \in \mathbb{N}_0$, $\varphi_n^{(k)} \rightarrow \varphi^{(k)}$ uniformemente su \mathbb{R} , cioè risulta

$$\limsup_n \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)| = 0;$$

- (2) esiste un intervallo compatto $[a, b]$ che contiene i supporti di tutte le φ_n , $n \in \mathbb{N}$, cioè tale che

$$\varphi_n(t) = 0, \forall t \notin [a, b], \forall n \in \mathbb{N}.$$

È chiaro che, se φ appartiene a \mathcal{D} , anche tutte le derivate $\varphi^{(k)}$ sono in \mathcal{D} ; inoltre $\text{supp } \varphi \supseteq \text{supp } \varphi' \supseteq \text{supp } \varphi'' \supseteq \dots$.

3. Le distribuzioni

DEFINIZIONE 3.1. Si dice distribuzione ogni funzionale (o forma) lineare su \mathcal{D} che sia continuo rispetto alla convergenza di funzioni test. L'insieme delle distribuzioni si denota con $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e si rende uno spazio vettoriale definendo la somma e il prodotto per uno scalare in senso puntuale.

Dunque $T \in \mathcal{D}'$ se $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ è lineare, cioè verifica

$$T(c\varphi + d\psi) = cT\varphi + dT\psi$$

per ogni $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ e $c, d \in \mathbb{C}$, ed è continuo in \mathcal{D} , cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \Rightarrow \quad T\varphi_n \rightarrow T\varphi \text{ in } \mathbb{C}.$$

Notiamo che per la linearità è sufficiente verificare la continuità di T in 0, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \quad \Rightarrow \quad T\varphi_n \rightarrow 0 \text{ in } \mathbb{C}.$$

Dato $T \in \mathcal{D}'$, il valore assunto in $\varphi \in \mathcal{D}$ viene usualmente denotato, invece che con $T(\varphi)$, mediante il simbolo

$$(3.1) \quad \langle T, \varphi \rangle,$$

che si chiama *crochet* o simbolo di dualità.

Vediamo ora alcuni esempi fondamentali di distribuzioni.

ESEMPIO 3.2. Ad ogni $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ si associa una distribuzione T_x definita ponendo

$$(3.2) \quad \langle T_x, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

L'integrale in (3.2) converge assolutamente pur essendo x solo localmente sommabile, poiché φ ha supporto compatto, cioè è nulla fuori di un intervallo limitato. È ovvio che T_x è lineare. Anche la continuità è molto semplice; se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, troviamo $[a, b]$ tale che $\text{supp } \varphi_n \subseteq [a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$|\langle T_x, \varphi_n \rangle| \leq \sup |\varphi_n| \int_a^b |x(t)| dt$$

è infinitesimo poiché $\lim_n \sup |\varphi_n| = 0$.

Si mostra che, se $x, y \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ e risulta $T_x = T_y$, cioè $\langle T_x, \varphi \rangle = \langle T_y, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, risulta pure $x(t) = y(t)$ per q.o. $t \in \mathbb{R}$, cioè x e y sono lo stesso elemento di $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ (ricordiamo che funzioni coincidenti q.o. si identificano). Questo permette di identificare T_x con x ; in questo senso, vale l'inclusione $L^1_{\text{loc}} \subset \mathcal{D}'$. Le distribuzioni del tipo T_x , cioè le funzioni localmente sommabili, si dicono *distribuzioni regolari*.

Come vedremo con gli esempi successivi, esistono distribuzioni non regolari, cioè che non sono funzioni localmente sommabili. Se $T \in \mathcal{D}'$ è una generica distribuzione, T è un funzionale definito in \mathcal{D} e quindi la notazione $T(t)$, $t \in \mathbb{R}$, non è corretta. D'altra parte, in vista del caso delle distribuzioni regolari, che sono effettivamente delle funzioni di variabile reale, spesso con abuso di notazioni la distribuzione si denota anche con $T(t)$; questo permetterà come vedremo di indicare in maniera semplice alcune operazioni sulle distribuzioni. Sempre con abuso di notazioni, il valore di T su φ si indica pure con l'integrale, cioè si scrive

$$\langle T(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t) \varphi(t) dt,$$

pur non essendo in generale T definita mediante integrale.

ESEMPIO 3.3. La distribuzione δ di Dirac, o *impulso unitario concentrato in 0*, è definita ponendo

$$(3.3) \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Mostriamo che δ non è una distribuzione regolare, cioè una funzione localmente sommabile. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista $\delta \in L^1_{\text{loc}}$ tale che

$$\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ponendo in tale uguaglianza $\varphi(t) = \alpha(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, dove α è la funzione definita in (2.1), essendo in tal caso $\text{supp } \varphi = [-1/n, 1/n]$ e $\max |\varphi| = \varphi(0) = 1/e$, ricaviamo

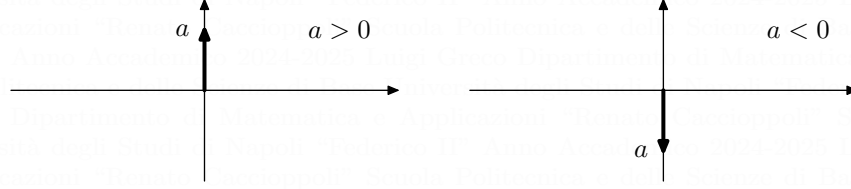
$$\frac{1}{e} = |\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle| \leq \frac{1}{e} \int_{-1/n}^{1/n} |\delta(t)| dt$$

e l'integrale nell'ultimo membro tende a zero per $n \rightarrow \infty$.

Se $a \in \mathbb{C}$ è uno scalare, chiaramente è

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = a\varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

La distribuzione $a\delta$ si dice *impulso di area a* (concentrato in 0); se $a \in \mathbb{R}$, essa si rappresenta graficamente con un segmento orientato uscente dall'origine, di lunghezza $|a|$, orientato verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$.



ESEMPIO 3.4. La distribuzione *valor principale* di $1/t$, che si denota con v.p. $1/t$, è definita da

$$(3.4) \quad \left\langle \text{v.p.} \frac{1}{t}, \varphi \right\rangle = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

La funzione test $\varphi \in \mathcal{D}$ è nulla intorno a $\mp\infty$; l'integrale è inteso nel senso del valor principale poiché, se $\varphi(0) \neq 0$, l'integrando è infinito in 0. Dunque

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt \right).$$

Mutando t in $-t$, l'ultimo integrale a secondo membro si trasforma in un integrale esteso all'intervallo $[\varepsilon, +\infty]$, quindi

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt.$$

Per l'ultima uguaglianza, è sufficiente osservare che l'integrando è convergente per $t \rightarrow 0$, cioè ha una discontinuità eliminabile, essendo φ derivabile in 0:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} + \frac{\varphi(-t) - \varphi(0)}{-t} \right) = 2\varphi'(0).$$

4. Operazioni sulle distribuzioni

Introduciamo alcune operazioni sulle distribuzioni. Per diverse di queste, ad esempio la traslazione, la definizione è perfettamente chiara nel caso delle funzioni, perché è data in senso puntuale; per estendere la definizione alle distribuzioni in generale, seguiremo il caso delle funzioni come guida.

• **Traslazione.** Siano x localmente sommabile e $t_0 \in \mathbb{R}$; anche il segnale traslato $t \mapsto x(t - t_0)$ è localmente sommabile, quindi una distribuzione. Con un cambiamento di variabile, per un'arbitraria $\varphi \in \mathcal{D}$ abbiamo

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \langle x(t - t_0), \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi(t + t_0) dt = \langle x(t), \varphi(t + t_0) \rangle. \end{aligned}$$

Dunque, il valore di $x(t - t_0)$ su $\varphi(t)$ è pari al valore di $x(t)$ su $\varphi(t + t_0)$. Questa definizione si estende subito al caso di una distribuzione qualsiasi T ; indicheremo con $T(t - t_0)$ la distribuzione traslata, che è definita ponendo

$$(4.2) \quad \langle T(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle T(t), \varphi(t + t_0) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

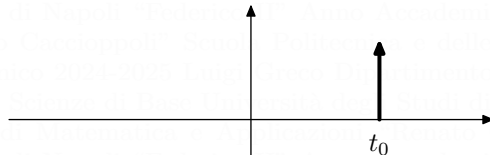
È chiaro che $t \mapsto \varphi(t + t_0)$ è una funzione test e il secondo membro di (4.2) definisce una distribuzione.

Si apprezza nella (4.2) l'utilità dell'abuso di notazioni $T(t)$, e analogamente $T(t - t_0)$. Notiamo che, per introdurre l'operazione di traslazione per le distribuzioni, tale operazione è stata *scaricata* sulla funzione test. È questo un modo di procedere che useremo spessissimo.

Ad esempio,

$$\langle \delta(t - t_0), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t + t_0) \rangle = \varphi(t_0).$$

La distribuzione $\delta(t - t_0)$ si chiama *impulso unitario concentrato in t_0* ed è suscettibile di una rappresentazione grafica analoga alla δ :



Una distribuzione T si dice *periodica* di periodo $\tau > 0$ se verifica

$$T(t + \tau) = T(t).$$

Una distribuzione regolare $x = T_x$ è periodica se e solo se lo è come funzione.

• **Riscaldamento e riflessione.** Dati un segnale localmente sommabile x e $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, anche il segnale $t \mapsto x(at)$ è localmente sommabile, quindi una distribuzione e risulta per $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \langle x(at), \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at) \varphi(t) dt \\ (4.3) \quad &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi\left(\frac{t}{a}\right) dt = \left\langle x(t), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Se T è una distribuzione, il riscaldamento $T(at)$ è la distribuzione che a $\varphi(t)$ associa il valore di T sulla funzione test $\frac{1}{|a|} \varphi(t/a)$:

$$(4.4) \quad \langle T(at), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(t), \frac{1}{|a|} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Ad esempio,

$$\langle \delta(at), \varphi(t) \rangle = \frac{1}{|a|} \varphi(0).$$

Una distribuzione T si dice *pari* [*dispari*] se verifica

$$T(-t) = T(t), \quad [T(-t) = -T(t)].$$

Ad esempio, δ è pari; v.p. $1/t$ è dispari. Una distribuzione regolare $x = T_x$ è pari o dispari se e solo se è tale come funzione.

ESERCIZIO 4.1. Verificare che, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, risulta

$$\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|} \delta(t - t_0/a).$$

• **Prodotto per una funzione.** Date $\alpha \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$, si definisce la distribuzione αT prodotto di α per T ponendo

$$(4.5) \quad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Notiamo che se φ è una funzione test, tale è pure $\alpha\varphi$, essendo $\alpha \in C^\infty$; inoltre se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, risulta pure $\alpha\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \alpha\varphi$, quindi il secondo membro di (4.5) definisce effettivamente una distribuzione. Fondamentale è la *proprietà di campionamento* della δ , espressa dalla formula seguente:

$$(4.6) \quad \alpha(t) \delta(t - t_0) = \alpha(t_0) \delta(t - t_0).$$

A primo membro figura il prodotto della funzione α per l'impulso concentrato in $t_0 \in \mathbb{R}$, mentre a secondo membro compare il prodotto dell'impulso per la costante $\alpha(t_0)$. Ad esempio

$$\sin t \delta(t) = 0, \quad \sin t \delta(t + \pi/2) = \sin(-\pi/2) \delta(t + \pi/2) = -\delta(t + \pi/2).$$

• **Limite e serie.** Siano (T_n) una successione di distribuzioni e T una distribuzione. Si dice che T è il limite di (T_n) , o che (T_n) converge a T nel senso delle distribuzioni, e si scrive $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, se risulta

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_n \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

In altri termini, (T_n) converge a T puntualmente su \mathcal{D} .

Mostriamo che la successione (x_n) di distribuzioni regolari definite in (1.2) converge a δ nel senso delle distribuzioni; dunque questa è la corretta nozione di limite da usare nel punto (b) del paragrafo 1. Per il teorema della media,

$$\langle x_n, \varphi \rangle = n \int_{-1/(2n)}^{1/(2n)} \varphi(t) dt = \varphi(t_n),$$

con $-1/(2n) \leq t_n \leq 1/(2n)$, e passiamo al limite per la continuità di φ in 0.

Si dice che T è la somma della serie $\sum_n T_n$ in \mathcal{D}' e si scrive

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n \quad \text{in } \mathcal{D}',$$

se risulta

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Anche in questo caso la convergenza è puntuale su \mathcal{D} ; equivalentemente, la successione delle somme parziali converge in \mathcal{D}' . Un esempio importante di distribuzione definita mediante una serie è il *treno di impulsi*; dato $\tau > 0$, poniamo

$$(4.7) \quad s_\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\tau).$$

Evidentemente si tratta di una distribuzione periodica di periodo τ . Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, risulta

$$\langle s_\tau, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n\tau),$$

la serie essendo in realtà una somma finita, poichè per $|n|$ grande risulta $n\tau \notin \text{supp } \varphi$.

Più in generale, data una qualsiasi successione $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ di numeri complessi, possiamo

definire la distribuzione

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(t - n\tau).$$

Ad esempio, dato il segnale continuo α , definiamo il *campionamento con passo* $\tau > 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha(t) \delta(t - n\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha(n\tau) \delta(t - n\tau).$$

• **Convoluzione. Supporto di una distribuzione.** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}$ un aperto; si dice che la distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ è *nulla* in Ω se risulta

$$\varphi \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \varphi \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = 0.$$

Se $x \in L^1_{\text{loc}}$, la distribuzione regolare T_x è nulla su Ω se e solo se risulta $x(t) = 0$, per q.o. $t \in \Omega$. Si dice che due distribuzioni T_1 e T_2 sono uguali in Ω se $T_1 - T_2$ è nulla in Ω .

Il complementare del più grande aperto in cui T è nulla si dice *supporto* della distribuzione T . Ad esempio, δ è nulla in $\Omega = \mathbb{R} - \{0\}$, quindi il supporto è compatto: $\text{supp } \delta = \{0\}$. Se $T = T_x$, con x continua, il supporto di T_x coincide con $\text{supp } x$ nella definizione 2.1.

OSSERVAZIONE 4.2. Si può parlare di supporto di una $x \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Il supporto non cambia modificando x su un insieme trascurabile.

OSSERVAZIONE 4.3. Se $T \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto, si può definire $\langle T, \varphi \rangle$ per $\varphi \in C^\infty$, non necessariamente a supporto compatto. A tale scopo, scegliamo $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi \equiv 1$ in un aperto contenente $\text{supp } T$, e poniamo

$$(4.8) \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, \psi \varphi \rangle.$$

Si verifica che l'espressione non dipende da ψ .

Definiamo ora il prodotto di convoluzione tra distribuzioni. Cominciamo dal caso delle funzioni. Sappiamo che se $x, y \in L^1$, risulta $x * y \in L^1$ e quindi può essere interpretata come distribuzione:

$$\begin{aligned} \langle x * y, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) y(t-s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) ds \int_{-\infty}^{+\infty} y(r) \varphi(r+s) dr. \end{aligned}$$

La funzione $\psi: s \mapsto \langle y(r), \varphi(r+s) \rangle$ è di classe C^∞ . Se y ha supporto compatto, anche ψ ha supporto compatto, quindi appartiene a \mathcal{D} e possiamo scrivere

$$(4.9) \quad \langle x * y, \varphi \rangle = \langle x, \psi \rangle = \left\langle x(s), \langle y(r), \varphi(r+s) \rangle \right\rangle.$$

La (4.9) suggerisce allora di definire la convoluzione di due distribuzioni $T * S$, con S a supporto compatto, mediante la formula

$$(4.10) \quad \langle T * S(t), \varphi(t) \rangle = \left\langle T(s), \langle S(r), \varphi(r+s) \rangle \right\rangle.$$

In effetti, $s \mapsto \langle S(r), \varphi(r+s) \rangle$ è una funzione test. Per l'osservazione 4.3, $T * S$ può essere definita mediante (4.10) anche se T ha supporto compatto. Inoltre $T * S = S * T$.

ESEMPIO 4.4. La δ è l'unità del prodotto di convoluzione, cioè risulta

$$(4.11) \quad T * \delta = T, \quad \forall T \in \mathcal{D}'.$$

Basta osservare che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, risulta

$$\langle \delta(r), \varphi(r+s) \rangle = [\varphi(r+s)]_{r=0} = \varphi(s).$$

Più in generale, si verificano le formule

$$(4.12) \quad T(t) * \delta(t-t_0) = T(t-t_0), \quad T * s_\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T(t-n\tau).$$

ESEMPIO 4.5. Se $T \in \mathcal{D}'$ e $\psi \in \mathcal{D}$, oppure $T \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto e $\psi \in C^\infty$, la convoluzione $T * \psi = \psi * T$ è la funzione di classe C^∞ definita da

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \langle T(\tau), \psi(t-\tau) \rangle.$$

ESEMPIO 4.6. Se $S \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto, vale l'implicazione

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \quad \Rightarrow \quad T_n * S \xrightarrow{\mathcal{D}'} T * S.$$

4.1. Derivata di distribuzioni. Data $T \in \mathcal{D}'$, si dice *derivata* di T , e si indica con T' , la distribuzione definita ponendo

$$(4.13) \quad \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Evidentemente $\varphi' \in \mathcal{D}$ e l'espressione a secondo membro è continua su \mathcal{D} , quindi definisce effettivamente una distribuzione. Nel caso in cui $T = T_x = x$ sia una distribuzione regolare con x di classe C^1 , o più in generale assolutamente continua (sugli intervalli compatti), la (4.13) si riduce alla formula di integrazione per parti: con $T' = x'$, risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi'(t) dt,$$

essendo φ nulla intorno a $\mp\infty$.

PROPOSIZIONE 4.7. Se T_x è una distribuzione regolare con x assolutamente continua sugli intervalli compatti di \mathbb{R} , la derivata nel senso delle distribuzioni coincide con la derivata ordinaria, cioè risulta $T'_x = T_{x'}$.

Mostriamo che δ è la derivata distribuzionale del gradino:

$$(4.14) \quad u' = \delta.$$

In base alla definizione (4.13), $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = -[\varphi(t)]_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

OSSERVAZIONE 4.8. Il gradino $u(t)$ è dotato di derivata ordinaria Du (limite puntuale del rapporto incrementale) nulla in ogni punto $t \neq 0$: $Du(t) = 0, \forall t \neq 0$. Dalla derivata ordinaria, che è dunque definita q.o., non è possibile ricostruire la $u(t)$; è possibile invece mostrare che u è determinata dalla (4.14) a meno di una costante additiva, cioè se $x' = \delta$ in \mathcal{D}' , risulta $x = u + c$, con c costante. In questo senso, quella distribuzionale è la "giusta" nozione di derivata.

La (4.14) mostra che in corrispondenza della discontinuità di u in 0 , nella derivazione compare un impulso concentrato in tale punto, di area 1, pari al salto di discontinuità; questo vale più in generale. Consideriamo una funzione x per la quale ogni intervallo compatto $[a, b]$ si possa decomporre in un numero finito di intervalli $[t_k, t_{k+1}]$, a due a due privi di punti interni comuni, sui quali x sia assolutamente continua (ridefinendo opportunamente i valori negli estremi): una tale funzione ha solo discontinuità di I specie, in numero finito o un'infinità numerabile, ma priva di punti di accumulazione al finito; inoltre è derivabile (in senso ordinario) q.o. con derivata Dx localmente sommabile.

PROPOSIZIONE 4.9. *La derivata distribuzionale x' di x è somma della derivata ordinaria Dx ed impulsi concentrati nei punti di discontinuità, ciascuno con area pari al salto di discontinuità:*

$$(4.15) \quad x' = Dx(t) + \sum_k [x(t_k+) - x(t_k-)] \delta(t - t_k).$$

Dim. È sufficiente considerare il caso di un'unica discontinuità t_0 ; integrando per parti, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle x', \varphi \rangle &= -\langle x, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \varphi'(t) dt = -\int_{-\infty}^{t_0} x(t) \varphi'(t) dt - \int_{t_0}^{+\infty} x(t) \varphi'(t) dt \\ &= -[x(t) \varphi(t)]_{-\infty}^{t_0} + \int_{-\infty}^{t_0} Dx(t) \varphi(t) dt - [x(t) \varphi(t)]_{t_0}^{+\infty} + \int_{t_0}^{+\infty} Dx(t) \varphi(t) dt \\ &= [x(t_0+) - x(t_0-)] \varphi(t_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} Dx(t) \varphi(t) dt. \end{aligned}$$

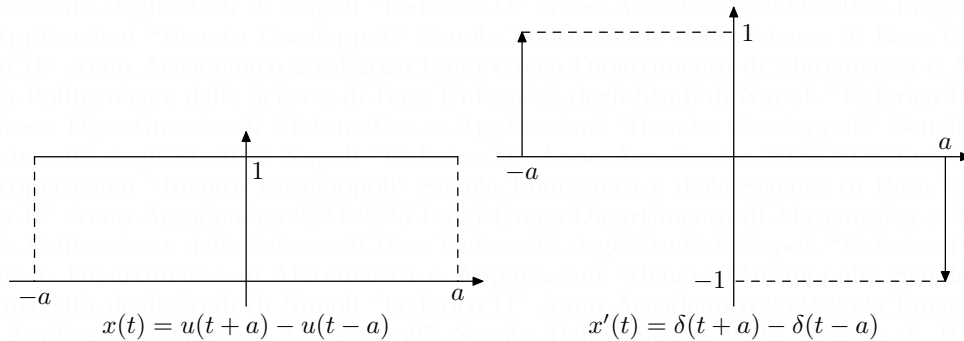
ESEMPIO 4.10. Dato $a > 0$, calcoliamo la derivata del segnale

$$x(t) = u(t+a) - u(t-a) = \Pi(t/(2a)) = \begin{cases} 1, & \text{se } -a < t < a, \\ 0, & \text{se } t < -a \text{ o } t > a. \end{cases}$$

Il segnale è discontinuo in $\mp a$, con salti di discontinuità ± 1 ; inoltre la derivata ordinaria è nulla q.o., quindi

$$x'(t) = \delta(t+a) - \delta(t-a).$$

Graficamente:



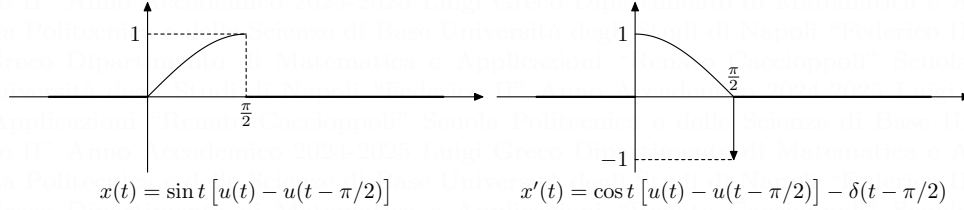
ESEMPIO 4.11. Calcoliamo la derivata del segnale

$$x(t) = \sin t [u(t) - u(t - \pi/2)] = \begin{cases} \sin t, & \text{per } 0 < t < \pi/2, \\ 0, & \text{per } t < 0 \text{ e } t > \pi/2. \end{cases}$$

Il segnale è discontinuo in $\pi/2$, con salto di discontinuità -1 ; la derivata ordinaria è

$$Dx(t) = \cos t [u(t) - u(t - \pi/2)] = \begin{cases} \cos t, & \text{per } 0 < t < \pi/2, \\ 0, & \text{per } t < 0 \text{ e } t > \pi/2. \end{cases}$$

Graficamente:



Valgono le seguenti formule (identiche a quelle nel caso delle funzioni):

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T', \quad (T(at))' = a T'(at).$$

Per la prima, abbiamo, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle (\alpha T)', \varphi \rangle = -\langle \alpha T, \varphi' \rangle = -\langle T, (\alpha \varphi)' - \alpha' \varphi \rangle = \langle \alpha' T + \alpha T', \varphi \rangle.$$

Per la seconda, abbiamo

$$\begin{aligned} \langle (T(at))', \varphi(t) \rangle &= -\langle T(at), \varphi'(t) \rangle = -\frac{1}{|a|} \langle T(t), \varphi'(t/a) \rangle \\ &= -\frac{1}{|a|} \left\langle T(t), \frac{d}{dt} [a \varphi(t/a)] \right\rangle = \frac{1}{|a|} \langle a T'(t), \varphi(t/a) \rangle = \langle a T'(at), \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la derivata della convoluzione, vale la formula

$$(4.16) \quad (T * S)' = T * S' = T' * S.$$

In particolare, $T * \delta' = (T * \delta)' = T'$ e (se definita) la convoluzione $T * u$ è primitiva di T : $(T * u)' = T * u' = T * \delta = T$.

La derivazione è un'operazione continua in \mathcal{D}' :

$$(4.17) \quad T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \Rightarrow T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'} T', \quad T = \sum_n T_n \Rightarrow T' = \sum_n T_n'.$$

ESEMPIO 4.12 (Formula di Poisson). Sia x il segnale periodico di periodo $\tau > 0$ che vale $x(t) = t$ per $0 < t < \tau$, considerato nell'esempio VIII.3.8. Ricordiamo lo sviluppo in serie di Fourier; posto $\omega_0 = 2\pi/\tau$, risulta

$$(4.18) \quad x(t) = \frac{\tau}{2} + j \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k \omega_0} e^{jk\omega_0 t}$$

nel senso dell'energia su ogni intervallo limitato e quindi anche in \mathcal{D}' . Deriviamo nel senso delle distribuzioni. La derivata ordinaria di x è $Dx(t) = 1$, per $t \neq k\tau$, $k \in \mathbb{Z}$; in questi punti x è discontinuo, con salto di discontinuità $-\tau$. Pertanto

$$(4.19) \quad 1 - \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau) = - \sum_{k \neq 0} e^{jk\omega_0 t}.$$

Osservando che il primo addendo a primo membro è il termine escluso nella sommatoria a secondo membro (per $k = 0$), da (4.19) otteniamo l'uguaglianza

$$(4.20) \quad \tau \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t},$$

che prende il nome di *formula di Poisson*. Ricordando la definizione (4.7) del treno di impulsi, la (4.20) si riscrive

$$(4.21) \quad s_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

e si può interpretare come lo *sviluppo in serie di Fourier del treno di impulsi* ($c_k = 1/\tau$, $\forall k \in \mathbb{Z}$).

Le distribuzioni sono indefinitamente derivabili; la derivata n -sima di $T \in \mathcal{D}'$ è

$$(4.22) \quad \langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

ESEMPIO 4.13. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

5. δ -successioni

Come abbiamo osservato, δ è il limite nel senso delle distribuzioni della successione di funzioni $(n \Pi(nt))$. Questo è un caso particolare del seguente

TEOREMA 5.1. Se $x \in L^1_{\text{loc}}$ è integrabile con $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1$, risulta

$$(5.1) \quad n x(nt) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta.$$

Dim. Consideriamo le primitive di $n x(nt)$; poniamo

$$F(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

e $F_n(t) = F(nt)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$; le F_n sono assolutamente continue sugli intervalli limitati e $F'_n(t) = n x(nt)$. Inoltre risulta

$$\lim_n F_n(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{-\infty} x(t) dt = 0, & \text{se } t < 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1, & \text{se } t > 0, \end{cases}$$

ovvero $\lim_n F_n(t) = u(t)$, per $t \neq 0$. Poiché $\sup_{\mathbb{R}} |F_n| = \sup_{\mathbb{R}} |F|$, le F_n sono equilimate. Pertanto, fissata $\varphi \in \mathcal{D}$, mediante il teorema di Lebesgue della convergenza dominata otteniamo

$$\lim_n \langle F_n, \varphi \rangle = \lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} F_n(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt = \langle u, \varphi \rangle,$$

cioè $F_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} u$. Basta allora derivare, ricordando la (4.14), e usare la continuità dell'operazione di derivazione: la (5.1) è precisamente la convergenza delle derivate in \mathcal{D}' .

ESEMPIO 5.2. Ricordando (VII.1.17) e l'esempio VII.2.20, otteniamo le seguenti relazioni di limite:

$$\frac{n}{\pi(1+n^2 t^2)} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \quad \frac{n e^{-n^2 t^2}}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta, \quad \frac{\sin nt}{\pi t} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta.$$

Da quanto detto negli esempi 4.5 e 4.6, vediamo che qualsiasi distribuzione T può essere approssimata con delle funzioni. Se $x \in \mathcal{D}$ nel teorema 5.1 (ad esempio, x multiplo di α definita in (2.1)), le $T_n = T * n x(nt)$ sono funzioni di classe C^∞ che tendono a T in \mathcal{D}' .

6. Distribuzioni temperate. Trasformazione di Fourier

Ci occupiamo ora di estendere la trasformazione di Fourier alle distribuzioni. Definiremo la trasformata di Fourier in un sottospazio di \mathcal{D}' , lo spazio delle *distribuzioni temperate*, che si costruisce scegliendo come funzioni test le funzioni a decrescenza rapida introdotte nel paragrafo X.3.1, procedendo esattamente come abbiamo fatto per introdurre \mathcal{D}' a partire da \mathcal{D} . Introduciamo una nozione di convergenza nello spazio \mathcal{S} .

DEFINIZIONE 6.1. Siano (φ_n) una successione in \mathcal{S} e $\varphi \in \mathcal{S}$; si dice che (φ_n) converge a φ in \mathcal{S} e si scrive $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ se, $\forall k, p \in \mathbb{N}_0$, risulta

$$\limsup_n \sup_{t \in \mathbb{R}} |t^p [\varphi_n^{(k)}(t) - \varphi^{(k)}(t)]| = 0.$$

Si dice distribuzione temperata ogni funzionale lineare e continuo su \mathcal{S} . Lo spazio delle distribuzioni temperate si denota con \mathcal{S}' .

Osserviamo che \mathcal{D} è un sottospazio di \mathcal{S} ; inoltre la convergenza in \mathcal{D} è più forte di quella in \mathcal{S} , cioè, se (φ_n) è una successione in \mathcal{D} e $\varphi \in \mathcal{D}$, vale l'implicazione

$$(6.1) \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi.$$

Ne segue che, se $T \in \mathcal{S}'$, la sua restrizione a \mathcal{D} è lineare e continua su \mathcal{D} , cioè appartiene a \mathcal{D}' . Inoltre si mostra che, se $T, S \in \mathcal{S}'$,

$$(6.2) \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \Rightarrow \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle S, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Pertanto ogni distribuzione temperata $T \in \mathcal{S}'$ è identificabile con la sua restrizione a \mathcal{D} , quindi è una distribuzione in \mathcal{D}' . Equivalentemente, le distribuzioni temperate sono gli elementi di \mathcal{D}' prolungabili a \mathcal{S} come funzionali continui.

ESEMPIO 6.2. Non tutte le distribuzioni regolari, cioè le funzioni L^1_{loc} , sono distribuzioni temperate: è necessario un controllo sul comportamento all'infinito; ad esempio, non individua una distribuzione temperata e^t . Sono invece distribuzioni temperate le funzioni L^1 (con la posizione (3.2)), L^2 e più in generale L^p con $1 \leq p \leq \infty$. Individua una distribuzione temperata ogni funzione $x(t)$ per la quale esiste $p > 0$ tale che

$$\frac{x(t)}{1 + |t|^p} \in L^1;$$

in particolare, ogni funzione a *crescenza lenta*, cioè per la quale esistono $K > 0$ e $p > 0$ tali che

$$|x(t)| \leq K(1 + |t|^p).$$

Sono altresì temperate le derivate di distribuzioni temperate, le distribuzioni periodiche, le distribuzioni a supporto compatto (ad esempio, la δ). v.p. $1/t$ è temperata.

In effetti, mediante le funzioni a crescita lenta si caratterizzano le distribuzioni temperate:

TEOREMA 6.3. *Ogni distribuzione temperata è una funzione a crescita lenta, o una derivata di una funzione a crescita lenta.*

Si dice che $T_n \rightarrow T$ in \mathcal{S}' se $\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Introduciamo ora la trasformazione di Fourier in \mathcal{S}' .

DEFINIZIONE 6.4. Se $T \in \mathcal{S}'$, si chiama trasformata di Fourier di T , e si denota con $\mathcal{F}[T]$, la distribuzione temperata definita da

$$(6.3) \quad \langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Dunque, la trasformazione viene *scaricata* sulla funzione test. Dal paragrafo X.3.1, sappiamo che $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{S}$ è una funzione test per $T \in \mathcal{S}'$. Inoltre si mostra che $\mathcal{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ è continua, cioè

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \mathcal{F}[\varphi_n] \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathcal{F}[\varphi],$$

quindi il secondo membro di (6.3) è continuo in φ e definisce effettivamente una distribuzione temperata.

OSSERVAZIONE 6.5. Come ricordato, se φ è una funzione a decrescenza rapida, tale risulta pure la trasformata $\mathcal{F}\varphi$. È interessante osservare che non vale l'analogo, se consideriamo lo spazio \mathcal{D} di funzioni test. Se $\varphi \in \mathcal{D}$ e $\varphi \not\equiv 0$, la trasformata $\mathcal{F}\varphi$ non ha supporto compatto. In effetti, $\mathcal{F}[\varphi](\omega) = \mathcal{L}[\varphi](j\omega)$ e $\mathcal{L}\varphi$ è una funzione intera; se $\mathcal{F}\varphi$ avesse supporto compatto, per il II principio di identità (teorema IV.1.7) risulterebbe $\mathcal{L}\varphi \equiv 0$ e, per l'invertibilità della trasformazione, $\varphi \equiv 0$, contro le ipotesi.

Notiamo che, se $T = T_x = x \in L^1$, la (6.3) si riduce alla formula di moltiplicazione (X.1.11); quindi anche la definizione di trasformata di Fourier di distribuzioni viene introdotta a partire dal caso delle funzioni.

Per costruzione,

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'.$$

Si prova che la trasformazione è lineare, continua e biunivoca, l'inversa è definita da

$$(6.4) \quad \langle \mathcal{F}^{-1}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S},$$

con $\mathcal{F}^{-1}[\varphi]$ data da (X.1.12), e risulta anch'essa continua. Si estendono inoltre le proprietà note per la trasformata in L^1 , ad esempio, le formule fondamentali:

$$(\mathcal{F}[T])' = \mathcal{F}[-j t T(t)], \quad \mathcal{F}[T'] = j \omega \mathcal{F}[T].$$

Invero, verifichiamo la seconda:

$$\langle \mathcal{F}[T'], \varphi \rangle = \langle T', \mathcal{F}[\varphi] \rangle = -\langle T, (\mathcal{F}[\varphi])' \rangle = -\langle T, \mathcal{F}[-j t \varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], j t \varphi \rangle = \langle j t \mathcal{F}[T], \varphi \rangle.$$

Un altro approccio per definire la trasformata di Fourier in \mathcal{S}' è mediante approssimazione: se x_n sono funzioni convergenti in \mathcal{S}' alla distribuzione $x \in \mathcal{S}'$, si pone

$$\mathcal{F}[x] = \lim_n \mathcal{F}[x_n] \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Il limite esiste e non dipende dalla particolare approssimazione.

Notiamo il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 6.6. Se T ha supporto compatto, $\mathcal{F}T$ è una funzione di classe C^∞ e risulta $\mathcal{F}T(\omega) = \langle T(t), e^{-j\omega t} \rangle$.

Il crochet $\langle T, e^{-j\omega t} \rangle$ va interpretato come in (4.8).

6.1. Esempi. • Calcoliamo $\mathcal{F}[\delta]$; per $\varphi \in \mathcal{S}$, abbiamo

$$\langle \mathcal{F}[\delta], \varphi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \mathcal{F}[\varphi](0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = \langle 1, \varphi \rangle,$$

e quindi

$$(6.5) \quad \mathcal{F}[\delta] = 1.$$

Ad esempio, da (6.5) mediante la II formula fondamentale, ricaviamo

$$(6.6) \quad \mathcal{F}[\delta'] = j\omega \mathcal{F}[\delta] = j\omega.$$

Alcuni risultati diventano particolarmente semplici quando vengono riscritti in termini della trasformata di Fourier. Come illustrazione, traduciamo l'enunciato del teorema 5.1 sulle δ -successioni mediante la \mathcal{F} -trasformazione, nel caso $x \in L^1(\mathbb{R})$. L'ipotesi $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 1$ significa $X(0) = 1$, quindi per la formula di riscaldamento

$$\mathcal{F}[n x(n t)] = X(\omega/n) \xrightarrow{\mathcal{S}'} X(0) = 1 = \mathcal{F}[\delta].$$

Cancellando la trasformazione (antitrasformando), otteniamo la tesi del teorema.

- Analogamente alla trasformata di δ , possiamo calcolare $\mathcal{F}[1]$:

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle = \langle 1, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[\varphi](\omega) d\omega = 2\pi \varphi(0)$$

per la formula di antitrasformazione in \mathcal{S} , quindi

$$(6.7) \quad \mathcal{F}[1] = 2\pi \delta.$$

Notiamo che la (6.7) segue dalla (6.5) mediante la (X.1.14) (estesa a \mathcal{S}'), semplicemente applicando la \mathcal{F} -trasformazione ad ambo i membri.

Usando (6.7) e la proprietà di traslazione in ω , abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos t] &= \frac{\mathcal{F}[e^{jt}] + \mathcal{F}[e^{-jt}]}{2} = \pi \left(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1) \right) \\ \mathcal{F}[\sin t] &= \frac{\mathcal{F}[e^{jt}] - \mathcal{F}[e^{-jt}]}{2j} = \frac{\pi}{j} \left(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1) \right) \end{aligned}$$

Da (6.7) ricaviamo

$$\mathcal{F}[t] = j \mathcal{F}[-jt \cdot 1] = j \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}[1] = 2\pi j \delta'.$$

- Mediante la formula di Poisson (4.21) e le proprietà della trasformazione, da (6.7) ricaviamo la trasformata del treno di impulsi:

$$\mathcal{F}[s_\tau] = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[e^{jk\omega_0 t}] = \frac{2\pi}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

e quindi

$$(6.8) \quad \mathcal{F}[s_\tau] = \omega_0 s_{\omega_0}.$$

- Risulta

$$(6.9) \quad \mathcal{F}[u] = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta.$$

Essendo $u' = \delta$, applicando la \mathcal{F} -trasformazione, per la II formula fondamentale troviamo $j\omega \mathcal{F}u(\omega) = 1$, cioè la distribuzione temperata $Y = \mathcal{F}u$ risolve l'equazione $j\omega Y = 1$. Si ricava quindi

$$(6.10) \quad \mathcal{F}u = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + c\delta,$$

per un'opportuna costante c . Per calcolare c , osserviamo che $u(t) + u(-t) = 1$ q.o. e quindi da (6.10) e (6.7), usando la formula di riflessione e ricordando che δ è pari e v.p. $1/\omega$ è dispari, ricaviamo

$$\text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + c\delta(\omega) - \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + c\delta(-\omega) = 2c\delta(\omega) = \mathcal{F} 1 = 2\pi\delta(\omega),$$

che implica $c = \pi$, ovvero la tesi.

ESEMPIO 6.7. Calcoliamo la trasformata di

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Osserviamo che risulta $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$, per q.o. $t \in \mathbb{R}$. Ne segue

$$\mathcal{F}[\text{sgn}(t)] = \mathcal{F}[2u(t) - 1] = 2 \left(\text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta \right) - 2\pi\delta = \text{v.p.} \frac{2}{j\omega}.$$

ESEMPIO 6.8. Dall'esempio 6.7, applicando la trasformazione ad ambo i membri segue $\mathcal{F}[\text{v.p.} 2/(j\omega)] = \mathcal{F}[\mathcal{F}[\text{sgn } t]] = 2\pi\text{sgn}(-t) = -2\pi\text{sgn } t$ e quindi

$$(6.11) \quad \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] = -j\pi\text{sgn } \omega.$$

ESEMPIO 6.9. Calcoliamo

$$X = \mathcal{F} \left[\frac{\sin t}{t} \right].$$

La trasformata si ricava immediatamente dall'esempio X.1.4:

$$X = \mathcal{F} \left[\mathcal{F} \left[\frac{1}{2} \Pi \left(\frac{t}{2} \right) \right] \right] = \pi \Pi \left(\frac{t}{2} \right).$$

Alternativamente,

$$X = \mathcal{F} \left[\left(\text{v.p.} \frac{1}{t} \right) \sin t \right] = \frac{1}{2j} \left\{ \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] (\omega - 1) - \mathcal{F} \left[\text{v.p.} \frac{1}{t} \right] (\omega + 1) \right\},$$

quindi per (6.11)

$$X = -\frac{\pi}{2} [\text{sgn}(\omega - 1) - \text{sgn}(\omega + 1)] = \pi [u(\omega + 1) - u(\omega - 1)].$$

- Trasformata dell'integrale. Sia $x \in L^1(\mathbb{R})$; la funzione

$$y: t \mapsto \int_{-\infty}^t x(s) ds$$

è continua e limitata, quindi a crescita lenta e dunque una distribuzione temperata.

Inoltre

$$y(t) = x * u(t).$$

Procedendo formalmente, otteniamo

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t x(s) ds \right] = X(\omega) \cdot \left(\text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) = \text{v.p.} \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

Tale formula è certamente valida se x è nullo fuori di un intervallo limitato, essendo allora $X \in C^\infty$. In generale, la formula richiede che esista v.p. $X(\omega)/\omega$: questo accade, ad esempio, se è pure $t x(t) \in L^1$, che assicura $X \in C^1$.

6.2. Teoremi di campionamento. Calcoliamo la trasformata di una distribuzione periodica.

TEOREMA 6.10 (I teorema di campionamento). *Sia*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_0(t - k\tau) \quad \text{in } \mathcal{S}'$$

e supponiamo che $X_0(\omega) = \mathcal{F}[x_0]$ sia una funzione continua in \mathbb{R} . In queste ipotesi, risulta

$$(6.12) \quad X(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_0(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0).$$

Dim. Osserviamo che la replica periodica si ottiene come convoluzione di x_0 con il treno di impulsi $x = x_0 * s_\tau$ (cfr. la seconda delle (4.12)), quindi trasformando e usando la formula per la trasformata della convoluzione, abbiamo

$$X = X_0 \cdot \omega_0 s_{\omega_0}.$$

A questo punto non resta che applicare la proprietà di campionamento della δ .

Osserviamo che, se $x \in L^1_{\text{loc}}$ è periodica di periodo τ e

$$x_0(t) = x(t)[u(t) - u(t - \tau)],$$

la trasformata $X_0 \in C^\infty$, per la proposizione 6.6 (o anche il corollario X.3.3). Inoltre (6.12) segue subito dallo sviluppo in serie di Fourier. Si verifica che l'uguaglianza

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{j k \omega_0 t}$$

vale in \mathcal{S}' , dove i

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sono i coefficienti della serie di Fourier. Trasformando, abbiamo

$$X = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathcal{F}[e^{j k \omega_0 t}] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

e risulta

$$2\pi c_k = \omega_0 X_0(k\omega_0), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

ESEMPIO 6.11. Calcoliamo la \mathcal{F} -trasformata dell'onda triangolare x , replica periodica con periodo 2 di

$$x_0(t) = \Lambda(t) = (1+t)[u(t+1) - u(t)] + (1-t)[u(t) - u(t-1)],$$

cfr. esempio VIII.2.2 e esempio X.3.8. Essendo x_0 somma di segnali che sono prodotto di un polinomio per una finestra, deriviamo nel senso delle distribuzioni fino a che non rimangano solo impulsi:

$$x'_0(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)$$

(solo derivata ordinaria, essendo x_0 assolutamente continua) e

$$x''_0(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1).$$

Applicando la \mathcal{F} -trasformazione, otteniamo quindi

$$-\omega^2 X_0(\omega) = e^{j\omega} - 2 + e^{-j\omega} = 2 \cos \omega - 2$$

da cui

$$(6.13) \quad X_0(\omega) = 2 \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2}.$$

Notiamo che questa formula coincide con la (X.3.8).

Usiamo ora la formula (6.12) del I teorema di campionamento. Essendo il periodo $\tau = 2$, risulta $\omega_0 = \pi$; dunque

$$X_0(k\omega_0) = 2 \frac{1 - \cos k\pi}{k^2\pi^2}$$

e conviene distinguere i casi k pari e k dispari:

$$X_0(k\omega_0) = \begin{cases} 0, & \text{per } k \neq 0 \text{ pari,} \\ \frac{4}{(2n+1)^2\pi^2}, & \text{per } k = 2n+1 \text{ dispari, } (n \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Inoltre

$$X_0(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} X_0(\omega) = 1.$$

Pertanto la trasformata della replica periodica è

$$(6.14) \quad X(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \delta(\omega - (2n+1)\pi).$$

La (6.14) è in accordo con quanto visto nell'esempio VIII.3.9.

ESEMPIO 6.12. Calcoliamo la trasformata e scriviamo la serie di Fourier della replica periodica x di periodo $\tau = 2\pi$ del segnale

$$x_0(t) = t \sin t [u(t+\pi) - u(t-\pi)].$$

Per trasformare x_0 osserviamo che $x_0(t) = j(-jt) y_0(t)$, dove

$$y_0(t) = \sin t [u(t+\pi) - u(t-\pi)],$$

quindi per la I formula fondamentale

$$X_0(\omega) = j \frac{d}{d\omega} Y_0(\omega).$$

Per calcolare Y_0 , deriviamo y_0 due volte nel senso delle distribuzioni:

$$y'_0(t) = \cos t [u(t+\pi) - u(t-\pi)],$$

(y'_0 coincide con la derivata ordinaria, essendo y_0 assolutamente continuo)

$$y''_0(t) = -y_0(t) - \delta(t+\pi) + \delta(t-\pi).$$

Applichiamo ora ad ambo i membri la \mathcal{F} -trasformazione; a primo membro usiamo la II formula fondamentale:

$$-\omega^2 Y_0(\omega) = -Y_0(\omega) - e^{j\pi\omega} + e^{-j\pi\omega}$$

e quindi per $\omega \neq \pm 1$

$$Y_0(\omega) = \frac{e^{j\pi\omega} - e^{-j\pi\omega}}{\omega^2 - 1} = 2j \frac{\sin \pi\omega}{\omega^2 - 1}.$$

Dunque

$$X_0(\omega) = 2 \frac{d}{d\omega} \frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} = 2 \left(\frac{\pi \cos \pi \omega}{1 - \omega^2} + \frac{2\omega \sin \pi \omega}{(1 - \omega^2)^2} \right).$$

(X_0 è reale pari, com'era chiaro essendo x_0 reale pari.) Essendo il periodo $\tau = 2\pi$, risulta $\omega_0 = 1$ e dobbiamo campionare nei punti $k \in \mathbb{Z}$. Per $k \neq \pm 1$, dalla formula trovata ricaviamo

$$X_0(k) = \frac{2\pi(-1)^k}{1 - k^2}.$$

D'altra parte, mediante la regola de L'Hôpital, troviamo

$$X_0(1) = \lim_{\omega \rightarrow 1} X_0(\omega) = 2 \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\pi(1 - \omega^2) \cos \pi \omega + 2\omega \sin \pi \omega}{(1 - \omega^2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Possiamo anche valutare la derivata come segue

$$\frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} = \frac{\sin \pi(1 - \omega)}{1 - \omega^2} = \pi \frac{1 - \omega}{1 - \omega^2} + O((\omega - 1)^2) = \frac{\pi}{1 + \omega} + O((\omega - 1)^2),$$

quindi

$$\left. \frac{d}{d\omega} \frac{\sin \pi \omega}{1 - \omega^2} \right|_{\omega=1} = \left. \frac{d}{d\omega} \frac{\pi}{1 + \omega} \right|_{\omega=1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Inoltre $X_0(-1) = X_0(1)$. Pertanto

$$X(\omega) = -\frac{\pi}{2} \delta(\omega - 1) - \frac{\pi}{2} \delta(\omega + 1) + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}} \frac{2\pi(-1)^k}{1 - k^2} \delta(\omega - k).$$

Lo sviluppo in serie di Fourier si scrive

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{e^{jt}}{4} - \frac{e^{-jt}}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}} \frac{(-1)^k}{1 - k^2} e^{jkt} \\ &= 1 - \frac{\cos t}{2} + 2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1 - k^2} \cos kt, \end{aligned}$$

che vale sia nel senso dell'energia che in quello puntuale.

Alternativamente, possiamo osservare che x si ottiene moltiplicando per $\sin t$ la replica periodica z di periodo 2π di

$$z_0(t) = t[u(t + \pi) - u(t - \pi)],$$

quindi X si ricava da Z mediante la formula di modulazione.

ESEMPIO 6.13. Calcoliamo la trasformata della replica periodica di periodo π del segnale

$$x_0(t) = (\cos t - 1)[u(t + \pi/2) - u(t)] + (1 - \cos t)[u(t) - u(t - \pi/2)].$$

Osserviamo che x_0 è dispari; invero, posto

$$x_1(t) = (1 - \cos t)[u(t) - u(t - \pi/2)],$$

risulta

$$x_0(t) = x_1(t) - x_1(-t)$$

e quindi

$$X_0(\omega) = X_1(\omega) - X_1(-\omega).$$

Inoltre, posto

$$x_2(t) = u(t) - u(t - \pi/2),$$

abbiamo per la formula di modulazione

$$X_1(\omega) = X_2(\omega) - \frac{X_2(\omega - 1) + X_2(\omega + 1)}{2}.$$

La trasformata X_2 si calcola subito in base alla definizione; per $\omega \neq 0$:

$$X_2(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-j\omega t} dt = j \frac{e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} - 1}{\omega}.$$

Pertanto per $\omega \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

$$\begin{aligned} X_1(\omega) &= j \frac{e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} - 1}{\omega} - \frac{j}{2} \left(\frac{e^{-j(\omega-1)\frac{\pi}{2}} - 1}{\omega - 1} + \frac{e^{-j(\omega+1)\frac{\pi}{2}} - 1}{\omega + 1} \right) \\ &= j \frac{e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} - 1}{\omega} + \frac{e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} + j\omega}{\omega^2 - 1} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} X_0(\omega) &= j \frac{e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} - 1}{\omega} + \frac{e^{-j\omega \frac{\pi}{2}} + j\omega}{\omega^2 - 1} - j \frac{e^{j\omega \frac{\pi}{2}} - 1}{-\omega} - \frac{e^{j\omega \frac{\pi}{2}} - j\omega}{\omega^2 - 1} \\ &= 2j \frac{\cos \frac{\pi}{2} \omega - 1}{\omega} + 2j \frac{\sin \frac{\pi}{2} \omega}{1 - \omega^2} - \frac{2j\omega}{1 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Notiamo che X_0 è funzione immaginaria dispari.

Alternativamente, per calcolare X_0 , scriviamo

$$x_0(t) = x_4(t) - x_3(t),$$

con

$$x_3(t) = u(t + \pi/2) - 2u(t) + u(t - \pi/2), \quad x_4(t) = \cos t \, x_3(t).$$

Per trasformare x_3 deriviamo nel senso delle distribuzioni e applichiamo la trasformazione:

$$X_3(\omega) = \frac{e^{j\omega \frac{\pi}{2}} - 2 + e^{-j\omega \frac{\pi}{2}}}{j\omega} = -2j \frac{\cos \frac{\pi}{2} \omega - 1}{\omega}.$$

Per trasformare x_4 , usiamo il metodo del riciclo: deriviamo due volte nel senso delle distribuzioni

$$x_4''(t) = -x_4(t) + \delta(t + \pi/2) - \delta(t - \pi/2) - 2\delta'(t)$$

e quindi applichiamo la trasformata

$$X_4(\omega) = \frac{2j \sin \frac{\pi}{2} \omega - 2j\omega}{1 - \omega^2}.$$

In questa maniera ritroviamo l'espressione precedente

$$X_0(\omega) = X_4(\omega) - X_3(\omega).$$

Essendo il periodo $\tau = \pi$, risulta $\omega_0 = 2$ e bisogna campionare negli interi pari: i punti ± 1 non intervengono nel campionamento. D'altra parte chiaramente $X_0(0) = 0$. Per

$k \neq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} X_0(2k) &= 2j \frac{(-1)^k - 1}{2k} - \frac{4jk}{1-4k^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{8jn}{1-16n^2}, & k = 2n \text{ pari}, n \neq 0, \\ -2j \frac{1-2(2n+1)^2}{(2n+1)[1-4(2n+1)^2]}, & k = 2n+1 \text{ dispari}. \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} X(\omega) &= -16j \sum_{n \neq 0} \frac{n}{1-16n^2} \delta(\omega - 4n) \\ &\quad - 4j \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-2(2n+1)^2}{(2n+1)[1-4(2n+1)^2]} \delta(\omega - 4n - 2). \end{aligned}$$

ESEMPIO 6.14. Calcoliamo la trasformata del prolungamento periodico del segnale definito in $(-\pi, \pi)$ ponendo

$$x(t) = \begin{cases} 3 \sin t, & -\pi < t < 0, \\ \sin 3t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Il prolungamento periodico x si ottiene come replica periodica di periodo 2π del segnale

$$x_0(t) = 3x_1(t) + x_2(t),$$

dove

$$x_1(t) = \sin t [u(t + \pi) - u(t)], \quad x_2(t) = \sin 3t [u(t) - u(t - \pi)].$$

Per trasformare x_1 , usiamo il metodo del riciclo; deriviamo due volte nel senso delle distribuzioni:

$$x_1''(t) = -x_1(t) - \delta(t + \pi) - \delta(t)$$

e applichiamo la trasformazione:

$$X_1(\omega) = -\frac{e^{j\pi\omega} + 1}{1 - \omega^2}.$$

Analogamente per trasformare x_2 :

$$x_2''(t) = -9x_2(t) + 3\delta(t) + 3\delta(t - \pi);$$

$$X_2(\omega) = 3 \frac{1 + e^{-j\pi\omega}}{9 - \omega^2}.$$

Pertanto per $\omega \neq \pm 1$ e $\omega \neq \pm 3$

$$X_0(\omega) = 3X_1(\omega) + X_2(\omega) = -3 \frac{e^{j\pi\omega} + 1}{1 - \omega^2} + 3 \frac{1 + e^{-j\pi\omega}}{9 - \omega^2}.$$

Risulta $\omega_0 = 1$; calcoliamo

$$X_0(\pm 1) = \lim_{\omega \rightarrow \pm 1} X_0(\omega) = -3 \lim_{\omega \rightarrow \pm 1} \frac{e^{j\pi\omega} + 1}{1 - \omega^2} + 0 = \mp \frac{3}{2} \pi j;$$

$$X_0(\pm 3) = \lim_{\omega \rightarrow \pm 3} X_0(\omega) = 0 + 3 \lim_{\omega \rightarrow \pm 3} \frac{1 + e^{-j\pi\omega}}{9 - \omega^2} = \mp \frac{\pi}{2} j.$$

Inoltre, per $k \in \mathbb{Z} - \{-3, -1, 1, 3\}$,

$$X_0(k) = \begin{cases} 0, & k \text{ dispari,} \\ -\frac{6}{1-k^2} + \frac{6}{9-k^2} = \frac{-48}{(1-k^2)(9-k^2)}, & k \text{ pari.} \end{cases}$$

Pertanto

$$X(\omega) = \frac{3}{2} \pi j [\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)] + \frac{\pi}{2} j [\delta(\omega+3) - \delta(\omega-3)] - 48 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1-4n^2)(9-4n^2)} \delta(\omega-2n).$$

Lo sviluppo in serie trigonometrica è

$$(6.15) \quad x(t) = \frac{3}{2} \sin t + \frac{1}{2} \sin 3t - \frac{48}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos 2nt}{(1-4n^2)(9-4n^2)}.$$

Osserviamo che $x(t) - \frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} \sin 3t$ è funzione pari, quindi il suo sviluppo contiene solo termini in coseno, in accordo con quanto mostra la (6.15).

ESERCIZIO 6.15. Calcolare $\mathcal{F}[u(t-a) - u(t-b)]$ in ciascuno dei seguenti modi.

1) Mediante la definizione. 2) Riconducendosi a $\mathcal{F}[\Pi]$ mediante le proprietà della trasformazione. 3) Derivando nel senso delle distribuzioni. 4) Riconducendosi a $\mathcal{F}[u]$ mediante le proprietà della trasformazione.

ESERCIZIO 6.16. Ricondurre il calcolo della trasformata del segnale periodico z considerato nell'esempio 6.12 allo sviluppo in serie di Fourier dell'onda a dente di sega, considerata nell'esempio VIII.3.8.

Vediamo ora la trasformata di un segnale campionato.

TEOREMA 6.17 (II teorema di campionamento). *Sia*

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k\tau) \delta(t - k\tau) \quad \text{in } \mathcal{S}',$$

con $y(t)$ funzione continua a crescita lenta. In queste ipotesi, risulta

$$(6.16) \quad X(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(\omega - k\omega_0).$$

7. Trasformata di Laplace di distribuzioni

Estendiamo la trasformazione di Laplace alle distribuzioni. Poniamo

$$\mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t) e^{-\sigma t}](\omega),$$

supponendo che $x(t) e^{-\sigma t}$ sia una distribuzione temperata. Ad esempio,

$$\mathcal{L}[\delta] = 1.$$

Se $x(t)$ è nulla in $] -\infty, 0[$, la trasformata è *unilatera*; la denotiamo con \mathcal{L}_u . Elenchiamone alcune proprietà:

- $X(s) = \mathcal{L}_u[x]$ è una funzione analitica in un semipiano destro; inoltre

$$X'(s) = \mathcal{L}_u[-tx(t)].$$

- La seconda formula fondamentale si scrive:

$$\mathcal{L}_u[x'] = s \mathcal{L}_u[x] = sX(s).$$

Questa formula differisce solo apparentemente da quella per le funzioni.

- \mathcal{L}_u è iniettiva.

Consideriamo il problema di Cauchy

$$(7.1) \quad \begin{cases} P[D]y = \delta(t) \\ y \text{ distribuzione nulla in }]-\infty, 0[\end{cases}$$

dove $P[D]$ è un operatore differenziale lineare a coefficienti costanti. \mathcal{L}_u -trasformando ambo i membri, abbiamo

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)} = H(s)$$

e quindi

$$y(t) = \mathcal{L}_u^{-1}[H(s)].$$

Pertanto la funzione di trasferimento $H(s)$ è la trasformata della risposta all'impulso nel sistema ingresso-uscita rappresentato dall'operatore $P[D]$.

ESEMPIO 7.1. Data la distribuzione f nulla in $]-\infty, 0[$, consideriamo il problema

$$(7.2) \quad \begin{cases} P[D]y = f \\ y \text{ distribuzione nulla in }]-\infty, 0[\end{cases}$$

Da (4.16) segue

$$P[D](y * f) = (P[D]y) * f.$$

Quindi, se y risolve (7.1), ritroviamo che la soluzione di (7.2) è

$$y * f.$$

Infatti,

$$P[D](y * f) = (P[D]y) * f = \delta * f = f.$$

CAPITOLO XII

Problemi ai limiti

1. Introduzione

Consideriamo l'equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine

$$(1.1) \quad y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

dove i coefficienti a_1 e a_2 e il termine noto f sono funzioni reali continue nell'intervallo $[a, b]$. È noto che tale equazione ammette infinite soluzioni. In particolare, l'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea associata

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $C^2[a, b]$; se y_1 e y_2 sono integrali indipendenti, l'integrale generale si scrive $y = c_1y_1 + c_2y_2$, con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. L'integrale generale dell'equazione completa (1.1) si scrive

$$(1.2) \quad y = c_1y_1 + c_2y_2 + z,$$

essendo z una soluzione di (1.1).

Ricordiamo che il problema di Cauchy relativo all'equazione (1.1) consiste nell'assegnare i valori di y e di y' in uno stesso punto dell'intervallo $[a, b]$. Vale il seguente risultato di esistenza e unicità: per ogni $x_0 \in [a, b]$ e per ogni $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$, esiste un'unica $y \in C^2[a, b]$ che soddisfa (1.1) in tutti i punti dell'intervallo $[a, b]$ e verifica le condizioni iniziali $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

In questo capitolo esamineremo un problema diverso relativo all'equazione (1.1), consistente nel ricercare soluzioni dell'equazione soddisfacenti una condizione in a e una in b . Un problema di questo tipo, essendo le condizioni aggiuntive assegnate negli estremi dell'intervallo, si dice *problema ai limiti*. Ad esempio, costituisce un problema ai limiti la ricerca di integrali y di (1.1) con valori assegnati $y(a)$ e $y(b)$ negli estremi. Gli esempi seguenti mostrano che per i problemi ai limiti la situazione è notevolmente diversa rispetto al problema di Cauchy.

ESEMPIO 1.1. Consideriamo il problema

$$(1.3) \quad \begin{cases} y'' + y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = \alpha, \quad y(\pi) = \beta, \end{cases}$$

essendo α e β costanti assegnate. L'integrale generale dell'equazione è

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie. Evidentemente, per ogni scelta delle costanti, risulta $y(0) = -y(\pi)$, quindi se il problema (1.3) ha soluzione, risulta necessariamente $\alpha =$

$-\beta$. È chiaro inoltre che, se tale condizione è soddisfatta, sono soluzioni del problema tutte e sole le funzioni

$$y = \alpha \cos x + c_2 \sin x,$$

con c_2 costante arbitraria; in particolare, il problema ha infinite soluzioni.

ESEMPIO 1.2. È subito visto che il problema

$$(1.4) \quad \begin{cases} y'' + y = 0 & \text{in } [0, \pi/2] \\ y(0) = \alpha, \quad y(\pi/2) = \beta, \end{cases}$$

ammette, per ogni α e β valori assegnati, l'unica soluzione

$$y = \alpha \cos x + \beta \sin x.$$

Più in generale, invece di $y(a)$ e $y(b)$, si assegnano i valori delle espressioni

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a), \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b),$$

essendo $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ e $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$ coppie fissate. Dati due numeri reali γ_1 e γ_2 , consideriamo dunque il seguente problema

$$(1.5) \quad \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) & \text{in } [a, b] \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1.3. È sufficiente considerare i problemi con valori assegnati negli estremi nulli. Invero, se $w \in C^2[a, b]$ soddisfa le condizioni

$$\alpha_1 w(a) + \beta_1 w'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 w(b) + \beta_2 w'(b) = \gamma_2,$$

e $y_0 \in C^2[a, b]$ risolve

$$\begin{cases} y_0'' + a_1(x)y_0' + a_2(x)y_0 = f(x) - [w'' + a_1(x)w' + a_2(x)w] \\ \alpha_1 y_0(a) + \beta_1 y_0'(a) = 0, \quad \alpha_2 y_0(b) + \beta_2 y_0'(b) = 0, \end{cases}$$

la somma $y = y_0 + w$ risolve il problema

$$\begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2, \end{cases}$$

Notiamo che, comunque fissati $w(a)$, $w'(a)$, $w(b)$, $w'(b)$, è possibile trovare w polinomio di grado non superiore a 3.

Un risultato che useremo spesso è il seguente.

LEMMA 1.4. *Se y_1 e y_2 sono derivabili e verificano le condizioni*

$$(1.6) \quad \begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0 \\ \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) = 0 \end{cases}$$

con $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$, il loro wronskiano si annulla in a :

$$W(a) = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Dim. Le (1.6) possono essere riguardate come un sistema lineare omogeneo nelle incognite α_1 e β_1 , il cui determinante dei coefficienti è il wronskiano di y_1 e y_2 , calcolato in a . Poiché il sistema ammette una soluzione $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$, risulta $W(a) = 0$.

2. Equazioni in forma autoaggiunta

Riscriviamo l'equazione (1.1) in una forma più maneggevole per i nostri scopi. La funzione

$$p(x) = e^{\int_a^x a_1(\tau) d\tau}$$

appartiene a $C^1[a, b]$ ed è positiva in ogni punto, quindi l'equazione (1.1) è equivalente alla seguente

$$(2.1) \quad -p(x) y'' - p(x) a_1(x) y' - p(x) a_2(x) y = -p(x) f(x),$$

ottenuta moltiplicando ambo i membri per $-p(x)$. Osservando che $p' = p a_1$ e ponendo $q = -p a_2$, $F = -p f$, la (2.1) diviene

$$(2.2) \quad -(p(x) y')' + q(x) y = F(x).$$

La (2.2) si chiama equazione in forma autoaggiunta. Nel seguito considereremo sempre equazioni in forma autoaggiunta. Introdotto l'operatore differenziale lineare (in forma autoaggiunta)

$$(2.3) \quad \mathcal{L}: y \in C^2[a, b] \rightarrow -(p(x) y')' + q(x) y \in C[a, b],$$

l'equazione si scrive semplicemente

$$\mathcal{L}y = F.$$

Per l'operatore \mathcal{L} vale la seguente *identità di Lagrange*, per ogni $y, z \in C^2[a, b]$:

$$(2.4) \quad z \mathcal{L}y - y \mathcal{L}z = (p(yz' - y'z))' = (pW)'$$

di facile verifica diretta. W è il wronskiano di y e z .

Mettiamo in luce una proprietà dell'operatore \mathcal{L} che giustifica l'appellativo di autoaggiunto. Consideriamo il sottospazio dello spazio reale $L^2(a, b)$

$$(2.5) \quad X = \{y \in C^2[a, b] : \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0\}.$$

LEMMA 2.1. *Per ogni $y, z \in X$, risulta*

$$(2.6) \quad (\mathcal{L}y, z) = (y, \mathcal{L}z).$$

Dim. Per il lemma 1.4, il wronskiano di y e z si annulla in a e b , $W(a) = W(b) = 0$, quindi, per l'identità di Lagrange,

$$(\mathcal{L}y, z) - (y, \mathcal{L}z) = \int_a^b (z \mathcal{L}y - y \mathcal{L}z) dx = [pW]_a^b = 0.$$

3. La funzione di Green. Il teorema dell'alternativa

Osserviamo che l'introduzione dello spazio in (2.5) consente di scrivere sinteticamente le condizioni ai limiti: $y \in X$.

Consideriamo il problema ai limiti

$$(3.1) \quad \begin{cases} \mathcal{L}y = f \\ y \in X, \end{cases}$$

e il corrispondente problema relativo all'equazione omogenea associata

$$(3.2) \quad \begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y \in X, \end{cases}$$

dove $p \in C^1[a, b]$, $p > 0$, $q, f \in C[a, b]$.

PROPOSIZIONE 3.1. *Se il problema (3.2) ammette solo la soluzione banale, il problema (3.1) ammette, per ogni $f \in C[a, b]$, un'unica soluzione.*

L'unicità è chiara. Per costruire una soluzione del problema (3.1), consideriamo soluzioni non banali y_1 e y_2 dell'equazione omogenea associata $\mathcal{L}y = 0$, verificanti rispettivamente le condizioni

$$(3.3) \quad \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) = 0, \quad \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) = 0.$$

Possiamo determinare y_1 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(a) = -\beta_1, \quad y'(a) = \alpha_1 \end{cases}$$

e similmente y_2 risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}y = 0 \\ y(b) = -\beta_2, \quad y'(b) = \alpha_2 \end{cases}$$

È chiaro che risulta

$$(3.4) \quad \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) \neq 0, \quad \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \neq 0.$$

Ad esempio, se fosse $\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) = 0$, la funzione y_1 sarebbe soluzione di (3.2) e quindi, per l'ipotesi, sarebbe la soluzione banale, che è falso. Le (3.4) implicano che y_1 e y_2 sono indipendenti: se fossero dipendenti, sarebbero proporzionali e quindi le (3.4) sarebbero in contrasto con le (3.3).

Determiniamo la soluzione di (3.1) mediante il metodo di Lagrange della variazione delle costanti, che consiste nel cercare y sotto la forma

$$(3.5) \quad y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x),$$

con c_1 e c_2 funzioni da determinare. L'equazione $\mathcal{L}y = f$ è una condizione da soddisfare, mentre abbiamo due funzioni da determinare: possiamo pensare di imporre una condizione aggiuntiva su c_1 e c_2 . Essendo

$$\mathcal{L}y = \mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = -(p(c_1 y_1 + c_2 y_2))' + q(c_1 y_1 + c_2 y_2),$$

dobbiamo calcolare $y' = (c_1 y_1 + c_2 y_2)'$; imponiamo la condizione

$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0,$$

che garantisce che la derivata di y si calcoli come se c_1 e c_2 fossero costanti:

$$(3.6) \quad (c_1 y_1 + c_2 y_2)' = c_1 y_1' + c_2 y_2'.$$

A questo punto

$$\begin{aligned} -(p(c_1 y_1 + c_2 y_2))' &= -((p y_1') c_1)' - ((p y_2') c_2)' \\ &= -(p y_1')' c_1 - p y_1' c_1' - (p y_2')' c_2 - p y_2' c_2' \end{aligned}$$

e

$$\mathcal{L}[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 \mathcal{L}[y_1] + c_2 \mathcal{L}[y_2] - p(y_1' c_1' + y_2' c_2') = -p(y_1' c_1' + y_2' c_2').$$

Pertanto la condizione $\mathcal{L}y = f$ si scrive $y_1' c_1' + y_2' c_2' = -f/p$ e giungiamo al sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' = -f/p \end{cases}$$

nelle incognite c'_1 e c'_2 . Il determinante dei coefficienti è il wronskiano W che risulta diverso da zero in ogni punto, essendo y_1 e y_2 indipendenti. Ricaviamo pertanto

$$c'_1 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ -f/p & y'_2 \end{vmatrix} = \frac{fy_2}{pW}, \quad c'_2 = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & -f/p \end{vmatrix} = -\frac{fy_1}{pW}.$$

Osserviamo che la funzione pW è costante in $[a, b]$, poiché per l'identità di Lagrange

$$(pW)' = y_2 \mathcal{L}y_1 - y_1 \mathcal{L}y_2 = 0,$$

essendo $\mathcal{L}y_1 = \mathcal{L}y_2 = 0$.

Ricordando che y' si calcola come se c_1 e c_2 fossero costanti, vediamo che la condizione $\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0$ diviene

$$0 = c_1(a) (\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y'_1(a)) + c_2(a) (\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y'_2(a)),$$

e quindi, per (3.3) e (3.4) equivale a $c_2(a) = 0$. Allo stesso modo, la condizione $\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$ significa $c_1(b) = 0$. Pertanto

$$c_2(x) = -\frac{1}{pW} \int_a^x f(\xi) y_1(\xi) d\xi, \quad c_1(x) = -\frac{1}{pW} \int_x^b f(\xi) y_2(\xi) d\xi$$

ed in definitiva

$$(3.7) \quad y(x) = -\frac{1}{pW} \left[y_2(x) \int_a^x f(\xi) y_1(\xi) d\xi + y_1(x) \int_x^b f(\xi) y_2(\xi) d\xi \right].$$

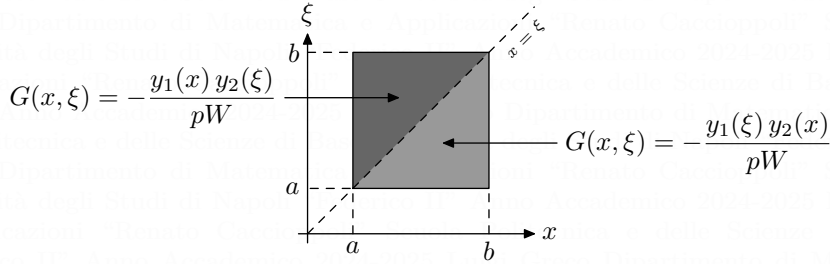
Se poniamo

$$(3.8) \quad G(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -\frac{y_1(x) y_2(\xi)}{pW}, & a \leq x \leq \xi \leq b \\ -\frac{y_1(\xi) y_2(x)}{pW}, & a \leq \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

possiamo riscrivere (3.7) come segue

$$(3.9) \quad y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

La funzione $G = G(x, \xi)$ si dice *funzione di Green* del problema (3.1). Essa è reale, continua in $[a, b]^2$ e simmetrica, cioè verifica $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.



ESEMPIO 3.2. Troviamo la funzione di Green relativa al problema

$$\begin{cases} -y'' = f & \text{in } [0, 1] \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata è $-y'' = 0$, il cui integrale generale è $y = c_0 + c_1x$, con c_0 e c_1 costanti arbitrarie; possiamo scegliere $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = 1 - x$. Il wronskiano è

$$W = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -x - 1 + x = -1$$

e poiché $p \equiv 1$, risulta $pW = -1$. Pertanto

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \\ (1-x)\xi, & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ESEMPIO 3.3. Troviamo la funzione di Green relativa al problema

$$\begin{cases} -y'' - y = f & \text{in } [0, \pi/2] \\ y(0) = y(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

L'equazione omogenea associata è $y'' + y = 0$ e possiamo scegliere $y_1(x) = \sin x$ e $y_2(x) = \cos x$. Il wronskiano è

$$W = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1$$

e risulta $pW = -1$. Pertanto

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \sin x \cos \xi, & 0 \leq x \leq \xi \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \xi \cos x, & 0 \leq \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Elenchiamo ulteriori proprietà della funzione di Green. Per ogni $\xi \in]a, b[$ fissato, risulta:

- $G(\cdot, \xi) \in C[a, b] \cap C^2([a, b] - \{\xi\})$, con ξ discontinuità di I specie per le derivate $G_x(\cdot, \xi)$ e $G_{xx}(\cdot, \xi)$;
- risulta $\mathcal{L}G(\cdot, \xi) = 0$ in $[a, b] - \{\xi\}$ e valgono le condizioni ai limiti $\alpha_1 G(a, \xi) + \beta_1 G_x(a, \xi) = 0$, $\alpha_2 G(b, \xi) + \beta_2 G_x(b, \xi) = 0$;
- $p(\cdot) G_x(\cdot, \xi)$ ha in $x = \xi$ salto di discontinuità pari a -1 .

Le prime due si verificano immediatamente, osservando che su $[a, \xi[$ la funzione $G(\cdot, \xi)$ è proporzionale a y_1 , mentre su $]\xi, b]$ è proporzionale a y_2 . Calcoliamo il salto di discontinuità. La derivata è

$$(3.10) \quad G_x(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{y'_1(x) y_2(\xi)}{pW}, & a \leq x < \xi \\ -\frac{y_1(\xi) y'_2(x)}{pW}, & \xi < x \leq b \end{cases}$$

e quindi

$$p(\xi)[G_x(\xi+, \xi) - G_x(\xi-, \xi)] = -\frac{1}{W(\xi)} [y_1(\xi) y'_2(\xi) - y'_1(\xi) y_2(\xi)] = -1.$$

Usando le proprietà di G , è possibile anche verificare a posteriori che, per ogni $f \in C[a, b]$, la funzione y data dalla (3.9) è di classe $C^2[a, b]$ e risolve il problema (3.1).

OSSERVAZIONE 3.4. Per ogni $\xi \in]a, b[$ fissato, la funzione $G(\cdot, \xi)$ soddisfa l'equazione

$$(3.11) \quad \mathcal{L}G(\cdot, \xi) = \delta(\cdot - \xi)$$

nel senso delle distribuzioni. Per questo motivo, G si dice *soluzione fondamentale* del problema (3.1).

Per la verifica, osserviamo che la derivata distribuzionale di $G(\cdot, \xi)$ coincide con quella ordinaria, che è data dalla (3.10). La derivata distribuzionale di $pG_x(\cdot, \xi)$ risulta somma della derivata ordinaria (che esiste in $[a, b] - \{\xi\}$) ed un impulso concentrato in ξ , di area pari al salto di discontinuità in tale punto, che come osservato vale -1 .

A complemento della proposizione 3.1, enunciamo il

TEOREMA 3.5 (dell'alternativa). *Si verifica una delle due eventualità:*

- (1) *il problema (3.2) ha solo la soluzione banale e, per ogni $f \in C[a, b]$, il problema (3.1) ha un'unica soluzione;*
- (2) *il problema (3.2) ammette soluzioni non banali e il problema (3.1) ha soluzione se e solo se f è ortogonale a tutte le soluzioni di (3.2).*

In altri termini, unicità e risolubilità per ogni f o valgono entrambe o falliscono entrambe.

4. Il problema di Sturm-Liouville

Assegnate le funzioni continue p, q, r sull'intervallo $[a, b]$, con p derivabile e p' continua, consideriamo l'equazione omogenea

$$(4.1) \quad -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y,$$

dove λ è un parametro numerico. Date $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ e $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$, consideriamo il *problema di Sturm-Liouville*

$$(4.2) \quad \begin{cases} -(p(x)y')' + q(x)y = \lambda r(x)y \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

consistente nella ricerca di integrali dell'equazione verificanti le condizioni negli estremi. La funzione identicamente nulla banalmente risolve (4.2), per ogni valore del parametro λ . Un valore di λ per cui esistono soluzioni non banali si dice *autovalore* del problema; ogni soluzione non banale corrispondente si dice *autofunzione*, o *autosoluzione*, associata all'autovalore λ . Per l'omogeneità del problema, le autofunzioni relative ad un fissato autovalore (aggiungendo la soluzione banale) formano uno spazio vettoriale, che si dice *autospazio*. Un autovalore si dice *semplice* se il relativo autospazio ha dimensione 1.

Come osservato, le condizioni ai limiti si esprimono mediante la relazione $y \in X$, essendo X definito in (2.5), e il problema (4.2) si riscrive

$$(4.3) \quad \begin{cases} \mathcal{L}y = \lambda r(x)y \\ y \in X \end{cases}$$

ESEMPIO 4.1. Consideriamo il problema di Sturm-Liouville

$$(4.4) \quad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & \text{in } [0, \pi] \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Per $\lambda = 0$ il problema ha solo la soluzione banale. Infatti, l'equazione diviene $y'' = 0$, quindi $y(x) = c_0 + c_1 x$, con c_0 e c_1 costanti. Imponendo le condizioni ai limiti, troviamo $y \equiv 0$.

Anche per $\lambda < 0$ c'è solo la soluzione banale. In effetti, l'integrale generale dell'equazione differenziale è $y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, con c_1 e c_2 arbitrarie. Imponendo le condizioni ai limiti, perveniamo al sistema

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ y(\pi) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$$

nelle incognite c_1 e c_2 . Essendo il determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \neq 0,$$

deve essere $c_1 = c_2 = 0$, cioè come detto $y \equiv 0$.

Consideriamo il caso $\lambda > 0$. L'integrale generale dell'equazione si scrive $y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$, con c_1 e c_2 arbitrarie. Esaminiamo le condizioni ai limiti. Chiaramente $y(0) = c_1 = 0$. Inoltre $y(\pi) = c_2 \sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$ e poiché stiamo cercando di soddisfare tale condizione con $c_2 \neq 0$, dobbiamo avere $\sin \sqrt{\lambda}\pi = 0$, vale a dire

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pertanto il problema ammette soluzioni non banali in corrispondenza dei valori

$$\lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Questi sono dunque gli autovalori del problema e, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, le autofunzioni associate a λ_n sono $y(x) = c \sin nx$, al variare di $c \neq 0$.

Nell'esempio discusso il problema ammette una successione di autovalori: questo, come vedremo, accade in generale. Un'altra proprietà che vale in generale è l'ortogonalità di autosoluzioni corrispondenti ad autovalori distinti. In effetti, le autosoluzioni $\sin nx$ sono a due a due ortogonali: se $n \neq m$, risulta

$$\int_0^\pi \sin nx \sin mx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \sin nx \sin mx \, dx = 0.$$

Precisamente, vale il seguente risultato

PROPOSIZIONE 4.2. *Supponiamo p, p', q, r funzioni reali continue in $[a, b]$. Se y_m e y_n sono autofunzioni del problema (4.2) associate agli autovalori λ_m e λ_n distinti, esse sono ortogonali rispetto al peso r , cioè risulta*

$$(4.5) \quad \int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) \, dx = 0.$$

Dim. La proprietà di ortogonalità segue subito dal fatto che \mathcal{L} è autoaggiunto. Invero, risultando $y_m, y_n \in X$, abbiamo

$$\lambda_m (r y_m, y_n) = (\mathcal{L} y_m, y_n) = (y_m, \mathcal{L} y_n) = \lambda_n (y_m, r y_n)$$

e quindi la tesi, essendo $\lambda_m \neq \lambda_n$.

OSSERVAZIONE 4.3. In casi particolari, possiamo concludere con l'ortogonalità anche indebolendo o modificando le condizioni ai limiti. Ripercorrendo la dimostrazione del lemma 2.1, vediamo quanto segue:

se $p(a) = 0$, possiamo rinunciare alla condizione nell'estremo a ;

se $p(b) = 0$, possiamo rinunciare alla condizione in b ;
 se $p(a) = p(b)$, l'ortogonalità vale se $W(a) = W(b)$, che certamente è soddisfatta nel caso delle condizioni $y(a) = y(b)$ e $y'(a) = y'(b)$.

Ci occupiamo adesso dell'esistenza di autovalori. Consideriamo il particolare problema di Sturm–Liouville

$$(4.6) \quad \begin{cases} -(py')' + qy = \lambda ry \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

che si chiama *problema di Picard*.

TEOREMA 4.4. *Se $p > 0$, $r > 0$ e $q \geq 0$, il problema (4.6) ammette una successione di autovalori, che sono positivi e semplici; possono essere ordinati in una successione crescente*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

e risulta $\lim_n \lambda_n = +\infty$. Le relative autofunzioni y_n , $n \in \mathbb{N}$, formano un sistema ortonormale completo. Inoltre, per ogni $n > 1$, la autofunzione y_n ha esattamente $n - 1$ zeri in $]a, b[$.

L'ortogonalità è intesa rispetto al peso r , cfr. (4.5).

Dim. Ci limitiamo a verificare alcune delle affermazioni contenute nell'enunciato.

• Gli autovalori sono positivi. Se λ è un autovalore e y una autofunzione associata, moltiplicando scalarmente ambo i membri dell'equazione per y , troviamo $(\mathcal{L}y, y) = \lambda(r y, y)$. Inoltre

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}y, y) &= \int_a^b [-(py')' + qy]y \, dx = -[py'y]_a^b + \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx \\ &= \int_a^b [p(y')^2 + qy^2] \, dx > 0 \end{aligned}$$

e

$$(r y, y) = \int_a^b r|y|^2 \, dx > 0,$$

dunque $\lambda > 0$.

• Gli autovalori sono semplici. Siano y_1 e y_2 autovettori relativi ad uno stesso autovalore λ ; dunque essi sono soluzioni di una medesima equazione omogenea. Il wronskiano

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

si annulla in a e in b , quindi, come è noto, è identicamente nullo sull'intervallo, $W \equiv 0$, e i due integrali sono linearmente dipendenti.

Il teorema 4.4 si applica al problema (4.4). In particolare, è chiaro che la autosoluzione $y_n(x) = \sin nx$ ha $n - 1$ zeri in $]0, \pi[$.

5. L'equazione di Bessel

Un esempio fondamentale è costituito dall'equazione di Bessel

$$(5.1) \quad y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

dove ν è un parametro, in generale complesso. Gli integrali di (5.1) si dicono *funzioni di Bessel* di parametro (o ordine) ν .

L'equazione si integra per serie: è possibile trovare un integrale del tipo

$$(5.2) \quad y(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k+\nu}.$$

Tralasciando i calcoli, da (5.2) troviamo l'integrale (Γ è la funzione gamma di Eulero, cfr. paragrafo IV.3):

$$(5.3) \quad J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu},$$

che si chiama *funzione di Bessel di prima specie*. La serie converge per ogni x e definisce $J_\nu(x)$ come prodotto di x^ν per una funzione trascendente intera.

Essendo $1/\Gamma$ funzione intera, J_ν è definita dalla (5.3), $\forall \nu$, e risolve l'equazione (5.1).

Per scrivere l'integrale generale, abbiamo bisogno di due integrali linearmente indipendenti. Osserviamo che l'equazione (5.1) non cambia mutando ν in $-\nu$ e quindi sarà integrale anche $J_{-\nu}$:

$$(5.4) \quad J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}.$$

Come detto ν è in generale complesso; noi ci limiteremo a ν reale, $\nu \geq 0$. Se ν non è intero, J_ν e $J_{-\nu}$ sono linearmente indipendenti; ad esempio (per $\nu > 0$), risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0} J_\nu(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} |J_{-\nu}(x)| = +\infty.$$

ESEMPIO 5.1. In base alla definizione

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = \frac{x}{2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} - \frac{x^6}{9216} + \dots \right\}.$$

Calcoliamo $J_{\frac{1}{2}}$ e $J_{-\frac{1}{2}}$. Immediatamente dalla definizione abbiamo

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1} k! \Gamma(k+1+1/2)} x^{2k+1}.$$

Pertanto, ricordando (IV.3.6),

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Analogamente

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! \Gamma(k+1/2)} x^{2k}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Nel caso che ν sia intero, i due integrali definiti da (5.3) e (5.4) risultano linearmente dipendenti.

5.1. Zeri delle funzioni di Bessel. Supporremo in questo paragrafo ν reale e $\nu > -1$. La funzione J_ν ha in $]0, +\infty[$ una successione di zeri

$$\xi_{\nu,1} < \xi_{\nu,2} < \cdots < \xi_{\nu,k} < \cdots$$

Le funzioni

$$(5.5) \quad x \in [0, 1] \mapsto J_\nu(\xi_{\nu,k}x), \quad k = 1, 2, \dots$$

posseggono una proprietà di ortogonalità che è contenuta nell'uguaglianza

$$(5.6) \quad \int_0^1 x J_\nu(\xi_{\nu,h}x) J_\nu(\xi_{\nu,k}x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } h \neq k \\ \frac{1}{2} [J'_\nu(\xi_{\nu,h})]^2, & \text{se } h = k \end{cases}$$

Tale proprietà si può ricondurre al risultato di ortogonalità tra autofunzioni di problemi ai limiti, relative ad autovalori distinti. Ci limitiamo a mostrare la prima delle (5.6). Invero, come si verifica facilmente, per ogni $\xi > 0$, la funzione $y(x) = J_\nu(\xi x)$ risolve la seguente equazione

$$(5.7) \quad y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\xi^2 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) y = 0,$$

ovvero, in forma autoaggiunta,

$$(5.8) \quad -(xy')' + \frac{\nu^2}{x} y = \xi^2 xy,$$

che è del tipo (4.1) con $p(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x$, $r(x) = x$ e $\lambda = \xi^2$. Notiamo che $p(0) = 0$, quindi possiamo usare l'osservazione 4.3. Fissati $\xi_1, \xi_2 > 0$ zeri distinti, consideriamo $y_1(x) = J_\nu(\xi_1 x)$ e $y_2(x) = J_\nu(\xi_2 x)$. Poiché $y_2(1) = 0 = y_1(1)$, se ξ_1 e ξ_2 sono zeri distinti, troviamo

$$\int_0^1 x y_1(x) y_2(x) dx = 0.$$

CAPITOLO XIII

Equazioni differenziali alle derivate parziali

1. Generalità

Un'equazione differenziale alle derivate parziali è un'equazione del tipo

$$(1.1) \quad F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = 0,$$

che esprime un legame (mediante la funzione F) tra la funzione di più variabili u , le variabili indipendenti x_1, \dots, x_n , ed alcune derivate di u . L'ordine massimo m di derivazione che compare nella (1.1) si chiama *ordine dell'equazione*. Una *soluzione classica* dell'equazione è una funzione u di classe C^m in un aperto di \mathbb{R}^n verificante l'equazione in ogni punto.

L'equazione si dice *lineare* se F dipende linearmente da u e da tutte le sue derivate. Un'equazione lineare del secondo ordine in due variabili si scrive

$$(1.2) \quad a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

con i coefficienti a_{ij} , b_i , c e il termine noto f funzioni di x e y .

Le più importanti equazioni a derivate parziali della fisica matematica sono di questo tipo. Pertanto è su di queste che ci concentreremo. Prevalentemente, considereremo equazioni in due variabili (1.2).

ESEMPIO 1.1. Le equazioni di Laplace e di Poisson sono

$$(1.3) \quad \Delta u = 0, \quad \Delta u = f,$$

dove

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

è l'operatore *Laplaciano*, spesso indicato anche con ∇^2 .

L'equazione delle onde (in due variabili) è

$$(1.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

L'equazione del calore (in una variabile spaziale) è

$$(1.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Nelle applicazioni, una questione fondamentale consiste nel ricercare una soluzione di un'equazione differenziale in un dominio D , soddisfacente ulteriori condizioni sulla frontiera di D . Tale questione si chiama *problema al contorno* per un'equazione alle

derivate parziali ed è di essa che ci occuperemo prevalentemente, per l'equazione (1.2). Il tipo di condizioni aggiuntive dipende dal segno del determinante

$$(1.6) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Su di esso si basa la *classificazione* delle equazioni differenziali del tipo (1.2).

$A > 0$ in D : l'equazione si dice *ellittica*;

$A < 0$ in D : l'equazione si dice *iperbolica*;

$A = 0$ in D : l'equazione si dice *parabolica*.

L'equazione si dice di tipo misto se in D si verificano almeno due delle condizioni precedenti. L'equazione di Laplace è ellittica; l'equazione delle onde è iperbolica; l'equazione del calore è parabolica.

2. Equazioni di Laplace e Poisson

Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n ; le soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

si dicono *funzioni armoniche* in Ω . Più generale è l'equazione di Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

essendo f continua in Ω . Per tale equazione consideriamo due problemi al contorno.

Sia D un dominio regolare (connesso).

Problema di Dirichlet. Cerchiamo $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^0(D)$ tale che

$$(2.1) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \mathring{D} \\ u = g & \text{su } FD \end{cases}$$

dove f continua in \mathring{D} e g continua su FD sono funzioni assegnate.

Problema di Neumann. Cerchiamo $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C^1(D)$ tale che

$$(2.2) \quad \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \mathring{D} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{su } FD \end{cases}$$

dove f continua in \mathring{D} e g continua su FD sono funzioni assegnate. ν è il versore normale a FD orientato verso l'esterno e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ è la derivata normale.

Le questioni che esamineremo sono: esistenza e unicità di soluzioni, dipendenza della soluzione dai dati f e g . Fondamentale per affrontare questi problemi è lo studio delle proprietà delle funzioni armoniche.

2.1. Funzioni armoniche. Sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ si dice armonica in Ω se il suo laplaciano è identicamente nullo nell'aperto, $\Delta u \equiv 0$. Come visto nella proposizione II.1.7, sono funzioni armoniche in due variabili parte reale e coefficiente dell'immaginario delle funzioni olomorfe.

Elenchiamo alcune proprietà fondamentali delle funzioni armoniche.

TEOREMA 2.1 (Indefinita derivabilità). *Ogni funzione armonica in Ω è di classe $C^\infty(\Omega)$.*

TEOREMA 2.2 (Proprietà di media). *Sia u armonica in Ω . Per ogni sfera chiusa $B = B(P_0, r)$ contenuta in Ω , risulta*

$$(2.3) \quad u(P_0) = \frac{1}{\text{mis } FB} \int_{FB} u(P) d\sigma.$$

Ad esempio, in due variabili B è il cerchio di raggio r e centro $P_0 = (x_0, y_0)$, $\gamma = FB$ è la circonferenza che lo delimita, di lunghezza $2\pi r$; l'uguaglianza (2.3) diventa

$$(2.4) \quad u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma} u(x, y) ds.$$

OSSERVAZIONE 2.3. (a) La proprietà di media sulle superfici sferiche espressa dalla (2.3) è equivalente alla versione sulle sfere piene

$$(2.5) \quad u(P_0) = \frac{1}{\text{mis } B} \int_B u(P) dP.$$

In effetti, la (2.5) segue dalla (2.3) integrando in coordinate sferiche; la (2.5) implica la (2.3) derivando rispetto al raggio r di B .

(b) La proprietà di media caratterizza le funzioni armoniche, nel senso che, se $u \in C^0(\Omega)$ verifica la (2.3) per ogni sfera chiusa $B \subset \Omega$, essa è armonica in Ω , cioè $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u \equiv 0$.

TEOREMA 2.4 (Principio del massimo). (a) *Ogni funzione non costante armonica in un aperto connesso è priva di estremi relativi.* (b) *Sia D un dominio limitato; una funzione $u \in C^2(\overset{\circ}{D}) \cap C^0(D)$ armonica in $\overset{\circ}{D}$ assume massimo e minimo sulla frontiera:*

$$\min_{FD} u \leq u(P) \leq \max_{FD} u, \quad \forall P \in D.$$

Dimostreremo queste proprietà in dimensione 2, ricavandole da noti risultati per le funzioni olomorfe. Per fare questo, dobbiamo invertire in un certo senso la proposizione II.1.7. Precisamente, cerchiamo di capire se, assegnata una funzione u armonica in un aperto Ω di \mathbb{R}^2 , esista una funzione f olomorfa in Ω di cui essa è la parte reale, cioè esista v definita in Ω tale che $f = u + jv$ sia olomorfa nell'aperto. Una v con tale proprietà sarà anch'essa armonica e si dirà *armonica coniugata* a u ; il legame tra u e v è costituito dalle condizioni di Cauchy-Riemann (II.1.6), quindi v ha le derivate parziali assegnate. È chiaro dunque che v deve essere una primitiva della forma differenziale

$$(2.6) \quad -u_y dx + u_x dy.$$

La condizione di chiusura della forma (2.6) si scrive $-u_{yy} = u_{xx}$ e quindi equivale alla armonicità di u . Dunque

PROPOSIZIONE 2.5. *In un aperto semplicemente connesso, ogni funzione armonica è dotata di armonica coniugata, cioè è la parte reale di una funzione olomorfa.*

La proposizione 2.5 consentirà di dedurre le menzionate proprietà per le funzioni armoniche a partire da quelle delle funzioni olomorfe. Un esempio è quello della indefinita derivabilità; per definizione, una funzione armonica è di classe C^2 , ma essendo la parte reale di una funzione olomorfa, essa risulta di classe C^∞ . Nel caso in cui Ω non sia semplicemente connesso, in generale non possiamo vedere una funzione armonica

come parte reale di una funzione olomorfa. Possiamo però fare questo *localmente*, cioè in un intorno del generico punto di Ω ; questo consente ugualmente di ottenere la regolarità C^∞ : per verificarla, basta ragionare sui cerchi (che evidentemente sono semplicemente connessi) contenuti in Ω . Ricordiamo la proprietà di media per le funzioni olomorfe, cfr. paragrafo IV.2. Sia f olomorfa in Ω ; per ogni cerchio chiuso $B(z_0, r) \subset \Omega$, detta $\gamma(r)$ la frontiera, risulta

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma(r)} f(z) ds.$$

Scrivendo $f = u + jv$ in forma algebrica, abbiamo

$$u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma(r)} [u(x, y) + jv(x, y)] ds$$

e la (2.4) si ottiene separando reale dall'immaginario. Mediante la proprietà di media, si dimostra il seguente

TEOREMA 2.6 (di Liouville). *Una funzione armonica in tutto lo spazio \mathbb{R}^n , che sia limitata superiormente o inferiormente, è costante.*

Dim. Ad esempio, supponiamo $u \geq 0$ armonica in \mathbb{R}^n e mostriamo che u è costante. Scelto $P_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente, per la proprietà di media abbiamo, $\forall r > 0$, (per comodità di notazioni, consideriamo il caso $n = 2$)

$$u(P_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{P_0 P} \leq r} u(P) dP \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{OP} \leq r + \overline{OP_0}} u(P) dP = \frac{\pi(r + \overline{OP_0})^2}{\pi r^2} u(O).$$

Passando al limite per $r \rightarrow +\infty$, troviamo $u(P_0) \leq u(O)$. Scambiando il ruolo di P_0 e O , otteniamo l'altra disuguaglianza $u(O) \leq u(P_0)$ e quindi $u(P_0) = u(O)$. La tesi segue per l'arbitrarietà di P_0 .

Il principio del massimo segue dalla proprietà di media. Ci limitiamo per semplicità ai punti di estremo assoluto: supponiamo P_0 punto di massimo assoluto di u in Ω e mostriamo che la funzione è costante. Cominciamo mostrando che u è costante su un qualsiasi cerchio chiuso $B = B(P_0, r)$ contenuto in Ω . Per la proprietà di media (2.5), abbiamo

$$u(P_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_B u(P) dP$$

e quindi

$$\int_B [u(P_0) - u(P)] dP = 0.$$

L'integrando è non-negativo, quindi esso è identicamente nullo, cioè $u \equiv u(P_0)$ su B . Il ragionamento precedente mostra che l'insieme

$$E = \{ P \in \Omega : u(P) = \max u \}$$

è aperto. Per la continuità di u , è aperto anche il complementare $\Omega - E$ e quindi, essendo Ω connesso e $E \neq \emptyset$ poiché $P_0 \in E$, risulta $E = \Omega$, cioè u è costante in Ω . Nel caso di un punto di minimo, si ragiona allo stesso modo.

L'altro enunciato segue poi da questo. Notiamo che per il teorema di Weierstrass u è dotata di minimo e di massimo in \bar{D} . Se uno di essi fosse assunto in un punto interno, u sarebbe costante (almeno se \bar{D} è connesso) e il risultato sarebbe banale. Si mostra che l'ipotesi di connessione non è necessaria.

OSSERVAZIONE 2.7. L'ipotesi di limitatezza di D è essenziale. Ad esempio, la funzione $u(x, y) = e^x \sin y$ è armonica nella striscia $D = \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, identicamente nulla sulla frontiera, ma

$$\inf_D u = -\infty, \quad \sup_D u = +\infty.$$

Dal principio del massimo segue subito un risultato di unicità per il problema (2.1) di Dirichlet relativo all'equazione di Poisson.

COROLLARIO 2.8. *Il problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson ha al più una soluzione.*

Dim. Se u_1 e u_2 sono soluzioni, la differenza $u = u_1 - u_2$ verifica $\Delta u = 0$, cioè è armonica, in \mathring{D} e $u \equiv 0$ su FD . Pertanto $u \equiv 0$ in D , cioè $u_1 \equiv u_2$.

Veniamo al problema di Neumann. Ricaviamo alcune identità integrali che vanno sotto il nome di *formule di Green*. Cominciamo con alcune uguaglianze ovvie; se $u \in C^2(D)$ e $v \in C^1(D)$, risulta

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u, \quad \operatorname{div}(v \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u.$$

Applichiamo il teorema della divergenza al campo vettoriale $v \nabla u$:

$$(2.7) \quad \int_D (\nabla u \cdot \nabla v + v \Delta u) dP = \int_{FD} v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

Questa è la *prima formula di Green*. Invertendo il ruolo di u e v (supposta anche quest'ultima di classe $C^2(D)$), abbiamo pure

$$\int_D (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) dP = \int_{FD} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma$$

e sottraendo

$$(2.8) \quad \int_D (v \Delta u - u \Delta v) dP = \int_{FD} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Questa è la *seconda formula di Green*. Consideriamo alcuni casi particolari delle formule precedenti. Poniamo $v \equiv 1$ in (2.7):

$$(2.9) \quad \int_D \Delta u dP = \int_{FD} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

Questa uguaglianza implica immediatamente la seguente *condizione di compatibilità per il problema di Neumann*:

COROLLARIO 2.9. *Siano $f \in C(D)$ e $g \in C(FD)$. Se il problema (2.2) ammette soluzione, vale l'uguaglianza*

$$(2.10) \quad \int_D f dP = \int_{FD} g d\sigma.$$

ESEMPIO 2.10. È facile verificare che $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ risolve nel cerchio D di centro O e raggio 1 il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 2 & \text{in } \mathring{D} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & \text{su } FD \end{cases}$$

Osserviamo esplicitamente che vale la condizione di compatibilità (2.10).

Prendiamo ora $v = u$ armonica in (2.7):

$$(2.11) \quad \int_D |\nabla u|^2 dP = \int_{FD} u \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma.$$

Se inoltre $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su FD , risulta

$$\int_D |\nabla u|^2 dP = 0$$

e quindi $\nabla u \equiv 0$ in D . È chiaro che, se u è soluzione del problema di Neumann (2.2), lo è pure $u + c$ per ogni costante c , essendo le condizioni del problema imposte sulle derivate, dunque non c'è unicità di soluzione. Le considerazioni precedenti forniscono subito un risultato di *unicità a meno di una costante*:

COROLLARIO 2.11. *Due soluzioni del problema di Neumann (2.2) differiscono per una costante.*

Dim. Ricordiamo che D è connesso. Se u_1 e u_2 risolvono entrambe il problema (2.2), la differenza $u = u_1 - u_2$ è armonica in \mathring{D} e soddisfa $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ su FD . Pertanto è costante.

2.2. Risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in un cerchio. Sia D il cerchio di centro l'origine O e raggio R . Consideriamo il problema di Dirichlet su D relativo all'equazione di Laplace:

$$(2.12) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathring{D} \\ u = g & \text{su } \gamma(R) = FD \end{cases}$$

dove g continua su $\gamma(R) = FD$ è una funzione assegnata. Costruiremo la soluzione mediante il *metodo di separazione delle variabili*. Adoperiamo le coordinate polari

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta$$

e definiamo

$$U(\rho, \vartheta) = u(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta).$$

Con abuso di notazioni, confonderemo u e U , cioè considereremo u funzione di ρ e ϑ . Il laplaciano si esprime in termini delle derivate rispetto a ρ e ϑ :

$$(2.13) \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{\rho^2} u_{\vartheta\vartheta} + u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho}.$$

L'equazione di Laplace si riscrive dunque come segue

$$(2.14) \quad u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u_{\vartheta\vartheta} = 0, \quad \rho < R, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Cerchiamo soluzioni del tipo

$$(2.15) \quad u(\rho, \vartheta) = v(\rho) w(\vartheta).$$

Una soluzione di questo tipo sarà detta *soluzione elementare*. L'equazione diviene

$$v''(\rho) w(\vartheta) + \frac{1}{\rho} v'(\rho) w(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2} v(\rho) w''(\vartheta) = 0,$$

ovvero

$$(2.16) \quad \frac{\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho)}{v(\rho)} = -\frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)}.$$

In questa uguaglianza, il primo membro dipende esclusivamente da ρ , il secondo membro dipende da ϑ . L'uguaglianza è possibile solo se i due membri sono uguali ad una stessa costante, che indichiamo con λ . Pertanto

$$(2.17) \quad \begin{cases} -\frac{w''(\vartheta)}{w(\vartheta)} = \lambda \\ \frac{\rho^2 v''(\rho) + \rho v'(\rho)}{v(\rho)} = \lambda \end{cases}$$

La prima equazione si riscrive $w'' + \lambda w = 0$. Cerchiamo soluzioni non identicamente nulle che abbiano un prolungamento periodico di periodo 2π . Per $\lambda < 0$ non ce ne sono. Per $\lambda = 0$, le soluzioni ammissibili sono le costanti. Per $\lambda > 0$, l'integrale generale è

$$w = a \cos \sqrt{\lambda} \vartheta + b \sin \sqrt{\lambda} \vartheta$$

ed è periodico di periodo 2π se e solo se $\sqrt{\lambda}$ è intero. Dunque $\lambda = n^2$, con $n \in \mathbb{N}_0$. In corrispondenza di tali valori di λ , troviamo le soluzioni

$$w = a \cos n\vartheta + b \sin n\vartheta.$$

Consideriamo ora la seconda equazione in (2.17) per i valori di λ trovati:

$$(2.18) \quad \rho^2 v'' + \rho v' - n^2 v = 0.$$

Si tratta di un'equazione di Eulero. Per $n = 0$, l'integrale generale è

$$v = a + b \log \rho.$$

Per $n > 0$, ponendo $v = \rho^\alpha$ nell'equazione, scriviamo l'equazione caratteristica

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0,$$

che ha le soluzioni $\alpha = \mp n$. Pertanto l'integrale generale è

$$v = a \rho^n + b \rho^{-n}.$$

Dunque, v è continua in 0 se e solo se $b = 0$. In definitiva, troviamo le soluzioni elementari

$$(2.19) \quad u_n(\rho, \vartheta) = \rho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Notiamo che

$$\rho^n \cos n\vartheta = \operatorname{Re} z^n = \operatorname{Re}(x + jy)^n, \quad \rho^n \sin n\vartheta = \operatorname{Im} z^n = \operatorname{Im}(x + jy)^n.$$

Dobbiamo soddisfare la condizione al contorno, che si riscrive

$$u(R, \vartheta) = g(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

(Con abuso di notazioni, consideriamo g dipendente da ϑ .) La condizione al contorno è verificata da una soluzione elementare solo per dati g particolari. Per g continua generica, possiamo pensare di soddisfarla con una somma finita o una serie di soluzioni elementari

$$(2.20) \quad u(\rho, \vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Se la serie converge in maniera opportuna, si può dimostrare che la somma è armonica per $\rho < R$ e continua per $\rho \leq R$. La condizione al contorno diventa

$$g(\vartheta) = \sum_{n=0}^{+\infty} R^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta).$$

Tale uguaglianza è possibile se e solo se a secondo membro compare la serie di Fourier di g , cioè

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt, \quad (2.21)$$

$$R^n a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos nt dt, \quad R^n b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin nt dt,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sotto l'ipotesi che g sia continua, è possibile giustificare il procedimento esposto e mostrare che esso fornisce la soluzione (unica) del problema. Inseriamo nella (2.20) i coefficienti dati dalle (2.21); essendo

$$\cos nt \cos n\vartheta + \sin nt \sin n\vartheta = \cos n(\vartheta - t),$$

troviamo

$$u(\rho, \vartheta) = a_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} g(t) \cos n(\vartheta - t) dt.$$

È possibile invertire sommatoria e integrale e scrivere

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \left[-1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n(\vartheta - t) \right] dt. \quad (2.22)$$

In effetti, la serie in (2.22) è totalmente convergente al variare di $t \in [0, 2\pi]$, per ogni ϑ e $\rho < R$ fissati, e quindi può essere integrata termine a termine.

Calcoliamo la somma della serie in (2.22). Il termine generale è la parte reale di $((\rho/R) e^{j(\vartheta-t)})^n$. La somma cercata è dunque la parte reale della somma della serie geometrica di ragione $(\rho/R) e^{j(\vartheta-t)}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{R} e^{j(\vartheta-t)}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{\rho}{R} e^{j(\vartheta-t)}}.$$

Essendo

$$-1 + 2 \frac{1}{1 - \frac{\rho}{R} e^{j(\vartheta-t)}} = \frac{R e^{jt} + \rho e^{j\vartheta}}{R e^{jt} - \rho e^{j\vartheta}} = \frac{R^2 + 2jR\rho \sin(\vartheta - t) - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2},$$

prendendo la parte reale e inserendola in (2.22), ricaviamo

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2R\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2} dt. \quad (2.23)$$

L'integrale a secondo membro della (2.23) si chiama *integrale di Poisson*. Detti $P \in \mathring{D}$ il punto di coordinate polari (ρ, ϑ) e $Q \in \gamma(R) = FD$ il punto di coordinate polari (R, t) , risulta $\overline{OQ}^2 = R^2$, $\overline{OP}^2 = \rho^2$,

$$\overline{PQ}^2 = |R e^{jt} - \rho e^{j\vartheta}|^2 = R^2 - 2R\rho \cos(\vartheta - t) + \rho^2,$$

quindi la (2.23) si riscrive

$$u(P) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\gamma(R)} \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{PQ^2} g(Q) ds(Q).$$

La funzione

$$u(P) = \begin{cases} \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{2\pi R} \int_{\gamma} \frac{g(Q)}{PQ^2} ds(Q), & P \in \mathring{D} \\ g(P), & P \in \gamma = FD \end{cases}$$

verifica $u \in C^2(\mathring{D}) \cap C(D)$ e $\Delta u \equiv 0$ in \mathring{D} , cioè è soluzione del problema.

La funzione

$$K(P, Q) = \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - \overline{OP}^2}{PQ^2}, \quad P \in \mathring{D}, \quad Q \in FD,$$

si chiama *nucleo di Poisson*.

3. L'equazione del calore

L'equazione del calore è

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = C \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

È un'equazione di tipo parabolico, che regge il fenomeno della conduzione del calore attraverso un mezzo isotropo omogeneo, in assenza di sorgente; il punto (x, y, z) varia in un dominio dello spazio \mathbb{R}^3 , mentre $t \geq 0$ è una variabile temporale. La funzione incognita $u = u(x, y, z, t)$ rappresenta la temperatura nel punto (x, y, z) all'istante t . $C > 0$ è una costante che dipende dal mezzo.

Noi considereremo una semplificazione unidimensionale della (3.1) di un filo sottile disposto lungo l'asse x . Le altre due dimensioni si immaginano trascurabili. Per semplicità, supponiamo inoltre che sia $C = 1$. Il caso generale si tratta analogamente, o si riconduce al caso in esame con un cambiamento di variabili. Dunque l'equazione è

$$(3.2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

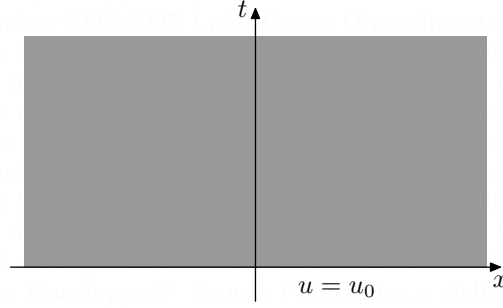
ESERCIZIO 3.1. Mostrare che, se $u = u(x, t)$ verifica (3.2), la funzione $v(x, t) = u(x, Ct)$ verifica

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

3.1. Il problema di Cauchy nel semipiano. Immaginiamo un filo illimitato, che occupi interamente l'asse x , e descriviamo come evolve la temperatura quando è assegnata in ogni punto all'istante iniziale. Dunque consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$(3.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

nel semipiano $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$.



Supponiamo $u(\cdot, t)$, $u_x(\cdot, t)$ e $u_{xx}(\cdot, t)$ sommabili su \mathbb{R} , $\forall t \geq 0$. Inoltre, per ogni $T > 0$, esista $f = f_T(x)$ sommabile su \mathbb{R} tale che

$$|u_t(x, t)| \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Quest'ultima ipotesi permetterà di derivare sotto il segno di integrale la funzione

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx$$

e altre espressioni simili.

Per risolvere il problema (3.3), usiamo la trasformazione di Fourier rispetto alla variabile x :

$$\mathcal{F}[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} f(x) dx, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Applicando la trasformazione ad ambo i membri dell'equazione $u_t = u_{xx}$, otteniamo

$$\mathcal{F}[u_t] = \mathcal{F}[u_{xx}].$$

Indichiamo con $\hat{u} = \hat{u}(\omega, t)$ la trasformata di $u(\cdot, t)$. Notiamo che

$$\mathcal{F}[u_t] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} u_t(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} u(x, t) dx$$

per l'ipotesi fatta. Consideriamo la variabile ω come parametro. Per la seconda formula fondamentale, vediamo che $\hat{u}(\omega, \cdot)$ risolve, $\forall \omega \in \mathbb{R}$, l'equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d}{dt} \hat{u}(\omega, t) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, t)$$

e quindi

$$\hat{u}(\omega, t) = c(\omega) e^{-\omega^2 t}.$$

La condizione iniziale implica $\hat{u}(\omega, 0) = \hat{u}_0(\omega)$, dunque

$$(3.4) \quad \hat{u}(\omega, t) = \hat{u}_0(\omega) e^{-\omega^2 t}.$$

Per ricavare u , dobbiamo antitrasformare. Tenendo presente che

$$(3.5) \quad e^{-\omega^2 t} = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right]$$

e ricordando che la trasformata della convoluzione è il prodotto delle trasformate, riconosciamo nel secondo membro della (3.4) la trasformata di

$$(3.6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{x^2}{4t}} * u_0(x) \right],$$

che fornisce la soluzione del problema.

La funzione

$$(3.7) \quad K(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

si chiama *soluzione fondamentale* dell'equazione del calore. La soluzione data dalla (3.6) si scrive

$$(3.8) \quad u(x, t) = K(x, t) * u_0(x).$$

OSSERVAZIONE 3.2. Risulta

$$(3.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, t) dx = 1, \quad \forall t > 0.$$

Questa uguaglianza è il caso $\omega = 0$ di (3.5). Inoltre

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

Ne segue, per il teorema sulle δ -successioni

$$\lim_{t \rightarrow 0+} K(x, t) = \delta(x)$$

e ancora

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0+} K(x, t) * u_0(x) = \delta(x) * u_0(x) = u_0(x).$$

4. L'equazione delle onde

Per semplicità, nel seguito ci limiteremo all'equazione delle onde in una variabile spaziale

$$(4.1) \quad u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Si tratta di un'equazione iperbolica. L'operatore differenziale lineare che a primo membro è applicato a u si chiama *operatore delle onde*, o *d'Alembertiano*, e si denota con \square . Notiamo per esso la "fattorizzazione"

$$(4.2) \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

In effetti, per $u \in C^2$, risulta

$$(u_t - u_x)_t + (u_t - u_x)_x = u_{tt} - u_{xx}.$$

Con il cambiamento di variabili

$$(4.3) \quad \xi = x + t, \quad \eta = x - t,$$

abbiamo

$$x = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad t = \frac{\xi - \eta}{2},$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

e (4.2) fornisce

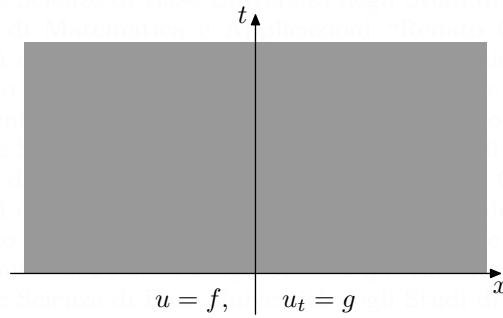
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.$$

4.1. Il problema di Cauchy nel semipiano. Consideriamo il seguente problema

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & \forall x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

nel semipiano

$$(4.5) \quad \{ (x, t) : x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \}.$$



Le funzioni f e g definite in \mathbb{R} sono assegnate. Esso si dice *problema di Cauchy*, poiché sono imposte le due condizioni iniziali. Usando il cambiamento di variabili (4.3), l'equazione si riscrive

$$(4.6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} u = 0.$$

(Con abuso di notazioni, consideriamo u funzione di ξ e η .) Notiamo che il semipiano (4.5) si trasforma nel semipiano del piano ξ, η

$$\{ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi \geq \eta \}.$$

Dalla (4.6) segue che $\frac{\partial}{\partial \eta} u$ è costante rispetto a ξ , $\frac{\partial}{\partial \eta} u = h(\eta)$ per un'opportuna funzione h . Integrando rispetto a η , otteniamo che u si esprime come somma di una funzione di ξ e una di η :

$$u(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta).$$

Tornando alle variabili x e t ,

$$(4.7) \quad u(x, t) = \Phi(x + t) + \Psi(x - t).$$

Questa è la soluzione generale dell'equazione in (4.4). Le condizioni iniziali divengono allora

$$(4.8) \quad u(x, 0) = \Phi(x) + \Psi(x) = f(x), \quad u_t(x, 0) = \Phi'(x) - \Psi'(x) = g(x).$$

Ricaviamo Φ e Ψ in termini di f e g da queste uguaglianze. Sia (x_0, t_0) un punto del semipiano (4.5), cioè $t_0 \geq 0$. Dalla seconda uguaglianza, integrando abbiamo

$$\int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} g(x) dx = \Phi(x_0 + t_0) - \Psi(x_0 + t_0) - \Phi(x_0 - t_0) + \Psi(x_0 - t_0),$$

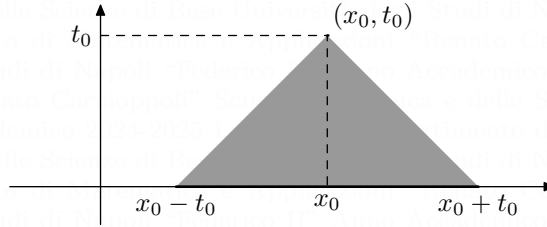
mentre dalla prima otteniamo

$$f(x_0 + t_0) + f(x_0 - t_0) = \Phi(x_0 + t_0) + \Psi(x_0 + t_0) + \Phi(x_0 - t_0) + \Psi(x_0 - t_0),$$

quindi, sommando e dividendo per 2, ricaviamo

$$(4.9) \quad \begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \Phi(x_0 + t_0) + \Psi(x_0 - t_0) \\ &= \frac{1}{2} [f(x_0 + t_0) + f(x_0 - t_0)] + \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} g(x) dx. \end{aligned}$$

Da questa formula si evince che $u(x_0, t_0)$ dipende solo da f e g sull'intervallo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ (non su tutto \mathbb{R}).

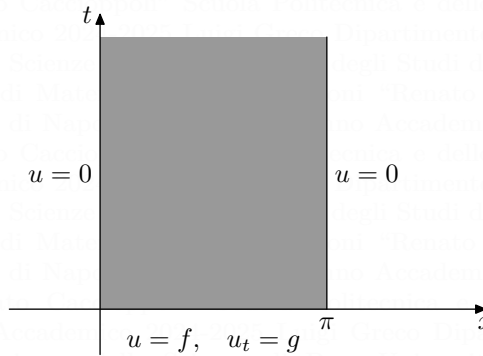


4.2. Problema misto nella semistriscia. Consideriamo il problema

$$(4.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \forall t \geq 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Le ultime due condizioni al contorno si interpretano come condizioni iniziali (all'istante $t = 0$), quindi (4.10) si dice problema misto di Cauchy–Dirichlet. La funzione incognita u è definita nella semistriscia

$$S = \{ (x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0 \}.$$



Moltiplichiamo per u_t ambo i membri dell'equazione:

$$(4.11) \quad 0 = -u_{xx} u_t + u_{tt} u_t = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_x)^2 - \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t).$$

Integriamo sul rettangolo $[0, \pi] \times [0, T]$, per un certo $T > 0$:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{2} \int_0^\pi dx \int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (u_t^2 + u_x^2) dt - \int_0^T dt \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} (u_x u_t) dx \\
 (4.12) \quad &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [|\nabla u(x, T)|^2 - |\nabla u(x, 0)|^2] dx \\
 &\quad - \int_0^T [u_x(\pi, t) u_t(\pi, t) - u_x(0, t) u_t(0, t)] dt,
 \end{aligned}$$

dove $\nabla u = (u_x, u_t)$ è il gradiente. Dalle condizioni al contorno $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $\forall t \geq 0$, derivando rispetto a t , abbiamo $u_t(0, t) = u_t(\pi, t) = 0$, $\forall t \geq 0$, quindi l'ultimo integrale in (4.12) è nullo. Inoltre, tenendo presenti le condizioni iniziali, abbiamo $u_t(x, 0) = g(x)$, $u_x(x, 0) = f'(x)$, e riscriviamo la (4.12) come segue:

$$(4.13) \quad \int_0^\pi [|u_x(x, T)|^2 + |u_t(x, T)|^2] dx = \int_0^\pi [|f'(x)|^2 + |g(x)|^2] dx.$$

Questa è detta *equazione dell'energia* e, data l'arbitrarietà di T , mostra che la quantità a primo membro è costante.

La (4.13) permette di mostrare l'unicità di soluzione. In effetti, se u_1 e u_2 risolvono (4.10), la differenza $u = u_1 - u_2$ soddisfa un problema analogo, con dati iniziali nulli; in tal caso, il secondo membro in (4.13) è nullo, cioè

$$(4.14) \quad \int_0^\pi [|u_x(x, T)|^2 + |u_t(x, T)|^2] dx = 0.$$

Per l'arbitrarietà di $T > 0$, (4.14) implica che u ha le derivate nulle nella semistriscia e quindi è costante; annullandosi nei punti $(0, t)$ e (π, t) , $\forall t > 0$, essa è identicamente nulla.

Per risolvere il problema (4.10), usiamo la trasformazione unilatera di Laplace rispetto alla variabile t (che per semplicità indichiamo con \mathcal{L}); poniamo

$$(4.15) \quad \varphi(x, s) = \mathcal{L}[u(x, \cdot)] = \int_0^{+\infty} e^{-st} u(x, t) dt$$

(supponendo la trasformabilità), dove s è complesso. Supponendo di poter derivare sotto il segno di integrale, abbiamo $\mathcal{L}[u_{xx}] = \varphi_{xx}$, mentre per la seconda formula fondamentale

$$\mathcal{L}[u_{tt}] = s^2 \varphi - s u(x, 0) - u_t(x, 0) = s^2 \varphi - s f(x) - g(x).$$

Pertanto, trasformando ambo i membri dell'equazione in (4.10), arriviamo all'equazione differenziale ordinaria per $\varphi(\cdot, s)$:

$$\varphi_{xx} = s^2 \varphi - s f(x) - g(x),$$

dove s figura come parametro. D'altra parte, dalle condizioni al contorno deduciamo

$$\varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0.$$

Dunque $\varphi(\cdot, s)$ risolve il seguente problema di Picard (cfr. Paragrafo XII.4)

$$(4.16) \quad \begin{cases} -\varphi_{xx} + s^2 \varphi = s f(x) + g(x) \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases}$$

Tale problema è risolubile per ogni f e g se e solo se il problema relativo all'equazione omogenea associata

$$(4.17) \quad \begin{cases} -\varphi_{xx} + s^2 \varphi = 0 \\ \varphi(0, s) = \varphi(\pi, s) = 0 \end{cases}$$

ha solo la soluzione banale, ovvero $-s^2$ non è autovalore, cioè $s \neq jn$, per un numero $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Dunque possiamo supporre $\operatorname{Re} s > 0$. Una volta risolto (4.16), per ricavare u bisogna antitrasformare, $u = \mathcal{L}^{-1}[\varphi(x, \cdot)]$.

ESERCIZIO 4.1. Verificare che, nel caso $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 0$, $\forall x \in [0, \pi]$, il procedimento esposto fornisce la soluzione

$$u(x, t) = \sin x \cos t = \frac{1}{2} [\sin(x+t) + \sin(x-t)].$$

CAPITOLO XIV

Riepilogo delle formule

1. \mathcal{Z} -trasformazione e \mathcal{Z} -trasformazione inversa

$\mathcal{Z}[a(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a(n)}{z^n}$	$\mathcal{Z}_u[a(n)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(n)}{z^n}$
$\mathcal{Z}[\alpha a(n) + \beta b(n)] = \alpha \mathcal{Z}[a(n)] + \beta \mathcal{Z}[b(n)]$	
$\mathcal{Z}[\delta(n)] = 1$	$\mathcal{Z}^{-1}[1] = \delta(n)$
$\mathcal{Z}[u(n)] = \frac{z}{z-1}$	$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right] = u(n)$
$\mathcal{Z}[\lambda^n a(n)](z) = \mathcal{Z}[a(n)](z/\lambda)$	$\mathcal{Z}^{-1}[f(z/\lambda)] = \lambda^n \mathcal{Z}^{-1}[f]$
$\mathcal{Z}[\lambda^n u(n)] = \frac{z}{z-\lambda}$	$\mathcal{Z}_u^{-1}\left[\frac{z}{z-\lambda}\right] = \lambda^n u(n)$
$\mathcal{Z}_u[\rho^n \cos n\vartheta] = z \frac{z - \rho \cos \vartheta}{z^2 - 2\rho z \cos \vartheta + \rho^2}$	
$\mathcal{Z}_u[\rho^n \sin n\vartheta] = z \frac{\rho \sin \vartheta}{z^2 - 2\rho z \cos \vartheta + \rho^2}$	

$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[z \frac{az + b}{z^2 + pz + q} \right] = q^{\frac{n}{2}} \left(a \cos n\vartheta + \frac{2b - ap}{\sqrt{4q - p^2}} \sin n\vartheta \right) u(n),$ $p^2 - 4q < 0, \quad \vartheta = \arccos \left(-\frac{p}{2\sqrt{q}} \right)$	
$\mathcal{Z}[a(n+k)] = z^k \mathcal{Z}[a(n)]$	$\mathcal{Z}^{-1}[z^k f(z)](n) = \mathcal{Z}^{-1}[f](n+k)$
$\mathcal{Z}_u[a(n+k)] = z^k \mathcal{Z}_u[a(n)] - a(0)z^k - \dots - a(k-1)z, \quad k \in \mathbb{N}$	
$\mathcal{Z}_u[na(n)] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}_u[a(n)]$	$\mathcal{Z}_u^{-1}[zf'(z)](n) = -n \mathcal{Z}_u^{-1}[f]$
$\mathcal{Z} \left[\lambda^{n-k} \binom{n-1}{k-1} u(n-k) \right] = \frac{1}{(z-\lambda)^k}$	
$\mathcal{Z}_u^{-1} \left[\frac{1}{(z-\lambda)^k} \right] = \lambda^{n-k} \binom{n-1}{k-1} u(n-k)$	
$\mathcal{Z}_u[\lambda^n a(n)] = \frac{a(0)z^k + a(1)\lambda z^{k-1} + \dots + a(k-1)\lambda^{k-1}z}{z^k - \lambda^k},$ $a(n) \text{ successione periodica di periodo } k, \quad \lambda \neq 0$	
$\mathcal{Z}[a(n) * b(n)] = \mathcal{Z}[a(n)] \cdot \mathcal{Z}[b(n)]$	$\mathcal{Z}^{-1}[f \cdot g] = \mathcal{Z}^{-1}[f] * \mathcal{Z}^{-1}[g]$

2. \mathcal{L} -trasformazione e \mathcal{L} -trasformazione inversa

$\mathcal{L}[x] = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$	$\mathcal{L}_u[x] = \mathcal{L}[xu] = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$
$\mathcal{L}[x(t)](s) = \mathcal{L}_u[x(-t)](-s) + \mathcal{L}_u[x(t)](s)$	
$\mathcal{L}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{L}[x] + \beta \mathcal{L}[y]$	
$\frac{d^k}{ds^k} \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[(-t)^k x(t)]$	$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{d^k}{ds^k} X(s) \right] = (-t)^k \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$
$\mathcal{L}[x^{(k)}(t)] = s^k X(s)$	
$\mathcal{L}_u[x^{(k)}(t)] = s^k X(s) - s^{k-1} x(0) - s^{k-2} x'(0) - \dots - x^{(k-1)}(0)$	

$\mathcal{L}_u[1] = \mathcal{L}[u] = \frac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$	$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = u(t)$
$\mathcal{L}[u(t) e^{s_0 t}] = \frac{1}{s - s_0}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$	$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s - s_0} \right] = u(t) e^{s_0 t}$
$\mathcal{L}_u[t^k e^{s_0 t}] = \frac{k!}{(s - s_0)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$	
$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{(s - s_0)^k} \right] = u(t) e^{s_0 t} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$	
$\mathcal{L}_u[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$	$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + a^2} \right] = u(t) \cos at$
$\mathcal{L}_u[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$	$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + a^2} \right] = \frac{1}{a} u(t) \sin at$
$\mathcal{L}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{s^2/4}, \quad s \in \mathbb{C}$	
$\mathcal{L}_u[x] = \frac{\mathcal{L}[x_0]}{1 - e^{-s\tau}}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$	
x funzione periodica di periodo τ , $x_0(t) = x(t) [u(t) - u(t - \tau)]$	
$\mathcal{L}_u^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)} e^{s_1 t} + \dots + \frac{P(s_n)}{Q'(s_n)} e^{s_n t}, \quad t \geq 0,$	
gli zeri di Q sono semplici s_1, \dots, s_n	

$\mathcal{L}[\overline{x(t)}] = \overline{X(s)}$	$\mathcal{L}[x(at)] = \frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$
$\mathcal{L}[x(t)e^{s_0 t}] = X(s - s_0)$	$\mathcal{L}[x(t - t_0)] = e^{-s t_0} X(s)$
$\mathcal{L}[x(t)u(t - t_0)] = e^{-s t_0} \mathcal{L}[x(t + t_0)u(t)]$	
$\mathcal{L}^{-1}[e^{-s t_0} X(s)](t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)](t - t_0)$	
$\mathcal{L}^{-1}[X(s - s_0)] = e^{s_0 t} \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$	
$\mathcal{L}[x * y] = \mathcal{L}[x] \cdot \mathcal{L}[y]$	$\mathcal{L}^{-1}[X \cdot Y] = \mathcal{L}^{-1}[X] * \mathcal{L}^{-1}[Y]$

$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}_u[x(t)] = 0$	
$x(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} x(t) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty} s X(s)$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} s > 0}} s X(s)$

3. \mathcal{F} -trasformazione

$\mathcal{F}[x] = \hat{x}(\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x \in L^1(\mathbb{R})$	
$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$	
$\mathcal{L}[x(t)](\sigma + j\omega) = \mathcal{F}[x(t) e^{-\sigma t}](\omega)$	$\mathcal{F}[\alpha x + \beta y] = \alpha \mathcal{F}[x] + \beta \mathcal{F}[y]$

$\mathcal{F}[x] = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad x \in L^2(\mathbb{R})$	
$\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$	$\ \mathcal{F}x\ _2^2 = 2\pi \ x\ _2^2$

$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle, \quad T \in \mathcal{S}', \varphi \in \mathcal{S}$	
$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$	$\mathcal{F}: \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}[\Pi(t/T)] = \frac{\sin(T\omega/2)}{\omega/2}$	$\mathcal{F}\left[\frac{\sin at}{t}\right] = \pi \Pi\left(\frac{\omega}{2a}\right)$
$\mathcal{F}[e^{-a t }] = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \quad a > 0$	$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2 + \omega^2}\right] = \frac{\pi}{a} e^{-a t }, \quad a > 0$
$\mathcal{F}[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}$	
$\mathcal{F}[\delta] = 1$	$\mathcal{F}[c] = 2\pi c \delta$
$\mathcal{F}[u] = \text{v.p.} \frac{1}{j\omega} + \pi \delta$	$\mathcal{F}[\text{sgn } t] = \text{v.p.} \frac{2}{j\omega}$
$\mathcal{F}\left[\text{v.p.} \frac{1}{t}\right] = -j\pi \text{sgn } \omega$	$\mathcal{F}[s_\tau] = \omega_0 s_{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$
$\mathcal{F}[\cos t] = \pi(\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1))$	$\mathcal{F}[\sin t] = \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - 1) - \delta(\omega + 1))$

$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) Y(t) dt$	
$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}[x(t)]$	$\mathcal{F}[x(t) e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0)$
$\mathcal{F}[x(t) \cos(\omega_0 t + \varphi)] = \frac{X(\omega - \omega_0) e^{j\varphi} + X(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi}}{2}$	
$\mathcal{F}[x(at)] = \frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$\mathcal{F}[\overline{x(t)}] = \overline{X(-\omega)}$
$\mathcal{F}[\mathcal{F}[x(t)]] = 2\pi x(-t)$	
$\mathcal{F}[x * y] = \mathcal{F}[x] \cdot \mathcal{F}[y]$	$\mathcal{F}[xy] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[x] * \mathcal{F}[y]$
$X^{(k)}(\omega) = \mathcal{F}[(-jt)^k x(t)]$	$\mathcal{F}[x^{(k)}(t)] = (j\omega)^k \mathcal{F}[x(t)]$
$X(\omega) = \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_0(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0)$	
$X(\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Y(\omega - k\omega_0)$	