

Università di Napoli *Federico II*

**Problemi  
di  
Meccanica Quantistica**

*a cura di*

*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

**N.B. Questa è una versione preliminare esclusivamente ad uso interno.  
È possibile che ci siano degli errori e gli autori saranno grati a chiunque li  
faccia notare.**

January 9, 2021

*Problemi di Meccanica Quantistica*

Capitolo I  
Formalismo Generale

*a cura di*

*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

## Problema I.1

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert infinito dimensionale, con un prodotto scalare che indichiamo con  $\langle \psi, \psi \rangle$ , per  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ . Siano inoltre  $A, B$  e  $C$  operatori lineari su  $\mathcal{H}$ , e  $\lambda$  e  $\lambda_n$  numeri complessi. Sia  $e_n$  una base di  $\mathcal{H}$ .

1. Mostrare che

$$\psi = \sum_n \psi_n e_n \quad (\text{I.1.1})$$

dove

$$\psi_n = \langle e_n, \psi \rangle \quad (\text{I.1.2})$$

Se  $\psi$  appartiene ad  $\mathcal{H}$ , come risulta la serie degli  $\psi_n$ ?

2. Mostrare che

$$\langle \psi, \phi \rangle = \sum_n \bar{\psi}_n \phi_n \quad (\text{I.1.3})$$

dove  $\bar{\psi}_n$  indica il complesso coniugato di  $\psi_n$ .

3. Sia  $A$  un operatore autoaggiunto limitato, e sia  $\hat{e}_n$  un'altra base ortogonale completa. Mostrare che

$$\sum_n \langle \hat{e}_n, A \hat{e}_n \rangle = \sum_n \langle e_n, A e_n \rangle \quad (\text{I.1.4})$$

Ovvero la quantità espressa in (I.1.4), che si chiama *traccia*, non dipende dalla base prescelta. È necessario fare altre assunzioni su  $A$ ?

4. Dimostrare che, quando esiste, la traccia è ciclica, ovvero, per esempio nel caso di tre operatori

$$\text{Tr}ABC = \text{Tr}BCA = \text{Tr}CAB \quad (\text{I.1.5})$$

Per i punti 3 e 4 assumere che gli operatori sono tali che le serie convergono sempre ove necessario.

### Soluzione del Problema

1. Dalla definizione stessa di spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ :

- $\mathcal{H}$  è uno spazio vettoriale con prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definito positivo, completo, separabile.

esiste dunque una base ortonormale che indichiamo con  $e_n$ . Vogliamo quindi dimostrare la (I.1.1). Essendo  $e_n$  una base, un generico vettore  $\psi$  può essere sviluppato:

$$\psi = \sum_n c_n e_n \quad (\text{I.1.6})$$

con gli  $c_n$ , generici coefficienti dello sviluppo, univocamente determinati. Ricordiamo che questo vuol dire che

$$\lim_k \left\| \psi - \sum_{n=1}^k c_n e_n \right\|^2 = 0 \quad (\text{I.1.7})$$

Valutiamo ora la norma della quantità (I.1.7):

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \psi - \sum_{n=1}^k c_n e_n \right), \left( \psi - \sum_{n=1}^k c_n e_n \right) \right\rangle &= \|\psi\|^2 - 2\text{Re} \sum_{n=1}^k c_n^* \psi_n + \sum_{n=1}^k |c_n|^2 \\ &= \|\psi\|^2 - \sum_{n=1}^k |\psi_n|^2 + \sum_{n=1}^k |\psi_n - c_n|^2 \end{aligned} \quad (\text{I.1.8})$$

quest'ultima relazione ammette minimo per  $c_n = \psi_n$ , essendo  $\|\psi\|$  e  $|\psi_n|$  fissati.

2. Basta usare la linearità del prodotto scalare:

$$\langle \psi, \phi \rangle = \left\langle \sum_n \psi_n e_n, \sum_m \phi_m e_m \right\rangle = \sum_{m,n} \bar{\psi}_n \phi_m \langle e_n, e_m \rangle = \sum_{n,m} \bar{\psi}_m \phi_n \delta_{mn} = \sum_n \bar{\psi}_n \phi_n \quad (\text{I.1.9})$$

3. È utile usare una notazione matriciale, definiamo quindi

$$A_{nm} = \langle e_n, A e_m \rangle \quad , \quad \hat{A}_{nm} = \langle \hat{e}_n, A \hat{e}_m \rangle \quad (\text{I.1.10})$$

Che l'operatore sia autoaggiunto significa che  $A_{nm} = \bar{A}_{mn}$ .

Tanto per cominciare bisogna assumere che la traccia di  $A$  esista in almeno una base. Operatori di questo tipo si dicono di *classe traccia*.

La prova dell'indipendenza della traccia dalla base procede in maniera identica al caso finito dimensionale, solo che stavolta dobbiamo prestare attenzione alla convergenza delle serie. Indichiamo con  $u_{nm}$  le componenti di  $\hat{e}_m$  nella base degli  $e_n$

$$u_{nm} = \langle e_n, \hat{e}_m \rangle \quad (\text{I.1.11})$$

Per cui  $e_n = \sum_m u_{nm} \hat{e}_m$ .

Notiamo ora la seguente proprietà delle  $u$ :

$$\langle \hat{e}_m, \hat{e}_k \rangle = \delta_{mk} = \sum_{np} \bar{u}_{nm} u_{pk} \langle e_m, e_p \rangle = \sum_m \bar{u}_{nm} u_{mk} \quad (\text{I.1.12})$$

Da cui segue:

$$\begin{aligned} \sum_n \hat{A}_{nn} &= \sum_n \left\langle \sum_m u_{mn} e_m, \sum_k A u_{kn} e_k \right\rangle \\ &= \sum_{nmk} \bar{u}_{mn} u_{kn} A_{mk} \\ &= \sum_{mk} A_{mk} \sum_n \bar{u}_{mn} u_{kn} \\ &= \sum_{mk} A_{mk} \delta_{mk} \\ &= \sum A_{nn} \end{aligned} \quad (\text{I.1.13})$$

★  $A$  deve essere tale che se  $\lim_n \phi_n = \phi$  allora risulta  $\lim_n \langle \phi_n, A\psi \rangle = \langle \phi, A\psi \rangle$ . Questa proprietà (chiamata debole continuità) è sempre soddisfatta per gli operatori limitati.

4. Con la notazione matriciale la ciclità della traccia si vede molto semplicemente con una sostituzione di indici, per esempio:

$$\text{Tr}ABC = \sum_{mnp} A_{mn} B_{np} C_{pm} = \sum_{npm} B_{np} C_{pm} A_{mn} = \text{Tr}BCA \quad (\text{I.1.14})$$

## Problema I.2

Sia  $\{f_n\}$  una base ortonormale in  $L_2(a, b)$  e  $P_n$  gli operatori di proiezione:

$$P_n g = \langle f_n, g \rangle f_n \quad (\text{I.2.1})$$

1. Si dimostri che  $P_n$  è lineare e autoaggiunto.
2. Si dimostri che

$$P_n P_m = \delta_{mn} P_n \quad (\text{I.2.2})$$

3. Si determinino autovalori e autofunzioni di  $P_n$ .

4. Se le  $\{f_n\}$  sono una base di autostati corrispondente ad un operatore  $A$  autoaggiunto con spettro non degenere, ovvero tale che  $Af_n = a_n f_n$ , con  $a_n \neq a_m$  se  $n \neq m$ .

- (a) Si dimostri che  $A = \sum_n a_n P_n$ .  
 (b) Si dimostri che  $[A, P_n] = 0$ .

### Soluzione del Problema

1. La linearità di  $P_n$  è una conseguenza immediata della linearità del prodotto scalare negli spazi di Hilbert:

$$P_n(g+h) = \langle f_n, g+h \rangle f_n = P_n g + P_n h \quad (\text{I.2.3})$$

L'operatore  $P_n^\dagger$  deve essere tale che

$$\langle h, P_n^\dagger g \rangle = \langle P_n h, g \rangle = \langle f_n, h \rangle^* \langle f_n, g \rangle \quad (\text{I.2.4})$$

ed infatti

$$\langle h, P_n g \rangle = \langle f_n, g \rangle \langle h, f_n \rangle = \langle f_n, h \rangle^* \langle f_n, g \rangle \quad (\text{I.2.5})$$

L'operatore è pertanto simmetrico. Dobbiamo allora dimostrare che il suo dominio è uguale al dominio del suo aggiunto. La cosa è una conseguenza del fatto che l'operatore è limitato, e pertanto il suo dominio è tutto lo spazio di Hilbert. La limitatezza si dimostra facilmente notando che, qualunque sia  $g$  di norma unitaria:

$$\|P_n g\| = |\langle f_n, g \rangle| \|f_n\| \leq \|g\| \|f_n\|^2 = 1 \quad (\text{I.2.6})$$

e quindi l'operatore è limitato ed il suo dominio è tutto lo spazio di Hilbert. Pertanto l'operatore è autoaggiunto.

★ Qual'è il codominio dell'operatore?

2. Per quanto riguarda il prodotto di due operatori:

$$\begin{aligned} P_n P_m g &= \langle f_n, g \rangle P_m f_n = \langle f_m, f_n \rangle \langle f_n, g \rangle f_m \\ &= \delta_{mn} \langle f_n, g \rangle f_m = \delta_{mn} P_n g \end{aligned} \quad (\text{I.2.7})$$

3. Troviamo ora lo spettro di  $P_n$  e le autofunzioni:

$$P_n \psi_p = p \psi_p \tag{I.2.8}$$

con  $\psi_p = \sum_m c^p_m f_m$ . Se ora applichiamo  $P_n$  a  $\psi_p$  otteniamo:

$$\begin{aligned} P_n \psi_p &= \sum_m P_n c^p_m f_m = \sum_m c^p_m \delta_{mn} f_n = c^p_n f_n \\ &= p \sum_m c^p_m f_m \end{aligned} \tag{I.2.9}$$

Da cui si evince immediatamente che c'è una soluzione con  $p = 1$  e  $\psi_1 = f_n$  ed infinite soluzioni con  $p = 0$  e  $c^0_n = 0$

★ Che fosse  $p = 1$  o  $p = 0$  si poteva stabilire immediatamente osservando che  $P_n^2 = P_n$ , e pertanto  $p^2 = p$ .

4. In generale per una  $\phi = \sum_n \phi_n f_n$  generica

(a)

$$A\phi = \sum_n \langle f_n, \phi \rangle A f_n = \sum_n a_n P_n \phi \tag{I.2.10}$$

(b) Applicando ora  $A$  e  $P_n$  ad una  $\phi$  generica otteniamo:

$$\begin{aligned} A P_n \phi &= \langle f_n, \phi \rangle A f_n = a_n \langle f_n, \phi \rangle f_n = a_n \phi_n f_n \\ P_n A \phi &= \sum_m P_n a_m \phi_m f_m = a_n \phi_n f_n \end{aligned} \tag{I.2.11}$$

★ A quale procedura sperimentale corrisponde il processo formale di applicare  $P_n$  a una generica  $\phi$ ?

### Problema I.3

1. Dimostrare che se l'operatore  $A$  è autoaggiunto i suoi autovalori sono reali.
2. E' vero che se gli autovalori di un operatore sono reali l'operatore è autoaggiunto?
3. È vero che se un operatore è simmetrico, ovvero uguale al suo aggiunto su una qualche intersezione dei due domini, allora è anche autoaggiunto?

Soluzione del Problema

1. E' sufficiente dimostrare che l'autovalore  $\lambda$ , corrispondente all'autofunzione  $\psi_\lambda$ , è uguale al suo complesso coniugato:

$$\langle \psi_\lambda, A\psi_\lambda \rangle = \lambda = \langle A^\dagger \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle = \lambda^* \quad (\text{I.3.1})$$

2. No. Si consideri per esempio su  $\ell_2$  l'operatore  $\mathbb{I} + B$  dove

$$B(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_1, 0, 0 \dots) . \quad (\text{I.3.2})$$

Questo operatore ha autovalori reali (e tutti uguali ad 1), ma non è neanche simmetrico.

3. No. Un operatore autoaggiunto non solo è simmetrico, ma in aggiunta il dominio su cui è definito è uguale al dominio su cui è definito l'aggiunto. Prendiamo, ad esempio, come spazio di Hilbert le funzioni a quadrato sommabile sull'intervallo  $[0, 1]$ , e come operatore il momento  $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$ .

Le autofunzioni del momento sono le funzioni del tipo

$$\psi_k = e^{\frac{ikx}{\hbar}} \quad (\text{I.3.3})$$

corrispondenti all'autovalore  $k$ . Si noti che  $k$  non deve necessariamente essere intero perché  $\psi_k$  sia autofunzione di  $p$ , né deve essere reale. Infatti le proprietà di  $p$  dipendono in maniera cruciale dal dominio, se per esempio prendiamo come dominio le funzioni  $C_2(]0, 1[)$ , allora  $p$  non è neanche simmetrico:

$$\begin{aligned} (\phi, p\psi) &= \int_0^1 \phi(x)^* \left( -i \frac{d}{dx} \psi(x) \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( -i \frac{d}{dx} \phi(x)^* \right) \psi(x) + \phi^*(1)\psi(1) - \phi^*(0)\psi(0) \end{aligned} \quad (\text{I.3.4})$$

Perché  $p$  sia simmetrico dobbiamo considerare i casi in cui i termini di bordo si annullano, per esempio potremmo considerare le funzioni che si annullano agli estremi (e sono differenziabili una volta) essere il dominio di  $p$ , in tal caso si vede l'equazione agli autovalori non ha soluzione.

Se il dominio di  $p$  sono le funzioni differenziabili una volta, il dominio di  $p^\dagger$  sono invece le funzioni che hanno prodotto scalare finito con le funzioni differenziabili, questi due insiemi non coincidono (non è difficile vedere che il secondo è molto più grande del primo). Se invece allarghiamo il dominio alle funzioni periodiche allora i domini di  $p$  e  $p^\dagger$  coincidono, e l'operatore è autoaggiunto.

★ Questa scelta non è unica, infatti avremmo potuto scegliere un dominio in cui le funzioni sono periodiche a meno di una fase. Anche in questo caso i termini di bordo sarebbero scomparsi dalla (I.3.4).

### Problema I.4

Sia  $A$  un operatore su uno spazio di Hilbert e siano  $e_k$  le sue autofunzioni corrispondenti agli autovalori  $\lambda_k$ . Si supponga inoltre che le  $\lambda_k$  siano tutto lo spettro dell'operatore.

1. Quali condizioni ci devono essere sugli  $e_k$  e  $\lambda_k$  perché  $A$  corrisponda ad un osservabile fisico?
2. Nel caso in cui  $A$  sia infatti un osservabile, qual'è il significato fisico della quantità

$$\langle e_k, \psi \rangle \tag{I.4.1}$$

dove  $\psi$  rappresenta uno stato fisico del sistema?

3. Supponiamo che  $A$  sia osservabile e che

$$\lambda_k = 1 \quad \text{oppure} \quad 0 \tag{I.4.2}$$

cioè che i soli autovalori possibili siano uno o zero. Che tipo di operatore è  $A$  in questo caso? Dare un esempio di operatore di questo tipo.

#### Soluzione del Problema

1. Perché  $A$  sia un osservabile esso deve essere un operatore autoaggiunto. In questo caso le  $e_k$  sono una base ed i  $\lambda_k$  sono tutti reali.  
 ★ *Si noti che questi operatori con spettro totalmente discreto non esauriscono l'insieme di tutti gli osservabili.*
2. La quantità  $\langle e_k, \psi \rangle$  rappresenta l'ampiezza di probabilità di trovare il sistema descritto da  $\psi$  nell'autostato di  $A$  descritto da  $e_k$ . Il suo modulo quadro è la probabilità (se la  $\psi$  è normalizzata).
3. In questo caso  $A$  è un operatore di proiezione, il cui significato fisico è di agire un qualche modo come *filtro*. Infatti, essendo  $A$  autoaggiunto le  $e_k$  sono una base in cui possiamo espandere un qualunque vettore  $\psi$  dello spazio di Hilbert:

$$\psi = \sum_k \psi_k e_k \tag{I.4.3}$$

mostriamo ora che  $A^2 = A$ :

$$\begin{aligned}
 A\psi &= \sum_k \lambda_k \psi_k e_k \\
 A^2\psi &= \sum_k (\lambda_k)^2 \psi_k e_k = A\psi
 \end{aligned}
 \tag{I.4.4}$$

dato che  $\lambda^2 = \lambda$ .

Per un esempio si veda il problema I.2

### Problema I.5

Siano  $A$  e  $B$  operatori autoaggiunti su un dominio comune, tali che anche  $AB$  e  $BA$  siano densamente definiti. Indichiamo con  $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi, A\psi \rangle$ , o in breve semplicemente come  $\langle A \rangle$ , se non si dà adito a confusione, il valore di aspettazione di  $A$  nello stato  $\psi$ , e con

$$(\Delta A)_\psi^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle
 \tag{I.5.1}$$

l'incertezza sul valore di  $A$  nello stato  $\psi$ .

1. Si verifichi che

$$(\Delta A)_\psi^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2
 \tag{I.5.2}$$

2. Si verifichi che

$$(\Delta A)_\psi = 0 \Leftrightarrow A\psi = a\psi, a \in \mathbb{R}
 \tag{I.5.3}$$

cioè l'incertezza su  $A$  è nulla se e solo se  $\psi$  è un autostato di  $A$ .

3. Se  $\psi$  appartiene al dominio comune, allora si verifichi che

$$(\Delta A)_\psi (\Delta B)_\psi \geq \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2}
 \tag{I.5.4}$$

Suggerimento: conviene definire per un generico  $A$ :  $\tilde{A} = A - \langle A \rangle$  e calcolare  $\|(\tilde{A} + i\lambda\tilde{B})\psi\|$ , con  $\lambda$  reale.

#### *Soluzione del Problema*

1. Questo è un calcolo immediato che usa semplicemente la linearità del prodotto scalare (e il fatto che  $\langle A \rangle$  è un numero che ovviamente commuta con  $A$ )

$$\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2
 \tag{I.5.5}$$

- Verifichiamo prima che  $(\Delta A)_\psi = 0 \Leftrightarrow A\psi = a\psi$ .

Ricordiamo che in uno spazio di Hilbert  $\|\phi\| = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ . Quindi ci basterà dimostrare che

$$\|(A - a)\psi\| = 0 \quad (\text{I.5.6})$$

dove con  $a$  indichiamo  $\langle A \rangle$ .

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= a \\ \langle A^2 \rangle &= \langle \psi, A^2\psi \rangle = a \langle \psi, A\psi \rangle = a^2 \\ \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 &= a^2 - a^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.5.7})$$

- Verifichiamo ora che  $(\Delta A)_\psi = 0 \Rightarrow A\psi = a\psi$ .

Questo si vede facilmente perché:

$$\langle (A - a)\psi, (A - a)\psi \rangle = \langle \psi, (A - a)^2\psi \rangle = (\Delta A)_\psi^2 = 0 \quad (\text{I.5.8})$$

2. Risulta  $(\Delta A)_\psi^2 = \langle \tilde{A}^2 \rangle$ . Calcoliamo allora la norma quadra di  $(\tilde{A} + i\lambda\tilde{B})\psi$ , con  $\lambda$  reale. La norma quadra sarà necessariamente un numero positivo.

$$\begin{aligned} \|(\tilde{A} + i\lambda\tilde{B})\psi\|^2 &= \langle (\tilde{A} - i\lambda\tilde{B})\psi, (\tilde{A} + i\lambda\tilde{B})\psi \rangle \\ &= \langle \tilde{A}^2 \rangle + i\lambda(\langle \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} \rangle) + \lambda^2 \langle \tilde{B}^2 \rangle \\ &= (\Delta A)_\psi^2 + i\lambda \langle [A, B] \rangle + \lambda^2 (\Delta B)_\psi^2 \end{aligned} \quad (\text{I.5.9})$$

Dove abbiamo usato il fatto che  $[\tilde{A}, \tilde{B}] = [A, B]$ . Notiamo ora che  $[A, B]$  è un operatore anti-hermitiano, e quindi possiamo porre

$$[A, B] = iC \quad (\text{I.5.10})$$

dove  $C$  è un operatore hermitiano.

Possiamo quindi riscrivere la (I.5.9), e dato che quest'ultima quantità deve essere maggiore di zero per ogni valore di  $\lambda$ , pertanto il suo discriminante deve essere minore di zero:

$$\langle C \rangle^2 - 4(\Delta A)_\psi^2 (\Delta B)_\psi^2 \leq 0 \quad (\text{I.5.11})$$

Da cui, segue che

$$(\Delta A)_\psi (\Delta B)_\psi \geq \frac{|\langle [A, B] \rangle|}{2} \quad (\text{I.5.12})$$

★ Un caso particolare di questa relazione, ove  $A$  e  $B$  siano la posizione ed il relativo momento coniugato di una particella, è il principio di indeterminazione di Heisenberg:

$$(\Delta p_x)_\psi (\Delta x)_\psi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{I.5.13})$$

### Problema I.6

Definiamo il correlatore di due operatori come:

$$\Gamma(A, B) = \frac{1}{2} \langle AB + BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \quad (\text{I.6.1})$$

1. Si provi che, se  $A$  e  $B$  sono autoaggiunti, allora  $\Gamma(A, B)$  è reale.
2. Si provi che

$$\Gamma(A, B) = \frac{1}{2} \langle \tilde{A} \tilde{B} + \tilde{B} \tilde{A} \rangle \quad (\text{I.6.2})$$

dove  $\tilde{A} = A - \langle A \rangle$ , ed analogamente per  $B$ .

3. Si provi che

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \Gamma^2(A, B) + \frac{1}{4} \langle [A, B] \rangle^2 \quad (\text{I.6.3})$$

#### Soluzione del Problema

★ Si noti che questo problema può esser visto come una dimostrazione alternativa del principio di indeterminazione.

1. Questa è una conseguenza immediata del fatto che, se  $A$  e  $B$  sono autoaggiunti, anche il loro anticommutatore  $AB + BA$  è autoaggiunto.
2. L'assunto si può dimostrare con un semplice calcolo notando che

$$\langle A \langle B \rangle \rangle = \langle A \rangle \langle B \rangle = \langle B \langle A \rangle \rangle \quad . \quad (\text{I.6.4})$$

Infatti

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \langle \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{A} \rangle = \\ & \frac{1}{2} (\langle AB - A\langle B \rangle - \langle A \rangle B + \langle A \rangle \langle B \rangle + BA - B\langle A \rangle - \langle B \rangle A + \langle B \rangle \langle A \rangle) \\ & = \frac{1}{2} \langle AB + BA \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.6.5})$$

3. Infine l'ultimo punto è una immediata conseguenza della diseguaglianza fra il prodotto delle norme di due vettori ed il loro prodotto scalare:

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2(\delta B)^2 &= \|\tilde{A}\|^2\|\tilde{B}\|^2 \geq |\langle \psi | \tilde{A} | \tilde{B} \psi \rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2} \langle \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{A} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} \rangle \right|^2 \\ &= \Gamma^2(A, B) + \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle|^2 \end{aligned} \quad (\text{I.6.6})$$

★ In meccanica statistica classica si può definire un analogo quantità che però soddisfa la diseguaglianza  $\Delta A \Delta B \geq \Gamma(A, B)$ . Il termine del commutatore è pertanto un effetto puramente quantistico, come ci si sarebbe potuti attendere.

### Problema I.7

Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi lungo una circonferenza di raggio  $r$  e non è soggetta ad altre forze.

Trovare i possibili valori dell'energia e le corrispondenti autofunzioni.

#### Soluzione del Problema

Questo problema ha una soluzione semplice ed immediata, ed una assai più sofisticata, ed a suo modo interessante.

Prima la soluzione semplice, quella per intenderci che si potrebbe fare in un esame a libri chiusi del terzo anno.

L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad , \quad (\text{I.7.1})$$

con  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Le autofunzioni periodiche sono le

$$\phi_n = e^{in\varphi} \quad (\text{I.7.2})$$

e si vede immediatamente che lo spettro è :

$$E_n^\alpha = \frac{\hbar^2}{2mr^2} n^2 \quad (\text{I.7.3})$$

e ci possiamo considerare soddisfatti.

Ma possiamo rivedere il problema con un livello di sofisticatezza maggiore. Da dove ricaviamo il fatto che le funzioni devono essere periodiche? Le funzioni a quadrato sommabile dello spazio di Hilbert non devono essere continue, e parlare di periodicità di una funzione non continua non sembra un concetto ben definito.

Infatti, a voler essere rigorosi dobbiamo preoccuparci dei domini di autoaggiuntezza degli operatori coinvolti. Per calcolare gli autovalori ed autofunzioni di  $H$  occorre determinare per prima cosa il dominio, e controllare che l'operatore sia autoaggiunto, o almeno essenzialmente autoaggiunto (ovvero ammetta un'unica estensione autoaggiunta) e nel caso determinare le estensioni autoaggiunte dell'operatore. Ciò è realizzato individuando i domini di essenziale autoaggiuntezza.

Siano  $\psi_1(\varphi)$  e  $\psi_2(\varphi)$  due funzioni appartenenti ad  $C^2([0, 2\pi]) \subset L_2([0, 2\pi])$ . Richiedendo che esse siano nel dominio di simmetria di  $H$ , otteniamo

$$\langle \psi_1 | H \psi_2 \rangle = \langle H \psi_1 | \psi_2 \rangle - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left( \psi_1^* \psi_2' - \psi_1'^* \psi_2 \right) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} . \quad (\text{I.7.4})$$

Indicando con  $\Psi_{1,2}$  i vettori(colonna):

$$\Psi_{1,2} = \left( \psi_{1,2}, \psi'_{1,2} \right) , \quad (\text{I.7.5})$$

il termine in parentesi della relazione precedente può essere riscritto come

$$\left( \psi_1^* \psi_2' - \psi_1'^* \psi_2 \right) = \Psi_1^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_2 . \quad (\text{I.7.6})$$

e quindi la (I.7.4) diviene:

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | H \psi_2 \rangle - \langle H \psi_1 | \psi_2 \rangle = \\ - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[ \Psi_1^\dagger(2\pi) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_2(2\pi) - \Psi_1^\dagger(0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_2(0) \right] . \end{aligned} \quad (\text{I.7.7})$$

Perché il termine in parentesi quadra si annulli occorre che esista un matrice  $A$  tale che

$$\Psi(2\pi) = A\Psi(0) , \quad (\text{I.7.8})$$

e tale che

$$A^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{I.7.9})$$

Le matrici che godono di questa proprietà sono le matrici unitarie

$$A = e^{i(\alpha + \sigma_2 \beta)} , \quad (\text{I.7.10})$$

dove  $\sigma_2$  è definita come:

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{I.7.11})$$

È possibile dimostrare che i domini per i quali vale la (I.7.8) e la (I.7.10) con  $\alpha$  e  $\beta$  fissati, sono i domini di essenziale autoaggiuntezza dell'operatore. Essendo tali domini individuati da due angoli, si dice che esiste una infinità  $U(1) \times U(1)$  di estensioni autoaggiunte.

Se ad esempio scegliamo  $\beta = 0$ , in questo dominio il problema agli autovalori ha per soluzione ( $n \in \mathbb{Z}$ )

$$\phi_n^\alpha(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \exp \left\{ +i \left( \frac{\alpha}{2\pi} + n \right) \varphi \right\} , \quad \text{con} \quad E_n^\alpha = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left( \frac{\alpha}{2\pi} + n \right)^2 . \quad (\text{I.7.12})$$

L'insieme delle funzioni  $\phi_n^\alpha(\varphi)$  forma, come è noto, una base ortonormale nello spazio di Hilbert  $L_2([0, 2\pi])$  cioè per ogni valore di  $\alpha$ , mentre due funzioni  $\phi_n^\alpha(\varphi)$  e  $\phi_m^\alpha(\varphi)$  non saranno in generale ortogonali tra loro.

★ *Le estensioni con un generico  $\alpha$  hanno un significato fisico. Le funzioni d'onda periodiche a meno di una fase corrispondono a particelle su un cerchio, in presenza di un solenoide indefinito percorso da corrente che passa all'interno del cerchio. La quantità  $\alpha$  è proporzionale al flusso totale del campo magnetico all'interno del cerchio (effetto Aharanov-Bohm).*

### Problema I.8

Si consideri una particella su un cerchio di lunghezza  $2\pi$  parametrizzato dalla posizione  $\varphi$ . Siano  $p_\varphi$  il suo momento,  $p_\varphi = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$ , e  $\Delta\varphi$  e  $\Delta p_\varphi$  le indeterminazioni.

Dall'osservazione che  $\varphi$  e  $p_\varphi$  sono entrambi operatori autoaggiunti e che il loro commutatore è  $[\varphi, p_\varphi] = i\hbar$  sembrerebbe che debba essere (vedi Problema I.5)

$$\Delta\varphi \Delta p_\varphi \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{I.8.1})$$

È però possibile costruire un pacchetto d'onda arbitrariamente piccato nello spazio dei momenti, quindi con  $\Delta p_\varphi$  arbitrariamente piccolo, mentre deve necessariamente essere  $\Delta\varphi \leq 2\pi$ .

Spiegare questo paradosso.

### Soluzione del Problema

Anche per  $p_\varphi$  vale quanto detto per  $H$  in un esercizio precedente. Domini di essenziale autoaggiuntezza per  $p_\varphi$  risultano infatti le funzioni  $C^1(0, 2\pi)$  con proprietà di periodicità (a meno di un fattore di fase)

$$\psi(2\pi) = e^{i\alpha}\psi(0) \quad . \quad (\text{I.8.2})$$

Tale proprietà si osserva provando la simmetria di  $p_\varphi$  su  $C^1(0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} (\Phi, p_\varphi \Psi) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \Phi(\varphi)^* i\hbar \Psi'(\varphi) \quad \text{Integrando per parti} \implies \\ &= - \int_0^{2\pi} (-i\hbar) d\varphi \Phi(\varphi)' \Psi(\varphi) + i\hbar \Phi^*(2\pi) \Psi(2\pi) - i\hbar \Phi^*(0) \Psi(0) \end{aligned} \quad (\text{I.8.3})$$

L'aver scelto l'azione di  $p_\varphi$  ed il suo dominio implica l'aver fissato  $p_\varphi$  univocamente.

Qualunque dominio si scelga per  $p_\varphi$ , preso un elemento  $\Psi$  di tale dominio  $\varphi\Psi$  non gode della (I.8.2), ovvero non appartiene al dominio di autoaggiuntezza di  $p_\varphi$ , quindi vengono meno le condizioni per la prova della (I.8.1).

## Problema I.9

Sia dato un generico operatore  $A$  che non dipende esplicitamente dal tempo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.9.1})$$

e che commuta con l'Hamiltoniana di un sistema.

Si dimostri che il valor medio di  $A$  non dipende dal tempo, indipendentemente dallo stato in cui si trova il sistema.

### Soluzione del Problema

In termini di equazioni il problema è semplicissimo, il valor medio di  $A$  è infatti:

$$\langle A \rangle_{\psi(t)} = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \quad (I.9.2)$$

$$= \langle \psi(0) | e^{\frac{i}{\hbar} H t} A e^{-\frac{i}{\hbar} H t} | \psi(0) \rangle \quad (I.9.3)$$

$$= \langle \psi(0) | A(t) | \psi(0) \rangle \quad (I.9.4)$$

$$= \langle \psi(0) | A | \psi(0) \rangle \quad (I.9.5)$$

Si vede immediatamente che l'ultima espressione è indipendente dal tempo. In altre parole, l'osservabile collegato ad  $A$  è una costante del moto.

★ Questo problema può essere visto come esempio della differenza fra la rappresentazione di Schrödinger e quella di Heisenberg.

Nell'equazione (I.9.2) è lo stato ad evolvere col tempo, mentre in (I.9.4) la dipendenza dal tempo è nell'operatore. Ovviamente le due rappresentazioni sono equivalenti, ed infatti il valore di aspettazione dell'operatore (che è una quantità misurabile) è lo stesso nei due casi.

### Problema I.10

Sia data una famiglia di operatori  $A_k$ , con  $k > 0$ , che verificano

$$H_k \equiv A_k^\dagger A_k - k^2 = A_{k+1} A_{k+1}^\dagger - (k+1)^2 \quad (I.10.1)$$

1. Dimostrare che se  $\lambda$  è autovalore di  $H_k$ , cioè  $H_k \psi = \lambda \psi$ , si ha anche

$$H_{k+1} \chi_+ = \lambda \chi_+ \quad \text{e} \quad H_{k-1} \chi_- = \lambda \chi_- \quad (I.10.2)$$

dove  $\chi_+ = A_{k+1}^\dagger \psi$  e  $\chi_- = A_k \psi$ .

2. Determinare l'autovalore più basso di  $H_k$  e dimostrare che  $H_k$  ha almeno  $n$  stati legati, dove  $n$  è l'intero tale che  $k - n > 0 \geq k - n - 1$ . A tal scopo si assuma che, per ogni  $k$  esista nello spazio di Hilbert un vettore  $\psi_{0(k)}$  tale che

$$A_k \psi_{0(k)} = 0 \quad . \quad (I.10.3)$$

3. Verificare che tali proprietà sono soddisfatte da  $A_k = (d/dx + k \tanh x)$  e ottenere la forma del potenziale.

## Soluzione del Problema

1. Supponendo  $\lambda$  autovalore di  $H_k$  di autovettore  $\psi$ , otteniamo

$$\begin{aligned}
 H_{k+1}\chi_+ &= \left[ A_{k+1}^\dagger A_{k+1} - (k+1)^2 \right] A_{k+1}^\dagger \psi \\
 &= A_{k+1}^\dagger \left[ A_{k+1} A_{k+1}^\dagger - (k+1)^2 \right] \psi \\
 &= A_{k+1}^\dagger H_k \psi = \lambda \chi_+
 \end{aligned} \tag{I.10.4}$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned}
 H_{k-1}\chi_- &= \left[ A_k A_k^\dagger - (k)^2 \right] A_k \psi \\
 &= A_k \left[ A_k^\dagger A_k - (k)^2 \right] \psi = A_k H_k \psi = \lambda \chi_-
 \end{aligned} \tag{I.10.5}$$

2. Al fine di calcolare l'autovalore più basso per  $H_k$ , osserviamo che l'operatore  $A_k^\dagger A_k$  è definito non negativo e quindi, ogni autovalore  $\lambda$  di  $H_k$  è tale che  $\lambda \geq -k^2$ .

L'ipotesi (I.10.3) sia soddisfatta per ogni  $k > 0$ , garantisce che l'autovalore più basso è proprio  $-k^2$ , in questo caso in virtù della (I.10.4), tutti i seguenti stati saranno autovettori di  $H_k$  di autovalori:

$$\begin{array}{ll}
 \psi_{0(k)} & -(k)^2 \\
 A_k^\dagger \psi_{0(k-1)} & -(k-1)^2 \\
 A_k^\dagger A_{k-1}^\dagger \psi_{0(k-2)} & -(k-2)^2 \\
 \dots & \\
 A_k^\dagger \dots A_{k-n+1}^\dagger \psi_{0(k-n)} & -(k-n)^2
 \end{array} \tag{I.10.6}$$

dove  $n$  è un intero tale che  $k-n > 0 \geq k-n-1$ . Tutti gli stati di (I.10.6) sono stati legati essendo l'energia degli stessi negativa.

3. Consideriamo la seguente forma per  $A_k$

$$A_k = \left( \frac{d}{dx} + k \tanh x \right) \quad . \tag{I.10.7}$$

In questo caso è facile vedere che

$$\begin{aligned}
 A_k^\dagger A_k - A_{k+1} A_{k+1}^\dagger &= \left( -\frac{d}{dx} + k \tanh x \right) \left( \frac{d}{dx} + k \tanh x \right) \\
 - \left( \frac{d}{dx} + (k+1) \tanh x \right) \left( -\frac{d}{dx} + (k+1) \tanh x \right) &= -(2k+1) \quad , \tag{I.10.8}
 \end{aligned}$$

e quindi la forma di  $A_k$  riportata in (I.10.8) soddisfa alla condizione riportata nella traccia. Inoltre è facile vedere che l'equazione (I.10.3) ammette sempre soluzione in  $L_2(\mathbb{R})$  per ogni  $k > 0$

$$\psi_{0(k)} = \frac{N}{\cosh^k x} \quad . \quad (\text{I.10.9})$$

Inoltre il potenziale che deriva dalla (I.10.7) è

$$V(x) = -\frac{k^2 + k}{\cosh^2 x} \quad . \quad (\text{I.10.10})$$

### Problema I.11

In meccanica classica un modo per descrivere un moto di un sistema è quello di usare variabili lagrangiane e momenti coniugati. In una dimensione, la posizione  $x(t)$  ed il momento  $p(t)$  descrivono parametricamente una curva nello spazio delle fasi  $x-p$ . Si dimostri, ad esempio, che tali curve sono ellissi nel caso di un oscillatore armonico unidimensionale.

In meccanica quantistica uno stato con ben definiti posizione e momento (dati con precisione arbitrariamente grande) non può esistere. Ciò nondimeno, E.P. Wigner nel 1932 introdusse la *trasformata*, che prende il suo nome, che applicata ad uno stato descritto da una funzione d'onda  $\psi$  risulta essere

$$W_\psi(x, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{\frac{2ipy}{\hbar}\right\} \psi^*(x+y)\psi(x-y) \quad . \quad (\text{I.11.1})$$

Dimostrare che tale funzione  $W_\psi$  gode delle seguenti due proprietà

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W_\psi(x, p) = |\psi(x)|^2 \quad (\text{I.11.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W_\psi(x, p) = |\tilde{\psi}(p)|^2 \quad (\text{I.11.3})$$

dove  $\tilde{\psi}(p)$  è la trasformata di Fourier di  $\psi(x)$ .

In virtù di tali proprietà, può  $W_\psi$  rappresentare una densità di probabilità nello spazio delle fasi  $x-p$ ?

#### Soluzione del Problema

Come è noto, lungo le soluzioni dell'equazioni del moto per un oscillatore armonico, è conservata l'energia

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad . \quad (\text{I.11.4})$$

Ogni legge oraria, caratterizzata da energia  $E$ , quindi, dovrà soddisfare la relazione

$$\frac{p^2}{p_0^2} + \frac{x^2}{x_0^2} = 1 \quad , \quad (\text{I.11.5})$$

dove  $p_0 = \sqrt{2mE}$  e  $x_0 = \sqrt{2E/(m\omega)}$ , che rappresenta un'ellisse di semiassi  $x_0$  e  $p_0$ .

Dalla definizione di trasformata di Wigner è facile osservare che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp W_{\psi}(x, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{\frac{2ipy}{\hbar}\right\} \psi^*(x+y)\psi(x-y) \\ &= \frac{2}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \delta\left(\frac{2y}{\hbar}\right) \exp\left\{\frac{2ipy}{\hbar}\right\} \psi^*(x+y)\psi(x-y) \\ &= |\psi(x)|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.11.6})$$

Allo stesso modo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx W_{\psi}(x, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp\left\{\frac{2ipy}{\hbar}\right\} \psi^*(x+y)\psi(x-y) \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_+ \exp\left\{\frac{ip\xi_+}{\hbar}\right\} \psi^*(\xi_+) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_- \exp\left\{\frac{-ip\xi_-}{\hbar}\right\} \psi(\xi_-) \\ &= \left|\tilde{\psi}(p)\right|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.11.7})$$

La funzione di Wigner, ha problemi a rappresentare una distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi, nel senso classico del termine, perchè non è definita positiva. Si calcoli ad esempio la trasformata di Wigner del primo stato eccitato dell'oscillatore armonico e si studi la sua positività . Tale caratteristica, a prima vista patologica, è del resto completamente ragionevole in virtù del principio di indeterminazione di Heisenberg.

## Problema I.12

Valutare la trasformata di Wigner per la funzione d'onda

$$\psi(x) = \frac{1}{(\pi a^2)^{1/4}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2a^2} + i\frac{p_0 x}{\hbar}\right\} \quad (\text{I.12.1})$$

e discuterne lo slargamento in  $x$  e  $p$ .

### Problema I.13

Consideriamo come stato quantico la sovrapposizione di due Gaussiane

$$\psi(x) = \exp\left\{-\frac{(x-x_1)^2}{2a^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x-x_2)^2}{2a^2}\right\} \quad (\text{I.13.1})$$

Dimostrare che la corrispondente trasformata di Wigner risulta

$$W_\psi \simeq \frac{1}{2}(W_1 + W_2) + \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{p^2 a^2}{\hbar^2} - \frac{x^2}{a^2}\right\} \cos\left[\frac{(x_2 - x_1)p}{\hbar}\right] \quad (\text{I.13.2})$$

### Problema I.14

Si consideri una particella il cui spazio degli stati sia generato dalla base ortonormale formata da tre vettori  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Si assuma che in questa base l'Hamiltoniana abbia la seguente forma ( $\alpha, \beta, \gamma$  costanti reali)

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \beta & 0 & \gamma \\ 0 & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{I.14.1})$$

Al tempo  $t = 0$  il sistema è nello stato  $\psi_1$ . Calcolare la probabilità che al tempo  $t > 0$  il sistema si trovi nello stato descritto dalla funzione  $\psi_3$ .

Si consideri inoltre l'osservabile descritto nella base dei vettori  $\psi_i$  dalla seguente matrice hermitiana ( $a$  essendo un reale positivo)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \quad (\text{I.14.2})$$

Calcolare il valore medio dell'osservabile  $A$  al tempo  $t = 0$  ed il suo andamento temporale.

*Soluzione del Problema*

Al fine di risolvere l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi(t) = H\psi(t) \quad , \quad (\text{I.14.3})$$

con la condizione iniziale  $\psi(t = 0) = \psi_1$ , occorre diagonalizzare  $H$ . Poiché  $H$  è simmetrica essa sarà diagonalizzabile, l'equazione da risolvere è allora

$$H\phi_i = E_i\phi_i \quad . \quad (\text{I.14.4})$$

Una volta risolta l'equazione (I.14.4) otteniamo i tre autovalori dell'energia  $E_i$  con  $i = 1, 2, 3$  e la matrice unitaria  $U_{ij}$  tale che

$$\psi_i = \sum_{j=1}^3 U_{ij}\phi_j \quad (\text{I.14.5})$$

La matrice  $U$  è unitaria,  $UU^\dagger = 1$ . Usando la decomposizione (I.14.5) è facile mostrare che lo stato  $\psi(t)$ , soluzione della Eq. (I.14.3) con la condizione iniziale  $\psi(0) = \psi_1$  è il seguente

$$\psi(t) = \sum_{n,j=1}^3 U_{1n}U_{jn}^* \exp\left\{-i\frac{E_n t}{\hbar}\right\} \psi_j \quad . \quad (\text{I.14.6})$$

Dalla (I.14.6) è facile vedere che la probabilità di trovare all'istante  $t > 0$  lo stato in  $\psi_3$  è

$$P(\psi = \psi_3, t > 0) = \left| \sum_{n=1}^3 U_{1n}U_{3n}^* \exp\left\{-i\frac{E_n t}{\hbar}\right\} \right|^2 \quad . \quad (\text{I.14.7})$$

Al fine di risolvere il problema applicando la formula (I.14.7), è necessario diagonalizzare innanzitutto la matrice Hamiltoniana. Ciò si fa trovando la soluzione dell'equazione:

$$\det \begin{vmatrix} \alpha - E & \beta & 0 \\ \beta & -E & \gamma \\ 0 & \gamma & \alpha - E \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (\text{I.14.8})$$

Gli autovalori  $E_i$  che si ottengono sono

$$\begin{aligned} E_1 &= \alpha \quad , \\ E_2 &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(\gamma^2 + \beta^2)}}{2} \quad , \\ E_3 &= \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4(\gamma^2 + \beta^2)}}{2} \quad , \end{aligned} \quad (\text{I.14.9})$$

ed i corrispondenti autovettori  $\phi_i$  risultano

$$\begin{aligned}\phi_1 &= N_1 [\gamma\psi_1 - \beta\psi_3] \quad , \\ \phi_2 &= N_2 \left[ -2\beta\psi_1 + \left( \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4(\beta^2 + \gamma^2)} \right) \psi_2 - 2\gamma\psi_3 \right] \quad , \\ \phi_3 &= N_3 \left[ -2\beta\psi_1 + \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(\beta^2 + \gamma^2)} \right) \psi_2 - 2\gamma\psi_3 \right] \quad , \quad (\text{I.14.10})\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}N_1 &= [\gamma^2 + \beta^2]^{-1/2} \quad , \\ N_2 &= \left[ 2 \left( \alpha^2 + 4\gamma^2 + 4\beta^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4(\beta^2 + \gamma^2)} \right) \right]^{-1/2} \quad , \\ N_3 &= \left[ 2 \left( \alpha^2 + 4\gamma^2 + 4\beta^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 4(\beta^2 + \gamma^2)} \right) \right]^{-1/2} \quad . \quad (\text{I.14.11})\end{aligned}$$

La matrice  $U_{ij}$  risulta allora

$$U_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma N_1 & -2\beta N_2 & -2\beta N_3 \\ 0 & N_2 \left( \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4(\beta^2 + \gamma^2)} \right) & N_3 \left( \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4(\beta^2 + \gamma^2)} \right) \\ -\beta N_1 & -2\gamma N_2 & -2\gamma N_3 \end{pmatrix} \quad (\text{I.14.12})$$

Usando infine l'espressione (I.14.12) e sostituendola nella (I.14.7) otteniamo l'espressione voluta.

Al fine di calcolare  $\langle A \rangle_t$  basta sostituire l'espressione (I.14.6) nel calcolo del valor medio. Si ottiene allora

$$\langle A \rangle_t = a \sum_{i,j=1}^3 \left( U_{1i} U_{1i}^* U_{1j} U_{1j}^* - U_{1i}^* U_{3i} U_{1j} U_{3j}^* \right) \exp \left\{ -i \frac{(E_j - E_i)t}{\hbar} \right\} \quad . \quad (\text{I.14.13})$$

Si può facilmente osservare che  $\langle A \rangle_0 = a$ .

### Problema I.15

Si consideri l'operatore

$$A\psi(x) = \cos(2x)\psi(x) \quad (\text{I.15.1})$$

che agisce sullo spazio di Hilbert per una particella su un cerchio di raggio unitario.

Si calcolino gli elementi di matrice  $A_{nm}$  nella base  $\psi_n$  di autofunzioni del momento.

# Capitolo II

## Problemi Unidimensionali

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

### Problema II.1

Si consideri una particella sulla retta descritta dalla funzione d'onda

$$\psi = N e^{-\frac{(x-x_0)^n}{2a^2} + i2k_0x + ik_1x} \quad (\text{II.1.1})$$

con  $x_0$ ,  $k_0$  e  $k_1$  costanti reali ed  $N$  costante di normalizzazione. Si calcoli il valor medio del momento  $p$  nei casi in cui  $n$  è pari. Si commneti il caso di  $nN$  dispari

## Problema II.2

Una particella di massa  $m$  si muove su una retta soggetta ad un potenziale  $U(x)$ . Il primo stato eccitato è descritto dalla funzione d'onda

$$\Psi_1 = x \Psi_0(x) \quad (\text{II.2.1})$$

appartenente all'autovalore  $E_1$  dell'energia. La funzione  $\Psi_0(x)$  rappresenta lo stato fondamentale appartenente all'autovalore  $E_0$ .

Determinare il potenziale  $U(x)$  come funzione di  $E_0$ , sapendo che esso si annulla per  $x = 0$ .

### Soluzione del Problema

Per definizione, le autofunzioni  $\Psi_0(x)$  e  $\Psi_1(x)$  soddisfano le equazioni

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_0(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [U(x) - E_0] \Psi_0(x) \quad (\text{II.2.2})$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \Psi_1(x) = \frac{2m}{\hbar^2} [U(x) - E_1] \Psi_1(x) \quad (\text{II.2.3})$$

Sapendo che per ipotesi  $\Psi_1(x) = x\Psi_0(x)$ , e che vale la relazione

$$\frac{d^2}{dx^2} [x\Psi_0(x)] = 2\frac{d}{dx} \Psi_0(x) + x\frac{d^2}{dx^2} \Psi_0(x) , \quad (\text{II.2.4})$$

sostituiamo la (II.2.4) nella (II.2.2). Quindi, tenendo conto della (II.2.2) si ottiene

$$\frac{d}{dx} \log [\Psi_0(x)] = -\frac{m}{\hbar^2} (E_1 - E_0)x \quad (\text{II.2.5})$$

Si noti che tale equazione ammette soluzione nello spazio di Hilbert  $L_2(R)$  in virtù dell'ipotesi  $E_1 > E_0$ . Risolvendo la (II.2.5) infatti otteniamo

$$\Psi_0(x) = N \exp \left\{ -\frac{m}{2\hbar^2} (E_1 - E_0)x^2 \right\} \quad (\text{II.2.6})$$

Sostituendo allora tale autofunzione nella Eq. (II.2.2) otteniamo

$$U(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\Psi_0(x)} \frac{d^2}{dx^2} \Psi_0(x) + E_0 = \left( \frac{3E_0 - E_1}{2} \right) + \frac{m}{2\hbar^2} (E_1 - E_0)^2 x^2 \quad (\text{II.2.7})$$

Se richiediamo inoltre che  $U(x)$  si annulli per  $x = 0$ , ciò fissa  $E_1 = 3E_0$  e quindi

$$U(x) = \frac{m}{\hbar^2} E_0^2 x^2 . \quad (\text{II.2.8})$$

### Problema II.3

Come semplice esempio di pacchetto d'onda, consideriamo la funzione

$$\phi(x) = \frac{1}{2\Delta k} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{ikx} dk \quad , \quad (\text{II.3.1})$$

che può essere vista come la sovrapposizione di onde piane  $e^{ikx}$  con differenti  $k$  appartenenti all'intervallo  $k \in [k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ .

1. Calcolare  $\phi(x)$  e dimostrare che

$$|\phi(x)|^2 = \frac{\sin^2(\Delta kx)}{(\Delta kx)^2} \quad (\text{II.3.2})$$

2. Definendo con  $\Delta x$  la larghezza della regione dove è per lo più concentrata  $|\phi(x)|^2$  (tale regione può essere definita come l'intervallo in  $x$  compreso tra i primi due zeri di  $|\phi(x)|^2$ ), mostrare che  $\Delta x \Delta k = 2\pi$ .
3. Che legame c'è tra questa relazione ed il principio d'indeterminazione?

#### Soluzione del Problema

1. Dalla definizione di  $\phi(x)$  si ha

$$\phi(x) = \frac{1}{2\Delta k} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{ikx} dk = e^{ik_0 x} \frac{\sin(\Delta kx)}{(\Delta kx)} \quad (\text{II.3.3})$$

da cui segue il risultato riportato al punto 1. della traccia.

2. Definendo  $\Delta x$  come l'intervallo in  $x$  compreso tra i primi due zeri di  $|\phi(x)|^2$ , dalla Eq.(II.3.3) otteniamo  $\Delta x = 2\pi/\Delta k$  e quindi  $\Delta x \Delta k = 2\pi$ .
3. Per interpretare la relazione  $\Delta x \Delta k = 2\pi$  basta osservare che la funzione  $\phi(x)$ , dalla sua definizione, ha come trasformata di Fourier (a meno di una costante moltiplicativa) la funzione

$$\tilde{\phi}(k) = \chi_{[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]}(k) \quad , \quad (\text{II.3.4})$$

dove  $\chi_{[X]}$  è la funzione caratteristica dell'insieme  $X$ . Da questa osservazione segue che  $\Delta k$ , che rappresenta la larghezza dell'intervallo in cui sono contenute le frequenze ( $k$ ) che contribuiscono al pacchetto d'onda  $\phi(x)$ , è proprio l'indeterminazione che c'è su una eventuale misura di  $k$ . Quindi, la relazione  $\Delta x \Delta k = 2\pi$  è proprio il principio di indeterminazione.

### Problema II.4

Un semplice esempio di pacchetto d'onda dipendente dal tempo è fornito dalla sovrapposizione di onde con frequenza proporzionale al numero d'onda:  $\omega = ck$ . La luce che propaga nel vuoto realizza una tale situazione. Consideriamo quindi il pacchetto d'onda (limitandoci al caso ad una dimensione, essendo il problema isotropo)

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2\Delta k} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} e^{ik(x-ct)} dk \quad . \quad (\text{II.4.1})$$

1. Calcolare  $\phi(x, t)$  e dimostrare che

$$|\phi(x, t)|^2 = \frac{\sin^2(\Delta k(x-ct))}{[\Delta k(x-ct)]^2} \quad (\text{II.4.2})$$

2. Per quale valore della coordinata  $x$  è fissato il massimo di  $|\phi(x, t)|^2$  a  $t$  assegnato?
3. La forma di  $|\phi(x, t)|^2$  cambia durante la propagazione?
4. Cosa cambia nel caso che il pacchetto d'onda sia propagato dall'equazione di Schrödinger?

#### Soluzione del Problema

1. Come nell'esercizio precedente, in questo caso si ha  $\phi(x-ct)$

$$\phi(x-ct) = e^{ik_0(x-ct)} \frac{\sin(\Delta k(x-ct))}{(\Delta k(x-ct))} \quad (\text{II.4.3})$$

da cui segue il risultato riportato al punto 1. della traccia.

2. Il massimo per  $|\phi(x, t)|^2$  si ottiene per  $x-ct = 0$  che quindi rappresenta al variare del tempo il modo in cui il pacchetto d'onda propaga  $x_{max} = ct$ .
3. Dall'espressione del pacchetto d'onda  $|\phi(x, t)|^2$  si vede chiaramente che la sua forma non varia nel tempo, tale caratteristica è conseguenza della linearità della relazione di dispersione,  $\omega = ck$ .
4. nel caso dell'equazione di Schrödinger la relazione di dispersione non è più lineare:  $\omega^2 = k^2$ , ma la relazione che si può dedurre dall'equazione di Schrödinger per la particella libera:

$$\omega = \hbar |\vec{k}| \quad (\text{II.4.4})$$

e pertanto in questo caso il pacchetto d'onda si propagherà senza mantenere la forma originale, ma slargandosi.

## Problema II.5

Si consideri un sistema quantistico unidimensionale in presenza del potenziale  $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ -V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & |x| \leq a \end{cases} \quad (\text{II.5.1})$$

dove  $m$  è la massa della particella e  $V_0 > 0$ .

Si considerino le funzioni d'onda  $\Psi_{\pm}(x)$  che per  $|x| \leq a$  hanno la forma seguente

$$\Psi_{\pm}(x) = N_{\pm} \exp\left(\pm \frac{x^2}{2x_0^2}\right) \quad (\text{II.5.2})$$

(dove  $N_{\pm}$  è una costante di normalizzazione da determinare).

1. Dimostrare che la funzione d'onda  $\Psi_+(x)$  non può essere l'autofunzione di uno stato legato ( $E < 0$ ) del sistema mentre la funzione d'onda  $\Psi_-(x)$  lo può, per un valore ben definito di  $x_0$  e se  $V_0$  ed  $a$  soddisfano una opportuna condizione.
2. Calcolare approssimativamente il valore dell'energia dello stato legato e la funzione d'onda completa (a meno della costante  $N$ ).
3. Per  $x_0 \gg a$ , determinare all'ordine  $O(x_0^{-2})$ , il rapporto tra le probabilità che la particella sia dentro la buca e la probabilità che sia fuori.

*Soluzione del Problema*

1. Affinchè  $\Psi_{\pm}(x)$  sia autostato legato di  $H$ , occorre che per  $|x| \leq a$  soddisfi l'equazione

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + |E| - V_0 \right] \Psi_{\pm}(x) = 0 \quad . \quad (\text{II.5.3})$$

Sostituendo in (II.5.3) le espressioni date nella traccia per  $\Psi_{\pm}(x)$ , otteniamo le seguenti relazioni che debbono essere soddisfatte

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{\hbar}{m\omega} \quad , \\ V_0 &= |E| \mp \frac{\hbar\omega}{2} \geq 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.5.4})$$

Affinchè  $\Psi_{\pm}(x)$  sia autostato anche per  $|x| > a$ , occorre che soddisfi una equazione analoga alla (II.5.3), ma con potenziale nullo. La forma di  $\Psi_{\pm}(x)$ , così determinata, dovrà essere tale da produrre una funzione d'onda complessiva, continua

con la sua derivata prima in  $x = \pm a$ . La proprietà di parità di  $\Psi_{\pm}(x)$  comunque, permette di studiare il solo punto  $x = a$ , avendo scelto per  $\Psi_{\pm}(x)$  con  $|x| > a$  una funzione pari ed a quadrato sommabile. La forma opportuna per  $\Psi_{\pm}(x)$  risulta infatti

$$\Psi_{\pm}(x) = \begin{cases} N_{\pm} \exp\left(\pm \frac{x^2}{2x_0^2}\right) & |x| \leq a \\ A_{\pm} \exp(-k|x|) & |x| > a \end{cases}, \quad (\text{II.5.5})$$

dove  $k = \sqrt{(2m|E|)/\hbar^2}$ . Imponendo la condizione di continuità di  $\Psi_{\pm}(x)$  e della sua derivata prima in  $x = a$  otteniamo

$$\begin{aligned} N_{\pm} \exp\left(\pm \frac{a^2}{2x_0^2}\right) - A_{\pm} \exp(-ka) &= 0 \\ N_{\pm} \left(\pm \frac{a}{x_0^2}\right) \exp\left(\pm \frac{a^2}{2x_0^2}\right) + A_{\pm} k \exp(-ka) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.5.6})$$

Una soluzione non banale per i coefficienti  $N_{\pm}$  e  $A_{\pm}$  la si ottiene annullando il determinante della matrice dei coefficienti, che corrisponde alla relazione

$$k \pm \frac{a}{x_0^2} = 0 \quad (\text{II.5.7})$$

Come è evidente dalla (II.5.7), tale condizione può essere verificata solo nel caso di  $\Psi_{-}(x)$ . Per  $\Psi_{+}(x)$  infatti, la (II.5.7) non ha soluzione.

Nel caso di  $\Psi_{-}(x)$  si ha

$$|E| = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 \quad (\text{II.5.8})$$

Da cui, sostituendo nella (II.5.4) otteniamo la relazione da verificare che lega  $V_0$  ad  $a$

$$V_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 + \frac{\hbar\omega}{2} \quad (\text{II.5.9})$$

2. Nel caso dunque vengano verificate tutte le condizioni suddette, in funzione di  $a$ , l'autovalore dell'energia risulta  $E = -m\omega^2 a^2/2$  e l'autovettore  $\Psi_{-}(x)$  corrispondente risulta essere

$$\Psi_{-}(x) = N \begin{cases} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) & |x| \leq a \\ \exp\left(-\frac{m\omega a^2}{2\hbar}\right) \exp\left(-(|x| - a)\frac{m\omega a}{\hbar}\right) & |x| > a \end{cases} \quad (\text{II.5.10})$$

3. Il limite riportato nella traccia, data l'espressione di  $x_0^2 = \hbar/(m\omega)$ , corrisponde a prendere  $m\omega a^2/\hbar \ll 1$ . Sviluppando l'espressione della  $|\Psi_{-}(x)|^2$  al primo ordine nel suddetto parametro di sviluppo, la probabilità che la particella sia all'interno risulta

$$P_{int} = \int_{-a}^a dx |\Psi_{-}(x)|^2 \simeq N^2 \left(2a - \frac{2m\omega a^3}{3\hbar}\right) \quad (\text{II.5.11})$$

La probabilità che la particella si trovi all'esterno, può essere calcolata dalla forma di  $|\Psi_-(x)|^2$  e risulta

$$P_{ext} = 2 \int_a^\infty dx |\Psi_-(x)|^2 = N^2 \exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right) \frac{\hbar}{m\omega a} \quad . \quad (\text{II.5.12})$$

Facendo il rapporto tra la (II.5.11) e la espansione al primo ordine della (II.5.12) otteniamo

$$\frac{P_{int}}{P_{ext}} \simeq \frac{2m\omega a^2}{\hbar} \left[1 - \frac{m\omega a^2}{3\hbar}\right] \quad . \quad (\text{II.5.13})$$

## Problema II.6

Una particella che si muove sulla retta si trova in presenza di un potenziale del tipo delta di Dirac, ovvero

$$\langle V \rangle_\psi = -\lambda |\psi(0)|^2 \quad (\text{II.6.1})$$

per cui possiamo simbolicamente scrivere

$$H = \frac{p^2}{2m} - \lambda \delta(x) \quad (\text{II.6.2})$$

con  $\lambda$  una costante reale.

Si trovi se ci sono stati legati, e (se questi esistono) le loro energie.

(Suggerimento: Il problema si risolve più facilmente nello spazio dei momenti.)

## Problema II.7

Una particella di massa  $m$  è sottoposta ad un potenziale unidimensionale

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{K}{2a} & |x| < a \\ 0 & |x| \geq a \end{cases} \quad (\text{II.7.1})$$

con ( $a, K$  costanti positive).

Determinare l'energia e le autofunzioni che descrivono stati legati del sistema nel limite  $a \rightarrow 0$ .

### Soluzione del Problema

Come nei casi precedenti, indichiamo il generico autostato dell'energia  $\psi_E(x)$  come

$$\psi_E(x) \equiv \begin{cases} \psi_E^I(x) & x < -a \\ \psi_E^{II}(x) & -a \leq x \leq a \\ \psi_E^{III}(x) & x > a \end{cases} \quad . \quad (\text{II.7.2})$$

Dal momento che siamo interessati ai soli stati legati del sistema, possiamo limitarci in questo caso a ricercare autovettori a cui corrispondano autovalori negativi dell'energia:  $0 > E = -|E|$ . In particolare, in maniera del tutto analoga ai casi già trattati è possibile far vedere che non vi sono autostati propri od impropri per  $E \leq -K/(2a)$ . L'equazione differenziale da risolvere è allora

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + |E| \right] \psi_E(x) = 0 \quad . \quad (\text{II.7.3})$$

Sostituendo l'espressione (II.7.2) nella (II.7.3) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_E^I(x)}{dx^2} - k^2 \psi_E^I(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \psi_E^{II}(x)}{dx^2} + k_1^2 \psi_E^{II}(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \psi_E^{III}(x)}{dx^2} - k^2 \psi_E^{III}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.7.4})$$

dove

$$k^2 = \frac{2m|E|}{\hbar^2} \quad , \quad k_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left( \frac{K}{2a} - |E| \right) \quad . \quad (\text{II.7.5})$$

La soluzione del sistema (II.7.4) con la condizione di crescita algebrica è

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \psi_E^I(x) = A e^{kx} \\ \psi_E^{II}(x) = B e^{ik_1x} + C e^{-ik_1x} \\ \psi_E^{III}(x) = D e^{-kx} \end{cases} \quad . \quad (\text{II.7.6})$$

Imponendo le condizioni di continuità della funzione  $\psi_E(x)$  e della sua derivata prima in  $x = -a$  ed  $a$  otteniamo

$$\begin{aligned} A e^{-ka} &= B e^{-ik_1a} + C e^{ik_1a} \\ A k e^{-ka} &= i k_1 (B e^{-ik_1a} - C e^{ik_1a}) \\ D e^{-ka} &= B e^{ik_1a} + C e^{-ik_1a} \\ -D k e^{-ka} &= -i k_1 (B e^{ik_1a} - C e^{-ik_1a}) \end{aligned} \quad (\text{II.7.7})$$

Il sistema (II.7.7) ammette soluzione non banale se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti si annulla. Tale condizione diventa

$$\left[ (k_1^2 - k^2) \sin(2k_1a) - 2kk_1 \cos(2k_1a) \right] = 0 \quad . \quad (\text{II.7.8})$$

Ricordando che nella (II.7.5) sia  $k$  che  $k_1$  sono funzioni di  $|E|$ , si vede immediatamente che l'equazione precedente ammette sempre soluzione in funzione di  $|E|$ . In particolare nel limite  $a \rightarrow 0$  la (II.7.8) diventa

$$|E| = \frac{mK^2}{2\hbar^2} \quad . \quad (\text{II.7.9})$$

In questo limite la corrispondente autofunzione diventa

$$\psi_E(x) = A e^{-k|x|} \quad , \quad (\text{II.7.10})$$

dove  $k = mK/\hbar^2$ . Come si può osservare l'autofunzione  $\psi_E(x)$  è continua in  $x = 0$  e la differenza tra la derivata sinistra e destra è uguale a  $2mK/\hbar^2$  per la funzione stessa calcolata in  $x = 0$ . Tale condizione è infatti quella da usare per potenziali tipo "delta" di intensità  $K$ .

## Problema II.8

Un sistema dinamico classico, ad un solo grado di libertà, è descritto dalla seguente funzione Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{4}p^4 + \frac{1}{4}q^4 + \frac{1}{2}p^2q^2 \quad (\text{II.8.1})$$

1. Si ricavino le equazioni di Hamilton e le soluzioni classiche.
2. Si determini il corrispondente operatore Hermitiano associato ad  $H$  e si scriva l'equazione di Schrödinger corrispondente.
3. Determinare tutti gli autovalori e tutti gli autostati di  $H$ .

### Soluzione del Problema

1. Le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p(p^2 + q^2) \quad , \quad (\text{II.8.2})$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -q(p^2 + q^2) \quad . \quad (\text{II.8.3})$$

Come si osserva la quantità  $h = (p^2 + q^2)$  è una costante del moto, infatti usando le due equazioni precedenti, sulle soluzioni del moto risulta

$$\dot{h} = 0 \quad . \quad (\text{II.8.4})$$

Dalle condizioni iniziali  $q(0) = q_0$  e  $p(0) = p_0$  si ottiene quindi

$$h = p_0^2 + q_0^2 \quad . \quad (\text{II.8.5})$$

Dovendo  $h$  essere costante ne segue che

$$q(t) = h \sin(t + \phi) \quad , \quad (\text{II.8.6})$$

$$p(t) = h \cos(t + \phi) \quad , \quad (\text{II.8.7})$$

dove  $\phi$  è l'angolo definito in modo che  $q_0 = h \sin \phi$  e  $p_0 = h \cos \phi$ . La legge oraria, (II.8.6) e (II.8.7), soddisfa le equazioni di Hamilton, e come si vede, è proprio quella dell'oscillatore armonico unidimensionale (con  $m = \omega = 1$ ). Del resto l'Hamiltoniana in esame è proprio quella dell'oscillatore armonico, ma al quadrato.

2. L'operatore Hamiltoniano associato risulta essere

$$\hat{H} = \left( \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{q}^2}{2} \right)^2 \quad . \quad (\text{II.8.8})$$

3. Essendo l'operatore (II.8.8) il quadrato dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale con  $m = 1$  ed  $\omega = 1$ , esso può essere diagonalizzato usando la stessa base che diagonalizza  $(p^2 + q^2)/2$ . Gli autovalori saranno però

$$E_n = \hbar^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \quad , \quad (\text{II.8.9})$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

## Problema II.9

La Lagrangiana classica di una particella è :

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \lambda \dot{x} \quad (\text{II.9.1})$$

dove  $\dot{x} = dx/dt$  e  $\lambda$  è una costante reale.

1. Si trovi l'Hamiltoniana classica ed il corrispondente operatore quantistico.
2. Si trovino (nello spazio delle configurazioni) gli autovettori (eventualmente anche impropri) dell'Hamiltoniana ed i suoi autovalori.

## Problema II.10

Data una particella libera costretta a muoversi su una retta, di cui si conosce con precisione arbitraria la posizione  $x_1$  al tempo  $t_1$ , si calcoli la probabilità di trovarla nella posizione  $x_2 = x_1 + \Delta x$  al tempo  $t_2 = t_1 + \Delta t$ .

### Soluzione del Problema

Se la particella si trova al tempo  $t_1$  in un generico stato iniziale  $\Psi_1(x)$ , dopo un tempo  $\Delta t$  questo si sarà evoluto nello stato

$$\Psi_1(x, \Delta t) = \exp \left\{ -i \frac{\hat{H} \Delta t}{\hbar} \right\} \Psi_1(x), \quad (\text{II.10.1})$$

con  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ .

Se vogliamo conoscere la probabilità che effettuando una misura all'istante  $t_1 + \Delta t$  si trovi la particella in uno stato  $\Psi_2(x)$ , dobbiamo calcolare l'ampiezza di probabilità

$$a_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2^*(x) \Psi_1(x, \Delta t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2^*(x) \exp \left\{ -i \frac{\hat{H} \Delta t}{\hbar} \right\} \Psi_1(x) dx \quad (\text{II.10.2})$$

La densità di probabilità che cerchiamo ne sarà il modulo quadro.

In trasformata di Fourier lo stato di Eq.(II.10.1) può essere scritto come:

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, \Delta t) &= \exp \left\{ -i \frac{\hat{H} \Delta t}{\hbar} \right\} \Psi_1(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left\{ -i \frac{p^2 \Delta t}{2m\hbar} + i \frac{px}{\hbar} \right\} \tilde{\Psi}_1(p). \end{aligned} \quad (\text{II.10.3})$$

Sostituendo Eq.(II.10.3) in Eq.(II.10.2) otteniamo

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp_1 dp_2 dx \tilde{\Psi}_2^*(p_1) \exp \left\{ -i \frac{p_1^2 \Delta t}{2m\hbar} + i \frac{(p_1 - p_2)x}{\hbar} \right\} \tilde{\Psi}_1(p_2) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \tilde{\Psi}_2^*(p) \exp \left\{ -i \frac{p^2 \Delta t}{2m\hbar} \right\} \tilde{\Psi}_1(p). \end{aligned} \quad (\text{II.10.4})$$

Nel caso in esame gli stati iniziale e finale sono delle  $\delta$  di Dirac, che sono ottenibili da stati gaussiani nel limite in cui essi divengono infinitamente piccati. Scegliamo quindi le due  $\Psi$  essere due pacchetti gaussiani di larghezza  $\epsilon$  piccati attorno ai punti  $x_1$  e  $x_2$ , solo alla fine eseguiremo il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Pertanto:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \exp \left\{ -\frac{(x - x_1)^2}{2\epsilon} \right\}. \quad (\text{II.10.5})$$

La sua trasformata di Fourier è

$$\tilde{\Psi}_1(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \exp \left\{ -\frac{\epsilon p^2}{2\hbar^2} - i \frac{x_1 p}{\hbar} \right\}, \quad (\text{II.10.6})$$

ed una formula analoga per  $\Psi_2$ .

Con questa forma delle  $\Psi$  l'integrale (II.10.4) si può agevolmente fare e risulta

$$\begin{aligned} a_{12} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\pi\hbar} \exp \left\{ -i \frac{p^2 \Delta t}{2m\hbar} - \frac{\epsilon p^2}{\hbar^2} - i \frac{(x_1 - x_2)p}{\hbar} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \epsilon + i \frac{\hbar \Delta t}{2m} \right]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(x_1 - x_2)^2}{4 \left( \epsilon + i \frac{\hbar \Delta t}{2m} \right)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.10.7})$$

Facendo il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$  si trova

$$a_{12} = \sqrt{\frac{m}{\pi i \hbar \Delta t}} \exp \left\{ \frac{i m (\Delta x)^2}{2 \Delta t} \right\}. \quad (\text{II.10.8})$$

Da cui, la densità di probabilità è

$$|a_{12}|^2 = \frac{m}{\pi \hbar \Delta t}. \quad (\text{II.10.9})$$

★ *Notare che il risultato non dipende da  $\Delta x$ , la distanza fra i due punti presi in esame. Questo è dovuto al fatto che nella funzione d'onda di una particella localizzata sono presenti, con peso uguale, tutte le componenti di Fourier, cioè tutte le componenti del momento (che è assolutamente indeterminato). Pertanto indipendentemente dalla distanza ci sono comunque delle componenti del momento, e quindi della velocità, che consentono alla particella di essere rivelata dopo un tempo  $\Delta t$ . Ovviamente questo è dovuto anche al fatto che in meccanica quantistica nonrelativistica non c'è una velocità limite.*

## Problema II.11

Si consideri una particella di massa  $m$  in moto in un potenziale unidimensionale

$$V(x) = \lambda^2 x^6 - \frac{3\lambda\hbar}{\sqrt{2m}} x^2 \quad (\text{II.11.1})$$

con  $\lambda$  numero reale. Dimostrare che l'operatore Hamiltoniano può essere scritto come  $H = A^\dagger A$ , dove

$$A = \frac{p}{\sqrt{2m}} - i\lambda x^3 \quad (\text{II.11.2})$$

Trovare gli autovalori di  $A$  e di  $A^\dagger$ , e le loro autofunzioni nello spazio di Hilbert  $L_2(\mathbb{R})$ , ed il valore più basso per l'energia del sistema.

### Soluzione del Problema

Al fine di risolvere il problema agli autovalori per  $A$  ed  $A^\dagger$  in  $L_2(\mathbb{R})$  rappresentiamo tali operatori come operatori differenziali

$$A = -i \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \lambda x^3 \right), \quad (\text{II.11.3})$$

$$A^\dagger = -i \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} - \lambda x^3 \right). \quad (\text{II.11.4})$$

Il fatto che  $H = A^\dagger A$  risulta allora da un calcolo immediato. Risolviamo allora le equazioni

$$A\phi_a(x) = a\phi_a(x) \quad , \quad (\text{II.11.5})$$

$$A^\dagger\bar{\phi}_{\bar{a}}(x) = \bar{a}\bar{\phi}_{\bar{a}}(x) \quad , \quad (\text{II.11.6})$$

Le cui soluzioni sono

$$\phi_a(x) = N \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2m}}{4\hbar} \lambda x^4 + i \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} a x \right\} \quad , \quad (\text{II.11.7})$$

$$\bar{\phi}_{\bar{a}}(x) = N' \exp \left\{ +\frac{\sqrt{2m}}{4\hbar} \lambda x^4 + i \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \bar{a} x \right\} \quad . \quad (\text{II.11.8})$$

Come si vede dalle precedenti equazioni, se  $\lambda > 0$ , allora  $\phi_a(x) \in L_2(\mathbb{R})$  per ogni  $a \in \mathbb{C}$ , quindi  $A$  ha tutto  $\mathbb{C}$  come spettro puntuale. Allo stesso tempo  $\bar{\phi}_{\bar{a}}(x)$  non appartiene ad  $L_2(\mathbb{R})$  per nessun valore di  $\bar{a}$ . La cosa si ribalta per  $\lambda < 0$ . Il caso  $\lambda = 0$  è ovvio, perché  $V(x) = 0$  e  $A = A^\dagger \propto p$ , che come è noto hanno  $\mathbb{R}$  come insieme degli autovalori reali impropri.

Per calcolare il valore minimo dell'energia, basta osservare che l'Hamiltoniana del sistema risulta

$$H = \frac{p^2}{2m} + \lambda^2 x^6 - \frac{3\lambda\hbar}{\sqrt{2m}} x^2 = A^\dagger A \quad , \quad (\text{II.11.9})$$

che essendo un operatore definito positivo può avere autovalori solo positivi o nulli. Il fatto che vi sia soluzione  $\phi_a(x)$  con  $a = 0$  garantisce che il minimo dell'energia è proprio lo stato ad energia nulla

$$\phi_0(x) = N \exp \left\{ -\frac{\sqrt{2m}}{4\hbar} \lambda x^4 \right\} \quad . \quad (\text{II.11.10})$$

## Problema II.12

Data la funzione d'onda per una particella su un cerchio di raggio unitario:

$$\psi = N \left( \sin(2x) + \frac{e^{i3x}}{2} \right) \quad (\text{II.12.1})$$

Si calcolino

1. I valori possibili di una misura dell'energia e le loro probabilità.
2. L'indeterminazione sulla posizione e sul momento.

*Problemi di Meccanica Quantistica*

Capitolo III  
Potenziali Quadrati

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

### Problema III.1

Una particella di massa  $m$  si muove in una dimensione sotto l'effetto del potenziale  $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & x > a \\ 0 & -a \leq x \leq a \\ V_0 & x < -a \end{cases} \quad (\text{III.1.1})$$

Si considerino gli stati legati del sistema e si discuta il caso in cui  $V_0 \rightarrow \infty$ .

#### Soluzione del Problema

1. Gli autostati dell'energia che ci interessano sono tutti e soli quelli caratterizzati dall'autovalore  $0 < E < V_0$ .

La forma esplicita degli autostati dell'energia  $\psi_E$

$$\psi_E(x) \equiv \begin{cases} \psi_E^I(x) & x > a \\ \psi_E^{II}(x) & -a \leq x \leq a \\ \psi_E^{III}(x) & x < -a \end{cases}, \quad (\text{III.1.2})$$

si ottiene risolvendo l'equazione differenziale

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E \right] \psi_E(x) = 0 \quad (\text{III.1.3})$$

Sostituendo l'espressione (III.1.2) nella (III.1.3) otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali da risolvere

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_E^I(x)}{dx^2} - k_1^2 \psi_E^I(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \psi_E^{II}(x)}{dx^2} + k^2 \psi_E^{II}(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \psi_E^{III}(x)}{dx^2} - k_1^2 \psi_E^{III}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1.4})$$

dove  $k^2 = 2mE/\hbar^2$  e  $k_1^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$ .

Sullo stato  $\psi_E(x)$ , che soddisfa il sistema (III.1.4), bisogna imporre un andamento all'infinito che lo renda un vettore normalizzabile. La soluzione del sistema (III.1.4) con questa condizione è

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \psi_E^I(x) = A e^{-k_1 x} \\ \psi_E^{II}(x) = B \cos(kx) + C \sin(kx) \\ \psi_E^{III}(x) = D e^{k_1 x} \end{cases} \quad (\text{III.1.5})$$

Imponendo le condizioni di continuità della funzione  $\psi_E(x)$  e della sua derivata prima in  $x = -a$  ed  $a$  otteniamo

$$\begin{aligned} Ae^{-k_1 a} &= B \cos(ka) + C \sin(ka) \\ -Ak_1 e^{-k_1 a} &= -kB \sin(ka) + kC \cos(ka) \\ De^{-k_1 a} &= B \cos(ka) - C \sin(ka) \\ Dk_1 e^{-k_1 a} &= kB \sin(ka) + kC \cos(ka) \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.1.6})$$

Il sistema (III.1.6) ammette soluzione non banale in termini del parametro  $B$ , a patto che il determinante della matrice dei coefficienti si annulli, ovvero valga la relazione

$$\tan(2ka) = -\frac{2kk_1}{(k_1^2 - k^2)} \quad (\text{III.1.7})$$

Da questa relazione si possono ricavare i valori possibili per  $E$ , per esempio in forma grafica disegnando i due termini dell (III.1.7) e mostrando che, al variare di  $E$  (e quindi di  $k$  e  $k_1$ , ci sono intersezioni delle curve solo per valori discreti di  $E$ .

La forma degli autovettori sarà

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \psi_E^I &= B e^{-k_1(x-a)} \frac{k}{k \cos(ka) + k_1 \sin(ka)} \\ \psi_E^{II}(x) &= B \left( -\frac{k_1 \cos(ka) - k \sin(ka)}{k_1 \sin(ka) + k \cos(ka)} \sin(kx) + \cos(kx) \right) \\ \psi_E^{III}(x) &= B e^{k_1(x+a)} \frac{k \cos(2ka) + k_1 \sin(2ka)}{k \cos(ka) + k_1 \sin(ka)} \end{cases} \quad . \quad (\text{III.1.8})$$

Come è facile vedere dalla forma di  $\psi_E$ , nel limite  $V_0 \rightarrow \infty$  ovvero  $k_1 \rightarrow \infty$ ,  $\psi_E^I$  e  $\psi_E^{III}$  si annullano, mentre  $\psi_E^{II} = \sin(k(a-x))$ . Inoltre la relazione (III.1.7) si semplifica diventando

$$\tan(2ka) = 0 \quad , \quad (\text{III.1.9})$$

che è risolta da  $ka = n\pi$  ( $E = n^2\pi^2\hbar^2/(a^22m)$ ) oppure  $ka = (2n-1)\pi/2$  ( $E = (2n-1)^2\pi^2\hbar^2/(a^28m)$ ) con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . In corrispondenza di questi valori dell'energia la funzione  $\psi_E^{II}(x)$  diventerà  $\sin(kx)$  e  $\cos(kx)$  rispettivamente. Infatti nel primo caso il coefficiente del seno sarà  $\gg 1$  e quindi dominerà sul secondo (la scelta della costante  $B$  garantisce che la funzione d'onda sia finita). Nel secondo caso più semplicemente il coefficiente del seno va a zero.

## Problema III.2

Una particella in una buca di potenziale a pareti infinite compresa fra 0 ed  $a$ , si trova inizialmente nello stato

$$\Psi_0 = N \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \left[ 1 + e^{i\alpha} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \quad (\text{III.2.1})$$

con  $\alpha$  reale e  $N$  costante di normalizzazione.

Si calcoli il valor medio di posizione e momento come funzione del tempo.

*Soluzione del Problema*

L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = -\hbar m \frac{d^2}{dx^2} \quad , \quad (\text{III.2.2})$$

con il vincolo che la particella possa muoversi solo nell'intervallo  $x \in [0, a]$ . In questo caso la base di autofunzioni di  $H$  e i rispettivi autovalori sono

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \quad \text{con } n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{III.2.3})$$

Lo stato iniziale del sistema può essere sviluppato in termini delle  $\psi_n$  come

$$\Psi_0 = \sum_n c_n \psi_n \quad c_n = \langle \Psi_0, \psi_n \rangle \quad . \quad (\text{III.2.4})$$

È facile vedere che

$$c_1 = N \sqrt{\frac{a}{2}} \quad , \quad c_2 = \exp\{i\alpha\} \frac{N}{2} \sqrt{\frac{a}{2}} \quad , \quad c_n = 0 \quad , \quad \forall n > 2 \quad , \quad (\text{III.2.5})$$

e quindi la funzione d'onda del sistema al tempo  $t$  è

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \exp\left\{-i\frac{Ht}{\hbar}\right\} \Psi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-i\frac{E_n t}{\hbar}\right\} c_n \psi_n \\ &= \exp\left\{-i\frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2}t\right\} c_1 \psi_1 + \exp\left\{-i\frac{2\pi^2 \hbar}{ma^2}t\right\} c_2 \psi_2 \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.2.6})$$

da cui possiamo calcolare il valor medio di  $x$  in funzione del tempo

$$\langle x \rangle_t = \frac{\int_0^a dx \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t)}{\int_0^a dx \Psi^*(x, t) \Psi(x, t)} \quad . \quad (\text{III.2.7})$$

Si noti che

$$\int_0^a dx \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) = (|c_1|^2 + |c_2|^2) = \frac{5}{8} a N^2 \quad , \quad (\text{III.2.8})$$

e che

$$\begin{aligned} \int_0^a \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx &= \int_0^a |c_1|^2 x \psi_1^2 dx + \int_0^a |c_2|^2 x \psi_2^2 dx \\ &+ \int_0^a 2\text{Re} \left[ c_2^* c_1 \exp\left\{i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}\right\} \right] x \psi_1 \psi_2 dx \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.2.9})$$

Notare che il terzo termine è un termine di interferenza. Svolgendo gli integrali si ottiene

$$\langle x \rangle_t = \frac{a}{2} - \frac{64a}{45\pi^2} \cos\left(\frac{3\pi^2 \hbar t}{2a^2 m} - \alpha\right) \quad . \quad (\text{III.2.10})$$

Il valor medio di  $x$  descrive una particella che va avanti e indietro nella buca.

Ripetendo lo stesso calcolo, ma questa volta per il valore medio di  $p$  si ottiene

$$\langle p \rangle_t = \frac{32\hbar}{15a} \sin\left(\frac{3\hbar \pi^2 t}{2a^2 m} - \alpha\right) \quad . \quad (\text{III.2.11})$$

### Problema III.3

Una particella posta in una buca di potenziale infinita unidimensionale, compresa tra  $x = 0$  ed  $x = a$ , si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \exp \left\{ i \frac{4\pi x}{a} \right\} + B \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} + C \quad (\text{III.3.1})$$

I coefficienti  $A$ ,  $B$  e  $C$  sono reali e tali da rendere massimo il valore medio della quantità di moto. Determinare le probabilità dei possibili valori dell'energia ed il suo valore medio.

#### Soluzione del Problema

Affinché la funzione d'onda suddetta possa rappresentare un particella in una buca di potenziale infinita, essa deve annullarsi ai bordi della buca stessa. Nel caso specifico tale richiesta per  $x = 0$  è soddisfatta se  $A + B + C = 0$ . Sostituendo dunque  $C = -A - B$  otteniamo

$$\psi(x) = A \left( \exp \left\{ i \frac{4\pi x}{a} \right\} - 1 \right) + B \left( \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} - 1 \right) \implies \psi(a) = 0 \quad . \quad (\text{III.3.2})$$

Dovendo la norma quadra di tale stato essere 1 risulta

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \int_0^a dx \left| A \left( \exp \left\{ i \frac{4\pi x}{a} \right\} - 1 \right) + B \left( \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} - 1 \right) \right|^2 \\ &= 2a(A^2 + AB + B^2) = 1 \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.3.3})$$

da cui otteniamo le due soluzioni

$$A = \frac{1}{2} \left( -B \pm \sqrt{\frac{2}{a} - 3B^2} \right) \quad . \quad (\text{III.3.4})$$

Data la funzione d'onda, il valor medio dell'operatore  $p$  risulta

$$\begin{aligned} \langle \psi | p | \psi \rangle &= \frac{2\hbar\pi}{a} \int_0^a dx \left[ A \left( \exp \left\{ -i \frac{4\pi x}{a} \right\} - 1 \right) + B \left( \exp \left\{ -i \frac{2\pi x}{a} \right\} - 1 \right) \right] \\ &\times \left[ 2A \exp \left\{ i \frac{4\pi x}{a} \right\} + B \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} \right] = 2\hbar\pi(2A^2 + B^2) \\ &= 2\hbar\pi \left( \frac{1}{a} \mp B \sqrt{\frac{2}{a} - 3B^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.3.5})$$

Per ricavare l'ultima linea della relazione precedente si é usata la condizione sulla norma. Essendo gli stati definiti a meno di una fase, possiamo scegliere  $B \geq 0$ . In questo caso, richiedendo che la derivata rispetto a  $B$  della Eq.(III.3.5) si annulli, si ottiene  $B = 1/\sqrt{3a}$ . Richiedendo inoltre che sia massimo il valor medio di  $p$ , otteniamo

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{3a}} (1 + \sqrt{3}) \quad , \quad (\text{III.3.6})$$

quindi lo stato normalizzato risulta

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3a}} (1 + \sqrt{3}) \left( \exp \left\{ i \frac{4\pi x}{a} \right\} - 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{3a}} \left( \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} - 1 \right) \quad . \quad (\text{III.3.7})$$

Nella buca di potenziale infinita  $0 \leq x \leq a$ , i livelli energetici permessi sono  $E_n = (\hbar^2 \pi^2 n^2 / 2ma^2)$  con autovettori  $\phi_n = \sqrt{2/a} \sin(n\pi x/a)$  dove  $n = 1, 2, \dots$ . In termini di questi autostati, lo stato  $\psi$  può essere decomposto come

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad , \quad (\text{III.3.8})$$

dove i  $c_n = \langle \phi_n, \psi \rangle$  risultano

$$\begin{aligned} c_n &= \left[ \frac{8(\sqrt{3}-1) - (1+2\sqrt{3})n^2}{n(n^2-4)(n^2-16)} \right] \frac{8[1-(-1)^n]}{\pi\sqrt{6}} \quad \text{con } n \neq 2, 4 \\ c_4 &= -i \frac{(3+\sqrt{3})}{6\sqrt{2}} \quad , \\ c_2 &= i \frac{1}{\sqrt{6}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.3.9})$$

I moduli quadri dei  $c_n$  rappresentano le probabilità con cui si otterrà ad una misura dell'energia il valore  $E_n$ .

### Problema III.4

Una particella di massa  $m$  in una buca infinita unidimensionale tra  $0 \leq x \leq a$  si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = N \left( \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} - 1 \right) \quad (\text{III.4.1})$$

Determinare lo scarto quadratico medio  $\Delta x^2$ , la distribuzione di probabilità dei valori dell'energia ed il suo valore medio.

#### Soluzione del Problema

Al fine di valutare lo scarto quadratico medio, ricordiamo che  $\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ , dove

$$\langle x \rangle = \frac{\langle \psi, x\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \quad , \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\langle \psi, x^2\psi \rangle}{\langle \psi, \psi \rangle} \quad . \quad (\text{III.4.2})$$

La norma al quadrato dello stato  $\psi$  risulta

$$\langle \psi, \psi \rangle = \int_0^a |\psi(x)|^2 dx = 2|A|^2 a \quad (\text{III.4.3})$$

Quindi, lo stato  $\psi$ , opportunamente normalizzato sarà (a meno di una fase)

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \left( \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} - 1 \right) \quad (\text{III.4.4})$$

In termini di questa  $\psi$  normalizzata, i valori medi di  $x$  e di  $x^2$  risultano

$$\langle x \rangle = \int_0^a |\psi(x)|^2 x dx = \frac{a}{2} \quad (\text{III.4.5})$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_0^a |\psi(x)|^2 x^2 dx = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2} \quad (\text{III.4.6})$$

da cui

$$\Delta x^2 = -a^2 \left( \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{12} \right) \quad (\text{III.4.7})$$

Per ricavare la distribuzione di probabilità dei valori dell'energia occorre sviluppare la  $\psi$  (scegliamo quella normalizzata (III.4.4)) in autostati dell'energia

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \quad (\text{III.4.8})$$

con  $n = 1, 2, \dots$ , ovvero calcolare i coefficienti  $c_n$  dello sviluppo

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (\text{III.4.9})$$

Usando le espressioni (III.4.4) e (III.4.8) si ha

$$c_n = \int_0^a \phi_n^*(x) \psi(x) dx = \begin{cases} \frac{i}{2} & n = 2 \\ 0 & n \text{ pari, ma } > 2 \\ \frac{8}{\pi n(n^2-4)} & n \text{ dispari} \end{cases} \quad (\text{III.4.10})$$

Ricordando che gli autovalori dell'energia, e quindi i possibili risultati di una misura di essa, sono dati da

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2} \quad (\text{III.4.11})$$

dalle espressioni degli  $c_n$  (III.4.10) ricaviamo la probabilità di misurare  $E_n$  usando la relazione

$$P(E_n) = |c_n|^2 \quad (\text{III.4.12})$$

Il valore medio dell'energia risulterà infine

$$\langle H \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 E_n \quad (\text{III.4.13})$$

### Problema III.5

Una particella si trova in una buca di potenziale infinita unidimensionale, di lunghezza  $a$ , e con un estremo nell'origine. Il suo stato è descritto ad un certo istante dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \exp \left\{ i \frac{2\pi x}{a} \right\} + B \exp \left\{ -i \frac{2\pi x}{a} \right\} - A \quad (\text{III.5.1})$$

1. Determinare la relazione tra  $A$  e  $B$  per cui questa descrive uno stato accettabile per il sistema.
2. Quali sono in tale stato i possibili risultati di una misura dell'energia e quali le rispettive probabilità?
3. Quanto vale lo scarto quadratico medio dell'energia?

### Problema III.6

Una particella di massa  $m$  è vincolata a muoversi in una buca infinita:  $-a \leq x \leq a$ . Il suo stato ad un certo istante è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \geq b \\ \frac{1}{\sqrt{b}} \cos\left(\frac{\pi x}{2b}\right) & \text{se } |x| \leq b \end{cases} \quad (\text{III.6.1})$$

dove  $b < a$ .

1. Quali sono i possibili risultati di una misura dell'energia e le loro rispettive probabilità ?
2. Calcolare il valore medio dell'energia e dell'impulso esprimendo il risultato come serie (assicurandosi che quest'ultima converga!).
3. Questi valori medi dipendono dal tempo?

#### Soluzione del Problema

1. Affinché una data funzione  $\phi$  sia autostato dell'Hamiltoniana in esame, occorre che essa soddisfi l'equazione differenziale

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = E\phi(x) \quad x \in [-a, a] \quad . \quad (\text{III.6.2})$$

Una applicazione *disinvolta* di tale considerazione può però portare a seri errori.

Nel caso dello stato  $\psi$  infatti, la relazione (III.6.2) è soddisfatta banalmente per  $a \geq |x| > b$  indipendentemente dal valore di  $E$ , perché la  $\psi$  si annulla in questo dominio. Per  $|x| < b$  invece, si troverebbe

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8mb^2} \psi(x) \quad x \in ]-b, b[ \quad . \quad (\text{III.6.3})$$

Quindi, uno sarebbe tentato a dedurre da queste semplici, ma errate considerazioni che lo stato  $\psi$  è autostato dell'Hamiltoniana di autovalore  $E = \hbar^2 \pi^2 / (8mb^2)$ . Il problema infatti è connesso con il comportamento *singolare* della funzione  $\psi$  nei punti  $x = -b, b$  (derivata prima discontinua), ove la derivata seconda contenuta in  $H$  non può essere valutata. Risulta pertanto necessario affrontare il problema in modo diverso.

Gli autostati dell'energia nel problema in esame si ottengono dalla soluzione dell'equazione differenziale

$$\phi_k'' + k^2 \phi_k = 0 \quad (\text{III.6.4})$$

imponendo inoltre che  $\phi_k(a) = \phi_k(-a) = 0$ . Questa condizione è tale da individuare per  $H$  un dominio di essenziale autoaggiuntezza. Le autofunzioni normalizzate che si ottengono sono allora

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \sin \left[ \frac{2n\pi}{2a} x \right] \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \right] \quad \text{con } n = 1, 2, \dots \quad (\text{III.6.5})$$

e gli autovalori sono rispettivamente  $E_n = \hbar^2(2n)^2\pi^2/8ma^2$  ed  $E'_n = \hbar^2(2n-1)^2\pi^2/8ma^2$ . Definendo con  $k$  un intero tale che:  $k = 2n$  per  $k$  pari e  $k = 2n-1$  per  $k$  dispari, l'espressione degli autovalori dell'energia in termini di  $k$  assume la forma semplice

$$E_k = \frac{\hbar^2\pi^2k^2}{8ma^2} \quad \text{con } k = 1, 2, \dots \quad (\text{III.6.6})$$

Per calcolare i possibili risultati della misura dell'energia occorre determinare i coefficienti dello sviluppo

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \left[ \frac{2n\pi}{2a} x \right] + c'_n \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \right] \quad (\text{III.6.7})$$

Essi si ottengono dalle relazioni

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{-b}^b \cos \left( \frac{\pi x}{2b} \right) \sin \left[ \frac{2n\pi}{2a} x \right] dx = 0 \quad (\text{III.6.8})$$

$$\begin{aligned} c'_n &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \int_{-b}^b \cos \left( \frac{\pi x}{2b} \right) \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \right] dx \\ &= -\frac{4a\sqrt{ab}}{\pi [(2n-1)^2b^2 - a^2]} \cos \left[ \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \right] \end{aligned} \quad (\text{III.6.9})$$

★ Si noti che il fattore  $\sqrt{b}$  al denominatore delle due relazioni precedenti è dovuto alla normalizzazione di  $\psi$ .

I risultati possibili della misura dell'energia sono allora

$$E_n = \frac{\hbar^2(2n)^2\pi^2}{8ma^2} \quad \text{con } P(E_n) = |c_n|^2 = 0 \quad (\text{III.6.10})$$

e

$$E'_n = \frac{\hbar^2(2n-1)^2\pi^2}{8ma^2} \quad (\text{III.6.11})$$

con

$$P(E'_n) = |c'_n|^2 = \frac{16a^3b}{\pi^2 [(2n-1)^2b^2 - a^2]^2} \cos^2 \left[ \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \right] \quad (\text{III.6.12})$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Come si può osservare dalla (III.6.12) lo stato  $\psi$  non è autostato di  $H$ , ma risulta essere una combinazione infinita di autostati di  $H$ .

2. Usando le espressioni (III.6.12) si ottiene il valore medio dell'operatore energia

$$\begin{aligned} \langle \psi | H | \psi \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} E'_n P'_n \\ &= \frac{2ab\hbar^2}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^2}{[(2n-1)^2 b^2 - a^2]^2} \cos^2 \left[ \frac{(2n-1)\pi b}{2a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{III.6.13})$$

Tale serie è convergente in virtù del comportamento di  $P'_n \approx n^{-4}$ .

Per il calcolo del valore medio dell'impulso usiamo lo stesso metodo adottato per l'energia visto che lo stato in esame  $\notin C^\infty$ .

L'operatore impulso sull'intervallo  $[-a, a]$  ha infiniti domini di essenziale autoaggiuntezza, tutti ottenibili richiedendo la periodicità delle autofunzioni al bordo, a meno di un fattore di fase. La scelta del dominio e quindi in effetti dell'operatore impulso voluto, dipende dalla quantità fisica che si vuole descrivere. Nel caso in esame è evidente che i punti  $x = a$  e  $-a$  debbono essere trattati allo stesso modo, e quindi useremo la definizione di impulso ottenuta scegliendo come dominio di essenziale autoaggiuntezza quello delle funzioni periodiche in  $[-a, a]$ . Le autofunzioni di  $H$  saranno allora anche nel dominio di  $p$  e quindi

$$p\psi(x) = i \frac{\hbar\pi}{2a\sqrt{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c'_n (2n-1) \sin \left[ \frac{(2n-1)\pi}{2a} x \right] \quad . \quad (\text{III.6.14})$$

Usando la (III.6.14) si ottiene  $\langle \psi | p | \psi \rangle = 0$ .

★ Che  $\langle p \rangle = 0$ , cioè che in media le misure del momento hanno somma algebrica che si annulla, si poteva intuire da considerazioni di simmetria sull'Hamiltoniana e sullo stato.

3. Il valore medio dell'energia, in virtù del teorema di Ehrenfest, non può dipendere dal tempo. Quello dell'impulso invece in generale vi dipenderà. Si noti infatti che  $H = (p^2/2m) + V(x)$  e non  $H = (p^2/2m)$ , quindi  $[H, p] \neq 0$ . Nel nostro caso comunque, come si vede dalla (III.6.14) lo stato  $p\psi(x)$  evolverà conservando la sua parità e quindi  $\langle \psi | p | \psi \rangle$  continuerà ad annullarsi nel tempo.

★ Quanto vale  $\Delta E$  ?

### Problema III.7

Una particella di massa  $m$  è si trova in una buca di potenziale unidimensionale infinitamente profonda,  $|x| < L$ . Essa è descritta dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\alpha}{m} p + \beta \quad (\text{III.7.1})$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  reali.

1. Trovare autovalori e autofunzioni.
2. Si calcoli il valor medio di  $p$  su un qualsiasi autostato come funzione del tempo.
3. Si calcoli il valor medio di  $x$  per lo stato

$$\psi_0 = \frac{\left(\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right) e^{-\frac{i\alpha x}{\hbar}}}{\sqrt{2L}} \quad (\text{III.7.2})$$

4. Si calcoli l'evoluzione di  $\langle x \rangle$  col tempo.

#### Soluzione del Problema

Se non ci fossero  $\alpha$  e  $\beta$  il problema sarebbe quello usuale di una particella in una buca di potenziale infinita, le cui autofunzioni ed autovalori sono ben noti:

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) & E_n &= \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{2L}\right)^2 & n &\text{dispari} \\ \phi_n &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right) & E_n &= \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{2L}\right)^2 & n &\text{pari} \end{aligned} \quad (\text{III.7.3})$$

★ Dato che stiamo considerando la buca simmetrica rispetto all'origine compaiono sia i seni che i coseni.

Per il nostro problema è conveniente riscrivere l'Hamiltoniana nella seguente forma:

$$H = \frac{(p + \alpha)^2}{2m} + \gamma \quad (\text{III.7.4})$$

con  $\gamma = -\frac{\alpha^2}{2m} + \beta$

Questo vuol dire che dobbiamo semplicemente traslare il momento della quantità  $\alpha$ . In analogia con l'operatore di traslazione della posizione (che è  $\exp\left\{\frac{ipa}{\hbar}\right\}$ ), la traslazione del momento si ottiene con l'operatore di  $\exp\left\{\frac{-ix\alpha}{\hbar}\right\}$ . Chiamiamo questo operatore unitario  $U(x) = \exp\left\{\frac{-ix\alpha}{\hbar}\right\}$

Pertanto

$$\begin{aligned} H &= U(x)H_0U(x)^{-1} \quad , \\ H_0 &= \frac{p^2}{2m} + \gamma \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.7.5})$$

Le autofunzioni di  $H_0$  sono come in (III.7.3), mentre gli autovalori sono semplicemente traslati di  $\gamma$ :  $E_{0n} = E_n + \gamma$ .

1. Calcoliamo le autofunzioni con alcune semplici manipolazioni:

$$\begin{aligned} H_0\phi_n &= E_{0n}\phi_n \\ UH_0U^{-1}U\phi_n &= E_{0n}U\phi_n \\ HU\phi_n &= E_{0n}U\phi_n \end{aligned} \quad (\text{III.7.6})$$

Pertanto le autofunzioni di  $H$  sono  $\psi_n = U\phi_n$ .

2.

$$\langle p \rangle_{\psi_n} = \langle \psi_n, p\psi_n \rangle = \langle \phi_n, U^{-1}pU\phi_n \rangle = \langle \phi_n, p\phi_n \rangle - \alpha \langle \phi_n, \phi_n \rangle = -\alpha \quad (\text{III.7.7})$$

Il valor medio di  $p$  non dipende dal tempo in un autostato dell'Hamiltoniana.

★ *Può sembrare curioso il fatto che una particella costretta a restare in un intervallo finito abbia un momento che non si annulla mai ed è costante. Si potrebbe pensare che questo implichi che la particella si muova sempre in una direzione con velocità  $\alpha/m$ . Il paradosso si risolve facilmente notando che non sempre il momento è proporzionale alla velocità. Un esempio notevole di questo essendo fornito da una particella in un campo magnetico. Se si calcola il valor medio della velocità  $v = \dot{q}$  si trova infatti che questo si annulla. Infatti*

$$\dot{q} = \frac{i}{\hbar}[H, q] = \frac{\alpha}{m} + \frac{p}{m} \quad , \quad (\text{III.7.8})$$

il cui valor medio è identicamente zero.

3. Si tratta semplicemente di fare un integrale, il risultato è

$$\langle x \rangle = \int_{-L}^L |\Psi_0|^2 x dx = 0 \quad . \quad (\text{III.7.9})$$

La cosa si può vedere facilmente dal fatto che nel prendere il modulo quadro l'esponenziale scompare. Resta l'integrale di  $x$  per il prodotto di due seni, una funzione dispari di  $x$  integrata su un intervallo simmetrico, che si annulla necessariamente.

4. Il calcolo è semplificato dall'osservazione che

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}U(\phi_2 + \phi_4) = \frac{1}{2}(\psi_2 + \psi_4) \quad (\text{III.7.10})$$

per cui

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}}\psi_2 + e^{\frac{-iE_4t}{\hbar}}\psi_4) \quad (\text{III.7.11})$$

e dal fatto che  $U$  e  $x$  commutano.

Pertanto:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle(t) &= \frac{1}{2} \left( \langle x \rangle_{\phi_2} + \langle x \rangle_{\phi_4} + e^{\frac{-i(E_2-E_4)t}{\hbar}} \langle \phi_2, x\phi_4 \rangle + e^{\frac{i(E_2-E_4)t}{\hbar}} \langle \phi_4, x\phi_2 \rangle \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.7.12})$$

per un argomento analogo a quello usato nel punto precedente.

## Problema III.8

Una particella di massa  $m$  si muove in una dimensione sotto l'effetto del potenziale  $V(x)$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 \leq x \leq a \\ V_1 & x > a \end{cases} \quad (\text{III.8.1})$$

con  $v_0$  e  $V_1$  costanti positive.

Si supponga che il pacchetto d'onda che descrive la particella provenga da  $x = -\infty$  e sia combinazione delle sole onde caratterizzate da energia  $0 < E < V_1$ .

1. Determinare gli autostati di  $H$  rilevanti nel caso in esame.
2. Risolvere l'equazione di Schrödinger.

*Soluzione del Problema*

1. Gli autostati dell'energia rilevanti per la descrizione del pacchetto d'onda di cui nella traccia, sono tutti e soli quelli caratterizzati dall'autovalore  $0 < E < V_1$ .

La forma esplicita degli autostati dell'energia  $\psi_E$

$$\psi_E(x) \equiv \begin{cases} \psi_E^I(x) & x < 0 \\ \psi_E^{II}(x) & 0 \leq x \leq a \\ \psi_E^{III}(x) & x > a \end{cases}, \quad (\text{III.8.2})$$

si ottiene risolvendo l'equazione differenziale

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E \right] \psi_E(x) = 0 \quad . \quad (\text{III.8.3})$$

Sostituendo l'espressione (III.8.2) nella (III.8.3) otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali da risolvere

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi_E^I(x)}{dx^2} + k_1^2 \psi_E^I(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \psi_E^{II}(x)}{dx^2} + k_2^2 \psi_E^{II}(x) &= 0 \\ \frac{d^2 \psi_E^{III}(x)}{dx^2} - k_3^2 \psi_E^{III}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.8.4})$$

dove  $k_1^2 = 2mE/\hbar^2$ ,  $k_2^2 = 2m(E + V_0)/\hbar^2$  e  $k_3^2 = 2m(V_1 - E)/\hbar^2$ .

Affinché uno stato  $\psi_E(x)$  che soddisfi il sistema (III.8.4), corrisponda realmente ad un autovalore  $E$  appartenente allo spettro puntuale o continuo è condizione sufficiente che  $\psi_E(x)$  sia a crescita algebrica (questa condizione è anche necessaria?). La soluzione del sistema (III.8.4) con la condizione di crescita algebrica è

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \psi_E^I(x) = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x} \\ \psi_E^{II}(x) = C e^{ik_2x} + D e^{-ik_2x} \\ \psi_E^{III}(x) = F e^{-k_3x} \end{cases} . \quad (\text{III.8.5})$$

Imponendo le condizioni di continuità della funzione  $\psi_E(x)$  e della sua derivata prima in  $x = 0$  e  $a$  otteniamo

$$\begin{aligned} A + B &= C + D \\ k_1 (A - B) &= k_2 (C - D) \\ C e^{ik_2a} + D e^{-ik_2a} &= F e^{-k_3a} \\ ik_2 (C e^{ik_2a} - D e^{-ik_2a}) &= -k_3 F e^{-k_3a} \end{aligned} . \quad (\text{III.8.6})$$

Il sistema (III.8.6) ammette soluzione in termini del parametro  $A$ . L'autostato corrispondente  $\psi_E(x)$  non è a quadrato sommabile ma è a crescita algebrica, quindi ciò implica che i valori di  $0 < E < V_1$  sono punti dello spettro continuo.

L'espressione di  $B$  è la seguente

$$B = -A \left[ \frac{k_2 \cos(k_2a + \varphi) + ik_1 \sin(k_2a + \varphi)}{k_2 \cos(k_2a + \varphi) - ik_1 \sin(k_2a + \varphi)} \right] \equiv A e^{i\xi} , \quad (\text{III.8.7})$$

dove  $\varphi = \text{Arg}(k_3 + ik_2)$ . Analogamente sono ottenibili quelle di  $C$ ,  $D$  ed  $F$ . Per semplicità e per la sua rilevanza riguardante il punto 2) riportiamo solo quella di  $B$ .

2. Se usiamo l'espressione (III.8.5), allora la generica soluzione dell'equazione di Schrödinger con il potenziale riportato nella traccia, sarà :

$$\psi(x, t) \equiv \begin{cases} \int_0^{V_1} dE A_E \left[ e^{-i(\omega t - k_1 x)} - e^{-i(\omega t + k_1 x - \xi)} \right] & x < 0 \\ \int_0^{V_1} dE A_E \left[ \frac{C}{A} e^{-i(\omega t - k_2 x)} + \frac{D}{A} e^{-i(\omega t + k_2 x)} \right] & 0 \leq x \leq a \\ \int_0^{V_1} dE F_E e^{-i\omega t - k_3 x} & x > a \end{cases} . \quad (\text{III.8.8})$$

dove  $A_E$  ed  $F_E$  sono costanti di normalizzazione (il pedice  $E$  ci ricorda che esse variano con l'energia). La quantità  $F_E$  è in realtà una funzione di  $A_E$ , ma la sua espressione esplicita non è necessaria per le considerazioni che seguono.

Come si può osservare dalla relazione precedente, nel limite  $t \rightarrow -\infty$  solo il primo termine ( $x < 0$ ) proporzionale a  $e^{-i(\omega t - k_1 x)}$  può avere fase minima. Ciò avviene infatti per  $x \rightarrow -\infty$ , quindi tale termine descrive il pacchetto incidente che a  $t = -\infty$  è a  $x = -\infty$  e che viaggia in direzione positiva. Nel limite  $t \rightarrow \infty$  solo il termine proporzionale a  $e^{-i(\omega t + k_1 x - \xi)}$  darà contributo, ed in particolare il suo massimo si avrà per  $x \rightarrow \infty$ . Tale termine descrive dunque il pacchetto riflesso.

Per valutare la velocità di gruppo dei pacchetti d'onda occorre avere informazioni più precise su  $A(E)$ . Tale funzione è assegnata qualora si fissi la forma del pacchetto incidente. Se si suppone che  $A(E)$  sia una funzione fortemente piccata attorno a  $E_0$ , allora la velocità di gruppo dei pacchetti incidente e riflesso sarà  $\sqrt{2E_0/m}$ .

### Problema III.9

Si consideri il potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ -V_0 & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x > L \end{cases} \quad (\text{III.9.1})$$

Trovare il valor minimo di  $L$  per cui una particella di massa  $m$  ha almeno uno stato legato.

#### *Soluzione del Problema*

Le autofunzioni dell'Hamiltoniana si annullano in  $x = 0$ , hanno un andamento oscillatorio all'interno della buca ed un decadimento esponenziale per  $x > L$ ; cioè

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \sin kx & 0 \leq x \leq L \\ A_1 e^{-k_1 x} & x > L \end{cases} \quad (\text{III.9.2})$$

con  $k = \sqrt{2m(V_0 - |E|)}/\hbar$  e  $k_1 = \sqrt{2m|E|}/\hbar$ .

Ora dobbiamo imporre le condizioni di raccordo per funzione e derivata:

$$\Psi'(x) = \begin{cases} Ak \cos kx & 0 \leq x \leq L \\ -A_1 k_1 e^{-k_1 x} & x > L \end{cases} \quad (\text{III.9.3})$$

Le condizioni per  $x = L$  sono

$$\begin{aligned} A \sin kL &= A_1 e^{-k_1 L} \\ Ak \cos kL &= -A_1 k_1 e^{-k_1 L} \end{aligned} \quad (\text{III.9.4})$$

Richiedendo che esista una soluzione non banale per  $A$  e  $A_1$  otteniamo la relazione

$$k \cos kL = -k_1 \sin kL \quad (\text{III.9.5})$$

ovvero

$$\tan kL = -\frac{k}{k_1} \quad (\text{III.9.6})$$

Perché la soluzione sia valida deve essere

$$-V_0 < E < 0 \quad (\text{III.9.7})$$

e la tangente negativa, per cui deve essere  $kL > \frac{\pi}{2}$ , ovvero  $L > \frac{\pi}{2k}$ . Da cui, sostituendo l'espressione di  $k$  si ottiene

$$L > \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{2mV_0}} \quad (\text{III.9.8})$$

### Problema III.10

Una particella si trova in una doppia buca di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > b \\ 0 & x \in [-b, -a] \cup [a, b] \\ V_0 & |x| < a \end{cases} \quad (\text{III.10.1})$$

calcolare gli autostati dell'energia.

*Soluzione del Problema*

A causa della forma del potenziale, continuo a tratti, suddividiamo il generico autostato dell'energia  $\psi_E(x)$  nelle tre regioni in cui il potenziale assume valori diversi

$$\psi_E(x) \equiv \begin{cases} \psi_E^I(x) & b \geq x > a \\ \psi_E^{II}(x) & -a \leq x \leq a \\ \psi_E^{III}(x) & -b \leq x < -a \end{cases} . \quad (\text{III.10.2})$$

Il generico autostato risulterà soluzione dell'equazione differenziale

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) - E \right] \psi_E(x) = 0 \quad (\text{III.10.3})$$

Al fine di operare il limite richiesto nella traccia, consideriamo i valori dell'energia per cui  $E \leq V_0$ .

Sostituendo l'espressione (III.10.2) nella (III.10.3) otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi_E^I(x)}{dx^2} + k^2\psi_E^I(x) &= 0 \quad , \\ \frac{d^2\psi_E^{II}(x)}{dx^2} - k_1^2\psi_E^{II}(x) &= 0 \quad , \\ \frac{d^2\psi_E^{III}(x)}{dx^2} + k^2\psi_E^{III}(x) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.10.4})$$

dove  $k^2 = 2mE/\hbar^2$ ,  $k_1^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$ . Come è già stato discusso in altri esercizi, un dominio di essenziale autoaggiuntezza per  $H$  è quello in cui  $\psi(-b) = \psi(b) = 0$ , quindi ricercheremo in questo dominio i nostri autostati, richiedendo ovviamente continuità dell'autofunzione e della sua derivata prima in  $x = \pm a$ . Risolvendo il sistema (III.10.4) otteniamo

$$\psi_E(x) = \begin{cases} \psi_E^I(x) &= A \sin(kx) + B \cos(kx) \\ \psi_E^{II}(x) &= C \sinh(k_1 x) + D \cosh(k_1 x) \\ \psi_E^{III}(x) &= F \sin(kx) + G \cos(kx) \end{cases}, \quad (\text{III.10.5})$$

ed imponendo le suddette condizioni abbiamo

$$\begin{aligned} A \sin(kb) + B \cos(kb) &= 0 \\ -F \sin(kb) + G \cos(kb) &= 0 \\ A \sin(ka) + B \cos(ka) - C \sinh(k_1 a) - D \cosh(k_1 a) &= 0 \\ -F \sin(ka) + G \cos(ka) + C \sinh(k_1 a) - D \cosh(k_1 a) &= 0 \\ A k \cos(ka) - B k \sin(ka) - C k_1 \cosh(k_1 a) - D k_1 \sinh(k_1 a) &= 0 \\ F k \cos(ka) + G k \sin(ka) - C k_1 \cosh(k_1 a) + D k_1 \sinh(k_1 a) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.10.6})$$

Il sistema (III.10.6) ammette soluzione non banale se il determinante della matrice dei coefficienti si annulla, ovvero:

$$\begin{aligned} k k_1 \cosh(2k_1 a) \sin(2k(a-b)) - k^2 \sinh(2k_1 a) \cos^2(k(a-b)) \\ - k_1^2 \sinh(2k_1 a) \sin^2(2k(a-b)) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.10.7})$$

$$\begin{aligned} B &= -A \tan(kb) \\ C &= -A \frac{k_1 \sinh(k_1 a) \sin[k(a-b)] - k \cosh(k_1 a) \cos[k(a-b)]}{k_1 \cos(kb)} \\ D &= A \frac{k_1 \cosh(k_1 a) \sin[k(a-b)] - k \sinh(k_1 a) \cos[k(a-b)]}{k_1 \cos(kb)} \\ F &= -A \frac{k_1 \cosh(2k_1 a) \sin[k(a-b)] + k \sinh(2k_1 a) \cos[k(a-b)]}{k_1 \sin[k(a-b)]} \\ G &= -A \frac{k_1 \cosh(2k_1 a) \sin[k(a-b)] - k \sinh(2k_1 a) \tan(kb) \cos[k(a-b)]}{k_1 \sin[k(a-b)]} \end{aligned} \quad (\text{III.10.8})$$

Usando tali espressioni troviamo

$$\psi_E^I(x) = -\frac{A}{\cos(kb)} \sin(k(b-x))$$

$$\begin{aligned}\psi_E^{II}(x) &= \frac{A}{\cos(kb)} [k_1 \cosh [k_1 (a - x)] \sin [k (a - b)] \\ &\quad - k [k_1 \sinh [k_1 (a - x)] \cos [k (a - b)]] \\ \psi_E^{III}(x) &= \frac{A}{k_1 \sin(kb) \sin [k (a - b)]} \sin(k(b + x)) \times \\ &\quad [k \cos [k (a - b)] \sinh(k_1 a) - k_1 \sin [k (a - b)] \cosh(k_1 a)]\end{aligned}\tag{III.10.9}$$

★ Che succede nel caso in cui  $\sqrt{2mV_0}(a/\hbar) \gg 1$ , ovvero  $k_1 a \gg 1$ ?

### Problema III.11

Trovare i valori permessi dell'energia  $E_n$  e le autofunzioni  $\phi_n(x)$  opportunamente normalizzate, per una particella di massa  $m$  confinata nella regione  $0 \leq x \leq a$ .

1. Per una particella con energia  $E_n = \hbar^2 n^2 \pi^2 / (2ma^2)$ , calcolare  $\langle x \rangle$ .
2. Senza calcolare esplicitamente alcun integrale, dimostrare che

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \frac{a^2}{4}, \tag{III.11.1}$$

e quindi valutare  $\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$  usando il risultato

$$\int_0^a x^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{a} \right) dx = \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{4n^2\pi^2}. \tag{III.11.2}$$

3. Il problema classico equivalente è quello di una particella che rimbalza tra le due pareti, propagando con velocità costante tra una parete e l'altra. Si calcolino le medie classiche delle quantità  $\langle x \rangle_c$  e  $\langle (x - \langle x \rangle_c)^2 \rangle_c$  e si dimostri che per grandi valori di  $n$  le medie classiche e quelle quantistiche coincidono.

### Problema III.12

Una particella in una buca infinita fra 0 ed  $L$  si trova nell'autostato  $n$ -simo dell'energia. Si calcoli la probabilità di trovare la particella nell'intervallo  $[0, a]$  con  $a < L$  generico. Si ricordi che è sempre possibile risolvere gli integrali di potenze di seni e coseni esprimendoli come esponenziali. Si discuta il significato fisico del risultato.

## Problema III.13

Si consideri una particella libera su un segmento di lunghezza  $2\pi R$  con autofunzioni periodiche (particella su un cerchio), perturbata da un potenziale:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \varepsilon \left( \cos \frac{x}{R} + \sin \frac{x}{R} \right)$$

Si trovi per quali stati esistono correzioni al primo ordine in  $\varepsilon$ . Si calcoli inoltre la correzione al secondo ordine dello stato fondamentale.

*Problemi di Meccanica Quantistica*

## Capitolo IV

### Oscillatore Armonico Unidimensionale

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

### Problema IV.1

All'istante  $t = 0$  un oscillatore armonico unidimensionale si trova nello stato

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2a^\dagger + 1) |0\rangle \quad (\text{IV.1.1})$$

dove  $a$  e  $a^\dagger$  sono definiti da:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p. \quad (\text{IV.1.2})$$

Calcolare i valori medi della posizione e della quantità di moto in funzione del tempo e confrontarli con gli analoghi classici; fare lo stesso per l'energia totale e discutere il significato fisico dei risultati ottenuti

#### Soluzione del Problema

L'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico unidimensionale in termini degli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{IV.1.3})$$

Sia  $|\psi\rangle_t$  lo stato evoluto temporale attraverso l'Hamiltoniana (IV.1.3) dello stato iniziale dato nella traccia

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2a^\dagger + 1) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2|1\rangle + |0\rangle), \quad (\text{IV.1.4})$$

dove con  $|n\rangle$  si sono indicati gli autostati dell'Hamiltoniana di autovalori  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ . L'evoluto temporale si ottiene applicando allo stato iniziale (IV.1.4) l'operatore di evoluzione temporale  $U(t) = \exp\{-iHt/\hbar\}$

$$|\psi\rangle_t = \exp\left\{\frac{-iHt}{\hbar}\right\} |\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} \exp\left\{-\frac{i\omega t}{2}\right\} (2 \exp\{-i\omega t\} |1\rangle + |0\rangle) \quad (\text{IV.1.5})$$

Osservando che dalle definizioni (IV.1.2) segue che

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger), \quad (\text{IV.1.6})$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a), \quad (\text{IV.1.7})$$

otteniamo

$$\langle x \rangle_t \equiv \langle \psi | x | \psi \rangle_t = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \cos(\omega t), \quad (\text{IV.1.8})$$

$$\langle p \rangle_t \equiv \langle \psi | p | \psi \rangle_t = -\frac{2}{5} \sqrt{2\hbar m\omega} \sin(\omega t). \quad (\text{IV.1.9})$$

Allo stesso modo, usando l'espressione dell'Hamiltoniana si dimostra

$$\langle H \rangle_t \equiv \langle \psi | H | \psi \rangle_t = \frac{13}{10} \hbar\omega. \quad (\text{IV.1.10})$$

Come si può osservare dall'equazione (IV.1.10) il valore medio dell'energia è una costante del moto.

★ Questa può anche esser vista come una conseguenza dell'ovvio fatto che l'Hamiltoniana commuta con se stessa!

Un modo analogo per ricavare le espressioni (IV.1.8) e (IV.1.9) fa uso della ben nota espressione per il valor medio di un generico osservabile  $A$  (Teorema di Ehrenfest)

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_t = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle_t + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A \right\rangle_t \quad . \quad (\text{IV.1.11})$$

Usando tale relazione infatti si ottiene

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle_t = \frac{1}{i\hbar} \langle [x, H] \rangle_t = \frac{i\hbar}{m} \langle p \rangle_t \quad , \quad (\text{IV.1.12})$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle_t = \frac{1}{i\hbar} \langle [p, H] \rangle_t = -m\omega^2 \langle x \rangle_t \quad , \quad (\text{IV.1.13})$$

Come si può vedere dalle precedenti due relazioni, nel caso dell'oscillatore armonico le equazioni a cui obbediscono i valori medi di posizione e momento, date dal Teorema di Ehrenfest, sono assolutamente identiche alle equazioni per posizione e momento di un oscillatore classico. Derivando l'equazione (IV.1.12) rispetto al tempo ed usando la (IV.1.13) si ottiene infatti

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle_t = -\omega^2 \langle x \rangle_t \quad , \quad (\text{IV.1.14})$$

L'equazione (IV.1.14) si risolve calcolando  $(d/dt) \langle x \rangle_{t=0}$  e  $\langle x \rangle_{t=0}$  dallo stato iniziale, infatti in questo caso abbiamo:

$$\langle x \rangle_{t=0} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \psi | (a + a^\dagger) | \psi \rangle_0 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \quad (\text{IV.1.15})$$

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle_{t=0} = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} \langle \psi | (a^\dagger - a) | \psi \rangle_0 = 0 \quad (\text{IV.1.16})$$

Con queste condizioni iniziali l'equazione (IV.1.14) fornisce gli stessi risultati del metodo precedente.

Lo stesso teorema di Ehrenfest applicato allo stesso operatore Hamiltoniano mostra l'indipendenza dal tempo del valor medio dell'energia.

## Problema IV.2

Calcolare gli scarti quadratici medi  $(\Delta x)^2$  e  $(\Delta p)^2$  per una particella soggetta ad una forza elastica unidimensionale che si trovi nello stato energetico  $n$ -simo. Valutare per le suddette quantità l'eventuale dipendenza dal tempo.

## Soluzione del Problema

Dalla definizione degli operatori di creazione e distruzione  $a^\dagger$ ,  $a$  seguono le seguenti relazioni

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad , \quad (\text{IV.2.1})$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a^\dagger - a) \quad . \quad (\text{IV.2.2})$$

Consideriamo un generico autostato dell'energia, che indichiamo con  $|n\rangle$ , il suo evoluto nel tempo sarà

$$|\psi\rangle_t = \exp\left\{-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega t\right\} |n\rangle \quad . \quad (\text{IV.2.3})$$

Usando tale stato, lo scarto quadratico medio  $(\Delta x)^2$  su tale stato sarà

$$(\Delta x)^2 = \langle \psi | x^2 | \psi \rangle_t - (\langle \psi | x | \psi \rangle_t)^2 = \langle n | x^2 | n \rangle - (\langle n | x | n \rangle)^2 \quad , \quad (\text{IV.2.4})$$

che come si vede è indipendente dal tempo. Analogamente per  $(\Delta p)^2$  si ha

$$(\Delta p)^2 = \langle \psi | p^2 | \psi \rangle_t - (\langle \psi | p | \psi \rangle_t)^2 = \langle n | p^2 | n \rangle - (\langle n | p | n \rangle)^2 \quad . \quad (\text{IV.2.5})$$

Usando le espressioni (IV.2.1) e (IV.2.2) si osserva che sugli autostati dell'energia  $x$  e  $p$  hanno valori medi nulli

$$\langle n | x | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle n | (a + a^\dagger) | n \rangle = 0 \quad , \quad (\text{IV.2.6})$$

$$\langle n | p | n \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle n | (a^\dagger - a) | n \rangle = 0 \quad . \quad (\text{IV.2.7})$$

Per i valori medi di  $x^2$  e  $p^2$  invece si ha

$$\begin{aligned} \langle n | x^2 | n \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n | (a^2 + (a^\dagger)^2 + aa^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 1) \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.2.8})$$

$$\begin{aligned} \langle n | p^2 | n \rangle &= \frac{\hbar m\omega}{2} \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a - a^2 - (a^\dagger)^2) | n \rangle \\ &= \frac{\hbar m\omega}{2} (2n + 1) \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.2.9})$$

Si ottiene allora

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (2n + 1) \quad , \quad (\text{IV.2.10})$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} (2n + 1) \quad , \quad (\text{IV.2.11})$$

e quindi

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} (2n + 1) \quad . \quad (\text{IV.2.12})$$

★ Naturalmente il principio di indeterminazione è rispettato. Si noti che mano a mano che l'energia aumenta aumenta pure l'indeterminazione.

### Problema IV.3

Come è noto, lo stato

$$\phi(x) = N \exp\left\{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right\} \quad (\text{IV.3.1})$$

è una autofunzione dell'oscillatore armonico unidimensionale con autovalore  $\hbar\omega/2$ . Trovare per questo stato i valori di aspettazione  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$  e mostrare che  $\Delta x \Delta p = \hbar/2$ .

### Problema IV.4

Un oscillatore armonico unidimensionale si trova in uno stato combinazione lineare dei primi due autostati dell'Hamiltoniana. Determinare il valore massimo di  $\langle x \rangle$  in funzione del valore medio dell'energia.

#### Soluzione del Problema

La combinazione più generale dei primi due stati dell'oscillatore armonico è  $\psi = a|0\rangle + b|1\rangle$  con la normalizzazione  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , sfruttando la scelta della fase globale di  $\psi$  possiamo scegliere  $a$  reale, questo lascia due parametri reali come incogniti, ed è conveniente esprimere  $a$  e  $b$  in termini di due angoli  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  e  $\varphi \in [0, 2\pi]$  come

$$|\psi\rangle = \cos(\theta)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta)|1\rangle \quad (\text{IV.4.1})$$

Dall'espressione precedente si ottiene

$$\langle \psi|x|\psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \psi|(a + a^\dagger)|\psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \sin(2\theta) \cos(\varphi) \quad (\text{IV.4.2})$$

$$\langle \psi|H|\psi \rangle = \langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(1 + 2\sin^2(\theta)) \quad (\text{IV.4.3})$$

Invertendo la relazione (IV.4.3) otteniamo allora

$$\sin^2(\theta) = \left(\frac{\langle E \rangle}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right) \quad (\text{IV.4.4})$$

Inserendo la (IV.4.4) nella (IV.4.2) si ha

$$(\langle \psi|x|\psi \rangle)^2 = \frac{2\hbar}{m\omega} \left(\frac{\langle E \rangle}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\langle E \rangle}{\hbar\omega}\right) \cos^2(\varphi) \quad (\text{IV.4.5})$$

A parità di  $\langle E \rangle$ , dunque, il massimo per  $\langle \psi|x|\psi \rangle$  lo si ottiene per  $\varphi = 0$ , come si vede facilmente dalla (IV.4.5) e (IV.4.5). Tale valore risulta

$$\langle \psi|x|\psi \rangle_{max} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega} \left(\frac{\langle E \rangle}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2} - \frac{\langle E \rangle}{\hbar\omega}\right)} \quad (\text{IV.4.6})$$

Si noti, che dalla scelta di  $|\psi\rangle$  come combinazione lineare degli stati  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , risulta  $(1/2)\hbar\omega \leq \langle E \rangle \leq (3/2)\hbar\omega$ , e quindi l'argomento della radice nell'Eq.(IV.4.6) è sempre positivo o nullo.

### Problema IV.5

Un oscillatore armonico unidimensionale si trova ad un certo istante in uno stato in cui si ha la stessa probabilità di trovare il valore fondamentale ed il primo valore eccitato dell'energia, gli altri avendo probabilità nulla. Determinare il valor medio ed il valore più probabile dell'impulso  $p$  sapendo che  $\langle q \rangle$  ha il massimo valore possibile.

Notare che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^n e^{-\frac{x^2}{2} + \lambda x} &= \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{y^2}{2}} \\ &= \sqrt{2\pi} \frac{d^n}{d\lambda^n} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \end{aligned} \quad (\text{IV.5.1})$$

#### Soluzione del Problema

Lo stato più generale possibile su cui si abbia la stessa probabilità di misurare il livello energetico fondamentale o il primo eccitato è dato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + \exp\{i\theta\}|1\rangle) \quad . \quad (\text{IV.5.2})$$

In termini delle variabili adimensionali

$$Q \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} q \quad P \equiv \sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}} p \quad . \quad (\text{IV.5.3})$$

gli operatori di creazione e distruzione si scriveranno come

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q + iP) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( Q + \frac{\partial}{\partial Q} \right) \quad , \quad (\text{IV.5.4})$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q - iP) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( Q - \frac{\partial}{\partial Q} \right) \quad . \quad (\text{IV.5.5})$$

Da cui, lo stato fondamentale  $|0\rangle$ , la cui funzione d'onda nello spazio delle configurazioni è indicata con  $\Psi_0(Q)$ , avrà la forma

$$\Psi_0(Q) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\frac{Q^2}{2}\right) \quad , \quad (\text{IV.5.6})$$

ed il primo stato eccitato  $\Psi_1(Q)$

$$\Psi_1(Q) = a^\dagger \Psi_0(Q) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{\frac{1}{4}}} Q \exp\left(-\frac{Q^2}{2}\right) \quad . \quad (\text{IV.5.7})$$

Usando le relazioni (IV.5.3)-(IV.5.5) e la definizione (IV.5.2) è facile vedere che

$$\langle Q \rangle = \cos \theta \quad , \quad (\text{IV.5.8})$$

e che quindi il massimo per tale quantità è ottenuto per  $\theta = 0$ . Lo stato  $\Psi(Q)$  sarà dato allora da

$$\Psi(Q) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} (1 + \sqrt{2}Q) \exp\left(-\frac{Q^2}{2}\right) \quad . \quad (\text{IV.5.9})$$

Nello spazio degli impulsi  $P$  lo stato  $|\Psi\rangle$  diventa

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(P) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi^{1/4}}} \int_{-\infty}^{\infty} dQ (1 + \sqrt{2}Q) \exp\left(-iPQ - \frac{Q^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\pi^{1/4}} (1 - i\sqrt{2}P) \exp\left(-\frac{P^2}{2}\right) .\end{aligned}\quad (\text{IV.5.10})$$

Il massimo per il modulo quadro di tale funzione si ha allora per  $P = \pm 1$  ovvero  $p = \pm\sqrt{\omega m\hbar}$

### Problema IV.6

Si consideri l'operatore di dipolo definito da

$$Q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega^2}}(a + a^\dagger) \quad (\text{IV.6.1})$$

dove le varie quantità si riferiscono ad un oscillatore armonico unidimensionale di massa  $\mu$ , frequenza angolare  $\omega$ .

1. Si trovino le regole di selezione, ovvero quali sono le transizioni permesse (corrispondenti agli elementi di matrice non nulli) fra i vari stati energetici dell'oscillatore armonico.
2. Si costruisca un operatore  $Q_k$  che ammette solo transizioni fra livelli energetici corrispondenti agli autovalori  $E_n$  e  $E_{n\pm k}$ , con  $n$  e  $k$  arbitrari.
3. Dato un generico  $Q_k$  con  $k$  pari, si dimostri che il commutatore di  $Q_k$  con la parità  $P$  è nullo.
4. Sono possibili transizioni di dipolo, ovvero fra stati corrispondenti a autovalori successivi dell'energia ( $\Delta n = \pm 1$ ) per un oscillatore armonico tridimensionale?

#### Soluzione del Problema

Indichiamo con  $|n\rangle$  gli autostati dell'energia. Le transizioni possibili sono fra stati per cui

$$\langle m|Q|n\rangle \neq 0 \quad (\text{IV.6.2})$$

1. Calcoliamo la seguente quantità :

$$\begin{aligned}\langle m|Q|n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega^2}}(\sqrt{n+1}\langle m||n+1\rangle + \sqrt{n}\langle m||n-1\rangle) \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega^2}}(\sqrt{n+1}\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\delta_{m,n-1})\end{aligned}\quad (\text{IV.6.3})$$

Pertanto le uniche transizioni permesse sono quelle per cui  $\Delta n = \pm 1$ .

2. L'operatore  $Q_k$  deve avere la proprietà che

$$Q_k |n\rangle = q_+ |n+k\rangle + q_- |n-k\rangle \quad (\text{IV.6.4})$$

con  $q_{\pm}$  numeri reali e si intende che  $|m\rangle = 0$  per  $m < 0$ .

Un esempio è  $Q_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega^2}}(a^k + a^{\dagger k})$ .

3. Un qualunque vettore nello spazio di Hilbert si può scrivere come  $|\psi\rangle = \sum_n \psi_n |n\rangle$ . Usando le  $q_{\pm}$  definite in (IV.6.4), ed il fatto che

$$P |n\rangle = (-1)^n |n\rangle \quad (\text{IV.6.5})$$

si calcola facilmente:

$$\begin{aligned} Q_k P |\psi\rangle &= \sum_n (-1)^n Q_k \psi_n |n\rangle \\ &= \sum_n (-1)^n \psi_n (q_+ |n+k\rangle + q_- |n-k\rangle) \end{aligned} \quad (\text{IV.6.6})$$

e

$$\begin{aligned} P Q_k |\psi\rangle &= \sum_n P Q_k \psi_n |n\rangle \\ &= \sum_n \psi_n ((-1)^{n+k} q_+ |n+k\rangle + (-1)^{n-k} q_- |n-k\rangle) \end{aligned} \quad (\text{IV.6.7})$$

ed il risultato segue facilmente dal fatto che per  $k$  pari  $(-1)^n = (-1)^{n\pm k}$ .

★ Nel caso in cui  $k$  sia dispari,  $Q_k$  e  $P$  anticommutano, ovvero  $\{P, Q_k\} \equiv P Q_k + Q_k P = 0$

4. Si. Infatti, ad esempio l'operatore  $Q_z$  ha elemento di matrice non nullo tra gli stati  $|0_x, 0_y, 0_z\rangle$  e  $|0_x, 0_y, 1_z\rangle$

$$\langle 0_x, 0_y, 0_z | Q_z | 0_x, 0_y, 1_z \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega^2}} \quad (\text{IV.6.8})$$

### Problema IV.7

Si consideri l'operatore:

$$H = \frac{p^2}{2m} + ax^2 + bx + c \quad (\text{IV.7.1})$$

con  $a, b$  e  $c$  reali.

1. Le quantità  $a$ ,  $b$  e  $c$  possono essere maggiori o minori di zero. In quali casi  $H$  ammette stati legati? A quale sistema fisico corrispondono le varie scelte di segno?
2. Considerando quindi i casi in cui ci sono stati legati si trovino autofunzioni ed autovalori.
3. Si determini il valore medio di  $x$  come funzione del tempo nei casi in cui la particella all'istante  $t = 0$  si trovi:
  - (a) Nello stato fondamentale  $\psi_0$ .
  - (b) Nell' $n$ -simo stato eccitato  $\psi_n$ .
  - (c) Nella combinazione lineare  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0 + \psi_n)$ .

### Soluzione del Problema

1. È utile riscrivere l'Hamiltoniana (IV.7.1) come:

$$H = \frac{p^2}{2m} + a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \quad (\text{IV.7.2})$$

e quindi, definendo la nuova variabile

$$y = x + \frac{b}{2a} \quad (\text{IV.7.3})$$

si vede che  $H$  è l'Hamiltoniana tipo oscillatore armonico il cui punto di equilibrio è stato traslato di  $\frac{b}{2a}$  e la cui energia di punto zero è stata spostata di  $d = c - \frac{b^2}{4a}$ .

Perché quindi

$$H = \frac{p^2}{2m} + ay^2 + d \quad (\text{IV.7.4})$$

abbia stati legati è quindi sufficiente che sia

$$a > 0 \quad (\text{IV.7.5})$$

2. Con la sostituzione (IV.7.3) e la condizione (IV.7.4) si vede che il problema è quello di una particella nel potenziale di un oscillatore armonico, a parte lo spostamento dell'energia. Gli autovalori dell'energia sono pertanto:

$$E_n = \hbar \sqrt{\frac{2a}{m}} \left( n + \frac{1}{2} \right) + d \quad (\text{IV.7.6})$$

mentre le autofunzioni sono le autofunzioni dell'oscillatore armonico nella variabile  $y$ .

3. Notiamo per prima cosa che il valore di aspettazione di  $x$  è :

$$\langle x \rangle = \left\langle y - \frac{b}{2a} \right\rangle = \langle y \rangle - \frac{b}{2a} . \quad (\text{IV.7.7})$$

(a) Dato che il valor medio di  $y$  in un autostato di  $H$  è nullo indipendentemente dal tempo:

$$\langle x \rangle_{\psi_0} = -\frac{b}{2a} \quad (\text{IV.7.8})$$

In altre parole il punto di equilibrio (e valor medio) della particella è spostato della quantità  $-\frac{b}{2a}$ .

(b) In maniera del tutto analoga:

$$\langle x \rangle_{\psi_n} = -\frac{b}{2a} \quad (\text{IV.7.9})$$

(c) In questo caso bisogna fare un piccolo calcolo. Determiniamo innanzitutto la funzione d'onda al tempo  $t$ :

$$\psi(t) = \exp \left\{ -\frac{iHt}{\hbar} \right\} \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \exp \left\{ -\frac{iE_0 t}{\hbar} \right\} \psi_0 + \exp \left\{ -\frac{iE_n t}{\hbar} \right\} \psi_n \right) . \quad (\text{IV.7.10})$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle (t) &= \frac{1}{2} \left( \langle x \rangle_{\psi_0} + \langle \psi_0(t) | x | \psi_n(t) \rangle + \langle \psi_n(t) | x | \psi_0(t) \rangle + \langle x \rangle_{\psi_n} \right) \\ &= -\frac{b}{2a} + \cos \left( \frac{E_n - E_0}{\hbar} t \right) \langle \psi_0 | x | \psi_n \rangle . \end{aligned} \quad (\text{IV.7.11})$$

Usando il fatto che

$$\langle \psi_0 | x | \psi_n \rangle = \langle \psi_0 | y | \psi_n \rangle \quad (\text{IV.7.12})$$

ci basta calcolare

$$\langle \psi_0 | y | \psi_n \rangle = \left[ \frac{\hbar^2}{8am} \right]^{1/4} \delta_{n,1} \quad (\text{IV.7.13})$$

★ Questa è una relazione che si può facilmente verificare usando gli operatori di creazione e distruzione.

Per concludere, a meno che lo stato  $\psi_n$  non sia lo stato  $\psi_1$  il valor medio di  $x$  è il minimo del potenziale; solo se  $n = 1$  il valor medio oscilla con frequenza

$$\frac{E_1 - E_0}{\hbar} = \sqrt{\frac{2a}{m}} \quad (\text{IV.7.14})$$

### Problema IV.8

Calcolare lo scarto quadratico medio della posizione di un oscillatore armonico quantistico unidimensionale che si trova all'equilibrio termico a temperatura  $T$ .

Confrontare con il risultato della teoria classica.

#### Soluzione del Problema

Per calcolare il valore medio termico di una grandezza rappresentata dall'operatore  $A$  in un sistema che sia all'equilibrio termico a temperatura  $T = 1/(k\beta)$  ( $k$  indica la costante di Boltzmann), la formula da applicare è

$$\overline{\langle A \rangle} \equiv Z^{-1}(\beta) \sum_n \exp\{-\beta E_n\} \langle \psi_n | A | \psi_n \rangle \quad , \quad (\text{IV.8.1})$$

dove

$$Z(\beta) = \sum_n \exp\{-\beta E_n\} \quad (\text{IV.8.2})$$

rappresenta la funzione di partizione. Il simbolo  $\langle A \rangle$  indica come al solito in valor medio quantistico, mentre  $\overline{\langle A \rangle}$  denota la media termica eseguita sugli stati del sistema, pesata dal fattore di Boltzmann  $e^{-\beta E_n}$ .

Nel caso dell'oscillatore armonico l'operatore posizione  $x$  si può scrivere come

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad . \quad (\text{IV.8.3})$$

usando allora tale espressione nelle (IV.8.1) e (IV.8.2) otteniamo

$$\overline{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right) \exp\left\{-\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\hbar\omega\beta n\} \langle n | (a + a^\dagger) | n \rangle = 0. \quad (\text{IV.8.4})$$

Allo stesso modo otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{\langle x^2 \rangle} &= \frac{\hbar}{m\omega} \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right) \exp\left\{-\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\hbar\omega\beta n\} \langle n | (aa^\dagger + a^\dagger a) | n \rangle \\ &= \frac{\hbar}{m\omega} \sinh\left(\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right) \exp\left\{-\frac{\hbar\omega\beta}{2}\right\} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\hbar\omega\beta n\} (2n + 1) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \frac{\cosh^2(\hbar\omega\beta/2)}{\sinh^2(\hbar\omega\beta/2)} \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.8.5})$$

Dalla precedente relazione ricaviamo lo scarto quadratico medio della posizione di un oscillatore quantistico all'equilibrio termodinamico

$$\overline{\Delta x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left( \frac{\cosh(\hbar\omega\beta/2)}{\sinh(\hbar\omega\beta/2)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{IV.8.6})$$

È interessante osservare che nel limite  $\hbar \rightarrow 0$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \overline{\Delta x} = [m\omega^2\beta]^{-1} \quad . \quad (\text{IV.8.7})$$

L'analogo classico della media dell'equazione (IV.8.1), ovvero la media statistica di un osservabile  $a(x, p)$  è

$$\bar{a} \equiv \mathcal{Z}^{-1}(\beta) \int dx dp \exp\{-\beta H(x, p)\} a(x, p) \quad , \quad (\text{IV.8.8})$$

dove  $H$  è l'energia e

$$\mathcal{Z}(\beta) = \int dx dp \exp\{-\beta H(x, p)\} \quad . \quad (\text{IV.8.9})$$

Come per il caso quantistico, anche l'analogo classico della (IV.8.4) si annulla per proprietà di parità . Analogamente per la (IV.8.6) otteniamo

$$\bar{\sigma}_x = [m\omega^2\beta]^{-1} \quad , \quad (\text{IV.8.10})$$

che coincide con la (IV.8.7)

### Problema IV.9

Un oscillatore armonico, in variabili adimensionali, è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = (A^\dagger A) \quad \text{con} \quad A = \alpha x + \beta \frac{d}{dx} \quad . \quad (\text{IV.9.1})$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Determinare l'andamento temporale di  $\langle A \rangle$  e di  $\langle A^2 \rangle$  e dimostrare che, se il sistema si trova inizialmente in un autostato di  $A$ ,  $\Delta x$  e  $\Delta p$  non dipendono dal tempo. Si devono imporre delle condizioni su  $\alpha$  e  $\beta$ ?

#### *Soluzione del Problema*

Si noti, innanzitutto, che l'operatore  $A$  insieme al suo aggiunto

$$A^\dagger = x - \frac{d}{dx} \quad , \quad (\text{IV.9.2})$$

obbedisce all'algebra

$$[A, A^\dagger] = 2\Re\alpha\beta^* \equiv \gamma \quad (\text{IV.9.3})$$

Per determinare l'evoluzione temporale di  $\langle A \rangle$  e  $\langle A^2 \rangle$  ricordiamo che dato un generico operatore  $O$  vale la relazione

$$\frac{d}{dt} \langle O \rangle = \left\langle \frac{\partial O}{\partial t} \right\rangle + i \langle [H, O] \rangle \quad . \quad (\text{IV.9.4})$$

Nel caso degli operatori  $A$ ,  $A^2$  e  $A^\dagger A$  si ottiene allora

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = -\gamma i \langle A \rangle \quad , \quad (\text{IV.9.5})$$

$$\frac{d}{dt} \langle A^2 \rangle = -2\gamma i \langle A^2 \rangle \quad , \quad (\text{IV.9.6})$$

$$\frac{d}{dt} \langle A^\dagger A \rangle = 0 \quad , \quad (\text{IV.9.7})$$

che hanno per soluzione

$$\langle A \rangle (t) = \langle A \rangle (0) \exp(-i\gamma t) \quad , \quad (\text{IV.9.8})$$

$$\langle A^2 \rangle (t) = \langle A^2 \rangle (0) \exp(-2i\gamma t) \quad . \quad (\text{IV.9.9})$$

$$\langle A^\dagger A \rangle (t) = \langle A^\dagger A \rangle (0) \quad . \quad (\text{IV.9.10})$$

Nell'ipotesi che lo stato iniziale sia autostato di  $A$  di autovalore  $\lambda$  si ottiene:  $\langle A \rangle (0) = \lambda$ ,  $\langle A^\dagger \rangle (0) = \lambda^*$ ,  $\langle A^2 \rangle (0) = \lambda^2$ ,  $\langle (A^\dagger)^2 \rangle (0) = \lambda^{*2}$  ed infine  $\langle A^\dagger A \rangle = |\lambda|^2$ . Con questa ipotesi è facile vedere che

$$\langle x \rangle = \frac{\beta^* \lambda e^{-i\gamma t} + \beta \lambda^* e^{i\gamma t}}{\gamma} \quad , \quad (\text{IV.9.11})$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\beta^{*2} \lambda^2 e^{-2i\gamma t} + \beta^2 \lambda^{*2} e^{2i\gamma t} + |\beta|^2 (|\lambda^2 - 1|)}{\gamma^2} \quad , \quad (\text{IV.9.12})$$

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad . \quad (\text{IV.9.13})$$

Alla stessa maniera si può dimostrare

$$(\Delta p)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad . \quad (\text{IV.9.14})$$

Perché l'autostato normalizzabile di  $A$  esista deve essere  $\Re \alpha \beta^* > 0$

## Problema IV.10

Si trovino autofunzioni ed autovalori dell'oscillatore armonico *dimezzato*, ovvero di una particella di massa  $m$  che si trova in un potenziale:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{per } x < 0 \\ \frac{1}{2} k x^2 & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.10.1})$$

In altre parole la particella si muove sul semiasse positivo e la condizione al contorno che si impone sulla funzione d'onda è che si annulli all'origine.

### *Soluzione del Problema*

La diagonalizzazione dell'operatore Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (\text{IV.10.2})$$

si ottiene facilmente, osservando che esso coincide con l'operatore Hamiltoniano dell'oscillatore armonico (O.A.), con la sola restrizione che gli autovettori si annullino in  $x = 0$ .

Per la nota proprietà degli autovettori dell'Hamiltoniana

$$\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x) \quad , \quad (\text{IV.10.3})$$

si deduce che gli autovettori della Hamiltoniana O.A. con  $n$  dispari sono anche autovettori della Hamiltoniana in esame, e sono i soli, in quanto essi formano una base per le funzioni che si annullano nell'origine. Di conseguenza gli autovalori dell'energia sono

$$E_n = \hbar\omega \left( 2n + \frac{3}{2} \right) \quad (\text{IV.10.4})$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$

### Problema IV.11

L'operatore Hamiltoniano che descrive il moto di una particella può essere espresso nella seguente forma:

$$H = \epsilon_1 a^\dagger a + \epsilon_2 (a + a^\dagger) \quad (\text{IV.11.1})$$

con  $[a, a^\dagger] = 1$ ,  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$  costanti reali, e

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + i \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}} p \quad (\text{IV.11.2})$$

1. Determinare le energie degli stati stazionari e gli autostati corrispondenti.
2. Determinare il valore di aspettazione di  $p^2$  nel primo stato eccitato.
3. Determinare le energie degli stati stazionari se  $[a, a^\dagger] = \lambda^2$  con  $\lambda$  numero reale qualsiasi.

#### *Soluzione del Problema*

Al fine di determinare gli autostati e gli autovalori della Hamiltoniana data, osserviamo che la stessa può essere messa nella forma

$$H = \epsilon_1 \left( a^\dagger + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) \left( a + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \right) - \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1} \quad , \quad (\text{IV.11.3})$$

dove se definiamo  $\tilde{a} \equiv a + \epsilon_2/\epsilon_1$  e  $\tilde{a}^\dagger \equiv a^\dagger + \epsilon_2/\epsilon_1$  si vede che

$$[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = 1 \quad . \quad (\text{IV.11.4})$$

Da questa relazione segue che anche  $\tilde{a}$  ed  $\tilde{a}^\dagger$  sono operatori di creazione e distruzione e l'Hamiltoniana  $H$  può essere messa nella forma

$$H = \epsilon_1 \tilde{a}^\dagger \tilde{a} - \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1} \quad . \quad (\text{IV.11.5})$$

Per calcolare gli autovalori ed autovettori della (IV.11.5) si opera analogamente a quanto fatto per il normale oscillatore armonico. Definiamo infatti lo stato fondamentale  $|\tilde{0}\rangle$  per l'operatore di distruzione  $\tilde{a}$  come

$$\tilde{a}|\tilde{0}\rangle = 0 \quad , \quad (\text{IV.11.6})$$

il quale se riscritto in termini dell'operatore di distruzione risulta

$$a|\tilde{0}\rangle = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}|\tilde{0}\rangle \quad , \quad \Rightarrow \quad |\tilde{0}\rangle = \exp\left\{-\frac{\epsilon_2^2}{2\epsilon_1^2}\right\} \exp\left\{-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}a^\dagger\right\} |0\rangle \quad . \quad (\text{IV.11.7})$$

Dalla precedente equazione ricaviamo dunque che  $|\tilde{0}\rangle$  è di fatto uno stato coerente rispetto agli operatori  $a$  e  $a^\dagger$ .

Possiamo ora rispondere alle domande poste dal problema:

1. Gli autostati ed autovalori di  $H$  risultano allora

$$|\tilde{n}\rangle = \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|\tilde{0}\rangle \quad , \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{IV.11.8})$$

$$\tilde{E}_n = n\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1} \quad . \quad (\text{IV.11.9})$$

2. Per il calcolo di  $\langle \tilde{1}|p^2|\tilde{1}\rangle$  si ricordi che

$$p = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^\dagger - a) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\tilde{a}^\dagger - \tilde{a}) \quad , \quad (\text{IV.11.10})$$

da cui

$$p^2 = -\frac{m\omega\hbar}{2}((\tilde{a}^\dagger)^2 + \tilde{a}^2 - \tilde{a}^\dagger\tilde{a} - \tilde{a}\tilde{a}^\dagger) \quad . \quad (\text{IV.11.11})$$

Usando l'espressione (IV.11.11) si ha

$$\langle \tilde{1}|p^2|\tilde{1}\rangle = \frac{m\omega\hbar}{2} \langle \tilde{1}|\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + \tilde{a}\tilde{a}^\dagger|\tilde{1}\rangle = \frac{3m\omega\hbar}{2} \quad . \quad (\text{IV.11.12})$$

3. Osservando che in questo caso  $[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger] = \lambda^2$  e che quindi dall'algebra seguirebbe che

$$[\tilde{a}^\dagger\tilde{a}, (\tilde{a}^\dagger)^n] = n\lambda^2(\tilde{a}^\dagger)^n \quad , \quad (\text{IV.11.13})$$

si ricava immediatamente che gli autovettori rimangono gli stessi dell'equazione (IV.11.8), mentre gli autovalori relativi divengono

$$\tilde{E}_n = n\lambda^2\epsilon_1 - \frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1} \quad . \quad (\text{IV.11.14})$$

### Problema IV.12

Una molla di lunghezza a riposo e massa trascurabili, e costante elastica  $k$ , ha un estremo fissato al soffitto. All'altro estremo è attaccato un corpo puntiforme di massa  $m$ .

1. Si scriva la funzione Hamiltoniana che descrive tale sistema e si descriva il comportamento classico del sistema.
2. Si scriva l'equazione di Schrödinger e si determinino gli autostati ed autovalori.
3. Quando il sistema si trova nello stato

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_0(x, t) + \psi_1(x, t)] \quad (\text{IV.12.1})$$

con  $\psi_0$  e  $\psi_1$  rispettivamente stato fondamentale e primo stato eccitato, entrambi normalizzati, si calcoli il valor medio dell'energia, della posizione e del momento.

4. Discutere la dipendenza temporale di ciascuno dei valori medi in questione.

### Problema IV.13

Siano  $a^\dagger$  ed  $a$  gli operatori di creazione e distruzione relativi ad un oscillatore armonico, e  $\psi_0$  il corrispondente stato fondamentale. Dimostrare che

$$|\psi\rangle = \exp\{\lambda a^\dagger\} |0\rangle \quad (\text{IV.13.1})$$

è autostato di  $a$ , normalizzabile  $\forall \lambda \in C$ .

Calcolare la distribuzione di probabilità, il valore medio e lo scarto quadratico medio per la posizione e per l'energia nello stato  $|\psi\rangle$ .

#### Soluzione del Problema

Data una generica funzione analitica  $f(a^\dagger)$  è possibile mostrare che vale la relazione

$$[a, f(a^\dagger)] = \frac{\partial f}{\partial a^\dagger} \quad (\text{IV.13.2})$$

da cui segue

$$a |\psi\rangle = a \exp\{\lambda a^\dagger\} |0\rangle = [a, \exp\{\lambda a^\dagger\}] |0\rangle = \lambda |\psi\rangle \quad (\text{IV.13.3})$$

Per calcolare la norma basta mostrare che lo stato  $|\psi\rangle$  si può esprimere in termini degli autostati dell'energia  $|n\rangle$  come

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \longrightarrow \langle\psi|\psi\rangle = \exp\{|\lambda|^2\} \quad (\text{IV.13.4})$$

Quindi lo stato  $|\psi\rangle$  è normalizzabile per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ , e da ora in poi lo si supponga opportunamente normalizzato. Dall'espressione (IV.13.4) segue che sullo stato  $|\psi\rangle$  tutti i risultati della misura dell'energia,  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$  con  $n = 0, 1, \dots$  sono possibili, con probabilità

$$P_n = \exp\{-|\lambda|^2\} \frac{|\lambda|^{2n}}{n!} \quad . \quad (\text{IV.13.5})$$

Otteniamo quindi

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( |\lambda|^2 + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{IV.13.6})$$

$$\langle \psi | H^2 | \psi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \hbar^2 \omega^2 \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 = \hbar^2 \omega^2 \left( |\lambda|^4 + 2|\lambda|^2 + \frac{1}{4} \right) \quad (\text{IV.13.7})$$

da cui

$$\Delta E = \hbar\omega|\lambda| \quad (\text{IV.13.8})$$

Per il calcolo delle analoghe quantità relative all'operatore posizione  $x$ , basta osservare che per definizione

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \quad (\text{IV.13.9})$$

Inoltre dalla (IV.13.9) otteniamo

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} 2\text{Re}(\lambda) \quad (\text{IV.13.10})$$

e analogamente

$$\langle \psi | x^2 | \psi \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (\lambda^2 + \lambda^{*2} + 2|\lambda|^2 + 1) \quad (\text{IV.13.11})$$

e quindi

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \quad (\text{IV.13.12})$$

★ *Questi stati, che si chiamano Stati Coerenti hanno varie interessanti proprietà fisiche, fra l'altro per esempio hanno la caratteristica di saturare il limite di Heisenberg, cioè in uno stato coerente  $\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}$ .*

## Problema IV.14

Si consideri lo stato

$$|\psi\rangle = \exp\{\omega a^{\dagger 2}\} |0\rangle \quad . \quad (\text{IV.14.1})$$

dove  $a|0\rangle = 0$ . Per quali valori di  $\omega \in \mathbb{C}$  tale stato appartiene allo spazio di Hilbert?

In questi casi si calcoli il prodotto  $(\Delta q)^2 (\Delta p)^2$ .

*Suggerimento: Per calcolare la norma di  $|\psi\rangle$  si sfrutti la completezza degli stati coerenti:*

$$\mathbb{I} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 |\lambda\rangle\langle\lambda| \quad , \quad (\text{IV.14.2})$$

dove  $|\lambda\rangle$  è uno stato coerente normalizzato e  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$  è un generico numero complesso.

#### Soluzione del Problema

Inserendo la matrice identica  $\mathbb{I}$  nel prodotto scalare  $\|\psi\|^2 = \langle\psi, \psi\rangle$ , ed usando la relazione (valida per una generica  $f$  analitica):

$$f(a) |\lambda\rangle = f(\lambda) |\lambda\rangle \quad (\text{IV.14.3})$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 \exp\left\{-|\lambda|^2 + \omega\lambda^{*2} + \omega^*\lambda^2\right\} \\ &= \left[1 - 4|\omega|^2\right]^{-1/2} \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.14.4})$$

Come si vede dall'espressione (IV.14.4) lo stato  $|\psi\rangle$  appartiene allo spazio di Hilbert solo se  $|\omega| < 1/2$ .

Per questi stati, valutiamo il prodotto  $(\Delta q)^2(\Delta p)^2$ . I valori di aspettazione di  $q$  e  $p$  su questi stati sono nulli. Per dimostrare ciò, ricordiamo infatti che

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} (a + a^\dagger) \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_0}{2}} (a^\dagger - a) \quad . \quad (\text{IV.14.5})$$

Da cui, essendo  $|\psi\rangle$  sovrapposizione solo di autostati dell'energia con  $n$  pari, e contenendo gli operatori  $q$  e  $p$  un numero dispari di operatori  $a$  e  $a^\dagger$ ,  $\langle\psi|q|\psi\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle = 0$ . Quindi,  $(\Delta q)^2 = \langle\psi|q^2|\psi\rangle / \|\psi\|^2$  e  $(\Delta p)^2 = \langle\psi|p^2|\psi\rangle / \|\psi\|^2$ .

Le espressioni di questi operatori in termini di operatori  $a$  ed  $a^\dagger$  sono:

$$q^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} (a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a) \quad , \quad (\text{IV.14.6})$$

$$p^2 = \frac{\hbar m\omega_0}{2} (aa^\dagger + a^\dagger a - a^2 - a^{\dagger 2}) \quad . \quad (\text{IV.14.7})$$

Dall'algebra degli operatori di creazione e distruzione segue inoltre

$$\left[ (a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a), e^{\omega a^{\dagger 2}} \right] = 2\omega e^{\omega a^{\dagger 2}} \left[ (aa^\dagger + a^\dagger a) + 2(\omega + 1)a^{\dagger 2} \right] \quad (\text{IV.14.8})$$

$$\left[ (a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a), e^{\omega a^{\dagger 2}} \right] = 2\omega e^{\omega a^{\dagger 2}} \left[ (aa^\dagger + a^\dagger a) + 2(\omega - 1)a^{\dagger 2} \right] \quad (\text{IV.14.9})$$

$$(\text{IV.14.10})$$

Usando queste espressioni è allora facile dimostrare che

$$\langle \psi | a^2 + a^{\dagger 2} + aa^\dagger + a^\dagger a | \psi \rangle = (2\omega + 1) \|\psi\|^2 + (4\omega^2 + 4\omega + 1) \langle \psi | e^{\omega a^{\dagger 2}} a^{\dagger 2} | 0 \rangle \quad (\text{IV.14.11})$$

$$\langle \psi | a^2 + a^{\dagger 2} - aa^\dagger - a^\dagger a | \psi \rangle = (2\omega - 1) \|\psi\|^2 + (4\omega^2 - 4\omega + 1) \langle \psi | e^{\omega a^{\dagger 2}} a^{\dagger 2} | 0 \rangle \quad (\text{IV.14.12})$$

L'elemento di matrice incognito delle precedenti due espressioni può essere calcolato inserendo opportunamente la matrice identica. Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi | e^{\omega a^{\dagger 2}} a^{\dagger 2} | 0 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda_2 (\lambda_1 - i\lambda_2)^2 \exp \left\{ -|\lambda|^2 + \omega \lambda^{*2} + \omega^* \lambda^2 \right\} \\ &= \frac{2\omega^*}{[1 - 4|\omega|^2]^{3/2}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{IV.14.13})$$

Otteniamo dunque

$$(\Delta q)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \frac{|2\omega + 1|^2}{1 - 4|\omega|^2} \quad (\text{IV.14.14})$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega_0}{2} \frac{|2\omega - 1|^2}{1 - 4|\omega|^2} \quad (\text{IV.14.15})$$

e quindi

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \frac{|1 - 4\omega^2|}{1 - 4|\omega|^2} \quad (\text{IV.14.16})$$

### Problema IV.15

Un O.A. si trova inizialmente nello stato

$$|\psi_0\rangle = e^{\rho a^{\dagger 2}} |0\rangle \quad (\text{IV.15.1})$$

Si determini l'andamento temporale dello stato e degli scarti quadratici  $\Delta q$  e  $\Delta p$ .

Per quali istanti di tempo il prodotto di tali indeterminazioni è minimo?

Si consiglia di usare le relazioni:  $e^{-iHt/\hbar} a e^{iHt/\hbar} = e^{i\omega t} a$  e  $a f(a^\dagger) |0\rangle = df/da^\dagger |0\rangle$

#### Soluzione del Problema

Usando la prima delle relazioni consigliate nella traccia valutiamo l'evoluzione temporale del sistema

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_t &= e^{-iHt/\hbar} e^{\rho a^{\dagger 2}} |0\rangle = \left[ e^{-iHt/\hbar} e^{\rho a^{\dagger 2}} e^{iHt/\hbar} \right] e^{-iHt/\hbar} |0\rangle \\ &= \exp \left\{ \rho e^{-i2\omega t} a^{\dagger 2} \right\} e^{\frac{-i\omega t}{\hbar}} |0\rangle = \exp \left\{ \rho(t) a^{\dagger 2} \right\} e^{\frac{-i\omega t}{\hbar}} |0\rangle \quad , \quad (\text{IV.15.2}) \end{aligned}$$

dove ovviamente  $\rho(t) = \exp(-i2\omega t)\rho = |\rho| \exp[i(\phi - 2\omega t)]$ . Si ricade quindi nel caso già trattato nell'esercizio precedente. Usando quei risultati infatti si può dimostrare che lo stato è a quadrato sommabile se  $|\rho| < 1/2$  ed in questo caso si ottiene

$$(\Delta q)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \left( \frac{1 + 4|\rho|^2 + 4 \cos[(\phi - 2\omega t)]|\rho|}{1 - 4|\rho|^2} \right) \quad (\text{IV.15.3})$$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\hbar m\omega}{2} \left( \frac{1 + 4|\rho|^2 - 4 \cos[(\phi - 2\omega t)]|\rho|}{1 - 4|\rho|^2} \right) \quad (\text{IV.15.4})$$

da cui

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2} \frac{[1 + 16|\rho|^4 - 8|\rho|^2 \cos[2(\phi - 2\omega t)]]^{1/2}}{1 - 4|\rho|^2} \quad (\text{IV.15.5})$$

Dalla espressione (IV.15.5) segue che il minimo prodotto dell'indeterminazioni pari ad  $\hbar/2$ , si ottiene per gli istanti  $t_n = (\phi - n\pi)/(2\omega)$ .

### Problema IV.16

Usando le equazioni del moto nella rappresentazione di Heisenberg esprimere gli operatori posizione  $x_H(t)$  e impulso  $p_H(t)$  in funzione degli operatori  $q_0$  e  $p_0$  relativi all'istante iniziale per un oscillatore armonico.

A partire dalle relazioni di commutazione di posizione e momento (ad un dato istante), calcolare i commutatori  $[x_H(t_1), x_H(t_2)]$  e  $[x_H(t_1), p_H(t_2)]$  e trovare un limite inferiore al prodotto degli scarti quadratici medi  $\Delta x_H(t_1)$  e  $\Delta x_H(t_2)$  per un arbitrario stato iniziale.

#### Soluzione del Problema

L'equazione del moto di Heisenberg per un operatore generico  $A$  che non dipende esplicitamente dal tempo è :

$$i\hbar \frac{dA}{dt} = [A, H] \quad (\text{IV.16.1})$$

E per un oscillatore armonico quindi si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_H &= \frac{p_H}{m} \\ \dot{p}_H &= -m\omega^2 x_H \end{aligned} \quad (\text{IV.16.2})$$

★ L'equazione (IV.16.1) è formalmente identica all'equazione del moto per un osservabile classico (funzione sullo spazio delle fasi) nel formalismo Hamiltoniano, con la sostituzione della parentesi di Poisson classica con il commutatore diviso per  $i\hbar$ .

Il sistema (IV.16.2) si può facilmente risolvere dando come soluzione:

$$\begin{aligned} x_H(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t \\ p_H(t) &= -m\omega x_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t \end{aligned} \quad (\text{IV.16.3})$$

dove con  $x_0$  e  $p_0$  abbiamo indicato gli operatori agli istanti iniziali.

Possiamo quindi calcolare facilmente i commutatori richiesti:

$$\begin{aligned} [x_H(t_1), x_H(t_2)] &= [x_0, p_0] \frac{\cos \omega t_1 \sin \omega t_2}{m\omega} + [p_0, x_0] \frac{\sin \omega t_1 \cos \omega t_2}{m\omega} \\ &= \frac{i\hbar}{m\omega} \sin \omega(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (\text{IV.16.4})$$

ed analogamente si calcola

$$[x_H(t_1), p_H(t_2)] = i\hbar \cos \omega(t_1 - t_2) \quad (\text{IV.16.5})$$

da cui risulta

$$\begin{aligned} \Delta(x_H(t_1))\Delta(x_H(t_2)) &\geq \frac{\hbar}{2m\omega} |\sin \omega(t_1 - t_2)| \\ \Delta(x_H(t_1))\Delta(p_H(t_2)) &\geq \frac{\hbar}{2} |\cos \omega(t_1 - t_2)| \end{aligned} \quad (\text{IV.16.6})$$

### Problema IV.17

Si consideri un oscillatore armonico descritto dall'Hamiltoniana in variabili adimensionali

$$H = 1/2(p^2 + q^2) \quad (\text{IV.17.1})$$

Si calcolino la probabilità di trovare la particella nello stato fondamentale dell'oscillatore armonico ed il valore di  $q$  per cui è massima la probabilità di trovare la particella nel caso in cui la particella sia descritta dalle seguenti funzioni d'onda:

$$\Psi = N e^{-(q-i\alpha)^2} \quad (\text{IV.17.2})$$

$$\Psi = N e^{-q^2 + \alpha q} \quad (\text{IV.17.3})$$

$$\Psi = N e^{-(q-\alpha)^2} \quad (\text{IV.17.4})$$

con  $\alpha$  reale ed  $N$  una costante di normalizzazione.

*Problemi di Meccanica Quantistica*

Capitolo V  
Particella in più dimensioni

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

### Problema V.1

Una particella libera, ma vincolata a muoversi nel rettangolo  $(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]$  si trova nello stato descritto dalla funzione

$$\psi(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \left[ \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right) + i \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{2b}\right) \right] \quad (\text{V.1.1})$$

Determinare il valor medio e lo scarto quadratico medio delle coordinate e dell'energia, e l'andamento nel tempo di queste grandezze

#### Soluzione del Problema

Essendo in questo caso l'Hamiltoniana separabile,  $H = H_x + H_y$ , il problema agli autovalori per l'Hamiltoniana completa  $H$  si risolve studiando lo stesso problema per le singole Hamiltoniane  $H_x$  e  $H_y$ . Gli autovalori e autovettori di  $H_x$  risultano

$$E_n^x = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}; \quad \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & \text{con } n \text{ pari} \\ \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & \text{con } n \text{ dispari} \end{cases}, \quad (\text{V.1.2})$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Mentre per  $H_y$

$$E_p^y = \frac{\hbar^2 \pi^2 p^2}{8mb^2}; \quad \phi_p(y) = \frac{1}{\sqrt{b}} \begin{cases} \sin\left(\frac{p\pi y}{2b}\right) & \text{con } p \text{ pari} \\ \cos\left(\frac{p\pi y}{2b}\right) & \text{con } p \text{ dispari} \end{cases}, \quad (\text{V.1.3})$$

con  $p = 1, 2, 3, \dots$ . Da cui il generico autovalore dell'energia è

$$E_{n,p} = E_n^x + E_p^y = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m} \left( \frac{n^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} \right) \quad (\text{V.1.4})$$

mentre una base di autofunzioni è data da

$$\phi_{n,p}(x, y) = \phi_n(x) \phi_p(y) \quad . \quad (\text{V.1.5})$$

In termini degli autostati delle equazioni (V.1.2)–(V.1.5) lo stato  $\psi$ , opportunamente normalizzato, si riscrive come

$$\psi(x, y) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left( \phi_{1,1}(x, y) + \frac{i}{2} \phi_{2,3}(x, y) \right) \quad . \quad (\text{V.1.6})$$

Assumendo lo stato  $\psi(x, y)$  come stato iniziale, lo stesso evoluto nel tempo risulterà

$$\psi(x, y, t) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left( \exp\left\{ \frac{-iE_{1,1}t}{\hbar} \right\} \phi_{1,1}(x, y) + \frac{i}{2} \exp\left\{ \frac{-iE_{2,3}t}{\hbar} \right\} \phi_{2,3}(x, y) \right) \quad . \quad (\text{V.1.7})$$

Per quanto riguarda valor medio e scarto quadratico dell'energia, essi risultano indipendenti dal tempo, e dall'espressione (V.1.6) risultano

$$\langle H \rangle = \frac{4}{5} \left( E_{1,1} + \frac{1}{4} E_{2,3} \right) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8m} \left( \frac{8}{5a^2} + \frac{13}{5b^2} \right) \quad , \quad (\text{V.1.8})$$

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left[ \frac{4}{25} E_{1,1}^2 + \frac{4}{25} E_{2,3}^2 - \frac{8}{25} E_{1,1} E_{2,3} \right]^{1/2} \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{20m} \left( \frac{3}{a^2} + \frac{8}{b^2} \right) \quad . \quad (\text{V.1.9}) \end{aligned}$$

Per il calcolo delle medesime quantità, ma relative ad  $x$  ed  $y$ , è utile osservare che

$$\langle \phi_{2,3} | x^n | \phi_{1,1} \rangle = \langle \phi_{2,3} | y^n | \phi_{1,1} \rangle = 0 \quad . \quad (\text{V.1.10})$$

Tale osservazione basta a ricavare che sia i valori medi di  $x$  ed  $y$ , che i rispettivi scarti quadratici sono indipendenti dal tempo, e quindi possono essere valutati all'istante iniziale. In particolare dalla Eq. (V.1.6) risultano

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = 0 \quad , \quad (\text{V.1.11})$$

e

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle = a^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{3}{2\pi^2} \right) \quad , \quad (\text{V.1.12})$$

$$(\Delta y)^2 = \langle y^2 \rangle = b^2 \left( \frac{1}{5} - \frac{14}{9\pi^2} \right) \quad . \quad (\text{V.1.13})$$

## Problema V.2

Una particella di massa  $m = 10^{-25}$  gr si trova in una buca quadrata unidimensionale (1D) a pareti infinite, di larghezza  $a = 10^{-8}$  cm, a temperatura  $T = 300$  °K.

Qual'è il valore medio della sua energia

1. dal punto di vista classico
2. quantisticamente (con una approssimazione  $\lesssim 1\%$ )
3. quantisticamente (sempre approssimativamente) se  $a = 1$  mm.

## Problema V.3

Una particella di massa  $m$  si muove in un potenziale attrattivo descritto da

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \quad (\text{V.3.1})$$

1. Mostrare che per gli stati S legati, i valori possibili dell'energia verificano la relazione

$$k_1 \cotg(k_1 a) = -k_2 \quad (\text{V.3.2})$$

dove  $k_1 = \sqrt{2m(V_0 + E)}/\hbar$  e  $k_2 = \sqrt{-2mE}/\hbar$  con  $k_1$  e  $k_2 > 0$ .

2. Trovare la condizione su  $V_0$  affinché esistano almeno due stati  $S$  legati.

*Soluzione del Problema*

1. Indicando con  $\Psi_{Elm}$  il generico autovettore di  $H$ ,  $L^2$  ed  $L_z$ , esso può essere riscritto come  $\Psi_{Elm} = \psi_{El}(r)\chi_l^m(\theta, \varphi)$ . L'equazione agli autovalori per l'operatore Hamiltoniano, scritta in coordinate radiali  $(r, \theta, \varphi)$ , risulta essere

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) - E \right] \psi_{El}(r) = 0 \quad (\text{V.3.3})$$

Volendo stati legati in onda  $S$  basta porre  $l = 0$  e richiedere che l'energia  $E \leq 0$ . Avendo il potenziale forma assegnata in regioni distinte, definiamo

$$\psi_{El}(r) = \begin{cases} \psi_{El}^I(r) & r < a \\ \psi_{El}^{II}(r) & r \geq a \end{cases} \quad (\text{V.3.4})$$

In termini della (V.3.4) l'equazione (V.3.3) diventa il sistema

$$\begin{aligned} \phi_{E0}^{''I} + k_1^2 \phi_{E0}^I &= 0 \quad , \\ \phi_{E0}^{''II} - k_2^2 \phi_{E0}^{II} &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{V.3.5})$$

dove  $\phi_{E0}^{I,II} \equiv r\psi_{E0}^{I,II}$ ,  $k_1^2 \equiv (2m/\hbar^2)(V_0 - |E|)$  e  $k_2^2 \equiv (2m|E|/\hbar^2)$ . Richiedendo regolarità della soluzione nell'origine e appartenenza della stessa ad  $L_2(\mathbb{R}^3)$  si ha

$$\psi_{E0}^I = \frac{A}{r} \sin(k_1 r) \quad , \quad (\text{V.3.6})$$

$$\psi_{E0}^{II} = \frac{B}{r} e^{-k_2 r} \quad . \quad (\text{V.3.7})$$

Le condizioni di raccordo in  $r = a$  diventano

$$\begin{aligned} B e^{-k_2 a} - A \sin(k_1 a) &= 0 \quad , \\ B k_2 e^{-k_2 a} + A k_1 \cos(k_1 a) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{V.3.8})$$

★ *Si noti che la seconda delle condizioni di raccordo è in realtà una condizione sulla continuità della derivata della funzione  $r\psi$ , che unita alla prima relazione implica la condizione di raccordo sulla  $\psi'$ .*

Calcolando il determinate si ottiene la condizione da soddisfare per l'esistenza di autostati legati in onda  $S$

$$k_1 \cotg(k_1 a) = -k_2 \quad . \quad (\text{V.3.9})$$

Per risolvere l'equazione (V.3.9), definiamo  $\xi \equiv k_1 a$  e  $\omega \equiv k_2 a$ . Dalla definizione di  $k_1$  e  $k_2$  e dalla (V.3.9) otteniamo che il sistema da risolvere è

$$\begin{aligned}\xi \cot \xi &= -\omega \\ \xi^2 + \omega^2 &= \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}\end{aligned}\quad (\text{V.3.10})$$

2. Tale sistema ha una soluzione se  $(3\hbar^2\pi/(4ma^2)) > V_0 \geq (\hbar^2\pi/(4ma^2))$ , mentre ne ha due se  $(5\hbar^2\pi/(4ma^2)) \geq V_0 \geq (3\hbar^2\pi/(4ma^2))$ .

### Problema V.4

Trovare i livelli energetici e le relative funzioni d'onda per una particella che si muove sotto l'azione del potenziale seguente

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \infty & \begin{cases} x, y, z \leq 0 \\ y, z \geq l \end{cases} \\ \frac{1}{2}kx^2 & \begin{cases} x \geq 0 \\ y, z \in [0, l] \end{cases} \end{cases}\quad (\text{V.4.1})$$

Calcolare il valore medio della e del momento nello stato fondamentale.

### Problema V.5

Il nucleo del deuterio è costituito da un protone e da un neutrone.

- Supponendo entrambi di massa  $m = 1.67 \cdot 10^{-24}$  gr e schematizzando la loro interazione come dovuta ad un potenziale attrattivo,  $-V_0$ , costante per distanze  $r \leq r_0 = 3 \cdot 10^{-13}$  cm e nullo per  $r > r_0$ , calcolare  $V_0$  sapendo che l'energia di legame delle particelle è di 2 MeV e che vi è un solo stato legato.
- Quanto sarebbe  $V_0$  da un punto di vista classico? Sapendo che  $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$  erg sec e  $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-12}$  erg.

*Soluzione del Problema*

1. Essendovi un solo stato legato questo deve essere in onda  $S$ , dunque per rispondere a questo quesito possiamo usare la (V.3.10). Anche in questo caso le equazioni da risolvere sono

$$\begin{aligned}\xi \cot \xi &= -\omega \\ \xi^2 + \omega^2 &= \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}\end{aligned}\tag{V.5.1}$$

con  $\xi \equiv \sqrt{2m(V_0 - |E|)}(a/\hbar)$  e  $\omega \equiv k_2 a \sqrt{2m|E|}(a/\hbar)$ .

Dai dati della traccia possiamo calcolare  $\omega \simeq 0.934$ , quindi sostituendo tale valore nella prima delle precedenti equazioni otteniamo  $\xi \simeq 2.00$ . Dalla seconda equazione allora si ha  $V_0 \simeq 11.21 \text{ MeV}$ .

2. Nel caso classico avremmo avuto una fascia continua di stati legati con energie di legame comprese tra  $2 \text{ MeV}$  e  $0$ , avendo scelto  $V_0$  proprio uguale a  $2 \text{ MeV}$ . Lo stato fondamentale infatti sarebbe stato caratterizzato da energia cinetica nulla (condizione vietata nel caso quantistico dal principio di indeterminazione di Heisenberg) e quindi  $|E| = V_0$ .

### Problema V.6

Il nucleo di un atomo di elio può essere rozzamente rappresentato da una buca di potenziale sferica a pareti infinite ( $V = 0$  se  $r < a$ ,  $V = \infty$  se  $r \geq a$  con  $a = 1.9 \text{ Fm}$ ) nella quale i nucleoni, considerati puntiformi, si muovono indipendentemente l'uno dall'altro.

1. Qual'è l'energia cinetica prevista per un nucleone nello stato fondamentale?
2. Sapendo che l'energia di legame del nucleo di elio vale circa  $28 \text{ MeV}$ , giudicate buono o scadente il suddetto modello?

(Massa di un nucleone:  $m \simeq 939 \text{ MeV}/c^2$ ).

### Problema V.7

Due particelle di masse  $m_1$  e  $m_2$  interagiscono nello spazio tridimensionale mediante un potenziale

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 + \frac{B}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}\tag{V.7.1}$$

con  $A, B > 0$ .

Determinare i valori quantisticamente permessi dell'energia del sistema e la corrispondente degenerazione.

*Soluzione del Problema*

L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + A|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 + \frac{B}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \quad (\text{V.7.2})$$

In termini della posizione del baricentro delle due particelle

$$\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2) , \quad (\text{V.7.3})$$

della massa complessiva del sistema  $M = m_1 + m_2$ , della massa ridotta  $\mu = m_1m_2/M$  e della distanza tra le particelle  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ,  $H$  si può riscrivere come

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + Ar^2 + \frac{B}{r^2} , \quad (\text{V.7.4})$$

dove  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  è il momento complessivo del sistema, coniugato ad  $\vec{R}$ , e  $\vec{p}$  quello relativo, coniugato ad  $\vec{r}$ .

Essendo l'Hamiltoniana (V.7.4) la somma di due termini che commutano tra loro, il generico autostato di  $H$  può essere scritto come  $\Psi_{\vec{P},E}(\vec{R}, \vec{r}) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{P} \cdot \vec{R}\right\} \psi_E(\vec{r})$ , dove

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + Ar^2 + \frac{B}{r^2}\right] \psi_E(\vec{r}) = E\psi_E(\vec{r}) . \quad (\text{V.7.5})$$

Il problema dunque della diagonalizzazione dell'Hamiltoniana di due corpi data dalla traccia è riconducibile a quella di una singola particella (V.7.4).

Come negli altri casi di potenziale centrale poniamo  $\psi_E(\vec{r}) = \phi_{E,l}(r)Y_m^l(\theta, \varphi)$ , dove  $Y_m^l(\theta, \varphi)$  denota l'armonica sferica relativa agli indici  $l = 0, 1, 2, \dots$ , ed  $m$  con  $l \leq m \leq l$ . In questo caso l'equazione (V.7.5) diventa

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1) + b}{r^2} - ar^2 + \epsilon\right] \phi_{\epsilon,l}(r) = 0 \quad (\text{V.7.6})$$

dove  $a = 2\mu A/\hbar^2$ ,  $b = 2\mu B/\hbar^2$  e  $\epsilon = 2\mu E/\hbar^2$ .

Ridefinendo le variabili adimensionali  $\rho^2 = \sqrt{a}r^2$  e  $\tilde{\epsilon} = \epsilon/\sqrt{a}$ , possiamo riscrivere l'equazione (V.7.6) come

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{l(l+1) + b}{\rho^2} - \rho^2 + \tilde{\epsilon}\right] \chi_{\tilde{\epsilon},l}(\rho) = 0 , \quad (\text{V.7.7})$$

dove  $\chi_{\tilde{\epsilon},l}(\rho) = \rho\phi_{\tilde{\epsilon},l}(\rho)$ . L'equazione differenziale ha soluzione regolare ed a quadrato sommabile se valgono le relazioni (vedi per es. *Handbook of Mathematical Functions*, Editori: Milton Abramowitz e Irene Stegun, Dover Publications, Inc., New York, p. 781.)

$$\alpha^2 = \frac{(2l+1)^2 + b}{4} , \quad (\text{V.7.8})$$

$$E_{n,l} = \hbar\sqrt{\frac{A}{2m}} \left(4n + \sqrt{(2l+1)^2 + b}\right) . \quad (\text{V.7.9})$$

In questo caso la soluzione è

$$\phi_{n,l}(\rho) = \exp\left\{-\frac{\rho^2}{2}\right\} \rho^{\alpha-1/2} L_n^{(\alpha)}(\rho^2) \quad . \quad (\text{V.7.10})$$

Come si vede dalla (V.7.9), vi è una dipendenza esplicita dei livelli energetici da  $n$  e  $l$ , ciò dunque implica la perdita di degenerazione rispetto ad  $l$ . L'unica degenerazione che rimane è quella rispetto ad  $m$ .

### Problema V.8

L'Hamiltoniana di una particella in due dimensioni, limitata a muoversi nella striscia  $x \in [0, l]$ ,  $y \in ]-\infty, +\infty[$ , è

$$H = \frac{1}{2m} [(p_x + \alpha y)^2 + p_y^2] + V(y) \quad (\text{V.8.1})$$

dove  $\alpha$  è una costante reale e  $V(y)$  è un potenziale lineare in  $y$ .

Trovare autovalori ed autovettori di  $H$ , e discuterne la degenerazione (Scegliere condizioni al contorno periodiche).

#### *Soluzione del Problema*

Come si può osservare, l'Hamiltoniana in esame commuta con  $p_x$ , in quanto il potenziale è funzione della sola variabile  $y$

$$[H, p_x] = 0 \quad . \quad (\text{V.8.2})$$

In questo caso è dunque possibile trovare una base di autovettori comune a  $p_x$  ed  $H$ . La base comune di autostati sarà formata da funzioni fattorizzate del tipo  $\psi_{E,k_x}(x, y) = \phi_{k_x}(x)\xi_{E,k_x}(y)$ .

Le autofunzioni  $\phi_{k_x}(x)$ , obbediranno all'equazione

$$\hat{p}_x \phi_{k_x}(x) = k_x \phi_{k_x}(x) \quad . \quad (\text{V.8.3})$$

Tale equazione va risolta fissando una delle possibili estensioni autoaggiunte dell'operatore  $\hat{p}_x$  sull'intervallo  $x \in [0, l]$ . Una di esse è ottenuta richiedendo che gli stati del dominio di autoaggiuntezza assumano lo stesso valore al bordo dell'intervallo, le condizioni al contorno periodiche richieste dalla traccia.

★ *Le estensioni autoaggiunte dell'operatore impulso sull'intervallo sono infinite ed in corrispondenza uno ad uno con il gruppo  $U(1)$ .*

In questo caso dunque, le soluzioni della (V.8.3) risultano

$$\phi_{k_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left\{i\frac{2n\pi x}{l}\right\} \quad \text{con} \quad k_x = \frac{2n\pi\hbar}{l} \quad , \quad (\text{V.8.4})$$

dove  $n$  è un intero relativo. Nel seguito indicheremo dunque  $\phi_{k_x}(x) = \phi_n(x)$ .

Applicando l'Hamiltoniana sulla base comune di funzioni

$$\psi_{E,n}(x, y) = \phi_n(x)\xi_{E,n}(y) \quad (\text{V.8.5})$$

si ottiene allora che l'equazione agli autovalori da risolvere è

$$\left\{ \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left[ \frac{2n\pi\hbar}{l} + \alpha y \right]^2 + V_0 + V_1 y \right\} \xi_{E,n}(y) = E \xi_{E,n}(y) \quad , \quad (\text{V.8.6})$$

dove è stata usata la linearità di  $V(y)$ .

Definendo le nuova quantità

$$z = y + \frac{2n\pi\hbar}{l\alpha} + \frac{mV_1}{\alpha^2} \quad (\text{V.8.7})$$

$$A_n = V_0 - \frac{mV_1^2}{2\alpha^2} - \frac{2n\pi\hbar V_1}{l\alpha} \quad (\text{V.8.8})$$

possiamo riscrivere la (V.8.6) come

$$\left\{ \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\alpha^2}{2m} z^2 + A_n \right\} \xi_{E,n}(z) = E \xi_{E,n}(z) \quad , \quad (\text{V.8.9})$$

i cui autovettori sono quelli dell'oscillatore armonico unidimensionale nella variabile  $z$  con  $\omega = \alpha/m$ , mentre gli autovalori dell'Hamiltoniana in esame sono

$$E_{n,q} = A_n + \frac{\hbar\alpha}{m} \left( q + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (\text{V.8.10})$$

con  $n \in \mathbb{Z}$  e  $q = 0, 1, 2, \dots$

Dalle relazioni (V.8.8) e (V.8.10) risulta chiaro che non vi è degenerazione sistematica dei livelli energetici per  $\alpha$  arbitrario.

★ *Sono possibili degenerazioni accidentali?*

## Problema V.9

Una particella di massa  $m$  si muove in un piano sotto l'azione di una forza di componenti

$$F_x = -kx - by \quad F_y = -ky - bx \quad (\text{V.9.1})$$

1. Determinare i possibili valori dell'energia ed i corrispondenti autostati quando lo spettro dell'Hamiltoniana è discreto. (Sugg. *si usino coordinate ruotate di  $\pi/4$  rispetto a quelle indicate.*)
2. Se il sistema si trova nell'autostato di  $L_z$  e  $H_0 = p^2/(2m) + kr^2/2$  appartenente agli autovalori  $m_z = 1$  ed  $E_0 = 2\hbar\omega$ , determinare la probabilità di trovare come risultato di una misura il primo valore eccitato di  $H$ .

3.  $L_z$  è una costante del moto?

*Soluzione del Problema*

1. La forza  $\vec{F}$  deriva dal potenziale

$$V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + bxy \quad . \quad (\text{V.9.2})$$

Usando le coordinate ruotate di  $\pi/4$

$$\xi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \quad \xi_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \quad , \quad (\text{V.9.3})$$

si ha

$$V(\xi_+, \xi_-) = \frac{1}{2}(k + b)\xi_+^2 + \frac{1}{2}(k - b)\xi_-^2 \quad , \quad (\text{V.9.4})$$

da cui segue la nuova forma dell'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_+^2 + p_-^2) + \frac{1}{2}(k + b)\xi_+^2 + \frac{1}{2}(k - b)\xi_-^2 \quad . \quad (\text{V.9.5})$$

Per  $|b| < k$  è un oscillatore anisotropo bidimensionale (spettro discreto) con

$$E(n_+, n_-) = \hbar\omega_+ \left( n_+ + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_- \left( n_- + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (\text{V.9.6})$$

dove  $\omega_+^2 = (k + b)/2$  e  $\omega_-^2 = (k - b)/2$ . Le autofunzioni corrispondenti agli autovalori (V.9.6) sono

$$\psi_{n_+, n_-}(\xi_+, \xi_-) = N_{n_+, n_-} H_{n_+}(a_+ \xi_+) H_{n_-}(a_- \xi_-) \exp \left\{ -\frac{1}{2}(a_+^2 \xi_+^2 + a_-^2 \xi_-^2) \right\} \quad , \quad (\text{V.9.7})$$

con  $a_+^2 = m\omega_+/\hbar$  e  $a_-^2 = m\omega_-/\hbar$ .

2.  $H_0$  è l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico bidimensionale isotropo. L'autostato con  $m_z = 1$  ed  $E_0 = 2\hbar\omega$  è

$$\phi(\xi_+, \xi_-) = N_0(\xi_+ + i\xi_-) \exp \left\{ -\frac{1}{2}a^2(\xi_+^2 + \xi_-^2) \right\} \quad , \quad (\text{V.9.8})$$

con  $a^2 = m\omega/\hbar$ . Se  $0 < b < k \implies \omega_- < \omega_+$  e il primo valore eccitato di  $H$  è

$$E_{01} = \frac{1}{2}\hbar\omega_+ + \frac{3}{2}\hbar\omega_- \quad , \quad (\text{V.9.9})$$

con autostato

$$\psi_{0,1}(\xi_+, \xi_-) = N_{0,1}\xi_- \exp \left\{ -\frac{1}{2}(a_+^2 \xi_+^2 + a_-^2 \xi_-^2) \right\} \quad . \quad (\text{V.9.10})$$

La probabilità di trovare  $E_{01}$  nello stato  $\phi$ ,  $P = |(\phi, \psi_{01})|^2$

$$(\phi, \psi_{01}) = i \frac{2\pi N_{0,1} N_0}{\sqrt{(a_+^2 + a^2)[a_-^2 + a^2]^{3/2}}}, \quad (\text{V.9.11})$$

con  $N_0^2 = a^4/\pi$  e  $N_{0,1}^2 = a_+ a_-^3/\pi$ .

3. Se  $b \neq 0$ , il commutatore  $[L_z, H] \neq 0 \implies L_z$  non è una costante del moto.

### Problema V.10

Una particella di massa  $m$  è limitata a muoversi nella zona  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^+ \times [0, a] \times \mathbb{R}$ , dove lungo  $y$  e  $z$  non è soggetta a forze mentre lungo  $x$  è soggetta ad una forza elastica con costante  $k$ .

1. Si calcolino gli autovalori dell'energia e se ne discuta la degenerazione.
2. Considerata la funzione

$$f(x, y, z) = N x^2 y z (y - a)(z - a) \exp\left\{-\frac{\sqrt{mk}x^2}{2\hbar}\right\} \quad (\text{V.10.1})$$

si valuti se rappresenta uno stato possibile per il sistema ed in caso affermativo si calcoli la probabilità di trovare il valore più basso dell'energia come risultato di una misura.

### Problema V.11

Un sistema con  $N$  gradi di libertà è descritto dall'Hamiltoniana  $H = T + V$ , dove

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (\text{V.11.1})$$

e  $V$  è una funzione omogenea di grado  $n$  delle coordinate.

Usando l'equazione di evoluzione temporale per la quantità  $G = \sum_{i=1}^N p_i x_i$ , si dimostri che in qualunque autostato di  $H$  è valida la relazione tra i valori medi

$$2 \langle T \rangle = n \langle V \rangle \quad (\text{V.11.2})$$

Nel caso di un oscillatore armonico unidimensionale si discuta se tale relazione può essere vera negli autostati dell'operatore di distruzione  $a$ , e si discuta la relazione tra le medie temporali di  $\langle T \rangle$  e  $\langle V \rangle$  su un periodo di oscillazione se lo stato iniziale è autostato di  $a$ .

*Soluzione del Problema*

Dal teorema di Ehrenfest segue che

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, G] \rangle \quad . \quad (\text{V.11.3})$$

Nel caso in cui il valor medio delle suddette quantità venga effettuato su un autostato dell'energia,  $\langle G \rangle$  risulta essere indipendente dal tempo, perché

$$\langle [H, G] \rangle = 0 \quad . \quad (\text{V.11.4})$$

Usando l'espressione di  $G$  è facile dimostrare che  $(i/\hbar)[H, G] = 2T - \sum_{i=1}^N x_i \partial_i V$ , ed essendo  $V$  una funzione omogenea di grado  $n$  nelle variabili  $x_i$ , segue allora

$$\frac{i}{\hbar} [H, G] = 2T - nV \quad , \quad (\text{V.11.5})$$

da cui sostituendo in (V.11.4) abbiamo

$$2 \langle T \rangle = n \langle V \rangle \quad . \quad (\text{V.11.6})$$

Uno stato che sia autostato dell'operatore di distruzione  $a$  di un oscillatore armonico unidimensionale, detto stato coerente, soddisfa la relazione

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad , \quad (\text{V.11.7})$$

con  $\lambda$  un generico numero complesso. In termini degli autostati dell'energia  $|n\rangle$ , tale stato si scriverà come

$$|\lambda\rangle = \exp\left\{\frac{-|\lambda|^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad . \quad (\text{V.11.8})$$

L'evoluzione nel tempo dello stato  $|\lambda\rangle$  si ottiene applicando a  $|\lambda\rangle$  l'operatore di evoluzione temporale

$$\begin{aligned} |\lambda\rangle_t &= \exp\left\{\frac{-iHt}{\hbar}\right\} |\lambda\rangle = \exp\left\{\frac{-i\omega t}{2}\right\} \exp\left\{\frac{-|\lambda|^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \exp\left\{\frac{-i\omega t}{2}\right\} |\lambda(t)\rangle \quad , \end{aligned} \quad (\text{V.11.9})$$

dove  $\lambda(t) = \lambda e^{-i\omega t} = |\lambda| e^{-i(\omega t - \phi)}$ . Dalle espressioni di  $x$  e  $p$  in termini degli operatori di creazione e distruzione  $a^\dagger$ ,  $a$  si ha

$$\begin{aligned} \langle \psi | G | \psi \rangle_t &= i \frac{\hbar}{2} \langle \lambda(t) | (a^\dagger)^2 - a^2 - 1 | \lambda(t) \rangle = i \frac{\hbar}{2} (\lambda^{*2}(t) - \lambda^2(t) - 1) \\ &= -\frac{\hbar}{2} [i + 2|\lambda|^2 \sin(2\omega t - 2\phi)] \quad , \end{aligned} \quad (\text{V.11.10})$$

che dipendendo dal tempo, fa sì che la relazione (V.11.4) non possa essere banalmente soddisfatta. Ovvero sarà verificato che

$$\frac{d}{dt} \langle G \rangle = -2\hbar\omega |\lambda|^2 \cos(2\omega t - 2\phi) = 2 \langle \psi | T | \psi \rangle_t - n \langle \psi | V | \psi \rangle_t \quad . \quad (\text{V.11.11})$$

Mediando però il secondo ed il terzo membro della (V.11.11) su un periodo pari a  $2\pi/\omega$  è facile vedere che il membro di sinistra darà contributo nullo e quindi

$$2\overline{\langle\psi|T|\psi\rangle_t} = n\overline{\langle\psi|V|\psi\rangle_t} \quad . \quad (\text{V.11.12})$$

### Problema V.12

Si consideri l'operatore momento  $\vec{p}$  nelle usuali coordinate cartesiane e nelle coordinate polari  $r, \theta$  e  $\varphi$ .

1. Si diano le espressioni per  $p_r, p_\theta$  e  $p_\varphi$ .
2. Si calcolino i commutatori  $[p_{q_i}, q_j]$  dove  $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ .
3. È noto che (in coordinate cartesiane)  $[p_i, p_j] = 0$ , è vero anche in coordinate polari che  $[p_{q_i}, p_{q_j}] = 0$ ?
4. Cosa succede per i commutatori misti  $[p_{q_i}, p_j]$ ?

#### Soluzione del Problema

È utile per prima cosa avere l'espressione dell'elemento di volume in coordinate polari:

$$d^3\vec{r} = dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (\text{V.12.1})$$

Per semplificare le notazioni indichiamo con  $f = r^2 \sin \theta$ .

1. Per un cambio di coordinate si ottiene facilmente la formula generale:

$$p_{q_i} = \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{1}{2f} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \quad (\text{V.12.2})$$

Questa formula si può trovare in vari modi. Uno dei più semplici è di considerare  $p_{q_i}$  deve essere autoaggiunto per n prodotto scalare che ha come misura  $f dq_1 dq_2 dq_3$ . In generale la quantità  $i \frac{\partial}{\partial q_i}$  non lo è. Si può notare che il fattore  $\left( \frac{1}{2f} \frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$  è esattamente il fattore che cancella il termine extra nella integrazione per parti. Il termine che si aggiunge commuta con le  $q_i$  per cui non contribuirà alle regole di commutazione canonica.

Applicando la formula generale ai tre casi particolari in questione risulta:

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \\ p_\theta &= \frac{\hbar}{i} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \cotg \theta \right) \\ p_\varphi &= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{V.12.3})$$

2. Risulta (dalla definizione stessa di momento coniugato)

$$\begin{aligned} [p_r, r] &= \frac{\hbar}{i} \\ [p_\theta, \theta] &= \frac{\hbar}{i} \\ [p_\varphi, \varphi] &= \frac{\hbar}{i} \end{aligned} \tag{V.12.4}$$

tutti gli altri commutatori si annullano.

3. Anche in questo caso i commutatori fra le varie componenti del momento si annullano. Questa è in effetti una conseguenza del fatto che le coordinate polari sono un sistema di assi ortogonali, anche se non di orientazione costante.

4. I commutatori misti *non sono tutti nulli*. Infatti il sistema di coordinate cartesiano e quello polare non sono ortogonali fra di loro.

A titolo di esempio ne calcoliamo uno. Dal fatto che

$$x = r \cos \theta \cos \varphi \tag{V.12.5}$$

risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= -\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{r \cos \theta \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \sin \theta \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\cos \theta \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \tag{V.12.6}$$

da cui, sostituendo nel commutatore:

$$\begin{aligned} [p_\varphi, p_r] &= -\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right] \\ &= \frac{-\hbar}{r^2} \left( \frac{1}{\cos \theta \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{\sin \theta \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\cos \theta \cos \varphi} \right) \end{aligned} \tag{V.12.7}$$

★ Si noti che  $z$  e  $\varphi$  sono variabili indipendenti, per cui si può immediatamente dire che

$$[p_z, p_\varphi] = 0 \tag{V.12.8}$$

## Problema V.13

Si consideri l'equazione di Schrödinger per una particella che si muove in un potenziale Coulombiano attrattivo in  $N$  dimensioni:

$$\left(-\hbar m \nabla^2 - \frac{k}{r}\right) \psi(x_i) = E \psi(x_i) \quad (\text{V.13.1})$$

con

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (\text{V.13.2})$$

e

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (\text{V.13.3})$$

1. Mostrare che l'onda  $S$  (autostato a simmetria sferica) soddisfa:

$$\left(-\hbar m \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{k}{r}\right) \psi(r) = E \psi(r) \quad (\text{V.13.4})$$

2. Usando la sostituzione  $\psi(r) = r^{-\frac{(N-1)}{2}} \tilde{\psi}(r)$ , mostrare che, nel limite di  $N$  molto grande, l'equazione (V.13.4) diviene

$$\tilde{H} \tilde{\psi} = E \tilde{\psi} \quad (\text{V.13.5})$$

dove

$$\tilde{H} = \frac{1}{N^2} \left( -\frac{\hbar^2}{2mN^2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\hbar^2}{8mR^2} - \frac{k}{R} \right) \quad (\text{V.13.6})$$

e

$$R = \frac{r}{N^2} \quad (\text{V.13.7})$$

3. Trovare una espressione approssimata per l'energia dello stato fondamentale in questo limite.

### Soluzione del Problema

1. Per la prima parte in effetti la forma del potenziale non è importante, purchè si tratti di un potenziale centrale.

Facciamo un cambio di coordinate dalle  $x_i$  alle coordinate sferiche, che in  $N$  dimensioni hanno  $N - 1$  angoli, che chiameremo  $\theta_i$ . Dal momento che lo stato a cui siamo interessati ha simmetria sferica:

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} \psi(r) = 0. \quad (\text{V.13.8})$$

Abbiamo quindi:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \psi(r) = \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r) = \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi(r) , \quad (\text{V.13.9})$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} \psi(r) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi(r) \\ &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{x_i x_i}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_i x_i}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \psi(r) \\ &= \left( \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \psi(r) , \end{aligned} \quad (\text{V.13.10})$$

E sostituendo nella (V.13.8) si trova la (V.13.6).

2. Effettuiamo la sostituzione di variabili e calcoliamo  $\partial_r \psi$  in funzione di  $\tilde{\psi}$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{N-1}{2} r^{-\frac{(N+1)}{2}} \tilde{\psi} + r^{-\frac{(N-1)}{2}} \frac{\partial \tilde{\psi}}{r} \quad (\text{V.13.11})$$

e sostituendo nella (V.13.4) otteniamo:

$$E \tilde{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tilde{\psi} - \frac{(N-1)(N-3)}{4} \tilde{\psi} \right) - \frac{k}{r} \tilde{\psi} , \quad (\text{V.13.12})$$

usando il fatto che  $\partial_r = N^2 \partial_R$  e conservando solo i termini dominanti per  $N \rightarrow \infty$  ricava la (V.13.6).

3. Nel limite considerato la “massa effettiva” della particella,  $mN^2$ , è molto grande; pertanto la particella si può considerare classica, le fluttuazioni quantistiche essendo sopresse con un fattore  $N^{-1}$ . Lo stato fondamentale sarà allora dato dalla particella al minimo del potenziale, che si ottiene per

$$R = \frac{\hbar^2}{4km} \quad (\text{V.13.13})$$

e che corrisponde ad una energia potenziale di  $-2mk^2/\hbar^2 N^2$ .

★ *Nel caso in cui  $N$  non sia grande non è possibile non tenere conto degli altri termini nella (V.13.12), in aggiunta la massa non è necessariamente grande, per cui anche l'approssimazione classica di considerare l'energia dello stato fondamentale come l'energia del minimo del potenziale non è valida.*

### Problema V.14

Un particella si muove liberamente nel piano con coordinate  $\rho, \varphi$ , dove è descritta dalla seguente funzione d'onda:

$$\Psi(\rho, \varphi) = N\Theta(\rho - \lambda) \left( \frac{\rho}{\lambda} + \cos \phi \right) \quad (\text{V.14.1})$$

con  $N$  la costante di normalizzazione,  $\lambda$  una costante positiva e  $\Theta(x)$  è la funzione gradino:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{V.14.2})$$

Si trovino i valori possibili di una misura del momento angolare e le loro probabilità .

Si discuta in particolare il limite per  $\lambda \rightarrow \infty$ .

### Problema V.15

Una particella di massa  $m$  si muove in due dimensioni e la sua Hamiltoniana è data da

$$H = A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 \quad (\text{V.15.1})$$

dove

$$A_k = \frac{i}{\sqrt{2m}} p_k + \alpha x_k^3 \quad (\text{V.15.2})$$

con  $(k = 1, 2)$  e  $\alpha > 0$ .

1. Si determini lo stato fondamentale del sistema e, in tale stato, il valore medio di  $L$  ( $\equiv L_3$ ) ed i possibili risultati di una misura di  $L$  a cui corrispondono probabilità non nulle.
2.  $L$  è una costante del moto?

### Problema V.16

Una particella di massa  $m$  si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = Nr e^{-r/a_0} \quad (\text{V.16.1})$$

dove  $r$  è la distanza dall'origine ed  $a$  un parametro con dimensioni di una lunghezza.

1. Si determinino gli scarti quadratici medi per la misura di ciascuna coordinata cartesiana e delle componenti della quantità di moto.

2. Quali sono i valori più probabili della distanza  $r$  e dell'energia cinetica?

*Soluzione del Problema*

1. L'invarianza per rotazione della funzione d'onda assegnata permette di scrivere le seguenti identità :

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z \quad , \quad (\text{V.16.2})$$

$$\Delta p_x = \Delta p_y = \Delta p_z \quad . \quad (\text{V.16.3})$$

La stessa invarianza è inoltre responsabile dell'annullamento dei valori medi delle singole componenti di posizione e momento:

$$\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle = 0 \quad , \quad (\text{V.16.4})$$

$$\langle p_x \rangle = \langle p_y \rangle = \langle p_z \rangle = 0 \quad . \quad (\text{V.16.5})$$

★ *Il vettore nullo è l'unico vettore invariante per rotazione!*

Sostituendo le (V.16.4), (V.16.5) nelle (V.16.2), (V.16.3) si ottengono le espressioni

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle \quad , \quad (\text{V.16.6})$$

$$(\Delta p_x)^2 = \frac{1}{3} \langle p_r^2 \rangle \quad . \quad (\text{V.16.7})$$

Lo stesso risultato vale identicamente per le due altre componenti di posizione e quantità di moto in virtù dell'invarianza per rotazioni della funzione d'onda.

Per calcolare i membri di destra delle equazioni (V.16.6), (V.16.7) innanzitutto osserviamo che

$$\|\psi\|^2 = 3\pi a^5 N^2 \quad (\text{V.16.8})$$

da cui, affinché lo stato sia normalizzato occorre fissare la costante di normalizzazione  $N$  al valore  $N = 1/\sqrt{3\pi a^5}$ . Si consideri dunque, da questo momento in poi, lo stato opportunamente normalizzato.

È facile calcolare che il membro di destra della (V.16.6) risulta

$$\frac{1}{3} \langle r^2 \rangle = \frac{5}{2} a^2 \quad (\text{V.16.9})$$

Allo stesso modo per la (V.16.7) otteniamo

$$\frac{1}{3} \langle p_r^2 \rangle = -\frac{\hbar^2}{3} \left\langle \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right)^2 \right\rangle = \frac{\hbar^2}{9a^2} \quad (\text{V.16.10})$$

2. La probabilità di trovare una particella tra  $r$  ed  $r + dr$  è pari a

$$P(r) = \int r^2 d\Omega |\psi|^2 = \frac{4}{3} \frac{r^4}{a^5} e^{-2r/a} \quad (\text{V.16.11})$$

Tale funzione ha massimo dove

$$\frac{dP(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \left(4r^3 - \frac{2r^4}{a}\right) e^{-2r/a} = 0 \Rightarrow r_{max} = 2a \quad (\text{V.16.12})$$

Per trovare il valore più probabile dell'energia cinetica  $T = k^2/(2m)$  occorre ricavare l'espressione della probabilità nello spazio dei momenti e poi massimizzare rispetto al modulo di  $\vec{k}$ . Per ricavare tale probabilità occorre, come è noto, calcolare la trasformata di Fourier della funzione d'onda  $\psi$ .

Ponendo  $\xi = \cos \theta$  per la trasformata di Fourier si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{k}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \psi(\vec{r}) \exp\left\{i\frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right\} d\vec{r} \\ &= \frac{N}{(2\pi\hbar)^{3/2}} 2\pi \int_0^\infty e^{-r/a} r^3 dr \int_{-1}^1 \exp\left\{i\frac{kr\xi}{\hbar}\right\} d\xi \\ &= \frac{N}{ik\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \int_0^\infty r^2 e^{-r/a} \exp\left\{i\frac{kr}{\hbar}\right\} dr - (k \rightarrow -k) \right\} \\ &= \frac{2N}{\sqrt{2\pi\hbar}k} \int_0^\infty e^{-r/a} r^2 dr \sin\left(\frac{kr}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (\text{V.16.13})$$

Ponendo  $\rho = r/a$  e  $\chi = ak/\hbar$  si ha

$$\int_0^\infty r^2 e^{-r/a} e^{ikr/\hbar} dr = a^3 \int_0^\infty \rho^2 e^{-(1-i\chi)\rho} d\rho = \frac{2a^3}{(1-i\chi)^3} \quad (\text{V.16.14})$$

per cui

$$\Phi(k) = \frac{A}{\chi} \text{Im} \frac{1}{(1-i\chi)^3} = A \frac{3-\chi^2}{(1+\chi^2)^3} \quad (\text{V.16.15})$$

con  $A$  una certa costante. La distribuzione in energia cinetica è data allora da

$$D(k) = B\chi^2 \frac{(3-\chi^2)^2}{(1+\chi^2)^6} = BF^2(k) \quad (\text{V.16.16})$$

dove  $F(k) = \chi \frac{3-\chi^2}{(1+\chi^2)^3}$ . Pertanto il massimo si ha quando

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d(\chi)} = 0 &\Rightarrow \frac{(3-\chi^2)}{(1+\chi^2)^3} - \frac{2\chi^2}{(1+\chi^2)^3} - \frac{6\chi^2(3-\chi^2)}{(1+\chi^2)^4} \\ &= \frac{3}{(1+\chi^2)^4} \{(1-\chi^2)(1+\chi^2) - 2\chi^2(3-\chi^2) - 6\chi^2(3-\chi^2)\} = 0 \\ &\Rightarrow \chi^4 - 6\chi^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \chi_{\pm}^2 = 3 \pm \sqrt{8} \end{aligned} \quad (\text{V.16.17})$$

Poichè  $F(\chi_-) \simeq 0.728$  mentre  $F(\chi_+) \simeq 0.02$ , si ottiene che il valore più probabile dell'energia cinetica è dato da  $T_{max} = \hbar^2 \chi_-^2 / 2ma^2$ .

### Problema V.17

Si consideri una particella nel primo stato eccitato dell'atomo di idrogeno descritta dalla funzione d'onda (già normalizzata):

$$\Psi = \frac{1}{8\sqrt{r_0^3\pi}} \frac{r}{r_0} e^{\frac{r}{2r_0}} \sin\theta e^{i\varphi} \quad (\text{V.17.1})$$

Si calcolino

1. La probabilità di trovare la particella a distanza  $r$  dal nucleo.
2. Per quale valore  $r_{max}$  questa probabilità ha un massimo
3. Il valor medio  $\langle r \rangle$ .

### Problema V.18

Una particella carica, vincolata in un piano e soggetta ad una forza elastica isotropa di centro 0, si trova all'istante  $t = 0$  nello stato

$$\Psi = a_1^\dagger |\lambda_1, \lambda_2\rangle \quad (\text{V.18.1})$$

dove le  $\lambda_i$  sono costanti complesse, gli  $a_i^\dagger$  sono gli operatori di creazione, e  $|\lambda_1, \lambda_2\rangle$  è lo stato coerente corrispondente. Determinare:

1. La probabilità che la particella si trovi nel primo livello eccitato della hamiltoniana;
2. L'andamento temporale del valor medio dell'hamiltoniana.
3. L'andamento temporale del valor medio del momento angolare.

### Problema V.19

Una particella quantistica è confinata tra i piani  $z = 0$  e  $z = L$  (cioè la funzione d'onda deve annullarsi per  $z = 0, L$ ). Nelle direzioni  $x$  e  $y$  è sottoposta ad un potenziale  $V(x, y) = 1/2 m\omega^2(x^2 + y^2)$ , con  $\omega = \frac{5\hbar\pi^2}{8mL^2}$ . Calcolare:

1. La degenerazione dei primi quattro autovalori dell'Hamiltoniana.
2. La probabilità di trovare la particella nello stato fondamentale nella regione di spazio delimitata dai piani  $z = 0$  e  $z = L/3$ .

## Problema V.20

Una particella in tre dimensioni è descritta dalla funzione d'onda:

$$\Psi = Nre^{-r} \sin \theta \sin \varphi$$

1. Calcolare la probabilità di trovare la particella a distanza  $r_0$  dall'origine.
2. I possibili risultati di una misura di  $L_z$  e le loro probabilità relative.

*Problemi di Meccanica Quantistica*

Capitolo VI  
Momento Angolare

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

## Problema VI.1

Un sistema è descritto dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{L_x^2}{2I_x} + \frac{L_y^2}{2I_y} + \frac{L_z^2}{2I_z} \quad (\text{VI.1.1})$$

in termini delle componenti del momento angolare.

Se il sistema si trova in un autostato di  $L^2$  e di  $L_z$  relativo agli autovalori  $2\hbar^2$  e  $\hbar$  rispettivamente calcolare i possibili valori del risultato di una misura dell'energia e le rispettive probabilità .

### Soluzione del Problema

Al fine di usare la base degli autostati di  $L^2$  ed  $L_z$ , che indichiamo con  $|l, m\rangle$ , richiamiamo la definizione degli operatori gradino rispetto ad  $L_z$

$$L_+^z = L_x + iL_y \quad , \quad L_-^z = L_x - iL_y \quad . \quad (\text{VI.1.2})$$

In termini di questi ultimi l'Hamiltoniana  $H$  si scriverà come

$$H = \alpha \left[ (L_+^z)^2 + (L_-^z)^2 \right] + \beta \left[ L_+^z L_-^z + L_-^z L_+^z \right] + \gamma L_z^2 \quad , \quad (\text{VI.1.3})$$

dove

$$\alpha = \left( \frac{1}{8I_x} - \frac{1}{8I_y} \right) \quad , \quad \beta = \left( \frac{1}{8I_x} + \frac{1}{8I_y} \right) \quad , \quad \gamma = \frac{1}{2I_z} \quad , \quad (\text{VI.1.4})$$

Dato che  $[H, L^2] = 0$ , l'azione di  $H$  sull'autospazio di  $L^2$  relativo all'autovalore  $l = 1$ , lascerà lo stesso invariato, quindi su tale autospazio l'Hamiltoniana si potrà rappresentare come una matrice hermitiana  $3 \times 3$ . Se ordiniamo gli autovettori di  $l = 1$  come  $|1, 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$  e  $|1, -1\rangle$ ,  $H$  diventa

$$H = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2\beta + \gamma & 0 & 2\alpha \\ 0 & 4\beta & 0 \\ 2\alpha & 0 & 2\beta + \gamma \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{VI.1.5})$$

Per calcolare gli autovalori diagonalizziamo la matrice (VI.1.5), ne segue dunque l'equazione secolare

$$\left[ (2\beta + \gamma - E)^2 - 4\alpha^2 \right] (4\beta - E) = 0 \quad . \quad (\text{VI.1.6})$$

La quale, una volta risolta, fornisce i tre valori possibili per l'operazione di misura dell'energia

$$E_1 = 2\beta + \gamma - 2\alpha \quad , \quad (\text{VI.1.7})$$

$$E_2 = 4\beta \quad , \quad (\text{VI.1.8})$$

$$E_3 = 2\beta + \gamma + 2\alpha \quad . \quad (\text{VI.1.9})$$

Gli autovettori rispettivi  $|\psi_1\rangle$ ,  $|\psi_2\rangle$ , e  $|\psi_3\rangle$ , risultano

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle \quad , \quad (\text{VI.1.10})$$

$$|\psi_2\rangle = |1,0\rangle \quad , \quad (\text{VI.1.11})$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1\rangle \quad . \quad (\text{VI.1.12})$$

Dalle espressioni (VI.1.10)-(VI.1.12) segue che

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_3\rangle \quad . \quad (\text{VI.1.13})$$

Quindi, misurando l'energia sullo stato  $|1,1\rangle$  i soli risultati possibili sono  $E_1$  o  $E_3$ , con probabilità

$$P(E = E_1) = \frac{1}{2} \quad , \quad (\text{VI.1.14})$$

$$P(E = E_3) = \frac{1}{2} \quad . \quad (\text{VI.1.15})$$

## Problema VI.2

Un rotatore libero isotropo di momento d'inerzia  $I$  e fattore giroscopico  $g$  è immerso in un campo d'induzione magnetica  $\vec{B} = (0, B_y, B_z)$ . Tale sistema è descritto dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I} - g\vec{B} \cdot \vec{L} \quad (\text{VI.2.1})$$

dove  $\vec{L}$  è il momento angolare.

Calcolare gli autovalori dell'Hamiltoniana corrispondenti a  $l = 1$ . Determinare inoltre  $E = \langle H \rangle$  e  $\Delta E$  per lo stato  $|l = 1, l_z = 1\rangle$  ed il suo andamento temporale.

### Soluzione del Problema

Osservando che  $[\vec{L}^2, H] = 0$ , possiamo diagonalizzare l'Hamiltoniana nel sottospazio di autovalore  $l = 1$ . Per semplicità indichiamo in questo sottospazio la base degli autovettori di  $L_z$  come  $|1\rangle$ ,  $|0\rangle$  e  $|-1\rangle$ . Usando il fatto che  $L_y = (i/2)(L_-^z - L_+^z)$ , rappresentiamo  $H$  su questo sottospazio come

$$H = \frac{\hbar^2}{I}\mathbb{I}_3 - \frac{g\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}B_z & -iB_y & 0 \\ iB_y & 0 & -iB_y \\ 0 & iB_y & -\sqrt{2}B_z \end{pmatrix} \quad , \quad (\text{VI.2.2})$$

dove  $\mathbb{I}_3$  denota la matrice identica  $3 \times 3$ . Diagonalizzando tale matrice si ottengono gli autovalori

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{I} - g\hbar B \quad , \quad (\text{VI.2.3})$$

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{I} \quad , \quad (\text{VI.2.4})$$

$$E_3 = \frac{\hbar^2}{I} + g\hbar B \quad , \quad (\text{VI.2.5})$$

dove  $B = \sqrt{B_y^2 + B_z^2}$ , ed i corrispondenti autovettori

$$|\psi_1\rangle = \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right) |1\rangle + i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} |0\rangle + \left(\frac{\cos\theta - 1}{2}\right) |-1\rangle \quad , \quad (\text{VI.2.6})$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} |1\rangle - i\cos\theta |0\rangle + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} |-1\rangle \quad , \quad (\text{VI.2.7})$$

$$|\psi_3\rangle = \left(\frac{\cos\theta - 1}{2}\right) |1\rangle + i\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} |0\rangle + \left(\frac{\cos\theta + 1}{2}\right) |-1\rangle \quad , \quad (\text{VI.2.8})$$

dove  $\cos\theta = B_z/B$  e  $\sin\theta = B_y/B$ . Usando le equazioni (VI.2.6)-(VI.2.8) otteniamo

$$|1\rangle = \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right) |\psi_1\rangle + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} |\psi_2\rangle + \left(\frac{\cos\theta - 1}{2}\right) |\psi_3\rangle \quad (\text{VI.2.9})$$

L'operazione di misura dell'energia sullo stato  $|1\rangle$  può fornire tutte e tre i valori di energia (VI.2.3)-(VI.2.5), con probabilità

$$P_1(E = E_1) = \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^2 \quad , \quad (\text{VI.2.10})$$

$$P_2(E = E_2) = \frac{\sin^2\theta}{2} \quad , \quad (\text{VI.2.11})$$

$$P_3(E = E_3) = \left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right)^2 \quad , \quad (\text{VI.2.12})$$

che come è noto non dipende dal tempo. Quindi, la stessa proprietà varrà per  $\langle H \rangle$  e  $\Delta E$ . Per calcolare queste quantità usiamo

$$\langle H \rangle = \sum_{i=1}^3 P_i E_i = \frac{\hbar^2}{I} - g\hbar B_z \quad (\text{VI.2.13})$$

e

$$\langle H^2 \rangle = \sum_{i=1}^3 P_i E_i^2 = \frac{\hbar^4}{I^2} - 2\frac{\hbar^3 g B_z}{I} + \frac{g^2 \hbar^2}{2} (2B_z^2 + B_y^2) \quad (\text{VI.2.14})$$

da cui

$$\Delta E = \sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} = \frac{g\hbar}{\sqrt{2}} B_y \quad . \quad (\text{VI.2.15})$$

★ Si noti che tale risultato è in accordo con il limite  $B_y \rightarrow 0$ , per il quale la base  $|l, m\rangle$  diagonalizza l'Hamiltoniana e quindi  $|1\rangle$  diventa autovettore dell'Hamiltoniana completa e quindi  $\Delta E = 0$ .

### Problema VI.3

Alcune Molecole (per esempio il monossido di carbonio CO) sono composte da due atomi che possono ruotare attorno al centro di massa ed oscillare essendo legati da un legame che con buona approssimazione è simile alla forza di una molla.

Descrivere l'Hamiltoniana e lo spazio di Hilbert degli stati di un sistema simile e calcolarne lo spettro e gli autostati.

Qual'è la degenerazione degli stati?

Il sistema in esame è sostanzialmente la combinazione di un oscillatore armonico unidimensionale e di un rotatore rigido. Consideriamo quindi gli spazi di Hilbert dell'oscillatore e del rotatore  $\mathcal{H}_{osc}$  e  $\mathcal{H}_{rot}$  rispettivamente.

Lo spazio di Hilbert totale sarà pertanto il prodotto tensore dei due spazi:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{osc} \otimes \mathcal{H}_{rot} \quad (\text{VI.3.1})$$

★ Che differenza c'è fra  $\mathcal{H}$  e  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ?

Le due Hamiltoniane sono  $H_{osc} = p^2/2\mu + \mu\omega^2 q^2/2$  e  $H_{rot} = \vec{L}^2/2I$ , dove  $p$  è il momento radiale,  $\mu$  la massa ridotta del sistema,  $I$  il momento di inerzia e  $\omega$  un parametro dato dai dettagli del legame. L'Hamiltoniana totale sarà la somma delle due Hamiltoniane:

$$H = H_{osc} + H_{rot} \quad (\text{VI.3.2})$$

Indichiamo con  $R_n(r)$  l' $n$ -simo autostato di  $H_{osc}$ . Gli autostati di  $H$  saranno allora le funzioni:

$$\Psi_{nlm} = R_n(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (\text{VI.3.3})$$

Gli autovalori corrispondenti allora sono:

$$E_{nlm} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \quad (\text{VI.3.4})$$

★ A differenza del caso dell'atomo di idrogeno in questo caso non c'è la restrizione  $l < n$

★ In questo caso  $r = q \in [-\infty, \infty]$  in quanto con  $r$  abbiamo semplicemente indicato la distanza dalla posizione di equilibrio del sistema. Per  $r$  negativo gli atomi sono più vicini fra di loro che all'equilibrio. In realtà per  $r$  un numero negativo di modulo abbastanza grande l'approssimazione non sarà più valida in quanto l'interazione non si potrà approssimare con un oscillatore armonico.

In generale ci sarà solo la degenerazione dovuta al numero quantico magnetico  $m$ , ovvero, lo stato con autovalore  $E_{nlm}$  ha degenerazione  $2l + 1$ . Questo è dovuto al fatto che il sistema non ha tutte le simmetrie dell'atomo di idrogeno. C'è la possibilità di degenerazione accidentale se  $\omega$  e  $\hbar/2I$  hanno un rapporto che è un numero razionale. Comunque dato che in generale  $\omega \gg \hbar/2I$  questa degenerazione non compare per i primi stati del sistema. Ad energie più alte in generale la molecola si dovrebbe dissociare.

### Problema VI.4

Si schematizzi una molecola biatomica (nel s.c.m.) come una particella di massa  $m = 10^{-23} \text{ gr}$  che si muove attorno ad un centro, ad una distanza fissa  $a = 10^{-8} \text{ cm}$ .

Si determinino i possibili valori dell'energia, e la probabilità relativa di occupazione dei primi due livelli eccitati ( $E_2 > E_1$ ) rispetto al livello fondamentale, quando la molecola si trova all'equilibrio termico alle temperature di  $10^\circ K$  e  $100^\circ K$ . ( $\hbar = 10^{-27} \text{ erg sec}$ ;  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg } ^\circ K^{-1}$ )

### Problema VI.5

Si consideri l'algebra del momento angolare.

1. Sia  $\psi$  autovettore di  $J_z$ , si trovi allora il valore di aspettazione di  $J_x$  e  $J_y$ .
2. Sia dato un operatore  $A$  che commuta con  $J_x$  e  $J_y$ , si provi che  $A$  è un operatore scalare, e quindi  $[\vec{J}^2, A] = 0$

#### Soluzione del Problema

1. Troviamo prima il valore di aspettazione per  $J_x$ . Notiamo per prima cosa che, dalle relazioni di commutazione che definiscono l'algebra del momento angolare risulta:

$$J_x = \frac{1}{i\hbar} [J_y, J_z] \quad (\text{VI.5.1})$$

e pertanto

$$\langle \psi | J_x | \psi \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [J_y, J_z] | \psi \rangle = -i(m - m) \langle \psi | J_y | \psi \rangle = 0 \quad (\text{VI.5.2})$$

In maniera completamente analoga si prova che anche il valore di aspettazione di  $J_y$  è nullo.

2. È utile considerare la seguente identità valida qualunque siano i tre operatori  $A, B$  e  $C$ :

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (\text{VI.5.3})$$

si può allora immediatamente vedere che se  $A$  commuta con  $J_x$  e  $J_y$  commuta necessariamente con il loro commutatore (che è  $J_z$ ):

$$\begin{aligned} -i[A, J_z] &= [A, J_x J_y - J_y J_x] \\ &= J_x [A, J_y] + [A, J_x] J_y - J_y [A, J_x] - [A, J_y] J_x \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.5.4})$$

Come conseguenza

$$[A, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2] = 0 \quad (\text{VI.5.5})$$

### Problema VI.6

Considerando l'algebra del momento angolare di dimostri che, dati gli operatori  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$  e la funzione analitica  $f(x)$  (che quindi ammette una espansione in serie di potenze) risulta allora:

$$f(J_z)J_{\pm} = J_{\pm}f(J_z \pm \hbar) \quad (\text{VI.6.1})$$

Come corollario si calcoli una espressione per

$$\exp\left\{-i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} J_x \exp\left\{i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} \quad (\text{VI.6.2})$$

#### Soluzione del Problema

Dalle regole di commutazione fra  $J_z$  e  $J_{\pm}$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm} \quad , \quad (\text{VI.6.3})$$

si ha

$$J_z J_{\pm} = J_{\pm} (J_z \pm \hbar) \quad (\text{VI.6.4})$$

ed analogamente

$$J_z^n J_{\pm} = J_{\pm} (J_z \pm \hbar)^n \quad . \quad (\text{VI.6.5})$$

Considerando  $f(J_z) = \sum_n f_n J_z^n$ , risulta allora

$$f(J_z)J_{\pm} = \sum_n f_n J_z^n J_{\pm} = J_{\pm} \sum_n f_n (J_z \pm \hbar)^n = J_{\pm} f(J_z \pm \hbar) \quad . \quad (\text{VI.6.6})$$

Il corollario si dimostra facilmente notando che, dato che  $J_x = (J_+ + J_-)/2$  e che quindi:

$$\begin{aligned} \exp\left\{-i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} J_x &= \exp\left\{-i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} \frac{J_+ + J_-}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ J_+ \exp\left\{-i\frac{\omega t J_z}{\hbar} - i\omega t\right\} + J_- \exp\left\{-i\frac{\omega t J_z}{\hbar} + i\omega t\right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{VI.6.7})$$

ovvero

$$\exp\left\{-i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} J_x \exp\left\{i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} = \frac{1}{2} [J_+ e^{-i\omega t} + J_- e^{i\omega t}] \quad (\text{VI.6.8})$$

Sostituendo poi a  $J_+$  e  $J_-$  le espressioni in termini di  $J_x$  e  $J_y$  si trova:

$$\exp\left\{-i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} J_x \exp\left\{i\frac{\omega t J_z}{\hbar}\right\} = \cos(\omega t) J_x + \sin(\omega t) J_y \quad (\text{VI.6.9})$$

## Problema VI.7

Si consideri un atomo di idrogeno, trascurando completamente gli effetti relativistici e di spin.

Sulla base del seguente insieme di dati:

1. l'atomo si trova nel suo primo stato eccitato;
2. il valore  $m_z$  di  $L_z$  è noto con certezza;
3. si conoscono il valor medio  $\langle L_x \rangle$  e lo scarto quadratico medio  $\Delta L_x$  di  $L_x$ ;

determinare valor medio e scarto quadratico medio di  $L^2$  per i vari valori possibili di  $m_z$ .

Si ricordi che

$$\langle l, m'_z | (L_x \pm iL_y) | l, m_z \rangle = \delta_{m'_z, m_z \pm 1} \sqrt{l(l+1) - m_z(m_z \pm 1)} \quad (\text{VI.7.1})$$

### Soluzione del Problema

L'informazione che l'atomo di H si trova nel suo primo stato eccitato ci permette di ridurre lo stato del sistema alla generica combinazione nella base  $n, l, m$  nei quattro vettori:  $|2, 0, 0\rangle$ ,  $|2, 1, -1\rangle$ ,  $|2, 1, 0\rangle$  e  $|2, 1, 1\rangle$ .

Il dato poi, che il valore di  $L_z$  è noto con certezza limita la scelta alle sole combinazioni dei suddetti vettori, che siano anche autovettori di  $L_z$

$$\begin{aligned} \psi_{-1} &= |2, 1, -1\rangle \implies m_z = -1 \\ \psi_0 &= \cos \theta |2, 0, 0\rangle + \sin \theta e^{i\varphi} |2, 1, 0\rangle \implies m_z = 0 \\ \psi_1 &= |2, 1, 1\rangle \implies m_z = 1 \end{aligned} \quad (\text{VI.7.2})$$

Il valor medio di  $L_x$  sugli stati  $\psi_i$  ( $i = -1, 0, 1$ ) è sempre nullo dato che sono autostati di  $L_z$ , lo scarto quadratico risulta allora  $(\Delta L_x)^2 = \langle \psi | L_x^2 | \psi \rangle$ .

Ricordando che

$$L_x^2 = \frac{1}{4} (L_+^z L_-^z + L_-^z L_+^z + (L_+^z)^2 + (L_-^z)^2) \quad (\text{VI.7.3})$$

è facile dimostrare che

$$(\Delta L_x)^2 = \begin{cases} \hbar^2/2 & \text{per } \psi_{-1} \\ \hbar^2 \sin^2 \theta & \text{per } \psi_0 \\ \hbar^2/2 & \text{per } \psi_1 \end{cases} \quad (\text{VI.7.4})$$

Per gli stati  $\psi_{-1}$  e  $\psi_1$ , essendo essi autostati di  $L^2$ , si ha  $\langle L^2 \rangle = 2\hbar^2$  e  $(\Delta L^2) = 0$ . Nel caso invece di  $\psi_0$

$$\langle \psi_0 | L^2 | \psi_0 \rangle = 2\hbar^2 \sin^2 \theta = 2(\Delta L_x)^2 \quad (\text{VI.7.5})$$

$$(\Delta L^2)^2 = 4(\Delta L_x)^2 [\hbar^2 - (\Delta L_x)^2] \quad (\text{VI.7.6})$$

### Problema VI.8

Esprimere le autofunzioni della componente  $x$  del momento angolare,  $L_x$ , appartenenti all'autovalore  $2\hbar^2$  di  $L^2$ , in termini delle autofunzioni di  $L_z$ .

Calcolare, per ciascun stato, le probabilità relative dei possibili valori di  $L_z$ .

### Problema VI.9

Sia data una particella che si trova in un autostato del quadrato del momento angolare con  $l = 3$ . Si sa inoltre che in questo autostato valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \langle L_x \rangle &= \langle L_y \rangle = \hbar \\ \langle L_x^2 \rangle &= \langle L_y^2 \rangle = 2\hbar^2 \end{aligned}$$

Si trovi l'indeterminazione minima per  $L_z$ .

È possibile determinare univocamente lo stato a indeterminazione minima?

#### *Soluzione del Problema*

Dai dati del problema possiamo immediatamente determinare il valor medio del quadrato della terza componente del momento angolare:

$$\langle L^2 \rangle = 3(3+1)\hbar^2 = 12\hbar^2 = \langle L_x^2 \rangle + \langle L_y^2 \rangle + \langle L_z^2 \rangle \quad (\text{VI.9.1})$$

da cui risulta immediatamente

$$\langle L_z^2 \rangle = 8\hbar^2 \quad (\text{VI.9.2})$$

Per quanto riguarda il valor medio di  $L_z$ , possiamo facilmente determinare una disuguaglianza che il suo modulo deve soddisfare. Infatti deve essere:

$$\Delta(L_x)\Delta(L_y) \geq \frac{1}{2} |\langle [L_x, L_y] \rangle| = \frac{\hbar}{2} |\langle L_z \rangle| \quad (\text{VI.9.3})$$

E dato che  $\Delta(L_x) = \Delta(L_y) = \hbar$  risulta immediatamente

$$|\langle L_z \rangle| \leq 2\hbar \quad (\text{VI.9.4})$$

Ed infine:

$$\Delta(L_z) = \sqrt{\langle L_z^2 \rangle - \langle L_z \rangle^2} \geq \hbar \sqrt{8 - 4} = 2\hbar \quad (\text{VI.9.5})$$

Per quanto riguarda l'indeterminazione di  $\Delta(L_z)$ , questa si calcola facilmente usando una relazione del tipo della (VI.9.3):

$$\Delta(L_x)\Delta(L_z) \geq \frac{1}{2} |\langle [L_x, L_z] \rangle| = \frac{\hbar}{2} |\langle L_y \rangle| \quad (\text{VI.9.6})$$

da cui risulta che l'indeterminazione minima è  $\frac{\hbar}{2}$

Non è però possibile individuare in maniera univoca lo stato, il quale è un vettore in uno spazio complesso  $2l + 1 = 7$  dimensionale, mentre le relazioni sui valori di aspettazione delle tre componenti del momento angolare danno solo 6 relazioni.

### Problema VI.10

Dati gli operatori hermitiani  $q_i$  e  $p_j$  ( $i, j = 1, 2$ ) che verificano  $[q_i, p_j] = i\delta_{ij}$ , si considerino i tre operatori

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}(q_2 p_1 - q_1 p_2) , \\ A_2 &= \frac{1}{2}(q_2 q_1 + p_1 p_2) , \\ A_3 &= \frac{1}{4}(q_1^2 + p_1^2 - q_2^2 - p_2^2) \end{aligned} \quad (\text{VI.10.1})$$

Questi operatori possono corrispondere a grandezze simultaneamente osservabili? Sulla base delle loro relazioni di commutazione si determinino gli autovalori di  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$  e si veda che coincidono con quelli ottenuti considerando la sua forma esplicita.

#### Soluzione del Problema

Dalla definizione degli operatori  $A_i$  e dall'algebra a cui obbediscono  $q_i$  e  $p_j$ :

$$[q_i, q_j] = 0 \quad , \quad [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [q_i, p_j] = i\delta_{ij} \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{VI.10.2})$$

segue facilmente che

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} A_k \quad , \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (\text{VI.10.3})$$

Come è noto, questa è proprio l'algebra dei generatori dei momenti angolari, quindi una coppia massimale di operatori che commutano è formata da  $A^2$  ed una delle tre componenti  $A_i$ . Gli autovalori di  $A^2$  saranno  $l(l + 1)$  con  $l = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ , e quelli di  $A_i$  sono pari a tutti gli interi  $m$  tali che  $-l \leq m \leq l$ .

In maniera alternativa, se si calcola l'espressione di  $A^2$  in termini di  $q_i$  e  $p_j$  si ottiene

$$A^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2}{2} \right)^2 - 1 \right] . \quad (\text{VI.10.4})$$

Come si vede, esso è esprimibile in termini dell'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico bidimensionale (espressa con variabili adimensionali)  $(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2)/2$ . Avendo tale Hamiltoniana autovalori  $(n + 1)$ , segue che gli autovalori di  $A^2$  sono  $n(n + 2)/4$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Ribattezzando  $l = n/2$ , si ottiene per gli autovalori di  $A^2$  lo stesso risultato precedentemente ottenuto.

### Problema VI.11

Tre matrici  $M_i$ ,  $81 \times 81$  soddisfano le regole di commutazione del momento angolare.

Conoscendo gli autovalori di  $M_3$  che sono:

$$\begin{aligned} \pm 2 & \quad 1 \text{ volta ognuno.} \\ \pm \frac{3}{2} & \quad 8 \text{ volte ognuno.} \\ \pm 1 & \quad 7 \text{ volte ognuno.} \\ \pm \frac{1}{2} & \quad 20 \text{ volte ognuno.} \\ 0 & \quad 9 \text{ volte.} \end{aligned} \tag{VI.11.1}$$

Trovare gli 81 autovalori di  $M^2 = \sum_i M_i^2$  con le loro degenerazioni.

### Problema VI.12

L'Hamiltoniana di un sistema fisico può essere scritta come

$$H = -\alpha [K^2 + L^2 + \hbar^2]^{-1} \quad \text{con } \alpha > 0 \tag{VI.12.1}$$

dove  $K^2 = \sum_{i=1}^3 K_i^2$  e  $L^2 = \sum_{i=1}^3 L_i^2$ .

Gli operatori  $K_i$  ed  $L_i$  soddisfano le relazioni di commutazione

$$\begin{aligned} [L_i, L_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \\ [K_i, L_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} K_k \\ [K_i, K_j] &= i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \end{aligned} \tag{VI.12.2}$$

ed inoltre verificano

$$\sum_{i=1}^3 K_i L_i = 0 \quad . \tag{VI.12.3}$$

Esprimendo  $H$  in termini di  $M_i = (L_i + K_i)/2\hbar$  e  $N_i = (L_i - K_i)/2\hbar$ , trovare gli autovalori e la corrispondente degenerazione.

#### *Soluzione del Problema*

Dalla definizione di  $M_i$  ed  $N_i$  è facile dimostrare in virtù delle regole di commutazione tra gli operatori  $L_i$  e  $K_i$  che

$$[M_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k \quad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k \quad [M_i, N_j] = 0 \quad . \tag{VI.12.4}$$

Dato che gli operatori  $M_i$  ed  $N_i$  commutano è possibile trovare una base di autostati che diagonalizzi simultaneamente  $M^2$ ,  $M_3$ ,  $N^2$  ed  $N_3$ . Siano  $m$  ed  $n$  gli indici per gli autovalori di  $M^2$  ed  $N^2$ , rispettivamente, e  $m_3$  e  $n_3$  gli autovalori di  $M_3$  e  $N_3$ . dato che  $M_i$  e  $N_i$  soddisfano l'algebra dei momenti angolari, varranno per essi tutti i risultati ottenuti per i momenti angolari.

★ *In effetti possiamo riconoscere che il problema è quello di due rotatori accoppiati dalla relazione di ortogonalità .*

Indicando con  $|m, m_3; n, n_3\rangle$  un elemento della suddetta base, per costruzione avremo

$$M^2|m, m_3; n, n_3\rangle = m(m+1)|m, m_3; n, n_3\rangle \quad , \quad (\text{VI.12.5})$$

$$M_3|m, m_3; n, n_3\rangle = m_3|m, m_3; n, n_3\rangle \quad , \quad (\text{VI.12.6})$$

$$N^2|m, m_3; n, n_3\rangle = n(n+1)|m, m_3; n, n_3\rangle \quad , \quad (\text{VI.12.7})$$

$$N_3|m, m_3; n, n_3\rangle = n_3|m, m_3; n, n_3\rangle \quad , \quad (\text{VI.12.8})$$

con  $m, n = 0, 1/2, 1, 3/2, 2..$  e  $2m_3, 2n_3 \in \mathbb{Z}$ . In termini degli operatori  $M^2$  ed  $N^2$ , l'Hamiltoniana si scrive

$$H = -\alpha\hbar^{-2} [2M^2 + 2N^2 + 1]^{-1} \quad . \quad (\text{VI.12.9})$$

La relazione di ortogonalità (VI.12.3) impone  $M^2 = N^2$  Tale Hamiltoniana risulta diagonale sugli stati  $|m, m_3; n, n_3\rangle$

$$\begin{aligned} H|m, m_3; n, n_3\rangle &= [4m(m+1) + 1]^{-1} |m, m_3; n, n_3\rangle \\ &= -\frac{\alpha}{\hbar^2} \frac{1}{(2m+1)^2} |m, m_3; n, n_3\rangle \quad , \end{aligned} \quad (\text{VI.12.10})$$

e quindi la degenerazioni di questi livelli energetici sarà  $(2m+1)^2$ .

## Problema VI.13

Si considerino due apparati di Stern-Gerlach posti in sequenza, nei quali le direzioni del campo magnetico formano tra loro un angolo  $\alpha$ . Un fascio incidente viene diviso dal primo apparato in tre fasci, il più basso dei quali viene fatto passare attraverso il secondo apparato. In quanti fasci viene a sua volta diviso e quali sono le loro intensità relative?

Si supponga sia  $z$  la direzione lungo la quale è disposto il campo magnetico nel primo dispositivo di S-G, e che sia invece  $y$  la direzione lungo la quale il fascio si propaga. Il secondo dispositivo sarà dunque diretto lungo  $z'$ , che giace nel piano  $x-z$ . Possiamo allora scrivere

$$x' = -z \sin \alpha + x \cos \alpha \quad , \quad (\text{VI.13.1})$$

$$y' = y \quad , \quad (\text{VI.13.2})$$

$$z' = z \cos \alpha + x \sin \alpha \quad , \quad (\text{VI.13.3})$$

da cui ricaviamo che

$$L_{x'} = -L_z \sin \alpha + L_x \cos \alpha \quad , \quad (\text{VI.13.4})$$

$$L_{y'} = L_y \quad . \quad (\text{VI.13.5})$$

$$L_{z'} = L_z \cos \alpha + L_x \sin \alpha \quad , \quad (\text{VI.13.6})$$

Avendo noi scelto il fascio più basso uscente dal primo dispositivo di S-G, allora lo stato che entra nel secondo S-G è l'autostato di  $L_z$ ,  $| -1_z \rangle$ . Ovviamente lo stato è anche autostato di  $L^2$  con  $l = 1$ , che rimane conservato nella propagazione tra un dispositivo e l'altro e durante l'operazione di misura di  $L_z$  ed  $L_{z'}$ .

Per poter analizzare i risultati di una misura di  $L_{z'}$  su tale stato, occorre decomporre lo stesso negli autostati di  $L_{z'}$ ,  $| -1_{z'} \rangle$ ,  $| 0_{z'} \rangle$  e  $| 1_{z'} \rangle$

$$| -1_z \rangle = A_1 | 1_{z'} \rangle + A_0 | 0_{z'} \rangle + A_{-1} | -1_{z'} \rangle \quad . \quad (\text{VI.13.7})$$

Per calcolare i tre coefficienti della precedente decomposizione basta osservare che l'operatore a gradino  $L_-^z$  relativo a  $L_z$  può essere riscritto come

$$\begin{aligned} L_-^z &= L_x - iL_y = \cos \alpha L_{x'} + \sin \alpha L_{z'} - iL_{y'} \\ &= \sin \alpha L_{z'} - \left( \frac{1 - \cos \alpha}{2} \right) L_{+}^{z'} + \left( \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) L_{-}^{z'} \quad . \end{aligned} \quad (\text{VI.13.8})$$

Applichiamo allora tale operatore allo stato della (VI.13.7), omettendo per semplicità un fattore  $\hbar$  complessivo

$$\begin{aligned} L_-^z | -1_z \rangle &= \left[ \sin \alpha A_1 - \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sqrt{2}} \right) A_0 \right] | 1_{z'} \rangle \\ &+ \left[ \left( \frac{1 + \cos \alpha}{\sqrt{2}} \right) A_1 - \left( \frac{1 - \cos \alpha}{\sqrt{2}} \right) A_{-1} \right] | 0_{z'} \rangle \\ &+ \left[ -\sin \alpha A_{-1} + \left( \frac{1 + \cos \alpha}{\sqrt{2}} \right) A_0 \right] | -1_{z'} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.13.9})$$

Otteniamo quindi

$$A_1 = \left( \frac{1 - \cos \alpha}{2} \right) \quad , \quad (\text{VI.13.10})$$

$$A_0 = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} \quad , \quad (\text{VI.13.11})$$

$$A_{-1} = \left( \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) \quad , \quad (\text{VI.13.12})$$

$$| -1_z \rangle = \left( \frac{1 - \cos \alpha}{2} \right) | 1_{z'} \rangle + \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}} | 0_{z'} \rangle + \left( \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right) | -1_{z'} \rangle \quad . \quad (\text{VI.13.13})$$

Da questa espressione si può osservare che i risultati possibili per la misura di  $L_{z'}$  sono  $-\hbar$ ,  $0$  e  $+\hbar$ , con probabilità

$$P(l_{z'} = \hbar) = \left( \frac{1 - \cos \alpha}{2} \right)^2 \quad , \quad (\text{VI.13.14})$$

$$P(l_{z'} = 0) = \frac{\sin^2 \alpha}{2} \quad , \quad (\text{VI.13.15})$$

$$P(l_{z'} = -\hbar) = \left( \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)^2 \quad . \quad (\text{VI.13.16})$$

★ Si noti la similarità fra le equazioni (VI.13.14–VI.13.16) e la (VI.2.10).

### Problema VI.14

Un sistema quantistico è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \vec{L} \cdot \vec{K} \quad (\text{VI.14.1})$$

dove  $\vec{L}$  è l'operatore momento angolare e  $\vec{K}$  è un vettore costante diretto lungo l'asse  $z$ .

All'istante  $t = 0$  si misurano  $L^2$  ed  $L_z$ , ottenendo rispettivamente i seguenti risultati:  $2\hbar^2$  e  $\hbar$ . A  $t_1$  si misurano nuovamente  $L^2$  ed  $L_z$  ed a  $t_2$  si misurano  $L^2$  ed  $L_x$ .

Si dica quali risultati possono fornire le misure, e con quale probabilità, nei due casi

1.  $0 < t_1 < t_2$
2.  $0 < t_2 < t_1$

È possibile misurare anche l'energia, contemporaneamente ad  $L^2$  e  $L_z$ ? E contemporaneamente a  $L^2$  ed  $L_x$ ?

*Soluzione del Problema*

1. Essendo l'Hamiltoniana  $H$  del sistema proporzionale a  $L_z$ ,  $H = KL_z$ , un insieme completo di osservabili è formato da  $\{L^2, L_z\}$ .

Lo stato iniziale dai risultati delle misure su  $L^2$  ed  $L_z$ , nella base  $|l, m_z\rangle$  risulta

$$|\psi\rangle_0 = |1, 1_z\rangle \quad . \quad (\text{VI.14.2})$$

Tale stato iniziale, evoluto all'istante  $t_1 > 0$  diventa

$$|\psi\rangle_{t_1} = \exp\left\{-i\frac{Ht_1}{\hbar}\right\} |1, 1_z\rangle = \exp\{-iKt_1\} |1, 1_z\rangle \quad . \quad (\text{VI.14.3})$$

In virtù dell'equazione (VI.14.3), le misure ripetute di  $L^2$  ed  $L_z$  all'istante  $t_1 < t_2$  forniscono di nuovo risultati  $2\hbar^2$  e  $\hbar$  con probabilità 1. Lo stato (VI.14.3) evoluto poi a  $t_2$  diventa

$$|\psi\rangle_{t_2} = \exp\left\{-i\frac{H(t_2 - t_1)}{\hbar}\right\} |\psi\rangle_{t_1} = \exp\{-iKt_2\} |1, 1_z\rangle \quad . \quad (\text{VI.14.4})$$

Su questo stato, la misura all'istante  $t_2$  di  $L^2$  continua a fornire come risultato  $2\hbar^2$  con probabilità 1 in quanto: essendo  $[H, L^2] = 0$  e lo stato iniziale autostato di  $L^2$ , lo stato  $|\psi\rangle_t$  evolve rimanendo autostato di  $L^2$ .

Per il calcolo dei possibili risultati di una misura di  $L_x$ , occorre decomporre  $|1, 1_z\rangle$  in autostati di  $L_x$ . Possiamo scrivere in tutta generalità che

$$|1, 1_z\rangle = \alpha|1, 1_x\rangle + \beta|1, -1_x\rangle + \gamma|1, 0_x\rangle \quad . \quad (\text{VI.14.5})$$

Per ricavare le costanti incognite  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  basta osservare che l'operatore gradino  $L_z^+$  rispetto ad  $L_z$ , può essere riscritto come  $L_z^+ = L_x + (i/2)(L_x^+ + L_x^-)$  dove  $L_x^\pm = L_y \pm iL_z$  sono gli operatori gradino rispetto a  $L_x$ . Da cui, agendo con  $L_z^+$  su ambo i membri della (VI.14.5) otteniamo

$$0 = \left(\alpha + \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma\right)|1, 1_x\rangle + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\beta + \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha\right)|1, 0_x\rangle + \left(-\beta + \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma\right)|1, -1_x\rangle \quad . \quad (\text{VI.14.6})$$

Imponendo la condizione di normalizzazione  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$ , possiamo scegliere la fase in modo da avere:

$$\alpha = -\frac{i}{2} \quad \beta = +\frac{i}{2} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad . \quad (\text{VI.14.7})$$

Quindi possiamo scrivere

$$|1, 1_z\rangle = -\frac{i}{2}|1, 1_x\rangle + \frac{i}{2}|1, -1_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0_x\rangle \quad . \quad (\text{VI.14.8})$$

Lo stato (VI.14.4) diventa allora

$$|\psi\rangle_{t_2} = \exp\{-iKt_2\} \left(-\frac{i}{2}|1, 1_x\rangle + \frac{i}{2}|1, -1_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0_x\rangle\right) \quad . \quad (\text{VI.14.9})$$

I risultati possibili per la misura di  $L_x$  sono allora  $-\hbar$ ,  $0$  e  $\hbar$  con probabilità  $1/4$ ,  $1/2$  e  $1/4$ , rispettivamente.

★ *Queste probabilità sono indipendenti da  $t$  e  $K$ . Si noti la similarità col problema (II.1).*

2. In questo caso, come nel precedente, lo stato iniziale è quello riportato nella (VI.14.2) quindi all'istante  $t_2 > 0$  abbiamo

$$|\psi\rangle_{t_2} = \exp\left\{-i\frac{Ht_2}{\hbar}\right\}|1, 1_z\rangle = \exp\{-iKt_2\}|1, 1_z\rangle \quad , \quad (\text{VI.14.10})$$

che decomposto sugli autostati di  $L_x$  diventa

$$|\psi\rangle_{t_2} = \exp\{-iKt_2\} \left(-\frac{i}{2}|1, 1_x\rangle + \frac{i}{2}|1, -1_x\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0_x\rangle\right) \quad . \quad (\text{VI.14.11})$$

In questo istante dunque, la misura di  $L_x$  fornisce gli stessi risultati con le stesse probabilità che avrebbe fornito nello stesso istante ma nel caso 1). Per il calcolo seguente dello stato all'istante  $t_1 > t_2$  occorre distinguere tra i tre casi possibili di misura di  $L_x$  in  $t_2$ .

- (a) ( $m_x = 1$  in  $t_2$ ). In questo caso, subito dopo la misura di  $L_x$  ( $t = t_2$ ) lo stato, a meno di una fase inessenziale, diventa

$$|\psi\rangle_{t_2} = |1, 1_x\rangle \quad . \quad (\text{VI.14.12})$$

Ripetendo quanto fatto nel caso di  $|1, 1_z\rangle$ , il calcolo completo della matrice unitaria di trasformazione tra le basi di autostati di  $L_z$  ed  $L_x$  per  $l = 1$  produce

$$\begin{pmatrix} |1, 1_z\rangle \\ |1, 0_z\rangle \\ |1, -1_z\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1, 1_x\rangle \\ |1, 0_x\rangle \\ |1, -1_x\rangle \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{VI.14.13})$$

La trasformazione inversa la si ottiene considerando la matrice hermitiana coniugata

$$\begin{pmatrix} |1, 1_x\rangle \\ |1, 0_x\rangle \\ |1, -1_x\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |1, 1_z\rangle \\ |1, 0_z\rangle \\ |1, -1_z\rangle \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{VI.14.14})$$

Usando i risultati della relazione precedente, nel caso in esame  $|\psi\rangle_{t_1}$  risulta

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{t_1} &= \frac{i}{2} \exp\{-iK(t_1 - t_2)\} |1, 1_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0_z\rangle \\ &\quad - \frac{i}{2} \exp\{+iK(t_1 - t_2)\} |1, -1_z\rangle \quad , \quad (\text{VI.14.15}) \end{aligned}$$

e quindi misurando  $L_z$  all'istante  $t_1 > t_2$ , avendo trovato  $m_x = 1$  in  $t_1$ , si possono trovare i seguenti tre valori con probabilità

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_z = 1 & P(m_z = 1) = \frac{1}{4} \\ m_z = 0 & P(m_z = 0) = \frac{1}{2} \\ m_z = -1 & P(m_z = -1) = \frac{1}{4} \end{array} \right. \quad . \quad (\text{VI.14.16})$$

- (b) ( $m_x = 0$  in  $t_2$ ). In questo caso la relazione(VI.14.16) diventa

$$\left\{ \begin{array}{ll} m_z = 1 & P(m_z = 1) = \frac{1}{2} \\ m_z = 0 & P(m_z = 0) = 0 \\ m_z = -1 & P(m_z = -1) = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad . \quad (\text{VI.14.17})$$

2.c) ( $m_x = -1$  in  $t_2$ ). In questo caso la relazione (VI.14.16) diventa invece

$$\begin{cases} m_z = 1 & P(m_z = 1) = \frac{1}{4} \\ m_z = 0 & P(m_z = 0) = \frac{1}{2} \\ m_z = -1 & P(m_z = -1) = \frac{1}{4} \end{cases} \quad . \quad (\text{VI.14.18})$$

L'insieme dei risultati del punto 2) possono essere riassunti nella seguente tabella che riporta i valori corrispondenti alle probabilità di misure combinate  $m_x$  ed  $m_z$ . Ovviamente gli  $m_x$  vanno intesi come misurati a  $t_1$  ed  $m_z$  a  $t_2$ .

	$m_x = -1$	$m_x = 0$	$m_x = 1$
$m_z = -1$	1/16	1/4	1/16
$m_z = 0$	1/8	0	1/8
$m_z = 1$	1/16	1/4	1/16

In relazione all'ultima domanda, ovviamente è certamente possibile misurare l'energia simultaneamente a  $L^2$  ed  $L_z$ , ma questo non fornisce nessuna ulteriore informazione, essendo  $H$  proporzionale ad  $L_z$ , ma non è possibile farlo contemporaneamente a  $L^2$  ed  $L_x$  dato che  $[H, L_x] \neq 0$ .

### Problema VI.15

Una particella di massa  $m$  si trova in un dato istante in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\Psi(x, y, z) = (x + y + z) e^{-\alpha r} \quad (\text{VI.15.1})$$

dove  $\alpha$  è una costante.

Quali sono i possibili risultati della misura di  $L^2$  ed  $L_z$ ? Calcolarne le probabilità ed i valori medi.

## Soluzione del Problema

Gli operatori  $L^2$  ed  $L_z$  per una particella che si muove nello spazio sono dati da

$$L^2 = (\vec{r} \times \vec{p})^2 = -\hbar^2 \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \quad (\text{VI.15.2})$$

$$L_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (\text{VI.15.3})$$

Poichè  $[L^2, L_z] = 0$  esiste una base comune di autofunzioni, che nel caso specifico è data dalle armoniche sferiche  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ . Per queste funzioni infatti abbiamo

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{VI.15.4})$$

$$L_z Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{VI.15.5})$$

Riportiamo nel seguito le espressioni delle prime armoniche sferiche normalizzate

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (\text{VI.15.6})$$

$$Y_1^1(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{(x+iy)}{r} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi} \quad (\text{VI.15.7})$$

$$Y_1^{-1}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{(x-iy)}{r} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi} \quad (\text{VI.15.8})$$

Usando le suddette espressioni possiamo riscrivere

$$(x+y+z)e^{-\alpha r} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left[ Y_1^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)Y_1^{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)Y_1^1 \right] r e^{-\alpha r} \quad (\text{VI.15.9})$$

da cui ricaviamo

$$\|\Psi\|^2 = 4\pi \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} dr. \quad (\text{VI.15.10})$$

In termini della (VI.15.9) e (VI.15.10) si possono allora ottenere e possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura di  $L^2$  ed  $L_z$ . Infatti, come si vede dalla (VI.15.9), lo stato  $\Psi$  è autostato di  $L^2$  di autovalore  $2\hbar^2$  e quindi una misura di questo osservabile non può avere come risultato che l'autovalore stesso con probabilità 1. Per quanto riguarda invece  $L_z$ , essa può assumere i soli valori  $-\hbar$ , 0 e  $+\hbar$  con probabilità

$$P(l_z = -\hbar) = \|\Psi\|^{-2} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} dr = \frac{1}{3}, \quad (\text{VI.15.11})$$

$$P(l_z = 0) = \|\Psi\|^{-2} \frac{4\pi}{3} \left| \frac{1-i}{\sqrt{2}} \right|^2 \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} dr = \frac{1}{3}, \quad (\text{VI.15.12})$$

$$P(l_z = \hbar) = \|\Psi\|^{-2} \frac{4\pi}{3} \left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right|^2 \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} dr = \frac{1}{3}. \quad (\text{VI.15.13})$$

Otteniamo dunque  $\langle L_z \rangle = 0$  e  $\Delta L_z = \sqrt{2/3}\hbar$ .

### Problema VI.16

Lo stato di una particella soggetta ad un potenziale  $V(r)$  a simmetria sferica è rappresentato dalla funzione d'onda

$$\psi(\vec{r}) = (x + y + 3z)e^{-\alpha r} \quad (\text{VI.16.1})$$

Si chiede:

1.  $\psi$  è autofunzione di  $L^2$ ? Se è così qual'è il valore di  $l$ ? Se no quali sono i possibili risultati di una misura di  $L^2$ ?
2. Quali sono le probabilità per la particella di trovarsi nei vari autostati di  $L_x$ ?
3. Supponendo di sapere che  $\psi(\vec{r})$  è una autofunzione dell'energia con autovalore  $E$ , trovare  $V(r)$ .

### Problema VI.17

In un dato sistema di riferimento una particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = (x - x_0)(y - y_0)e^{-\alpha r^2} \quad (\text{VI.17.1})$$

con  $\alpha > 0$ .

Discutere la distribuzione di probabilità di ogni componente e del quadrato del momento angolare rispetto all'origine.

### Problema VI.18

Una particella è vincolata a muoversi sulla superficie di una sfera, i cui angoli polare ed azimutale denotiamo con  $\theta$  e  $\varphi$ . La sua Hamiltoniana è :

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \bar{H} \\ H_0 &= AL^2 \\ \bar{H} &= \hbar B \cos(2\varphi) \end{aligned} \quad (\text{VI.18.1})$$

con  $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L}$

Indichiamo con  $Y_l^m$  le armoniche sferiche normalizzate, e si prendano in esame solo gli stati con  $l = 0, 1, 2$ .

1. Si ottengano i valori espliciti degli elementi diagonali di  $H$  nella base delle armoniche sferiche per tutti gli stati con  $l \leq 2$ .

2. Indicare quali degli elementi non diagonali di  $H$  sono nulli, e indicare possibili relazioni fra gli elementi non nulli.

*Soluzione del Problema*

★ Si noti che la presenza di  $\bar{H}$  rompe la simmetria per rotazione, per cui la degenerazione degli autovalori di  $H_0$ , cioè che  $m$  non contribuisce all'energia, viene rimossa dalla presenza di  $\bar{H}$ .

1. Chiaramente

$$\langle Y_l^m | H_0 | Y_l^m \rangle = A \hbar^2 l(l+1) \quad (\text{VI.18.2})$$

per cui ci resta da calcolare  $\langle Y_l^m | \bar{H} | Y_l^m \rangle$  per  $l = 0, 1, 2, -l < m < l$ . Notiamo subito che, dato che le armoniche sferiche con  $m = 0$  altro non sono che polinomi di Legendre,  $Y_l^0 \propto P_l(\cos \theta)$ , risulta immediatamente

$$\langle Y_l^0 | \bar{H} | Y_l^0 \rangle \propto \int_{-1}^1 dx (P_l(x))^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(2\varphi) = 0 \quad (\text{VI.18.3})$$

a causa dell'integrale in  $\varphi$ .

Analogamente si può vedere che anche nel caso generico

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{VI.18.4})$$

dove

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (\text{VI.18.5})$$

compare un integrale in  $\varphi$  che si annulla:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m)\varphi} \cos(2\varphi) d\varphi = 0. \quad (\text{VI.18.6})$$

Gli elementi diagonali di  $\bar{H}$  sono pertanto tutti nulli.

2. Consideriamo ora un generico elemento obliquo, notiamo immediatamente che  $H_0$  non ha elementi obliqui, essendo le armoniche sferiche autostati del quadrato del momento angolare. Restano da calcolare gli elementi non diagonali di  $\bar{H}$ , che conviene scrivere come segue:

$$\begin{aligned} \bar{H}_{lm'l'm'} &= \langle Y_l^m | \bar{H} | Y_{l'}^{m'} \rangle \\ &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \sqrt{\frac{(2l'+1)(l'-m')!}{4\pi(l'+m')!}} \\ &\times \int_{-1}^1 dx P_l^m(x) P_{l'}^{m'}(x) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos(2\varphi) e^{-i(m-m')\varphi} \end{aligned} \quad (\text{VI.18.7})$$

L'integrale in  $\varphi$  si calcola immediatamente, esso è nullo a meno che  $m - m' = \pm 2$ , e in entrambi i casi ha valore  $\pi$ . Da semplici considerazioni sulla parità delle armoniche sferiche:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\pi - \theta, \pi - \varphi) \quad (\text{VI.18.8})$$

risulta poi che se  $m$  e  $m'$  differiscono di 2 (ed hanno quindi la stessa parità), perché l'integrale in  $\theta$  non sia nullo le  $l$  devono avere la stessa parità degli  $m$ .

Infine sempre dalla (VI.18.7) notiamo che

$$\overline{H}_{lm'l'm'} = \overline{H}_{lm'l'm} = H_{l-m'l-m'} \quad (\text{VI.18.9})$$

Inoltre, hermiticità dell'operatore hamiltoniano ci garantisce che

$$\overline{H}_{lm'l'm'} = (\overline{H}_{l'm'lm})^* \quad (\text{VI.18.10})$$

Ci sono quindi pochi elementi non diagonali che riportiamo di seguito per completezza:

$$\begin{aligned} \overline{H}_{2220} &= \overline{H}_{202-2} = -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{3}{2}} \hbar B \\ \overline{H}_{2200} &= \frac{1}{6} \sqrt{\frac{15}{2}} \hbar B \\ \overline{H}_{212-1} &= -\frac{1}{2} \hbar B \\ \overline{H}_{111-1} &= -\frac{1}{2} \hbar B \end{aligned} \quad (\text{VI.18.11})$$

Per ricavare questi elementi di matrice, abbiamo usato l'espressione esplicita delle armoniche sferiche, che è riportata per alcune di esse nell'esercizio VI.12, e la formula generale per ricavare:

$$\begin{aligned} Y_2^2(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{i2\varphi}, & Y_2^1(\theta, \varphi) &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \\ Y_2^0(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.18.12})$$

Si ricordi che  $Y_l^{-m} = (-1)^m Y_l^{m*}$ .

### Problema VI.19

Il vettore di Lenz

$$\vec{R} = \frac{1}{m} (\vec{p} \times \vec{L}) - \frac{e^2}{r} \vec{r} \quad (\text{VI.19.1})$$

è una costante del moto in un potenziale Coulombiano

$$V(\vec{r}) = -e^2/r.$$

Scrivere l'espressione quantistica corretta  $\widehat{R}$  da associare come operatore osservabile alla grandezza  $\vec{R}$  e vedere se tale grandezza è anche quantisticamente una costante del moto.

Dal fatto che

$$\widehat{R}^2 = e^4 + 2\frac{\widehat{H}}{m} (\widehat{L}^2 + \hbar^2), \quad (\text{VI.19.2})$$

essendo  $\widehat{H}$  l'operatore Hamiltoniano, desumere il valore dell'energia dello stato fondamentale del sistema.

Classicamente è facile osservare che  $\vec{R}$  è una costante del moto in campo Coulombiano. Infatti, ricordando che in presenza di forze centrali  $\vec{L} = 0$ , allora si ha

$$\begin{aligned} \dot{\vec{R}} &= \frac{1}{m} (\dot{\vec{p}} \times \vec{l}) - e^2 \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}}{r} \\ &= -\frac{e^2}{mr^3} (\vec{r} \times \vec{l}) - \frac{e^2 \vec{p}}{mr} + \frac{e^2 \dot{r} \vec{r}}{r^2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.19.3})$$

dove abbiamo usato le equazioni classiche del moto e l'identità (fra quantità che commutano):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \quad (\text{VI.19.4})$$

Indicando con  $R_i$  l'iesima componente di  $\vec{R}$ , l'operatore quantistico ad essa associata,  $\widehat{R}_i$ , si ottiene dall'analogo classico tramite le regole di corrispondenza e con la richiesta ulteriore che l'operatore ottenuto sia hermitiano. Tale requisito è facilmente soddisfatto se dopo aver applicato le regole di corrispondenza si somma all'operatore così ottenuto il suo hermitiano coniugato. Così facendo otterremo allora

$$\widehat{R}_i = \frac{1}{2m} \epsilon_{ijk} (p_j L_k + L_k p_j) - \frac{e^2}{r} x_i = \frac{1}{m} \epsilon_{ijk} p_j L_k - \frac{i}{m} p_i - e^2 \frac{x_i}{r} \quad (\text{VI.19.5})$$

★ La presenza della  $i$  sembrerebbe indicare che l'operatore non è Hermitiano, come si risolve questo apparente paradosso?

Per dimostrare che anche quantisticamente  $\widehat{R}_i$  corrisponde ad una costante del moto basta dimostrare  $[H, \widehat{R}_i] = 0$ . Sapendo che  $[H, L_j] = 0$  si ha infatti

$$[H, \widehat{R}_i] = \frac{1}{2m} \epsilon_{ijk} ([H, p_j] L_k + L_k [H, p_j]) - e^2 \left[ H, \frac{x_i}{r} \right] \quad (\text{VI.19.6})$$

Dalla forma dell'Hamiltoniana  $H$  si ha però

$$[H, p_j] = i\hbar e^2 \frac{x_j}{r^3} \quad (\text{VI.19.7})$$

$$\left[ H, \frac{x_i}{r} \right] = \frac{i\hbar}{2m} \left[ p_j \frac{x_j x_i}{r^3} + \frac{x_i x_j}{r^3} p_j - p_i \frac{1}{r} - \frac{1}{r} p_i \right] \quad (\text{VI.19.8})$$

Sostituendo la (VI.19.8) nella (VI.19.6) è facile vedere che  $[H, \widehat{R}_i] = 0$  e quindi  $\widehat{R}_i$  è anche quantisticamente una costante del moto.

★ Questo è in effetti un risultato generale conseguenza del fatto che la quantizzazione consiste nel sostituire alle variabili classiche operatori Hermitiani, ed alle parentesi di Poisson il commutatore moltiplicato per  $i$ . La costanza del moto è perciò conseguenza del fatto che classicamente  $\dot{A} = [A, H]$ .

Sia  $|0\rangle$  lo stato fondamentale della teoria. Dalla relazione riportata nella traccia segue che

$$\langle 0|\widehat{R}^2|0\rangle = \frac{2\hbar^2}{m} \langle 0|H|0\rangle + e^4 \geq 0 \quad . \quad (\text{VI.19.9})$$

Il valore minimo per l'autovalore dell'energia  $H|0\rangle = E_0|0\rangle$ , sarà allora

$$E_0 = -\frac{e^4 m}{2\hbar^2} \quad , \quad (\text{VI.19.10})$$

ciò , a patto che sia verificata la relazione

$$\widehat{R}_i|0\rangle = -\left(\frac{i\hbar}{m}p_i + e^2\frac{x_i}{r}\right)|0\rangle = 0 \quad . \quad (\text{VI.19.11})$$

Si noti, che in virtù della simmetria per rotazione dello stato fondamentale,  $L_k|0\rangle = 0$ , e quindi da ciò consegue la (VI.19.11).

Risolvendo la (VI.19.11) otteniamo la funzione d'onda dello stato fondamentale

$$\Psi_0(r) = N \exp\left\{-\frac{e^2 m}{\hbar^2} r\right\} \quad . \quad (\text{VI.19.12})$$

## Problema VI.20

Si consideri il momento angolare ed il vettore di Lenz definito nel problema precedente e si dimostri che le sei quantità  $L_i$  ed  $R_i$  formano (sotto commutazione) la seguente algebra:

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \quad (\text{VI.20.1})$$

$$[R_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}R_k \quad (\text{VI.20.2})$$

$$[R_i, R_j] = i\hbar\left(-\frac{2H}{m}\right)\varepsilon_{ijk}L_k \quad (\text{VI.20.3})$$

dove  $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$  è l'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno.

### Soluzione del Problema

Essendo il commutatore fra  $L_i$  ed  $L_j$  quello noto, valutiamo solo i commutatori in cui intervengono componenti del vettore di Lenz.

Per semplificare le notazione definiamo:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{1}{2m}(R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + e^2 R_i^{(3)}) \\ R_i^{(1)} &= \frac{1}{2m}\varepsilon_{ijk}p_j L_k \\ R_i^{(2)} &= \frac{1}{2m}\varepsilon_{ijk}L_k p_j \\ R_i^{(3)} &= \frac{x_i}{r} \end{aligned} \quad (\text{VI.20.4})$$

Ricordiamo inoltre i seguenti utili commutatori:

$$\begin{aligned} [L_i, x_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}x_k \\ [L_i, p_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}p_k \\ [L_i, r] &= 0 \end{aligned} \tag{VI.20.5}$$

e l'utilissima relazione:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{VI.20.6}$$

Possiamo ora calcolare:

$$\begin{aligned} [R_i^{(1)}, L_j] &= \frac{1}{2m}\epsilon_{ilk}[p_l L_k, L_j] \\ &= \frac{1}{2m}\epsilon_{ilk}(p_l[L_k, L_j] + [p_l, L_j]L_k) \\ &= \frac{1}{2m}\epsilon_{ilk}p_l\epsilon_{mkj}L_m - \frac{1}{2m}\epsilon_{ilk}\epsilon_{mlj}p_m L_k \\ &= i\hbar\frac{1}{2m}(p_i L_j - p_j L_i) \\ &= i\hbar\epsilon_{ijk}R_k^{(1)} \end{aligned} \tag{VI.20.7}$$

ed analogamente

$$[R_i^{(2)}, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}R_k^{(2)} \tag{VI.20.8}$$

mentre il pezzo che coinvolge  $R^{(3)}$  è dato da un calcolo diretto:

$$[L_i, R_j^{(3)}] = -\frac{e^2}{r}[L_i, x_j] = -\frac{e^2}{r}i\hbar\epsilon_{ijk}x_k = i\hbar R_k^{(3)} \tag{VI.20.9}$$

Per cui abbiamo dimostrato la (VI.20.2). Resta da dimostrare la (VI.20.3).

Per brevità omettiamo il calcolo dei vari termini e diamo solo i risultati dei commutatori dei vari termini che compongono  $R$ :

$$\begin{aligned} [R_i^{(1)}, R_j^{(1)}] &= -i\hbar\epsilon_{ijk}p^2 L_k \\ [R_i^{(1)}, R_j^{(2)}] &= -i\hbar\epsilon_{ijk}p^2 L_k \\ [R_i^{(2)}, R_j^{(2)}] &= -i\hbar\epsilon_{ijk}p^2 L_k \\ [R_i^{(1)}, R_j^{(3)}] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r} \\ [R_i^{(2)}, R_j^{(3)}] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\frac{x_k}{r} \end{aligned} \tag{VI.20.10}$$

e semplicemente addizionando i vari termini si prova la (VI.20.3).

## Problema VI.21

Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  si muove in un campo magnetico  $\vec{B}$  con velocità  $\vec{v}$ . Si studino le proprietà di commutazione delle componenti del momento angolare cinetico  $\vec{l} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$ , e quelle delle componenti di  $\vec{J} = \vec{l} - qg\vec{r}/r$  nel caso in cui  $\vec{B} = g\vec{r}/r^3$  è il campo magnetico di un *monopolo* di carica magnetica  $g$ .

Quali di queste relazioni di commutazione formano un'algebra chiusa? Cosa se ne può dedurre per gli autovalori delle componenti di  $\vec{l}$  e di  $\vec{J}$  e dei loro quadrati?

(Si proceda per una coppia di componenti, generalizzando il risultato per simmetria, oppure si ricordi che il tensore di Levi-Civita verifica  $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ )

Si assuma inoltre la validità delle relazioni di commutazione fra  $\vec{x}$  e  $\vec{v}$ :

$$[x_i, v_j] = \frac{i\hbar}{m}\delta_{ij} \quad [v_i, v_j] = \frac{i\hbar q}{m^2}\varepsilon_{ijk}B_k \quad (\text{VI.21.1})$$

### Soluzione del Problema

Usando l'identità suggerita nella traccia, e definendo per semplicità di notazione la quantità di moto  $\pi_i = mv_i$ , si trova, dopo un calcolo tedioso ma senza particolari difficoltà :

$$\begin{aligned} [l_a, l_i] &= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk}[x_b\Pi_c, x_j\Pi_k] \\ &= \varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk}(x_b[\Pi_c, x_j]\Pi_k + x_bx_j[\Pi_c, \Pi_k] + x_j[x_b, \Pi_k]\Pi_c) \\ &= i\hbar\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk}(-x_c\Pi_k\delta_{cj} + ex_bx_j\varepsilon_{ckl}B_l + \delta_{bk}x_j\Pi_c) \\ &= i\hbar\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ijk}(x_b\Pi_k - x_k\Pi_b) + ei\hbar\varepsilon_{ijk}(\delta_{ak}\delta_{bl} - \delta_{al}\delta_{bk})x_bx_jB_l \\ &= i\hbar(x_a\Pi_i - x_i\Pi_a) + ei\hbar\varepsilon_{aij}x_j\vec{r} \cdot \vec{B} \\ &= i\hbar\varepsilon_{aij}\varepsilon_{jlm}x_l\Pi_m + ie\hbar\varepsilon_{aij}x_j\vec{r} \cdot \vec{B} \\ &= i\hbar\varepsilon_{aij}(l_j + ex_j\vec{r} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \quad (\text{VI.21.2})$$

Questo risultato è generale e non dipende dalla particolare forma del campo magnetico.

In presenza di un campo magnetico il momento angolare cinetico di una particella pertanto non soddisfa le regole di commutazione tipiche del momento angolare, che sono la causa della nota quantizzazione dei suoi autovalori. Inoltre queste regole di commutazione dipendono dal punto di riferimento.

★ Notiamo che, comunque,  $\vec{l}^2$  commuta con le singole componenti:

$$[\vec{l}^2, l_i] = ie\hbar\varepsilon_{aij}\{l_ax_j\vec{r} \cdot \vec{B} + x_j\vec{r} \cdot \vec{B}l_a\} = 0 \quad (\text{VI.21.3})$$

Per il calcolo delle regole di commutazione di  $\vec{J} = \vec{l} - eg\vec{r}/r$  è utile il commutatore  $[v_i, 1/r] = (i\hbar/m)x_i/r^3$ . Con questa regola, e la (VI.21.2), si calcola facilmente:

$$\begin{aligned} [J_a, J_b] &= [l_a - egx_a/r, l_b - egx_b/r] \\ &= [l_a, l_b] - eg[l_a, x_b/r] - eg[x_a, l_b/r] \\ &= i\hbar\varepsilon_{abc}(l_c - egx_c/r) \\ &= i\hbar\varepsilon_{abc}J_c \end{aligned} \quad (\text{VI.21.4})$$

Se interpretiamo la quantità  $eg\vec{r}/r$  come *momento angolare del campo elettro-magnetico generato dalla carica e dal monopolio* allora si vede che il momento angolare *totale* è una quantità che soddisfa le usuali regole di commutazione.

★ Noi abbiamo assunto le regole di commutazione (VI.21.1) per questo problema. La cosa non è però senza problemi e andrebbe considerata con attenzione. Queste relazioni sono valide per un campo magnetico generico e sono conseguenza delle regole di commutazione fra  $x_i$  e  $p_j$ , e del fatto che, in presenza di un campo magnetico,  $mv_i = p_i - \frac{e}{c}A_i$ , dove  $\vec{A}$  è il potenziale vettore tale che  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . L'esistenza di  $\vec{A}$  è conseguenza della equazione di Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

Questa ultima relazione è violata in presenza di un monopolio magnetico. Infatti il flusso su una superficie  $S$  che racchiude il monopolio è proporzionale a  $g$  (la carica magnetica).

Si possono però definire due potenziali vettori  $\vec{A}^{(+)}$  e  $\vec{A}^{(-)}$  definiti dappertutto tranne che sul semiasse positivo e negativo delle  $z$  rispettivamente. Le due regioni di definizione dei potenziali si chiamano *carte*. Espresi in coordinate sferiche i due potenziali sono:

$$A_r^{(\pm)} = A_\theta^{(\pm)} = 0, \quad A_\varphi^{(\pm)} = \pm g \frac{1 \mp \cos \theta}{r \sin \theta} . \quad (\text{VI.21.5})$$

Applicando il rotore in coordinate sferiche non è difficile vedere che, nelle rispettive carte:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A}^{(\pm)} = g \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{VI.21.6})$$

Si può inoltre notare che (nella intersezione delle due carte)  $A^{(+)}$  e  $A^{(-)}$  sono legati da una trasformazione di gauge:

$$\vec{A}^{(+)} = \vec{A}^{(-)} + g\vec{\nabla}\varphi \quad (\text{VI.21.7})$$

per cui i due potenziali sono in qualche modo fisicamente equivalenti, ovvero descrivono lo stesso campo magnetico.

A questo punto è possibile ripetere il discorso che porta alla (VI.21.1) separatamente nei due domini (tutto lo spazio privato del semiasse delle  $z$ , positivo o negativo rispettivamente). Dal momento che le relazioni di commutazione sono indipendenti dalla carta, le possiamo assumere valide globalmente.

### Problema VI.22

Una particella si trova in un autostato del momento angolare con  $l = 1$ . I valori medi delle componenti risultano:

$$\langle L_x \rangle = \langle L_z \rangle = \frac{\hbar}{3} \quad ; \quad \langle L_y \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{3}} \quad (\text{VI.22.1})$$

e inoltre si ha:

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = 2\frac{\hbar^2}{3} \quad (\text{VI.22.2})$$

Tale stato può essere autostato di una delle componenti?

In base ai dati si determinino le probabilità dei risultati di una misura di ciascuna delle componenti.

### Problema VI.23

Qual'è la condizione che garantisce che una particolare componente del momento angolare orbitale di una particella è conservata?

In questo caso è vero che, preso uno stato arbitrario del sistema, misure ripetute di questa componente del momento angolare su tale stato daranno sempre lo stesso risultato? Se sì, provare l'assunto, altrimenti portare un controesempio.

#### *Soluzione del Problema*

La condizione per una particolare componente del momento angolare orbitale (diciamo  $L_x$ ) si conservi è che il suo commutatore con l'Hamiltoniana  $H$  sia nullo:

$$[H, L_x] = 0 \quad (\text{VI.23.1})$$

Non è però vero, che in questo caso, in ogni stato del sistema  $L_x$  ha un valore ben definito. Questo significherebbe che ogni stato del sistema è autostato di  $L_x$ , il che è falso. Prendiamo ad esempio  $H = L^2$ , ed il sistema nello stato  $\psi_m$  tale che

$$L_z \psi_m = m\hbar \psi_m \quad (\text{VI.23.2})$$

con  $m \neq 0$ .

In questo caso, essendo il sistema in un'autostato di  $L_z$ , non può essere in un autostato di  $L_x$ . Infatti, essendo  $L_x = \frac{L_+ + L_-}{2}$ , e indicando con  $\psi_{m\pm 1}$  gli autostati di  $L_z$  corrispondenti agli autovalori  $\hbar(m \pm 1)$  si ha:

$$L_x \psi_m = \frac{1}{2}(L_+ \psi_m + L_- \psi_m) = \frac{\hbar}{2}(\psi_{m+1} + \psi_{m-1}) \quad (\text{VI.23.3})$$

e quest'ultima espressione chiaramente non è proporzionale a  $\psi_m$ .

★ Perché la somma di  $\psi_{m+1}$  e  $\psi_{m-1}$  non può essere proporzionale a  $\psi_m$ ?

Fa eccezione il caso  $m = 0$  per il quale la  $\psi$  è una costante, e pertanto è annullata da qualunque  $L_i$ .

★ Se però dopo aver misurato  $L_x$  sullo stesso sistema ripetiamo la misura di  $L_x$  troveremo sempre lo stesso risultato. Come effetto della misura di un operatore si ha che il sistema dopo la misura si troverà nell'autostato corrispondente.

★ Si può ripetere lo stesso argomento con lo spin?

*Problemi di Meccanica Quantistica*

## Capitolo VII

### Oscillatore Armonico in più dimensioni

*a cura di*

*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

## Problema VII.1

Per un oscillatore armonico bidimensionale isotropo, trovare fra gli operatori seguenti i possibili sistemi completi di osservabili:

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \quad , \\ L &= -i (a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) \quad , \\ N_{12} &= a_1^\dagger a_2 \quad , \\ N_1 &= a_1^\dagger a_1 \quad , \\ L_+ &= (a_1^\dagger + ia_2^\dagger) (a_1 + ia_2) \quad , \end{aligned} \quad (\text{VII.1.1})$$

dove gli operatori  $a_1^\dagger$ ,  $a_1$ ,  $a_2^\dagger$  e  $a_2$  soddisfano le relazioni di commutazione

$$[a_i, a_j] = 0 \quad [a_i^\dagger, a_j] = \delta_{ij} \quad . \quad (\text{VII.1.2})$$

Per ogni sistema, si classifichino mediante esso gli stati stazionari, e fra gli operatori elencati (ed eventualmente i loro hermitiani coniugati) si cerchino degli operatori che permettano di passare da un autostato ad un altro della base scelta.

### Soluzione del Problema

Affinché gli operatori succitati possano essere osservabili debbono essere hermitiani, questo restringe il numero di operatori da considerare ai soli

$$H = \hbar\omega (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \quad , \quad (\text{VII.1.3})$$

$$L = -i (a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2) \quad , \quad (\text{VII.1.4})$$

$$N_1 = a_1^\dagger a_1 \quad . \quad (\text{VII.1.5})$$

Calcolando i commutatori tra  $H$ ,  $L$  ed  $N_1$  si può osservare che

$$[H, L] = 0 \quad , \quad [H, N_1] = 0 \quad , \quad [L, N_1] = i (a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2) \quad . \quad (\text{VII.1.6})$$

I possibili set di osservabili sono allora  $H, L$ , o  $H, N_1$ . Per quanto riguarda la prima scelta, essa corrisponde alla richiesta di diagonalizzare simultaneamente l'Hamiltoniana totale (bidimensionale) e l'operatore  $L$  che altri non è che la componente ortogonale al piano 1 – 2 del momento angolare a meno di  $\hbar$ .

Indicando con  $|n, m\rangle$  gli autostati di  $H$  ed  $L$  di autovalori  $\hbar\omega(n+1)$  e  $m$ , si può mostrare che essi si ottengono dallo stato fondamentale  $|0\rangle$  come

$$|n, m\rangle = \left[ \left( \frac{n+m}{2} \right)! \left( \frac{n-m}{2} \right)! \right]^{-1/2} (A_+^\dagger)^{\frac{n+m}{2}} (A_-^\dagger)^{\frac{n-m}{2}} |0\rangle \quad , \quad (\text{VII.1.7})$$

dove  $A_\pm = (1/\sqrt{2})(a_1 \mp ia_2)$ . Si osservi che fissato  $n$ , i soli valori di  $m$  possibili sono  $n, n-2, n-4, \dots$ . Inoltre, usando gli operatori  $A_+^\dagger A_-$  e  $A_-^\dagger A_+$  si può aumentare di due

unità  $m$ , lasciando allo stesso tempo  $n$  invariato. Adoperando invece,  $A_+^\dagger A_-^\dagger$  e  $A_- A_+$  si può aumentare o diminuire  $n$  di due unità lasciando  $m$  immutato.

Per la seconda scelta, ovvero  $H, N_1$ , essa corrisponde in realtà a scegliere  $N_1, N_2$ . Gli autostati  $|n_1, n_2\rangle$  possono quindi essere ottenuti come

$$|n_1, n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1! n_2!}} (a_1^\dagger)^{n_1} (a_2^\dagger)^{n_2} |0\rangle \quad . \quad (\text{VII.1.8})$$

Dalla stessa definizione degli autostati risulta ovvio che gli operatori che variano  $n_1$  ed  $n_2$  indipendentemente sono gli stessi operatori di creazione e distruzione  $a_1^\dagger, a_2^\dagger, a_1$  e  $a_2$ .

## Problema VII.2

Un oscillatore armonico isotropo bidimensionale si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y) = N \exp \left\{ -\frac{(x^2 + y^2)}{2} + x + iy \right\} \quad (\text{VII.2.1})$$

in variabili adimensionali.

Trovare la distribuzione di probabilità dei livelli di energia e del momento angolare.

### Soluzione del Problema

Lo stato assegnato può essere riscritto come

$$\psi(x, y) = N \exp \left\{ -\frac{(x^2 + y^2)}{2} + x + iy \right\} = N \exp \left\{ -\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-i)^2}{2} \right\} \quad . \quad (\text{VII.2.2})$$

Usando il fatto che gli operatori  $p_x$  e  $p_y$  sono i generatori delle traslazioni nelle direzioni  $x$  ed  $y$  rispettivamente, in virtù dell'equazione (VII.2.2), possiamo allora scrivere, che a meno di un fattore di normalizzazione,

$$\psi(x, y) = \exp \{-i(p_x + ip_y)\} \psi_0(x, y) \quad , \quad (\text{VII.2.3})$$

dove  $\psi_0(x, y)$  è la funzione d'onda dello stato fondamentale. Osservando che

$$p_x = i \left( \frac{a_x^\dagger - a_x}{\sqrt{2}} \right) \quad , \quad p_y = i \left( \frac{a_y^\dagger - a_y}{\sqrt{2}} \right) \quad , \quad (\text{VII.2.4})$$

possiamo scrivere

$$\exp \{-i(p_x + ip_y)\} = \exp \left\{ (A_+^\dagger - A_-) \right\} \quad , \quad (\text{VII.2.5})$$

dove  $A_\pm = (a_x \mp ia_y)/\sqrt{2}$ . Quindi sostituendo la (VII.2.5) nella (VII.2.3) otteniamo

$$\psi(x, y) = \exp \left\{ (A_+^\dagger - A_-) \right\} \psi_0(x, y) = \exp \left\{ A_+^\dagger \right\} \psi_0(x, y) \quad , \quad (\text{VII.2.6})$$

in virtù del fatto che  $[A_+^\dagger, A_-] = 0$  e che  $A_- \psi_0 = 0$ . Dall'equazione (VII.2.6) segue che lo stato  $\psi(x, y)$  è uno stato coerente rispetto ad  $A_+$ . Ricordando che in variabili adimensionali

$$H = (A_+^\dagger A_+ + A_-^\dagger A_- + 1) \quad , \quad (\text{VII.2.7})$$

$$L = (A_+^\dagger A_+ - A_-^\dagger A_-) \quad , \quad (\text{VII.2.8})$$

lo stato  $\psi(x, y)$ , in termini degli autostati di  $H$  ed  $L$ , di autovalori  $(n_+ + n_- + 1)$  e  $n_+ - n_-$  indicati come  $\psi_{n_+ n_-}(x, y)$ , si scriverà come

$$\psi(x, y) = \sum_{n_+=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_+!}} \psi_{n_+ 0}(x, y) \quad . \quad (\text{VII.2.9})$$

Dall'equazione (VII.2.9) segue che una misura dell'energia può fornire tutti i valori  $(n_+ + 1)$  con  $n_+ = 0, 1, 2, \dots$ , con probabilità (tenendo conto della normalizzazione):  $1/(e n_+!)$ . Per il momento angolare invece, i risultati possibili sono  $n_+$ , con le medesime probabilità ottenute per le corrispondenti misure dell'energia.

### Problema VII.3

Un sistema è descritto dall'Hamiltoniana  $H = H_0 + bH_1$  dove

$$H_0 = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1) \quad (\text{VII.3.1})$$

$$H_1 = i(a_1^\dagger a_2 - a_2^\dagger a_1) \quad (\text{VII.3.2})$$

$b \in \mathbb{R}$  e  $a_i^\dagger$  e  $a_i$  sono gli operatori di creazione e distruzione di un oscillatore armonico bidimensionale con  $[a_i^\dagger, a_j] = \delta_{ij}$  con  $i, j = 1, 2$ .

1. Dire quale grandezza fisica rappresenta  $H_1$ .
2. Trovare un sistema completo di osservabili per il sistema considerato.
3. Discutere lo spettro dell'Hamiltoniana, tenendo conto che la situazione è qualitativamente diversa a seconda dell'intervallo in cui cade il valore della costante  $b$ ; in particolare analizzare in dettaglio il caso in cui lo spettro è limitato inferiormente e trovare gli autovalori e gli autovettori, per i due livelli più bassi.

*Soluzione del Problema*

1. Dalla relazione che lega gli operatori di creazione e distruzione a  $q_i$  e  $p_i$ , con  $i = 1, 2$ , è facile mostrare che

$$L_3 = -\hbar H_1 \quad , \quad (\text{VII.3.3})$$

dove  $L_3$  è la terza componente del momento angolare.

2. Un sistema completo di osservabili è certamente costituito da  $H_0$  ed  $H_1$  che infatti commutano  $[H_0, H_1] = 0$ . Un sistema alternativo è costituito da  $N_+$  ed  $N_-$ , dove

$$N_+ = A_+^\dagger A_+ \quad , \quad N_- = A_-^\dagger A_- \quad , \quad (\text{VII.3.4})$$

con  $A_\pm = (a_1 \mp ia_2)/\sqrt{2}$ . In termini di  $N_+$  ed  $N_-$ , osservando che  $H_0 = \hbar\omega(N_+ + N_- + 1)$  e  $H_1 = N_- - N_+$ , si ha

$$H = (\hbar\omega - b)N_+ + (\hbar\omega + b)N_- + \hbar\omega \quad . \quad (\text{VII.3.5})$$

In questa base gli autovettori sono indicati come  $|n_+, n_- \rangle$ . Su questa base gli autovalori dell'energia sono

$$E_{n_+, n_-} = (\hbar\omega - b)n_+ + (\hbar\omega + b)n_- + \hbar\omega \quad \text{con} \quad n_+, n_- = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{VII.3.6})$$

3. Come si vede quindi, lo spettro è inferiormente limitato solo se  $b \in [-\hbar\omega, \hbar\omega]$ . Negli altri casi uno dei due fattori in parentesi tonde della (VII.3.6) sarà negativo e quindi moltiplicato per un intero qualunque renderà illimitato inferiormente lo spettro. Supponiamo allora lo spettro inferiormente limitato e sia  $b \geq 0$ , il caso  $b < 0$  è poi ottenuto scambiando  $n_+$  con  $n_-$ .

In questo caso i due valori più bassi dell'energia saranno  $E_{0,0}$  e  $E_{1,0}$ , corrispondenti agli autovettori  $|0, 0 \rangle$  e  $|1, 0 \rangle$  rispettivamente.

## Problema VII.4

Un oscillatore armonico bidimensionale isotropo ad un certo istante si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda (in coordinate polari)

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} A(r^2 - a^2) & r \leq a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{VII.4.1})$$

dove  $r$  è la distanza dal centro del potenziale.

Calcolare la probabilità di trovare come risultato di una misura dell'energia ciascuno dei tre valori più bassi possibili per il sistema e l'andamento temporale di questa probabilità .

La costante  $A$  può essere fissata normalizzando la funzione d'onda  $\psi(r, \theta)$

$$\|\psi\|^2 = 2\pi|A|^2 \int_0^a r(r^2 - a^2)^2 dr = \frac{\pi a^6}{3}|A|^2 = 1 \quad , \quad (\text{VII.4.2})$$

da cui scegliendo  $A$  reale abbiamo  $A = \sqrt{3/\pi a^6}$ .

I tre autovalori più bassi per l'energia per l'oscillatore armonico bidimensionale isotropo sono  $\hbar\omega$ ,  $2\hbar\omega$  e  $3\hbar\omega$ . Nella base

$$|n_+, n_- \rangle = \frac{(A_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(A_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}} |0, 0 \rangle \quad , \quad (\text{VII.4.3})$$

a questi autovalori corrispondono gli autovettori  $|0, 0 \rangle$  per  $E_0 = \hbar\omega$ ,  $|1, 0 \rangle$  e  $|0, 1 \rangle$  per  $E_1 = 2\hbar\omega$ , e  $|2, 0 \rangle$ ,  $|0, 2 \rangle$ ,  $|1, 1 \rangle$  per  $E_2 = 3\hbar\omega$ .

Gli operatori  $A_\pm^\dagger$  della (VII.4.3) sono definiti come

$$A_+^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger + ia_y^\dagger) \quad , \quad (\text{VII.4.4})$$

$$A_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger - ia_y^\dagger) \quad . \quad (\text{VII.4.5})$$

Solo però lungo gli autovettori a simmetria azimutale lo stato iniziale può avere proiezione non nulla, essendo lo stesso azimutalmente simmetrico. Negli altri casi ci sarebbe infatti una dipendenza non banale da  $\theta$ . Da questa considerazione segue che solo gli stati  $|0, 0 \rangle$  e  $|1, 1 \rangle$  sono rilevanti. In coordinate polari le autofunzioni relative a questi due autostati dell'energia saranno

$$\phi_{0,0}(r, \theta) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right\} \quad , \quad (\text{VII.4.6})$$

$$\phi_{1,1}(r, \theta) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}} \left(\frac{m\omega}{\hbar}r^2 - 1\right) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right\} \quad . \quad (\text{VII.4.7})$$

Le probabilità che misurando l'energia sullo stato  $\psi(r, \theta)$  si trovino i tre valori permessi più bassi saranno

$$P(E_0) = |\langle \phi_{0,0}, \psi \rangle|^2 = 6\beta^{-3} (e^{-\beta} + \beta - 1)^2 \quad , \quad (\text{VII.4.8})$$

$$P(E_1) = 0 \quad , \quad (\text{VII.4.9})$$

$$P(E_2) = |\langle \phi_{1,1}, \psi \rangle|^2 = 6\beta^{-3} (3 - \beta - e^{-\beta}(3 + 2\beta))^2 \quad , \quad (\text{VII.4.10})$$

dove  $\beta = m\omega a^2/(2\hbar)$ .

## Problema VII.5

Un oscillatore armonico bidimensionale anisotropo, descritto dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 \quad (\text{VII.5.1})$$

si trova all'istante iniziale  $t_0$  nello stato

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger + a_2^\dagger) |0\rangle \quad (\text{VII.5.2})$$

dove  $a_i^\dagger$  sono gli operatori di creazione relativi alle direzioni  $x$  e  $y$  rispettivamente.

Determinare il valor medio  $\langle L_z \rangle$  ed il suo andamento temporale.

#### Soluzione del Problema

L'evoluzione temporale del sistema, nella base  $|n_1, n_2\rangle$  è immediata, dato che lo stato iniziale in risulta

$$|\psi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle + |0, 1\rangle) \quad . \quad (\text{VII.5.3})$$

Applicando alla precedente relazione l'operatore evolutore temporale  $\exp\{-iH(t-t_0)/\hbar\}$  otteniamo

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_t &= \exp\left\{-i\frac{H}{\hbar}(t-t_0)\right\} |\psi\rangle_0 = \exp\left\{-i\frac{E_0}{\hbar}(t-t_0)\right\} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2}} (\exp\{-i\omega_1(t-t_0)\} |1, 0\rangle + \exp\{-i\omega_2(t-t_0)\} |0, 1\rangle) \quad , (\text{VII.5.4}) \end{aligned}$$

dove  $E_0 = (\hbar/2)(\omega_1 + \omega_2)$  è l'energia dello stato fondamentale.

Esprimendo  $L_z = zp_y - yp_z$  in termini degli  $a_i$  e  $a_i^\dagger$  si può facilmente ottenere:

$$L_z = \frac{i\hbar}{2} \left[ \alpha (a_1 a_2^\dagger - a_2 a_1^\dagger) + \beta (a_1^\dagger a_2^\dagger - a_1 a_2) \right] \quad (\text{VII.5.5})$$

dove  $\alpha = \sqrt{\omega_2/\omega_1} + \sqrt{\omega_1/\omega_2}$  e  $\beta = \sqrt{\omega_2/\omega_1} - \sqrt{\omega_1/\omega_2}$ . e quindi

$$\langle L_z \rangle = -\frac{\hbar}{2} \left( \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} + \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} \right) \sin [(\omega_1 - \omega_2)(t - t_0)] \quad . \quad (\text{VII.5.6})$$

## Problema VII.6

Una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi in un piano, si trova nello stato fondamentale dell'Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \quad (\text{VII.6.1})$$

La costante elastica viene istantaneamente quadruplicata ( $k \rightarrow \tilde{k} = 4k$ ) senza alterare lo stato.

Calcolare le probabilità di trovare la particella in ciascuno dei tre livelli più bassi nella nuova situazione.

#### Soluzione del Problema

Si indichino con  $\psi_{n_+, n_-}(x, y)$  gli autostati dell'Hamiltoniana iniziale caratterizzata da pulsazione  $\omega = \sqrt{k/m}$  e con  $\psi_{\tilde{n}_+, \tilde{n}_-}(x, y)$  quella della Hamiltoniana con pulsazione  $\tilde{\omega} = 2\omega$ .

Lo stato in cui si trova il sistema è per ipotesi  $\psi_{0,0}(x, y)$  e se ne vogliono calcolare le proiezioni sugli stati corrispondenti ai primi tre livelli energetici della nuova Hamiltoniana

$$\tilde{E}_0 = \hbar\tilde{\omega} \implies \psi_{\tilde{0},\tilde{0}}(x, y) \quad (\text{VII.6.2})$$

$$\tilde{E}_1 = 2\hbar\tilde{\omega} \implies \psi_{\tilde{1},\tilde{0}}(x, y), \quad \psi_{\tilde{0},\tilde{1}}(x, y) \quad (\text{VII.6.3})$$

$$\tilde{E}_2 = 3\hbar\tilde{\omega} \implies \psi_{\tilde{2},\tilde{0}}(x, y), \quad \psi_{\tilde{0},\tilde{2}}(x, y), \quad \psi_{\tilde{1},\tilde{1}}(x, y) \quad (\text{VII.6.4})$$

L'opportunità della scelta della base  $n_+, n_-$  per indicizzare gli autostati dell'Hamiltoniana risulta evidente se usiamo il fatto che su tale base l'operatore  $L_z$  (generatore delle rotazioni lungo  $z$ ) è diagonale. Usando tale base infatti, i prodotti scalari  $\langle \tilde{n}_+, \tilde{n}_- | 0, 0 \rangle$  risultano (usando il fatto che  $L_z | 0, 0 \rangle = 0$  e che quindi  $e^{-iL_z\theta/\hbar} | 0, 0 \rangle = | 0, 0 \rangle$ )

$$\langle \tilde{n}_+, \tilde{n}_- | 0, 0 \rangle = \langle \tilde{n}_+, \tilde{n}_- | e^{-iL_z\theta/\hbar} | 0, 0 \rangle = e^{-i(\tilde{n}_+ - \tilde{n}_-)\theta} \langle \tilde{n}_+, \tilde{n}_- | 0, 0 \rangle \quad (\text{VII.6.5})$$

che implica, che i soli stati  $|\tilde{n}_+, \tilde{n}_-\rangle$  che hanno proiezione non nulla su  $|0, 0\rangle$  sono quelli *simmetrici* ovvero con  $\tilde{n}_+ = \tilde{n}_-$ .

Nel nostro caso dunque, dobbiamo valutare i soli prodotti scalari  $\langle \tilde{0}, \tilde{0} | 0, 0 \rangle$  e  $\langle \tilde{1}, \tilde{1} | 0, 0 \rangle$ , risultando infatti nulla la probabilità di trovare la particella nello stato energetico  $\tilde{E}_1$  ( $P_1 = 0$ ). Per calcolare i due prodotti scalari  $\langle \tilde{0}, \tilde{0} | 0, 0 \rangle$  e  $\langle \tilde{1}, \tilde{1} | 0, 0 \rangle$  riportiamo le espressioni nello spazio delle configurazioni dei tre vettori in esame

$$\psi_{0,0} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2\right\}, \quad (\text{VII.6.6})$$

$$\psi_{\tilde{0},\tilde{0}} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right\}, \quad (\text{VII.6.7})$$

$$\psi_{\tilde{1},\tilde{1}} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\pi\hbar}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar}r^2 - 1\right) \exp\left\{-\frac{m\omega}{\hbar}r^2\right\}. \quad (\text{VII.6.8})$$

Usando tali espressioni si ottengono le probabilità di trovare lo stato nel livello fondamentale e nel secondo stato eccitato della nuova Hamiltoniana

$$P_0 = \left|\langle \tilde{0}, \tilde{0} | 0, 0 \rangle\right|^2 = \left|\frac{2\sqrt{2}}{3}\right|^2 = \frac{8}{9} \quad (\text{VII.6.9})$$

$$P_2 = \left|\langle \tilde{1}, \tilde{1} | 0, 0 \rangle\right|^2 = \left|\frac{2\sqrt{2}}{9}\right|^2 = \frac{8}{81} \quad (\text{VII.6.10})$$

## Problema VII.7

Una particella di massa  $m$ , vincolata a muoversi in due dimensioni, è sotto l'azione del potenziale  $V(x, y) = k(x^2 + y^2)/2$ . Il suo stato a un certo istante è descritto dalla funzione d'onda:

$$\psi(x, y) = \begin{cases} A(r^2 - a^2)e^{ibx} & r \leq a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \quad (\text{VII.7.1})$$

dove  $r$  è la distanza dal centro del potenziale e  $b$  una costante.

Calcolare:

1. Le probabilità di trovare come risultato di una misura dell'energia ciascuno dei tre valori (distinti) più bassi possibili.
2. L'andamento temporale di tali probabilità e dei valori medi  $\langle x \rangle$  e  $\langle y \rangle$ .

### Problema VII.8

Un oscillatore armonico tridimensionale si trova in uno stato  $\psi$  combinazione degli autostati con  $E = E_0$  e  $E = E_1$ . Il valore medio dell'energia è  $\langle E \rangle = 2 \hbar \omega$ . Il quanto di eccitazione è confinato nel piano ( $x y = 12$ ). Il valore medio dell'operatore  $l_{12} = a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2$  nello stato  $\psi$  è  $\langle l_{12} \rangle = 0$

Calcolare la probabilità che il sistema sia nello stato  $|100\rangle$ .

### Problema VII.9

Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo si trova in un autostato dell'energia caratterizzato dai numeri quantici  $n_x = 1, n_y = n_z = 0$ .

È possibile misurare il momento angolare senza modificare l'energia?

In tal caso calcolare i possibili risultati di una misura di  $L_z$  nello stato suddetto e le relative probabilità .

#### Soluzione del Problema

Sia  $H$  l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$H = \hbar \omega \left( a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + a_z^\dagger a_z + \frac{3}{2} \right) = \hbar \omega \left( N_x + N_y + N_z + \frac{3}{2} \right) . \quad (\text{VII.9.1})$$

Definiamo *cartesiana* la base di autostati di  $H$  che diagonalizzano simultaneamente  $N_x, N_y$  ed  $N_z$  ( $n_x, n_y$  ed  $n_z$  denotano i corrispondenti autovalori) e indichiamo i singoli autostati con  $|n_x, n_y, n_z\rangle_c$ . In termini degli operatori di creazione e distruzione dell'Eq.(VII.9.1) le tre componenti del momento angolare risultano

$$L_x = i\hbar \left( a_y a_z^\dagger - a_z a_y^\dagger \right) , \quad (\text{VII.9.2})$$

$$L_y = i\hbar \left( a_z a_x^\dagger - a_x a_z^\dagger \right) , \quad (\text{VII.9.3})$$

$$L_z = i\hbar \left( a_x a_y^\dagger - a_y a_x^\dagger \right) . \quad (\text{VII.9.4})$$

È facile vedere usando l'espressione di  $H$  e le equazioni (VII.9.2)–(VII.9.4) che

$$[H, L_x] = [H, L_y] = [H, L_z] = 0 , \quad (\text{VII.9.5})$$

e quindi può essere misurata qualunque componente del momento angolare simultaneamente all'energia.

Per valutare i possibili risultati della misura di  $L_z$  sullo stato  $|1, 0, 0\rangle_c$  occorre riscrivere gli autostati  $|n_x, n_y, n_z\rangle_c$  in termini di quelli della base sferica  $|n, l, m\rangle_s$ , che diagonalizza simultaneamente  $H$ ,  $L^2$  ed  $L_z$ .

Come è noto dalla fisica dell'oscillatore armonico tridimensionale assegnato  $n$ , autovalore dell'energia, i valori di  $l$  possibili sono  $n, n-2, n-4, \dots$ . Nel caso dunque di  $|1, 0, 0\rangle_c$   $n = 1$  e quindi l'unico valore di  $l$  possibile è  $l = 1$ . Lo stato  $|1, 0, 0\rangle_c$  è autovettore di  $L^2$  di autovalore  $2\hbar^2$ . Dobbiamo allora solo decomporre  $|1, 0, 0\rangle_c$  in termini degli autovettori di  $L_z$ , per far cio' usiamo la base che diagonalizza simultaneamente  $N_+ = A_+^\dagger A_+$ ,  $N_- = A_-^\dagger A_-$ ,  $N_z = a_z^\dagger a_z$ , con

$$A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x \mp ia_y) \quad A_\pm^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger \pm ia_y^\dagger) \quad . \quad (\text{VII.9.6})$$

Indicando con  $|n_+, n_-, n_z\rangle_{cl}$  gli autovettori della base cilindrica si può mostrare che

$$\begin{aligned} |1, 0, 0\rangle_c &= a_x^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_+^\dagger + A_-^\dagger) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0, 0\rangle_{cl} + |1, 0, 0\rangle_{cl}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1, 1\rangle_s + |1, 1, -1\rangle_s) \quad . \end{aligned} \quad (\text{VII.9.7})$$

Dall'espressione (VII.9.7) segue dunque che i risultati possibili della misura di  $L_z$  sullo stato  $|1, 0, 0\rangle_c$  sono  $\pm\hbar$ , entrambi con probabilità  $1/2$ .

### Problema VII.10

Una particella di massa  $m$  è soggetta ad un campo di forze descritto dal seguente potenziale

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2) \quad , \quad (\text{VII.10.1})$$

dove  $k_1, k_2, k_3$  sono costanti non negative.

1. Esistono dei valori di  $k_1, k_2, k_3$  per cui, qualunque sia lo stato iniziale del sistema, il valor medio di  $p_z$  rimanga costante nel tempo?
2. Stessa domanda per il valor medio di  $L_z$ .
3. All'istante  $t_0 = 0$  la particella si trovi nello stato

$$\phi(x, y, z) = (A + Bx + Cy) \exp \left\{ -\frac{\sqrt{m}}{2\hbar} \left( \sqrt{k_1} x^2 + \sqrt{k_2} y^2 + \sqrt{k_3} z^2 \right) \right\} \quad (\text{VII.10.2})$$

Esistono dei valori delle costanti  $A, B$  e  $C$  per cui, indipendentemente dai valori di  $k_1, k_2, k_3$ , il valor medio di  $L_z$  rimanga costante nel tempo? Calcolare per  $A, B$  e  $C$  generici il valor medio di  $L_z$  per ogni  $t > 0$ .

## Soluzione del Problema

1. Il teorema di Ehrenfest per l'osservabile  $p_z$  afferma che

$$\frac{d}{dt} \langle \phi_t | p_z | \phi_t \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \phi_t | [p_z, H] | \phi_t \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle \phi_t | [p_z, V] | \phi_t \rangle \quad . \quad (\text{VII.10.3})$$

Ricordando che

$$[p_z, V] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial z} = k_3 z \quad (\text{VII.10.4})$$

segue che condizione necessaria e sufficiente affinché, qualunque sia lo stato iniziale del sistema, il valor medio di  $p_z$  rimanga costante nel tempo è  $k_3 = 0$ .

2. E' facile dimostrare che in questo caso occorre che  $k_1 = k_2$ . Tale risultato è del resto immediato, dato che solo per  $k_1 = k_2$  l'Hamiltoniana  $H$  risulta invariante per rotazioni attorno all'asse  $z$ .
3. Per rispondere all'ultima domanda, è conveniente innanzitutto riportare l'espressione dell'operatore  $L_z$  in termini di operatori di creazione e distruzione

$$L_z = \frac{i\hbar}{2} \left[ \alpha (a_x a_y^\dagger - a_y a_x^\dagger) + \beta (a_x^\dagger a_y^\dagger - a_x a_y) \right] \quad (\text{VII.10.5})$$

dove  $\alpha = \sqrt{\omega_y/\omega_x} + \sqrt{\omega_x/\omega_y}$  e  $\beta = \sqrt{\omega_y/\omega_x} - \sqrt{\omega_x/\omega_y}$ .

Lo stato evoluto nel tempo è dato da

$$|\phi\rangle_t = e^{-i\frac{E_0 t}{2}} \left[ \frac{A}{N_{000}} |000\rangle + \frac{B}{N_{100}} e^{-i\omega_x t} |100\rangle + \frac{C}{N_{010}} e^{-i\omega_y t} |010\rangle \right] \quad (\text{VII.10.6})$$

dove gli stati  $|n_x, n_y, n_z\rangle$  sono quelli della base *cartesiana* e  $N_{n_x n_y n_z}$  le opportune costanti di normalizzazione da cui, calcolando il valore di aspettazione di  $L_z$  su questo stato, otteniamo

$$\langle \phi_t | L_z | \phi_t \rangle = \frac{\alpha \hbar}{N_{100} N_{010}} \|\phi\|^{-2} \text{Im} \left( B^* C e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \right) \quad . \quad (\text{VII.10.7})$$

Come si vede allora dalla (VII.10.6), tale valor medio è indipendente dal tempo se sono nulli  $B$  e/o  $C$ .

### Problema VII.11

La dinamica di una particella sia descritta dalla seguente Hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \left( a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_3^\dagger a_3 + \frac{3}{2} \right) + ib\hbar \left( a_1 a_2^\dagger - a_2 a_1^\dagger \right) \quad , \quad (\text{VII.11.1})$$

dove  $\hbar\omega > 4b\hbar > 0$  e gli operatori  $a_i^\dagger$  e  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono operatori di creazione e distruzione.

1. Trovare autovalori ed autovettori dell'Hamiltoniana per i livelli più bassi, ovvero per  $E < 3\hbar\omega$ .
2. Al tempo  $t = 0$  la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi = Nxe^{-\frac{r^2}{2}} \quad . \quad (\text{VII.11.2})$$

Quali risultati, e con quale probabilità, può dare una misura di  $L_1$  effettuata al tempo  $t = 0$ ?

3. E una misura di  $L_1$  effettuata ad un tempo  $t > 0$  qualsiasi?

### Problema VII.12

Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo si trova nel primo livello energetico eccitato, in uno stato che denoteremo con  $|\psi\rangle$ , in cui il valore medio dell'operatore  $L_z$  è nullo.

1. Scrivere la forma più generale dello stato  $|\psi\rangle$  normalizzato e calcolare i valori medi di  $L_x$  e di  $L_y$  in  $|\psi\rangle$ .
2. Calcolare la probabilità che nello stato in cui  $\langle L_y \rangle = 0$  e  $\langle L_x \rangle$  assume il massimo valore compatibile con  $\langle L_z \rangle = 0$ , l'energia di eccitazione sia dovuta ad un quanto di eccitazione nel piano  $xy$ . Questa probabilità dipende dal tempo? In caso affermativo calcolarne la dipendenza.

#### Soluzione del Problema

Per descrivere il sistema usiamo la base *sferica* in cui cioè sono simultaneamente diagonalizzati  $H$ ,  $L^2$  ed  $L_z$ , con autovalori  $\hbar\omega(n + 3/2)$ ,  $\hbar^2 l(l + 1)$  e  $\hbar m$ . L'autovettore relativo sarà indicato con  $|n, l, m\rangle_z$ , dove il pedice  $z$  indica che è nel set completo di osservabili è stata considerata la componente  $z$  del momento angolare.

1. In questa base, lo stato più generale normalizzato, appartenente al primo livello eccitato dell'energia si può sempre scrivere come

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \cos\theta |1, 1, 0\rangle_z + \sin\theta \cos\varphi e^{i\alpha_1} |1, 1, 1\rangle_z \\ &+ \sin\theta \sin\varphi e^{i\alpha_2} |1, 1, -1\rangle_z \quad . \end{aligned} \quad (\text{VII.12.1})$$

Con  $\theta, \varphi, \alpha_1$  e  $\alpha_2$  fasi arbitrarie. Si noti, che usando la libertà che si ha di moltiplicare lo stato per una fase globale, abbiamo scelto il primo coefficiente reale.

Se si richiede che sullo stato  $|\psi\rangle$  il valor medio di  $L_z$  sia nullo otteniamo

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = \sin^2\theta \cos(2\varphi) = 0 \quad , \quad (\text{VII.12.2})$$

da cui otteniamo che o  $\theta = 0, \pi$  oppure  $\varphi = \pi/4, 3\pi/4$ . Sullo stato (VII.12.1) possiamo calcolare i valori medi di  $L_x$  ed  $L_y$  ricordando che  $L_x = (L_+^z + L_-^z)/2$  e che  $L_y = i(L_-^z - L_+^z)/2$ , dove  $L_\pm^z$  sono gli operatori a gradino relativi ad  $L_z$ . Infatti, usando tali espressioni ricaviamo

$$\langle\psi|L_x|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\theta) (\cos\varphi \cos\alpha_1 + \sin\varphi \cos\alpha_2) \quad , \quad (\text{VII.12.3})$$

$$\langle\psi|L_y|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(2\theta) (\sin\varphi \sin\alpha_2 - \cos\varphi \sin\alpha_1) \quad . \quad (\text{VII.12.4})$$

2. Se si richiede inoltre che compatibilmente con la richiesta che  $\langle L_z \rangle = 0$ , sia anche  $\langle L_y \rangle = 0$  con allo stesso tempo  $\langle L_x \rangle$  massimo si ottiene dalla condizione sul valor medio di  $L_z$  che l'unica possibilità è  $\varphi = \pi/4$  o  $3\pi/4$ . Infatti se invece avessimo scelto  $\theta = 0$  o  $\pi$  dalle equazioni (VII.12.3) e (VII.12.4) avremmo avuto entrambi i valori medi di  $L_x$  ed  $L_y$  nulli.

Sia allora  $\varphi = \pi/4$ , segue

$$\langle\psi|L_x|\psi\rangle = \frac{1}{2} \sin(2\theta) (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) \quad , \quad (\text{VII.12.5})$$

$$\langle\psi|L_y|\psi\rangle = \frac{1}{2} \sin(2\theta) (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \quad . \quad (\text{VII.12.6})$$

Perché l'eq. (VII.12.6) sia nulla, ma allo stesso tempo la (VII.12.5) sia massima segue  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  e  $\theta = \pi/4$ . Da cui quindi lo stato  $|\psi\rangle$  risulterebbe

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 1, 0\rangle_z + \frac{1}{2} |1, 1, 1\rangle_z + \frac{1}{2} |1, 1, -1\rangle_z \quad . \quad (\text{VII.12.7})$$

La scelta di  $\varphi = 3\pi/4$  invece fornisce sempre  $\theta = \pi/4$ , ma  $\alpha_1 = \pi$  e  $\alpha_2 = 0$  e quindi lo stesso stato (VII.12.7).

Per ricavare l'energia che il quanto di eccitazione sia sul piano  $xy$ , basta ricordare il legame tra la base *sferica* e quella *cartesiana*

$$|1, 1, 0\rangle_z = |0, 0, 1\rangle_c \quad , \quad (\text{VII.12.8})$$

$$|1, 1, 1\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0, 0\rangle_c + i|0, 1, 0\rangle_c) \quad , \quad (\text{VII.12.9})$$

$$|1, 1, -1\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0, 0\rangle_c - i|0, 1, 0\rangle_c) \quad . \quad (\text{VII.12.10})$$

Si ottiene allora

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0, 0, 1\rangle_c + \frac{1}{\sqrt{2}}|1, 0, 0\rangle_c \quad , \quad (\text{VII.12.11})$$

da cui come si vede la probabilità che il quanto di energia sia sul piano  $xy$  è  $1/2$ . Tale probabilità non dipende dal tempo perché lo stato  $|\psi\rangle$  essendo autostato dell'energia evolve nel tempo solo attraverso un fattore di fase che nel calcolo dei moduli quadri per determinare le probabilità, sparisce.

### Problema VII.13

Dato un oscillatore armonico anisotropo descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}k_1 (x^2 + y^2) + \frac{1}{2}k_2 z^2 \quad (\text{VII.13.1})$$

1. trovare i livelli energetici e discuterne la degenerazione nel caso in cui  $k_1$  e  $k_2$  sono incommensurabili.
2. Questi stati possono essere anche autostati di  $L^2$ ? E di  $L_z$ ?
3. Scrivere la forma delle corrispondenti funzioni d'onda in coordinate cartesiane.

### Problema VII.14

Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo si trova all'istante  $t_0$ , nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(r) = \begin{cases} yr^2(r^2 - a^2) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (\text{VII.14.1})$$

dove  $r$  indica la distanza dal centro del potenziale.

1. Si calcoli la densità di probabilità,  $P(r)$ , di trovare la particella a distanza  $r$  dal centro e la sua derivata rispetto al tempo all'istante  $t_0$ . Discutere se  $P(r)$  dipende dal tempo.
2. Qual'è il minimo valore dell'energia osservabile nello stato  $\psi$  e con quale probabilità? Questa probabilità dipende dal tempo?

### Problema VII.15

Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo si trova ad un dato istante  $t_0$  in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = N (x - x_0)^2 e^{-\alpha r^2} \quad (\text{VII.15.1})$$

dove  $e^{-\alpha r^2}$  corrisponde allo stato fondamentale.

Discutere la distribuzione di probabilità di  $H$ ,  $L^2$  ed  $L_z$ , e calcolare l'evoluzione temporale di  $\langle \vec{r} \rangle$ .

### Problema VII.16

Una molla di massa e lunghezza a riposo nulle e costante elastica  $k$  ha un estremo fisso ad una superficie piana. L'altro estremo è legato ad una particella di massa  $m$ . Supponendo l'urto fra la superficie e la particella perfettamente elastico,

1. si scriva l'equazione di Schrödinger associata al sistema e si determinino le autofunzioni e gli autovalori dell'energia.
2. Dire se

$$\psi(\vec{r}) = N x e^{-(y^2+z^2)} \quad (\text{VII.16.1})$$

è un possibile stato del sistema. Qualora la risposta sia affermativa, si determini la probabilità che una misura dell'energia in tale stato dia come valore  $E_0$ , ovvero l'autovalore dell'energia nello stato fondamentale.

3. Discutere brevemente la relazione fra degenerazione dei livelli di energia ed il gruppo di simmetria del sistema.

### Problema VII.17

Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo si trova all'istante  $t = 0$  nello stato  $|\psi\rangle$  caratterizzato da

$$a_x |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle, \quad a_y |\psi\rangle = i\lambda |\psi\rangle, \quad a_z |\psi\rangle = 0 \quad (\text{VII.17.1})$$

Determinare

1. La distribuzione di probabilità dei possibili valori di  $m_z$ .
2. I valori medi delle componenti e del quadrato del momento angolare.
3. L'andamento temporale dello stato e dei valori medi calcolati.

## Soluzione del Problema

Come appare chiaro dalle relazioni (VII.17.1), lo stato  $|\psi\rangle$  è uno stato coerente. In particolare risulta

$$|\psi\rangle = e^{-|\lambda|^2} \exp\{\sqrt{2}\lambda A_+^\dagger\} |0\rangle \quad (\text{VII.17.2})$$

Sviluppando lo stato suddetto nella base cilindrica  $|n_+, n_-, n_z\rangle$  si ha

$$|\psi\rangle = e^{-|\lambda|^2} \sum_{n_+=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\lambda)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} |n_+, 0, 0\rangle \quad (\text{VII.17.3})$$

Ricordando che in questa base l'operatore  $L_z$  è diagonale, otteniamo che i valori possibili per  $m_z$  e le rispettive probabilità sono

$$m_z = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \implies P(m_z) = e^{-2|\lambda|^2} \frac{2^{m_z} |\lambda|^{2m_z}}{m_z!} \quad (\text{VII.17.4})$$

Il valore medio di  $L_z$  risulta allora

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = \hbar e^{-2|\lambda|^2} \sum_{m_z=0}^{\infty} \frac{2^{m_z} |\lambda|^{2m_z}}{(m_z - 1)!} \quad (\text{VII.17.5})$$

Si può mostrare facilmente che il valore medio di  $L_x$  ed  $L_y$  su questo stato sono nulli. Per far ciò ricordiamo l'espressione di questi operatori in termini di  $a$  ed  $a^\dagger$

$$\begin{aligned} L_x &= i\hbar (a_y a_z^\dagger - a_z a_y^\dagger) \\ L_y &= i\hbar (a_z a_x^\dagger - a_x a_z^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{VII.17.6})$$

da cui

$$\begin{aligned} \langle\psi|L_x|\psi\rangle &= i\hbar \langle\psi| (a_y a_z^\dagger - a_z a_y^\dagger) |\psi\rangle \\ &= i\hbar e^{-2|\lambda|^2} \langle 0 | \exp\{\lambda^*(a_x - ia_y)\} (a_y a_z^\dagger - a_z a_y^\dagger) \exp\{\lambda(a_x^\dagger + ia_y^\dagger)\} | 0 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{VII.17.7})$$

Si noti che questo ultimo risultato è facilmente ottenuto in quanto gli operatori  $a_z$  ed  $a_z^\dagger$  commutano con i rispettivi operatori di creazione e distruzione relativi alle altre componenti.

Per calcolare il valor medio di  $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$  ci si può restringere per il momento al solo operatore  $L_x^2 + L_y^2$ . Tale operatore sviluppato in termini di  $a_z$  ed  $a_z^\dagger$  risulta

$$L_x^2 + L_y^2 = \hbar^2 (\hat{N}_+ + \hat{N}_-) + \dots \quad (\text{VII.17.8})$$

I puntini sospensivi indicano gli ulteriori contributi che contengono o un numero diverso di  $a_z$  ed  $a_z^\dagger$  o  $a_z$  sull'estrema destra. In entrambi questi casi, il rispettivo contributo al valore medio è nullo. I termini in  $L^2$  rilevanti per il valor medio risultano allora

$$L^2 = \hbar^2 \left[ \hat{N}_+ + \hat{N}_- + (\hat{N}_+ - \hat{N}_-)^2 \right] + \dots \quad (\text{VII.17.9})$$

e quindi

$$\langle \psi | L^2 | \psi \rangle = \hbar^2 e^{-2|\lambda|^2} \sum_{m_z=0}^{\infty} \frac{2^{m_z} |\lambda|^{2m_z}}{m_z!} (m_z + m_z^2) \quad (\text{VII.17.10})$$

I valori medi di tutte le componenti del momento angolare, e quindi anche di  $L^2$ , non dipendono dal tempo in quanto l'hamiltoniana è invariante per rotazioni e quindi  $[L_i, H] = 0$  per ogni  $i$ .

Lo stato  $|\psi \rangle_t$  è facilmente ottenuto dalle espressioni (VII.17.2) e (VII.17.3)

$$|\psi \rangle_t = \exp \left\{ -|\lambda|^2 - i\frac{3}{2}\omega t + \sqrt{2}\lambda(t)A_+^\dagger \right\} |0 \rangle \quad (\text{VII.17.11})$$

dove  $\lambda(t) = \exp \{-i\omega t\} \lambda$ .

### Problema VII.18

Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo si trova nello stato

$$\psi = (a_x^{\dagger 2} + e^{i\alpha} a_y^\dagger) \psi_0 \quad (\text{VII.18.1})$$

dove  $\psi_0$  è lo stato fondamentale e gli  $a_i^\dagger$  sono gli operatori di creazione.

Determinare, su tale stato, gli scarti quadratici medi  $\Delta x$  e  $\Delta p_x$  e la distribuzione di probabilità per il quadrato del momento angolare,  $L^2$  e per la sua componente,  $L_x$ , lungo l'asse  $x$ .

### Problema VII.19

Al tempo  $t = 0$  la funzione d'onda di un oscillatore armonico tridimensionale, in un certo sistema di riferimento, è

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = N (1 + 3\alpha x + 2\alpha^2 y^2) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 r^2} \quad (\text{VII.19.1})$$

dove  $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{m}}$  e  $N$  è la costante di normalizzazione.

1. Determinare il valore medio delle coordinate e dell'energia in funzione del tempo.
2. Calcolare le probabilità dei possibili risultati di una misura dell'energia al tempo  $t = 0$  ed al tempo generico  $t = T$ .

### Problema VII.20

Dato un oscillatore armonico bidimensionale (scritto con variabili adimensionali) si consideri la funzione d'onda caratterizzata da

$$A_+ \Psi = \alpha \Psi ; A_- \Psi = 0 \quad (\text{VII.20.1})$$

Dove  $A_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 \mp ia_2)$  ed  $\alpha$  è un numero complesso.

Si calcolino  $\langle x_1 \rangle$ ,  $\langle x_2 \rangle$ ,  $\sqrt{\langle x_1 \rangle^2 + \langle x_2 \rangle^2}$  ed il loro andamento temporale. Si discuta il risultato.

### Problema VII.21

Si consideri la seguente Hamiltoniana:

$$H = \sum_{i=1}^4 \frac{p_i^2}{2m} + m\omega_i^2 x_i^2 \quad (\text{VII.21.1})$$

Si trovino lo spettro dell'Hamiltoniana e la sua degenerazione nei tre casi:

1.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega$
2.  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  ,  $\omega_2 = \omega_3 = \sqrt{2}\omega$
3.  $\omega_1 = \omega$  ,  $\omega_2 = \sqrt{2}\omega$  ,  $\omega_3 = \sqrt{3}\omega$  ,  $\omega_4 = \sqrt{5}\omega$

con  $\omega$  una costante nota.

Nota: può essere utile sapere che  $\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

### Problema VII.22

Si consideri lo stato  $\Psi$  di un oscillatore armonico isotropo tridimensionale caratterizzato dalle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} a_1 \Psi &= \lambda_1 \Psi \\ a_2 \Psi &= \lambda_2 \Psi \\ N_3 \Psi &= n \Psi \end{aligned}$$

Dove  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono numeri complessi ed  $n$  è un intero positivo

Si calcolino i valori medi di  $H$  ed  $L_z$  ed i loro scarti quadratici.

*Problemi di Meccanica Quantistica*

Capitolo VIII  
Campo Elettromagnetico

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

## Problema VIII.1

Un sistema descritto dall'Hamiltoniana

$$H = g\vec{L} \cdot \vec{B} , \quad (\text{VIII.1.1})$$

dove  $\vec{L}$  è il momento angolare, si trova in un campo uniforme  $\vec{B}$  diretto lungo l'asse  $z$ .

Inizialmente il sistema si trova in un autostato di  $\vec{L}^2$  e di  $L_x$ . Sapendo che  $l = 2$  e che  $(\Delta L_z)^2 = (5/2)\hbar^2$ , si determinino i possibili valori di una misura di  $L_z$  e le rispettive probabilità dopo 1 *sec*, nonché gli andamenti temporali di  $\langle L_x \rangle$ ,  $\langle L_y \rangle$  e  $\langle L_z \rangle$ .

### Soluzione del Problema

Sia lo stato iniziale  $|\psi\rangle_0$  un generico autostato di  $L_x$ , di autovalore  $m_x$  e con  $l = 2$

$$|\psi_0\rangle = |2, m_x\rangle , \quad (\text{VIII.1.2})$$

con  $m_x = -2, -1, 0, 1, 2$ . Dato che per  $L_x$ , gli operatori a gradino  $L_{\pm}^x$  di definiscono come  $L_{\pm}^x = L_y \pm iL_z$ , possiamo riscrivere

$$L_z = \frac{i}{2} (L_-^x - L_+^x) . \quad (\text{VIII.1.3})$$

Applicando la precedente relazione è facile vedere che

$$\langle \psi_0 | L_z | \psi_0 \rangle = 0 , \quad (\text{VIII.1.4})$$

da cui

$$\begin{aligned} (\Delta L_z)^2 &= \langle \psi_0 | L_z^2 | \psi_0 \rangle = \frac{\hbar^2}{4} \langle \psi_0 | L_+^x L_-^x + L_-^x L_+^x | \psi_0 \rangle \\ &= \frac{\hbar^2}{2} (6 - m_x^2) . \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.5})$$

Da ciò dovendo essere  $(\Delta L_z)^2 = (5/2)\hbar^2$  segue  $m_x = \pm 1$  e quindi  $|\psi_0\rangle = |2, \pm 1_x\rangle$ .

Per valutare i possibili risultati di una misura di  $L_z$  su questo stato, occorre decomporre lo stato in autostati di  $L_z$ . Facciamolo per lo stato con  $m_x = 1$

$$|2, 1_x\rangle = A_{-2}|2, -2_z\rangle + A_{-1}|2, -1_z\rangle + A_0|2, 0_z\rangle + A_1|2, 1_z\rangle + A_2|2, 2_z\rangle . \quad (\text{VIII.1.6})$$

Richiedendo allora che sia autostato di  $L_x = (L_+^z + L_-^z)/2$  otteniamo

$$\begin{aligned} A_{-2} &= A_{-1} , \\ A_{-1} &= A_{-2} + \sqrt{\frac{3}{2}}A_0 , \\ A_0 &= \sqrt{\frac{3}{2}}(A_1 + A_{-1}) , \\ A_1 &= A_2 + \sqrt{\frac{3}{2}}A_0 , \\ A_2 &= A_1 , \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.7})$$

che ha come soluzione

$$|2, 1_x\rangle = -\frac{1}{2}|2, -2_z\rangle - \frac{1}{2}|2, -1_z\rangle + \frac{1}{2}|2, 1_z\rangle + \frac{1}{2}|2, 2_z\rangle \quad . \quad (\text{VIII.1.8})$$

Analogamente

$$|2, -1_x\rangle = -\frac{1}{2}|2, -2_z\rangle + \frac{1}{2}|2, -1_z\rangle - \frac{1}{2}|2, 1_z\rangle + \frac{1}{2}|2, 2_z\rangle \quad . \quad (\text{VIII.1.9})$$

Quindi in entrambi i casi i valori possibili di una misura di  $L_z$  sono  $\pm 2\hbar, \pm\hbar$ , tutti con probabilità  $1/4$ .

Per quanto riguarda  $\langle L_z \rangle$ , esso che è nullo all'istante iniziale, rimane poi nullo in tutti gli istanti seguenti dato che  $H = gBL_z$  e quindi commuta con lo stesso  $L_z$ .

Per calcolare l'andamento invece di  $\langle L_x \rangle$  e  $\langle L_y \rangle$  applichiamo il teorema di Ehrenfest, secondo il quale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle L_x \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, L_x] \rangle = -gB \langle L_y \rangle \quad , \\ \frac{d}{dt} \langle L_y \rangle &= \frac{i}{\hbar} \langle [H, L_y] \rangle = gB \langle L_x \rangle \quad . \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.10})$$

La soluzione del sistema di equazioni differenziali con la condizione iniziale di avere lo stato coincidente con l'autostato di  $L_x$  di autovalore  $\pm\hbar$  è

$$\begin{aligned} \langle L_x \rangle &= \pm\hbar \cos(gBt) \quad , \\ \langle L_y \rangle &= \pm\hbar \sin(gBt) \quad . \end{aligned} \quad (\text{VIII.1.11})$$

## Problema VIII.2

L'Hamiltoniana di una particella con momento angolare uguale ad uno in un campo magnetico  $B$  costante ed uniforme sia

$$H = \frac{e}{2mc} BL_z \quad (\text{VIII.2.1})$$

All'istante  $t = 0$  lo stato del sistema sia descritto dal vettore

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.2.2})$$

nella base in cui le componenti  $L_x$  ed  $L_y$  del momento angolare sono

$$L_x = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{VIII.2.3})$$

1. Trovare gli autovettori dell'Hamiltoniana.
2. Discutere l'evoluzione temporale del sistema; in particolare dire in quale istante  $t_1$  una misura di  $L_y$  darebbe risultato nullo con certezza uno.
3. Calcolare valore medio e scarto quadratico medio di  $L^2$  negli istanti  $t = 0$  e  $t = t_1$ .

*Soluzione del Problema*

Siano indicati con  $\psi_i$  i vettori della base naturale in cui sono scritte le matrici  $L_x$  e  $L_y$ . Dalle loro definizioni, sapendo che  $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ , otteniamo la forma di  $L_z$

$$L_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{VIII.2.4})$$

1. In termini della (VIII.2.4), l'Hamiltoniana risulta

$$H = i \frac{eB\hbar}{2mc} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{VIII.2.5})$$

Diagonalizzare la matrice (VIII.2.5) è equivalente a diagonalizzare la (VIII.2.4). Indicando con  $\phi_1$ ,  $\phi_0$  e  $\phi_{-1}$  i tre autovettori corrispondenti agli autovalori  $\hbar$ ,  $0$  e  $-\hbar$ , otteniamo

$$E_1 = -\frac{eB\hbar}{2mc} \quad \phi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2 , \quad (\text{VIII.2.6})$$

$$E_0 = 0 \quad \phi_0 = \psi_3 , \quad (\text{VIII.2.7})$$

$$E_{-1} = +\frac{eB\hbar}{2mc} \quad \phi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2 , \quad (\text{VIII.2.8})$$

Osservando che

$$v = \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + \phi_{-1}) , \quad (\text{VIII.2.9})$$

segue che lo stato all'istante generico  $t$  è dato da

$$\psi_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \exp \left\{ i \frac{eBt}{2mc} \right\} \phi_1 + \exp \left\{ -i \frac{eBt}{2mc} \right\} \phi_{-1} \right) . \quad (\text{VIII.2.10})$$

Volendo riscrivere la precedente equazioni in termini di autostati di  $L_y$ , è utile osservare che essi indicati con  $\xi_{-1}$ ,  $\xi_0$  e  $\xi_1$  (dove il pedice indica il corrispondente autovalore di  $L_y$ ) risultano

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_3 , \quad (\text{VIII.2.11})$$

$$\xi_0 = \psi_2 , \quad (\text{VIII.2.12})$$

$$\xi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_3 . \quad (\text{VIII.2.13})$$

Quindi le autofunzioni di  $L_z$  in termini di quelle di  $L_y$  risultano

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi_1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_0 + \frac{1}{2}\xi_{-1} \quad , \quad (\text{VIII.2.14})$$

$$\phi_0 = \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_{-1} \quad , \quad (\text{VIII.2.15})$$

$$\phi_{-1} = \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_0 + \frac{1}{2}\xi_{-1} \quad . \quad (\text{VIII.2.16})$$

2. Usando le equazioni (VIII.2.14)-(VIII.2.16) e sostituendole nella (VIII.2.10) otteniamo

$$\psi_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{eBt}{2mc}\right) (\xi_{-1} + \xi_1) + \sin\left(\frac{eBt}{2mc}\right) \xi_0 \quad . \quad (\text{VIII.2.17})$$

Da cui si osserva che la probabilità di misurare  $L_y$  trovando valore nullo con probabilità 1 si verifica per  $t_1 = (2n + 1)\pi mc/(eB)$ , con  $n$  intero positivo o nullo.

3. Per quanto riguarda  $L^2$ , basta osservare che esso commuta con l'Hamiltoniana e che lo stato iniziale è autostato di  $L^2$  di autovalore  $2\hbar^2$ , quindi il valore medio di  $L^2$  rimarrà pari a  $2\hbar^2$  per tutti gli istanti successivi. Il relativo scarto quadratico si annullerà .

### Problema VIII.3

Un sistema con momento magnetico  $\vec{\mu} = g\vec{L}$ , dove  $\vec{L}$  è il momento angolare, immerso in un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme e diretto lungo l'asse  $z$ , si trova inizialmente in uno stato con  $l = 2$  ed  $l_x = 2$ .

Determinare l'andamento temporale dello stato e dei valori medi  $\langle L_x \rangle$ ,  $\langle L_y \rangle$  e  $\langle L_z \rangle$ .

### Problema VIII.4

Un fascio di particelle viene fatto passare attraverso un campo magnetico. Quando quest'ultimo è diretto lungo l'asse  $z$  il fascio originario si divide in due fascetti, con deflessioni opposte, uno dei quali ha intensità tripla dell'altro. Quando il campo è diretto lungo l'asse  $x$  i due fascetti hanno intensità uguale.

Discutere se in base a tali dati è possibile determinare lo stato di spin in cui si trovano le particelle prima di attraversare il campo magnetico, ed in caso affermativo esprimere lo stato in una base a scelta.

## Problema VIII.5

Dimostrare che la traiettoria seguita dal centro del pacchetto d'onde che descrive una particella carica è la stessa che nel caso classico in presenza sia di campo elettrico costante che di campo magnetico costante.

Mostrare inoltre che nel primo caso lo slargamento del pacchetto d'onde ha la stessa dipendenza temporale che per una particella libera.

### Soluzione del Problema

Consideriamo un campo elettrico costante diretto lungo l'asse  $z$ ,  $\vec{E} = E\hat{k}_z$  ed un analogo campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{k}_z$ . Come è ben noto, il potenziale scalare e quello vettore associati ai due campi saranno rispettivamente  $\phi = -Ez$  e  $\vec{A} = Bx\hat{k}_y$  (dove quest'ultimo è relativo ad una opportuna gauge).

In termini di  $\phi$  ed  $\vec{A}$ , le relative Hamiltoniane  $H_E$  ed  $H_B$  saranno

$$H_E = \frac{\vec{p}^2}{2m} - eEz \quad , \quad (\text{VIII.5.1})$$

$$H_B = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{(p_y - eBx)^2}{2m} \quad . \quad (\text{VIII.5.2})$$

Classicamente, le traiettorie nello spazio delle fasi sono ottenute risolvendo le equazioni di Hamilton. Nel caso di campo elettrico costante saranno:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H_E}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} \quad , \quad (\text{VIII.5.3})$$

$$\dot{p}_x = \dot{p}_y = 0 \quad , \quad (\text{VIII.5.4})$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H_E}{\partial z} = eE \quad , \quad (\text{VIII.5.5})$$

mentre per il campo magnetico costante

$$\dot{x} = \frac{\partial H_E}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} \quad , \quad (\text{VIII.5.6})$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H_E}{\partial p_y} = \frac{(p_y - eBx)}{m} \quad , \quad (\text{VIII.5.7})$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H_E}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad , \quad (\text{VIII.5.8})$$

$$\dot{p}_y = \dot{p}_z = 0 \quad , \quad (\text{VIII.5.9})$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H_E}{\partial x} = \frac{eE}{m}(p_y - eBx) \quad . \quad (\text{VIII.5.10})$$

Quantisticamente invece, la posizione nello spazio delle fasi del pacchetto d'onda è grosso modo ottenuta calcolando sullo stato quantico al tempo generico, i valori medi  $\langle \vec{r} \rangle$  e  $\langle \vec{p} \rangle$ . La loro evoluzione temporale è data dal teorema di Ehrenfest

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \vec{r}] \rangle = \left\langle \frac{\delta H}{\delta \vec{p}} \right\rangle \quad , \quad (\text{VIII.5.11})$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{p} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, \vec{p}] \rangle = -\left\langle \frac{\delta H}{\delta \vec{r}} \right\rangle \quad . \quad (\text{VIII.5.12})$$

Applicando le equazioni (VIII.5.11) e (VIII.5.12) all'Hamiltoniana (VIII.5.1) otteniamo

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{r} \rangle = \frac{1}{m} \langle \vec{p} \rangle \quad , \quad (\text{VIII.5.13})$$

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \frac{d}{dt} \langle p_y \rangle = 0 \quad , \quad (\text{VIII.5.14})$$

$$\frac{d}{dt} \langle p_z \rangle = eE \quad . \quad (\text{VIII.5.15})$$

Come si può osservare paragonando le (VIII.5.13)-(VIII.5.15) con le rispettive relazioni classiche (VIII.5.3)-(VIII.5.5), esse sono completamente identiche. Quindi la dinamica classica e quella quantistica per il centro del pacchetto d'onda sono le stesse.

Allo stesso modo, applicando equazioni (VIII.5.11) e (VIII.5.12) all'Hamiltoniana (VIII.5.2) otteniamo

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{m} \langle p_x \rangle \quad , \quad (\text{VIII.5.16})$$

$$\frac{d}{dt} \langle y \rangle = \frac{1}{m} (\langle p_y \rangle - eB \langle x \rangle) \quad , \quad (\text{VIII.5.17})$$

$$\frac{d}{dt} \langle z \rangle = \frac{1}{m} \langle p_z \rangle \quad , \quad (\text{VIII.5.18})$$

$$\frac{d}{dt} \langle p_y \rangle = \frac{d}{dt} \langle p_z \rangle = 0 \quad , \quad (\text{VIII.5.19})$$

$$\frac{d}{dt} \langle p_x \rangle = \frac{eE}{m} (\langle p_y \rangle - eB \langle x \rangle) \quad . \quad (\text{VIII.5.20})$$

Anche in questo caso, la dinamica classica è identica a quella quantistica.

Per rispondere all'ultimo quesito, basta osservare che per  $H_E$  in virtù del teorema di Ehrenfest, la variazione nel tempo delle quantità  $\Delta \vec{r}$ ,  $\Delta p_x$  e  $\Delta p_y$  è indipendente da  $E$  e quindi del tutto identica al caso della particella libera  $E = 0$ . Per quanto riguarda invece  $\Delta p_z$ , in virtù dello stesso teorema si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Delta p_z)^2 &= \frac{d}{dt} \langle p_z^2 \rangle - 2 \langle p_z \rangle \frac{d}{dt} \langle p_z \rangle \\ &= 2eE \langle p_z \rangle - 2eE \langle p_z \rangle = 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.5.21})$$

risultato questo che essendo ancora indipendente da  $E$ , coincide con il caso della particella libera ( $E = 0$ ).

## Problema VIII.6

Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  si muove in un campo elettrico e magnetico perpendicolari fra loro, costanti, ed uniformi.

Determinare gli autostati e gli autovalori dell'energia.

*Soluzione del Problema*

Consideriamo un campo elettrico costante diretto lungo l'asse  $x$ ,  $\vec{E} = E\hat{k}_x$  ed un analogo campo magnetico  $\vec{B} = B\hat{k}_z$ . I potenziali scalare e quello vettore saranno rispettivamente  $\phi = -Ex$  e  $\vec{A} = Bx\hat{k}_y$  con un'opportuna scelta di gauge.

L'Hamiltoniana del sistema sarà allora

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{(p_y - qBx)^2}{2m} - qEx \quad . \quad (\text{VIII.6.1})$$

Come si può facilmente osservare il contributo relativo alla coordinata  $z$  è separato dagli altri e corrisponde ad una particella libera. Possiamo allora fattorizzare per il generico autostato la dipendenza da  $z$  che sarà  $\exp\{-ip_z z/\hbar\}$  e considerare perciò il solo fattore dipendente da  $x, y$ , che indicheremo con  $\phi_\epsilon(x, y)$

$$\left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(\hat{p}_y - qBx)^2}{2m} - qEx \right] \phi_\epsilon(x, y) = \epsilon \phi_\epsilon(x, y) \quad . \quad (\text{VIII.6.2})$$

L'Hamiltoniana precedente commuta con l'operatore  $\hat{p}_y$ , possiamo allora riscrivere  $\phi_\epsilon(x, y) = \exp\{-ip_y y/\hbar\} \chi_{\epsilon, p_y}(x)$ . In questo caso la funzione  $\chi_{\epsilon, p_y}(x)$  obbedirà all'equazione

$$\left[ \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2 + E_0 \right] \chi_{\epsilon, p_y}(x) = \epsilon \chi_{\epsilon, p_y}(x) \quad , \quad (\text{VIII.6.3})$$

dove

$$\omega = qB/m \quad , \quad (\text{VIII.6.4})$$

$$x_0 = \left( \frac{p_y}{qB} + \frac{mE}{qB^2} \right) \quad , \quad (\text{VIII.6.5})$$

$$E_0 = \frac{p_y^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \quad . \quad (\text{VIII.6.6})$$

I valori dell'energia del sistema saranno allora

$$\frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 + \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (\text{VIII.6.7})$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Gli autostati ovviamente ottenuti dal prodotto delle due onde piane lungo  $z$  e  $y$  e dagli stati  $|n\rangle$  lungo  $x$ .

### Problema VIII.7

Una particella di massa  $\mu$  e carica  $e$  è soggetta a una forza armonica isotropa e a un campo magnetico uniforme lungo l'asse  $z$ . Nella gauge  $\vec{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$  essa si trova nello stato:

$$\psi(x, y, z) = xy\psi_0(\vec{r}) \quad (\text{VIII.7.1})$$

dove  $\psi_0(\vec{r})$  è la funzione d'onda dello stato fondamentale dell'Hamiltoniana totale.

1. Determinare i possibili valori dell'energia e di  $l_z$  in tale stato.
2. Quale funzione d'onda descrive lo stato nella gauge  $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ ?

### Soluzione del Problema

L'Hamiltoniana del sistema descritto è data da

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\mu} \left( p_x + \frac{eB}{2} y \right)^2 + \frac{1}{2\mu} \left( p_y - \frac{eB}{2} x \right)^2 + \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2} K r^2 \\ &= \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2\mu} + \frac{1}{2} \left( K + \frac{e^2 B^2}{4\mu} \right) (x^2 + y^2) + \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2} K z^2 - \frac{eB}{2\mu} l_z \end{aligned} \quad (\text{VIII.7.2})$$

Un insieme completo di osservabili è fornito dagli operatori  $N_+$ ,  $N_-$  e  $N_z$ , definiti come

$$N_+ = A_+^\dagger A_+ \quad \text{dove} \quad A_+ \equiv \frac{(a_x - ia_y)}{\sqrt{2}} \quad (\text{VIII.7.3})$$

$$N_- = A_-^\dagger A_- \quad \text{dove} \quad A_- \equiv \frac{(a_x + ia_y)}{\sqrt{2}} \quad (\text{VIII.7.4})$$

$$N_z = A_z^\dagger A_z \quad \text{dove} \quad A_z \equiv a_z \quad (\text{VIII.7.5})$$

Definendo

$$\omega^2 = \frac{K}{\mu} \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{1}{\mu} \left( K + \frac{e^2 B^2}{4\mu} \right) \quad (\text{VIII.7.6})$$

L'Hamiltoniana (VIII.7.2) si può riscrivere come

$$H = \hbar\tilde{\omega} (N_+ + N_- + 1) + \hbar\omega \left( N_z + \frac{1}{2} \right) - \frac{eB\hbar}{2\mu} (N_+ - N_-) \quad (\text{VIII.7.7})$$

La base che diagonalizza l'Hamiltoniana è allora quella determinata dagli stati

$$|n_+, n_-, n_z\rangle = \frac{(A_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{n_+!}} \frac{(A_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{n_-!}} \frac{(A_z^\dagger)^{n_z}}{\sqrt{n_z!}} |0\rangle \quad (\text{VIII.7.8})$$

Possiamo quindi rispondere alle domande poste:

1. Lo stato assegnato si può dimostrare essere la combinazione

$$|1_x, 1_y, 0_z\rangle \propto \frac{1}{\sqrt{2}} (|2_+, 0, 0\rangle - |0, 2_-, 0\rangle) \quad (\text{VIII.7.9})$$

e quindi è combinazione equiprobabile degli autostati dell'energia di autovalori

$$E_1 = 3\hbar\tilde{\omega} + \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{eB\hbar}{\mu} \quad (\text{VIII.7.10})$$

$$E_2 = 3\hbar\tilde{\omega} + \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{eB\hbar}{\mu} \quad (\text{VIII.7.11})$$

a cui corrispondono anche gli autovalori di  $l_z$   $2\hbar$  e  $-2\hbar$ .

2. Il nuovo potenziale vettore sarà ovviamente collegato ad  $A$  dall'aggiunta di un gradiente (ovvero da una trasformazione di gauge):

$$\vec{A}' = (0, Bx, 0) = \vec{A} + \nabla\lambda, \quad (\text{VIII.7.12})$$

risolvendo per  $\lambda$  si ottiene  $\lambda = Bxy/2$ .

Quindi il corrispondente stato iniziale gauge trasformato è dato da

$$\psi'(x, y, z) = \exp\left\{\frac{ieB}{2\hbar}xy\right\} xy\psi_0(\vec{r}) \quad . \quad (\text{VIII.7.13})$$

### Problema VIII.8

Si consideri una particella in un campo elettromagnetico descritto dal potenziale  $\vec{A}$ . Si trovi l'operatore quantistico che corrisponde alla velocità e si discutano le regole di commutazione delle varie componenti di quest'ultimo fra di loro e con la posizione ed il momento.

### Problema VIII.9

Si consideri il moto di una carica  $q$  nel piano ortogonale ad un campo magnetico uniforme  $\vec{B}$  diretto lungo  $z$  e l'operatore quantistico corrispondente alla componente  $M_z$  del momento della quantità di moto  $\vec{M} = \vec{r} \times (m\vec{v})$ , dove  $\vec{v}$  è la velocità della particella.

1. Ricordando che in seguito ad una trasformazione di gauge  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla f$ , la funzione d'onda  $\psi$  che rappresenta uno stato fisico diventa  $\psi' = e^{iqf/\hbar} \psi$ , si discuta se  $\langle M_z \rangle$  dipende dal gauge.
2. Se nel gauge  $A_i = \epsilon_{ij}x_j B/2$ , ( $i, j = 1, 2$ ) lo stato è descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y) = x e^{-(x^2+y^2)/l^2} \quad (\text{VIII.9.1})$$

dove  $l$  è una opportuna lunghezza, quali sono in tale stato i possibili risultati di una misura di  $M_z$  e le relative densità di probabilità ?

3. La quantità  $M_z$  è una costante del moto?

## Problema VIII.10

A partire dalla relazione relativistica

$$(E - W)^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (\text{VIII.10.1})$$

dove  $E$  è l'energia totale e  $W$  quella potenziale, si calcolino i valori di  $E$  quantisticamente possibili per un elettrone ( $mc^2 = 5 \cdot 10^5 \text{ eV}$ ) in un campo Coulombiano.

Confrontare con i valori ottenuti attraverso una trattazione non relativistica, tenendo presente che  $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137$ . Discutere la degenerazione dei livelli nei due casi

### *Soluzione del Problema*

Denotiamo con  $\psi_E(\vec{r})$  il generico autostato dell'energia. Tale stato dovrà soddisfare l'equazione

$$\left[ \nabla^2 + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left( E + \frac{e^2 Z}{r} \right) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right] \psi_E(\vec{r}) = 0 \quad . \quad (\text{VIII.10.2})$$

Riscrivendo lo stato  $\psi_E(\vec{r}) = \phi_{E,l}(r) \chi_l^m(\theta, \varphi)$ , l'equazione (VIII.10.2) diventa

$$\left[ \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{2\alpha Z \epsilon}{\rho} + \frac{\alpha^2 Z^2}{\rho^2} + (\epsilon^2 - 1) \right] \phi_{\epsilon,l}(\rho) \quad (\text{VIII.10.3})$$

dove  $\epsilon \equiv E/(mc^2)$  e  $\rho \equiv mcr/\hbar$ . Se lo stato  $\psi_E(\vec{r})$  è uno stato legato allora  $0 \leq \epsilon < 1$ , quindi ponendo

$$\phi_{\epsilon,l}(\rho) = R_{\epsilon,l}(\rho) \exp\{-k\rho\} \quad , \quad (\text{VIII.10.4})$$

con  $k = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ , si ottiene

$$R''_{\epsilon,l}(\rho) + 2 \left( \frac{1}{\rho} - k \right) R'_{\epsilon,l}(\rho) + \left[ \frac{2}{\rho} (\alpha \epsilon Z - k) + \frac{1}{\rho^2} (\alpha^2 Z^2 - l(l+1)) \right] R_{\epsilon,l}(\rho) = 0 \quad . \quad (\text{VIII.10.5})$$

Ponendo  $R_{\epsilon,l}(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^{n+\beta}$  otteniamo la relazione ricorsiva

$$\sum_{n=-1}^{\infty} \left[ (n + \beta + 1)(n + \beta + 2) + \alpha^2 Z^2 - l(l+1) \right] a_{n+1} \rho^{n+\beta-1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 [k(n + \beta + 1) - \alpha \epsilon Z] a_n \rho^{n+\beta-1} \quad . \quad (\text{VIII.10.6})$$

Dalla (VIII.10.6) per  $n = -1$  otteniamo

$$\beta(\beta + 1) = l(l + 1) - \alpha^2 Z^2 \quad , \quad (\text{VIII.10.7})$$

da cui

$$\beta = \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{(2l + 1)^2 - 4\alpha^2 Z^2} \right) \quad . \quad (\text{VIII.10.8})$$

La relazione ricorsiva contenuta nella (VIII.10.6) deve essere troncata perché in caso contrario il comportamento degli  $a_n$  è tale da rendere non a quadrato sommabile lo stato corrispondente. A tale scopo, deve esistere un intero  $N$  tale che

$$k(N + \beta + 1) = \alpha \epsilon Z \quad . \quad (\text{VIII.10.9})$$

Risolvendo l'equazione precedente per  $\epsilon$  si ha

$$\epsilon^2 = \frac{(N + \beta + 1)^2}{\alpha^2 Z^2 + (N + \beta + 1)^2} \quad . \quad (\text{VIII.10.10})$$

Come si vede, gli autovalori possibili per l'energia dipendono in maniera complicata da  $N$  e da  $l$ . Quindi la degenerazione è solo per  $m$  una volta fissati  $N$  e  $l$ .

Il fatto che  $\alpha \simeq 1/137$  permette di sviluppare le relazioni (VIII.10.8) e (VIII.10.10) in funzione di  $\alpha^2$ , arrestandosi ai primi termini

$$\beta \simeq \left( l - \frac{\alpha^2 Z^2}{(2l + 1)} \right) \quad , \quad (\text{VIII.10.11})$$

e quindi sostituendo nella (VIII.10.10) otteniamo

$$\epsilon \simeq 1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{(N + l + 1)^2} \quad (\text{VIII.10.12})$$

che come è facile osservare ribattezzando  $n = N + l + 1$  ha la degenerazione in  $0 \leq l \leq n$  oltre che in  $m$ .

## Problema VIII.11

Una particella di massa  $m$  e carica  $q$  è limitata da una barriera infinita a muoversi in un piano, all'interno del cerchio di raggio  $R$ , ed in tale regione è soggetta ad un campo elettrico uniforme.

Lo stato del sistema è descritto ad un certo istante dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y) = N xy \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) \quad (\text{VIII.11.1})$$

1. Si calcolino lo scarto quadratico medio per l'energia e la distribuzione di probabilità per il momento angolare rispetto al centro del cerchio.
2. Questa distribuzione dipende dal tempo?

## Problema VIII.12

Si consideri una particella senza spin vincolata a muoversi su un piano ed in presenza di un campo magnetico costante  $B$ , che si trovi nel primo stato eccitato dell'energia (primo livello di Landau).

Si indichi quali sono i valori possibili di una misura del momento angolare

$$L = \hbar(xp_y - yp_x) \quad (\text{VIII.12.1})$$

e le loro probabilità .

## Problema VIII.13

Si consideri una particella con spin  $1/2$ , in presenza di un campo magnetico di intensità tale che la parte di spin dell'Hamiltoniana sia  $H_0 = B\sigma_z$ , "perturbato" da un campo magnetico costante descritto da  $H_I = B \operatorname{tg} 2\alpha \sigma_x$  (lo scrivere la costante in termini di  $B$  e della tangente di un angolo semplificherà i calcoli).

Se a  $t = 0$  si trova la particella con lo spin lungo l'asse  $z$  positivo, quale sarà la probabilità di trovarla con  $s_z = -1/2$  ad un generico istante  $t$ ? Si calcoli questa probabilità come probabilità di transizione della teoria perturbata ed esattamente (suggerimento per il caso esatto: orientare l'asse  $z$  lungo il campo magnetico e ruotare gli stati con spin  $1/2$  e  $-1/2$ ). Confrontare i risultati.

*Problemi di Meccanica Quantistica*

# Capitolo IX

## Spin

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

## Problema IX.1

Un sistema consiste di due particelle distinguibili di spin 1, con momento angolare relativo  $\vec{L} = 0$ .

Trovare:

1. Un sistema completo di osservabili.
2. I numeri quantici possibili dello spin totale  $\vec{S}$  e della sua proiezione sull'asse  $z$ :  $S_z$ .

*Soluzione del Problema*

1. Cerchiamo per prima cosa il sistema completo di osservabili che commutano. Sappiamo che non c'è momento angolare orbitale, il momento angolare totale è pertanto dato puramente dallo spin. Se indichiamo con  $\vec{S}_1$  e  $\vec{S}_2$  gli spin delle due particelle un sistema completo possibile, nello spazio dello spin, potrebbe essere:

$$S_1^2 S_2^2 S_{1z} S_{2z} . \quad (\text{IX.1.1})$$

Alternativamente si può considerare:

$$S_1^2 S_2^2 S^2 S_z . \quad (\text{IX.1.2})$$

★ Una qualunque combinazione di due sistemi completi di osservabili è un sistema completo? Per esempio:

$$S_1^2 S_2^2 S_{1z} S^2 \quad (\text{IX.1.3})$$

è un sistema di osservabili che commutano?

2. Ora cerchiamo i valori possibili di  $s$  e  $m$ , con  $m$  autovalore di  $S_z$  e  $s(s+1)$  autovalore di  $S^2$ , e notazioni simili per  $S_1$  e  $S_2$ .

Il sistema ha spin totale 2, pertanto  $s = 0, 1, 2$  mentre  $s_z$  va da  $-s$  a  $s$ . In generale i valori possibili di  $s$  sono  $s_1 + s_2, s_1 + s_2 - 1, \dots, |s_1 - s_2|$ . È anche utile controllare che il numero di stati nelle due rappresentazioni è lo stesso. Se si sceglie infatti il sistema (IX.1.1) è evidente che ci sono 9 stati, tre per ciascuna particella indipendente. Per il sistema (IX.1.2) il calcolo va fatto tenendo conto che ci sono  $2s + 1$  valori di  $s_z$  per ogni  $s = 0, 1, 2$ , ovvero  $5 + 3 + 1 = 9$ .

## Problema IX.2

Sia data una particella di Spin 1/2 con l'asse  $z$  scelto come la direzione di quantizzazione. Si trovi la trasformazione che ruota lo stato della particella di modo che l'asse  $z$  coincida con una generica direzione individuata da  $\theta$  e  $\varphi$ .

### Soluzione del Problema

La trasformazione cercata, scritta in termini gli operatori del momento angolare  $J_i$  è

$$\exp \left\{ -i \frac{J_z}{\hbar} \varphi \right\} \exp \left\{ -i \frac{J_y}{\hbar} \theta \right\} . \quad (\text{IX.2.1})$$

Dal momento che il problema tratta di una particella con spin 1/2 il calcolo è semplificato dal fatto che lo spazio di Hilbert è bidimensionale e che gli operatori del momento angolare sono le matrici di Pauli con  $x, y, z = 1, 2, 3$ :

$$J_i = \frac{\sigma_i \hbar}{2} \quad (\text{IX.2.2})$$

dove le  $\sigma_1$  sono le matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{IX.2.3})$$

Osservando che vale la relazione

$$\exp \{ -i \sigma_j \omega \} = \cos \omega \mathbb{I} - i \sin \omega \sigma_j \quad , \quad (\text{IX.2.4})$$

si ha

$$\begin{aligned} \exp \{ -i J_z \varphi \} &= \exp \left\{ -\frac{i \sigma_3 \varphi}{2} \right\} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \\ \exp \{ -i J_y \theta \} &= \exp \left\{ -\frac{i \sigma_2 \theta}{2} \right\} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IX.2.5})$$

Da cui, la matrice che ruota un generico stato è

$$R(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \exp \{ -i \frac{\varphi}{2} \} & -\sin \frac{\theta}{2} \exp \{ -i \frac{\varphi}{2} \} \\ \sin \frac{\theta}{2} \exp \{ i \frac{\varphi}{2} \} & \cos \frac{\theta}{2} \exp \{ i \frac{\varphi}{2} \} \end{pmatrix} . \quad (\text{IX.2.6})$$

## Problema IX.3

Si consideri una particella con momento angolare orbitale  $l$  e spin intrinseco 1/2 (in unità di  $\hbar$ ). Trovare la dimensione del sottospazio di Hilbert sotteso da questo stato ed enumerare le autofunzioni per cui il momento angolare totale e la sua componente  $z$  sono diagonali.

*Soluzione del Problema*

Se la particella ha  $s = \frac{1}{2}$  allora necessariamente

$$l - \frac{1}{2} \leq j \leq l + \frac{1}{2} \tag{IX.3.1}$$

Inoltre deve essere

$$-j \leq m_j \leq j \tag{IX.3.2}$$

Pertanto per ogni valore di  $j$  lo spazio di Hilbert ha dimensione  $2j + 1$ .

Il valore totale pertanto sarà :

$$2 \left( l - \frac{1}{2} \right) + 2 \left( l + \frac{1}{2} \right) = 4l + 2 . \tag{IX.3.3}$$

### Problema IX.4

L'Hamiltoniana per un sistema di due particelle distinguibili di spin  $1/2$  è :

$$H = a \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \tag{IX.4.1}$$

All'istante  $t = 0$  vengono misurate contemporaneamente le componenti  $z$  dello spin delle due particelle e si trovano i valori  $\hbar/2$  e  $-\hbar/2$  rispettivamente.

Qual'è la probabilità di trovare lo stesso risultato se la misura è ripetuta al tempo  $t = \frac{\pi}{2\hbar a}$ ?

*Soluzione del Problema*

Il problema si semplifica notevolmente se si sceglie un opportuno sistema completo di osservabili. Si noti che se definiamo

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 \tag{IX.4.2}$$

allora

$$H = \frac{a}{2} (S^2 - s_1^2 - s_2^2) . \tag{IX.4.3}$$

Questo suggerisce di scegliere come sistema completo di osservabili  $s_1, s_2, S, S_z$ . In questa base  $s_1^2$  e  $s_2^2$  hanno valore  $3\hbar^2/4$ , mentre  $S$  può avere sia autovalore  $2\hbar$  che  $0$ . Lo stato iniziale è una combinazione di queste due possibilità .

Esprimiamo dapprima lo stato iniziale nella base  $s_1, s_2, s_{1z}, s_{2z}$ :

$$\psi(0) = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 . \tag{IX.4.4}$$

Ora bisogna esprimere questo stato nella base  $s_1, s_2, S, S_z$ . Questo sarà una sovrapposizione di una particella con spin 0 ed una con spin totale 1 ma  $S_z = 0$ :

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0\rangle + |1, 0\rangle) \quad (\text{IX.4.5})$$

notiamo che

$$\begin{aligned} H|0, 0\rangle &= -\frac{3a}{4}\hbar^2|0, 0\rangle \\ H|1, 0\rangle &= \frac{a}{4}\hbar^2|1, 0\rangle \end{aligned} \quad (\text{IX.4.6})$$

Allora

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \exp\left\{-i\frac{Ht}{\hbar}\right\}\psi(0) \\ &= \exp\left\{-\frac{ia\hbar}{4}t\right\}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{ia\hbar t}|0, 0\rangle + |1, 0\rangle\right) \end{aligned} \quad (\text{IX.4.7})$$

e la probabilità che cerchiamo è

$$|\langle\psi(t)\psi(0)\rangle|^2 = \frac{1}{4}|e^{ia\hbar t} + 1|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(a\hbar t)) \quad (\text{IX.4.8})$$

sostituendo per  $t$  troviamo la quantità desiderata:

$$\frac{1}{2}(1 + \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}. \quad (\text{IX.4.9})$$

## Problema IX.5

L'elettrone ha spin 1/2 come è noto. Le matrici di spin soddisfano la relazione

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k \quad (\text{IX.5.1})$$

Cerchiamo due operatori vettoriali  $V_i$  e  $W_j$  con

$$\begin{aligned} [V_i, W_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [V_i, V_j] &= [W_i, W_j] = 0 \end{aligned} \quad (\text{IX.5.2})$$

tali che l'operatore di spin risulti:

$$S_i = \varepsilon_{ijk}V_jW_k. \quad (\text{IX.5.3})$$

Si mostri una coppia di operatori  $V$  e  $W$ , oppure si dimostri che è impossibile trovare una tale coppia di operatori.

*Soluzione del Problema*

Si può facilmente dimostrare che gli  $S_i = \varepsilon_{ijk} V_j W_k$  soddisfano infatti la relazione (IX.5.1). Questo si può vedere notando che le  $S_i$  sono una sorta di *momento angolare* per gli operatori  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$ .

Il fatto che  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  siano operatori vettoriali significa che:

$$[L_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k, \quad (\text{IX.5.4})$$

dove  $\vec{L}$  è il momento angolare orbitale. Una formula analoga vale per  $\vec{W}$ . Si noti anche che, dalla (IX.5.2) e (IX.5.3) risulta:

$$[S_i, V_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} V_k. \quad (\text{IX.5.5})$$

Combinando le due equazioni, e con l'uso della identità di Jacobi abbiamo (per evitare la proliferazione degli indici facciamo uno dei casi, gli altri sono ovviamente analoghi):

$$[S_1, V_2] = i\hbar V_3 = -\frac{i}{\hbar} [S_1, [L_3, V_1]] = \frac{i}{\hbar} ([L_3, [V_1, S_1]] + [V_1, [S_1, L_3]]) = 0 \quad (\text{IX.5.6})$$

dato che il momento angolare orbitale e lo spin commutano. Dal momento che possiamo ripetere il ragionamento per le altre componenti dovremmo concludere che  $\vec{V} = 0$ , ma questo sarebbe in contraddizione con la prima delle (IX.5.2).

È quindi impossibile ottenere gli operatori di spin come un prodotto di vettori.

★ *Un procedimento alternativo potrebbe essere il seguente. Le regole di commutazione fra  $V$  e  $W$  (che definiscono la cosiddetta algebra di Heisenberg) implicano*

$$W_i = \frac{\partial}{\partial V^i} \quad (\text{IX.5.7})$$

*L'equazione agli autovalori diviene pertanto identica all'equazione differenziale le cui equazioni sono le armoniche sferiche, che come è noto hanno valori di  $L$  che sono solo interi. Si noti però che per la (IX.5.7) abbiamo implicitamente assunto che lo spettro dei due operatori vettoriali è continuo. Questo si può provare (tecnicamente si prova che l'algebra di Heisenberg ha una sola rappresentazione) ma è un risultato matematico che esula dallo spirito di questo libro.*

★ *In termini matematici si definiscono due gruppi di trasformazioni:  $SO(3)$  e  $SU(2)$ , entrambi ottenuti dalla stessa algebra (IX.5.1).*

Il gruppo  $SO(3)$  è quello delle rotazioni nello spazio a tre dimensioni. Si ottiene agendo sui vettori di  $\mathbb{R}^3$  con le rotazioni infinitesime rappresentate dalla matrici  $3 \times 3$   $(R_i)_{jk} = i\varepsilon_{ijk}$ , di modo che una rotazione finita di un angolo  $\alpha$  attorno allo  $i$ -esimo asse è data dall'operatore  $e^{i\alpha R_i}$ . Le matrici  $R_i$  soddisfano la (IX.5.1). Un'altra rappresentazione del gruppo è ovviamente data dagli operatori  $L_i = i\varepsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x^k}$ . Le rappresentazioni di  $SO(3)$  sono distinte dal valore  $l$  intero, dove  $l(l+1)$  è l'autovalore della somma dei quadrati dei generatori.

Il gruppo  $SU(2)$  è quello rappresentato per esempio dalle matrici complesse  $2 \times 2$  unitarie a determinante uguale ad 1. In questa rappresentazione esso è generato dalle matrici di Pauli, che obbediscono le relazioni (IX.5.1). Questo vuol dire che le proprietà locali dei due gruppi sono le stesse, il che però non vuol dire che siano le stesse anche le proprietà globali. Anche le rappresentazioni di  $SU(2)$  sono distinte dal valore della somma del quadrato dei generatori,  $j(j+1)$ , dove però stavolta  $j$  può avere valori sia interi che seminteri. Mentre le rappresentazioni del gruppo  $SO(3)$  sono anche rappresentazioni di  $SU(2)$ , non è vero il viceversa. In particolare la rappresentazione con  $j = 1/2$  è una rappresentazione di  $SU(2)$ , ma non di  $SO(3)$ , e pertanto non si può rappresentare come il momento angolare orbitale di un sistema le cui coordinate e momenti sarebbero le  $V$  e  $W$  di questo problema.

### Problema IX.6

Una particella di massa  $m$ , spin  $1/2$  e momento magnetico  $\vec{\mu} = g\vec{s}$ , soggetta a una forza elastica isotropa, è immersa in un campo magnetico uniforme diretto lungo  $z$ .

Essa si trova inizialmente nello stato

$$|\psi\rangle = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \vec{P}\right\} |0\rangle \times |\chi_+^x\rangle \quad (\text{IX.6.1})$$

dove  $|0\rangle$  è lo stato fondamentale dell'interazione elastica (oscillatore armonico),  $\vec{P}$  è l'operatore momento,  $\vec{a}$  è un vettore arbitrario e  $|\chi_+^x\rangle$  è l'autostato di  $s_x$  relativo all'autovalore  $\hbar/2$ .

Calcolare i valori medi della posizione, dell'energia e della componente  $x$  del momento angolare totale  $j_x = l_x + s_x$  e il loro andamento temporale.

#### Soluzione del Problema

L'Hamiltoniana del sistema è la seguente

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\vec{r}^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} = H_0 - \vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad , \quad (\text{IX.6.2})$$

dove  $H_0$  è l'Hamiltoniana del solo oscillatore armonico. Usando la (IX.6.2) e la forma dello stato iniziale, calcoliamo il valore medio dell'energia, che come è noto non dipende dal tempo

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \left\langle 0 \left| \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \vec{P}\right\} H_0 \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \vec{P}\right\} \right| 0 \right\rangle - gB \langle \chi_+^x | s_z | \chi_+^x \rangle \quad . \quad (\text{IX.6.3})$$

Per calcolare tale espressione basta osservare che l'operatore  $\vec{P}$  è il generatore delle traslazioni, quindi dato un generico operatore  $O(\vec{r})$  si ha

$$O'(\vec{r}') = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \vec{P}\right\} O(\vec{r}) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\vec{a} \cdot \vec{P}\right\} = O(\vec{r} + \vec{a}) \quad . \quad (\text{IX.6.4})$$

Usando tale risultato possiamo quindi calcolare i due valori medi che intervengono nella (IX.6.3)

$$\left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} H_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \right| 0 \right\rangle = \left\langle 0 \left| \left[ \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} k (\vec{r} - \vec{a})^2 \right] \right| 0 \right\rangle . \quad (\text{IX.6.5})$$

Osservando che

$$\left[ \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} k (\vec{r} - \vec{a})^2 \right] = H_0 + k \vec{r} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} k \vec{a}^2 , \quad (\text{IX.6.6})$$

e che  $H_0|0\rangle = \hbar\omega/2|0\rangle$ , si ha

$$\left\langle 0 \left| \left[ \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} k (\vec{r} - \vec{a})^2 \right] \right| 0 \right\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{2} k \vec{a}^2 . \quad (\text{IX.6.7})$$

Per calcolare poi il termine  $\langle \chi_+^x | s_z | \chi_+^x \rangle$ , basta osservare che  $s_z = i(s_-^x - s_+^x)/2$ , dove  $s_\pm^x$  denotano gli operatori a gradino relativi ad  $s_x$ , e quindi

$$\langle \chi_+^x | s_z | \chi_+^x \rangle = \frac{i}{2} \langle \chi_+^x | (s_-^x - s_+^x) | \chi_+^x \rangle = 0 . \quad (\text{IX.6.8})$$

Usando allora l'equazione (IX.6.7) e (IX.6.8) otteniamo

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{1}{2} k \vec{a}^2 . \quad (\text{IX.6.9})$$

Lo stesso calcolo, appena eseguito per l'operatore Hamiltoniana può essere eseguito per la posizione, infatti sullo stato iniziale otteniamo

$$\langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle = \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \vec{r} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \right| 0 \right\rangle = \langle 0 | \vec{r} + \vec{a} | 0 \rangle = -\vec{a} . \quad (\text{IX.6.10})$$

Analogamente si può dimostrare che

$$\langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle = 0 . \quad (\text{IX.6.11})$$

Calcoliamo adesso il valore medio sullo stato  $|\psi\rangle$  di  $\vec{j}$  del momento angolare totale

$$\langle \psi | \vec{j} | \psi \rangle = \left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \vec{j} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \right| 0 \right\rangle + \langle \chi_+^x | \vec{s} | \chi_+^x \rangle . \quad (\text{IX.6.12})$$

Dalla proprietà di trasformazione degli operatori allora segue

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \vec{l} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} = (\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{P} = \vec{l} - \vec{a} \times \vec{P} , \quad (\text{IX.6.13})$$

da cui

$$\left\langle 0 \left| \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \vec{l} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \vec{a} \cdot \vec{P} \right\} \right| 0 \right\rangle = \langle 0 | \vec{l} | 0 \rangle - \vec{a} \times \langle 0 | \vec{P} | 0 \rangle = 0 . \quad (\text{IX.6.14})$$

L'ultima relazione si ricava dall'osservare che essendo lo stato fondamentale autovettore del momento angolare  $\vec{l}^2$  di autovalore nullo, allora il valore di aspettazione di qualunque componente di  $\vec{l}$  su questo stato è anch'esso nullo.

Per calcolare la dipendenza dal tempo dei valori di aspettazione di posizione, impulso e momento angolare totale (quello dell'energia, come suddetto, non dipende dal tempo) applichiamo il teorema di Ehrenfest.

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle_t = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [H, \vec{r}] | \psi \rangle_t = \frac{1}{2m} \langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle_t \quad , \quad (\text{IX.6.15})$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle_t = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [H, \vec{P}] | \psi \rangle_t = -\omega^2 m \langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle_t \quad . \quad (\text{IX.6.16})$$

La soluzione di queste due equazioni, insieme alle condizioni iniziali per i valori medi di posizione ed impulso (IX.6.10) e (IX.6.11), danno

$$\langle \psi | \vec{r} | \psi \rangle_t = -\vec{a} \cos(\omega t) \quad , \quad (\text{IX.6.17})$$

$$\langle \psi | \vec{P} | \psi \rangle_t = m\omega \vec{a} \sin(\omega t) \quad . \quad (\text{IX.6.18})$$

Per quanto riguarda il momento angolare orbitale  $\vec{l}$ , dato che esso commuta con l'Hamiltoniana ed inizialmente ha valore medio nullo, allora continuerà ad averlo nel tempo. Per la parte di spin, consideriamo una componente  $s_i$  qualunque ( $i = 1, 2, 3$  corrisponde a  $x, y, z$  rispettivamente) dal teorema di Ehrenfest si ha

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | s_i | \psi \rangle_t = \frac{i}{\hbar} \langle \psi | [H, s_i] | \psi \rangle_t = gB \epsilon_{3ik} \langle \psi | s_k | \psi \rangle_t \quad . \quad (\text{IX.6.19})$$

In particolare segue da questo sistema di equazioni che il valor medio di  $s_z$  è costante nel tempo e che è quindi nullo in virtù della (IX.6.8)

$$\langle \psi | s_z | \psi \rangle_t = 0 \quad , \quad (\text{IX.6.20})$$

e che

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | s_x | \psi \rangle_t = gB \langle \psi | s_y | \psi \rangle_t \quad , \quad (\text{IX.6.21})$$

$$\frac{d}{dt} \langle \psi | s_y | \psi \rangle_t = -gB \langle \psi | s_x | \psi \rangle_t \quad , \quad (\text{IX.6.22})$$

dove  $\langle \psi | s_x | \psi \rangle_{t=0} = \hbar/2$  e  $\langle \psi | s_y | \psi \rangle_{t=0} = 0$ . La soluzione delle equazioni (IX.6.21) e (IX.6.22) con le suddette condizioni iniziali è

$$\langle \psi | s_x | \psi \rangle_t = \frac{\hbar}{2} \cos(gBt) \quad , \quad (\text{IX.6.23})$$

$$\langle \psi | s_y | \psi \rangle_t = -\frac{\hbar}{2} \sin(gBt) \quad . \quad (\text{IX.6.24})$$

## Problema IX.7

Sia data una particella di spin 1 e momento magnetico  $\mu$  che si trova in un campo magnetico uniforme orientato lungo l'asse  $z$  e di intensità  $B$ .

All'istante  $t = 0$  si trova che la particella è nell'autostato di  $S_x$  corrispondente all'autovalore 1.

Trovare, per un generico istante  $t$ , il valor medio di  $S_x$ ,  $S_y$  ed  $S_z$ .

### Problema IX.8

Sia data una particella di spin  $1/2$  e momento magnetico  $\mu$  che si trova in un campo magnetico uniforme orientato lungo l'asse  $z$  e di intensità  $B$ .

All'istante  $t = 0$  si trova che la particella è nell'autostato di  $S_x$  corrispondente all'autovalore  $-1/2$ .

Trovare, per un generico istante  $t$ , la probabilità di trovare la particella:

1. Nell'autostato di  $S_x$  di autovalore  $1/2$ .
2. Nell'autostato di  $S_y$  di autovalore  $1/2$ .
3. Nell'autostato di  $S_z$  di autovalore  $1/2$ .

### Problema IX.9

Una particella di carica  $e$ , massa  $m$  e spin  $1$  (un pione  $\pi^+$  per esempio) si trova in un campo magnetico di intensità  $B$  orientato lungo l'asse  $z$ .

1. Si scriva l'Hamiltoniana  $H$  del sistema.
2. Si trovino le costanti del moto quantistiche del sistema.
3. Si scriva l'equazione di Schrödinger del sistema.
4. Si trovino gli autovalori di  $H$ . (Suggerimento: usando le risposte ai due punti precedenti si può ridurre l'equazione di Schrödinger ad una forma ben nota.
5. Classicamente l'orbita della particella è un cerchio nel piano  $xy$ , di centro

$$x = x + \frac{p_y c}{eB}, \quad y = \frac{p_x c}{eB} \quad (\text{IX.9.1})$$

Provare che gli operatori quantistici corrispondenti a  $x$  e  $y$  sono costanti del moto.

### Problema IX.10

Tre particelle distinguibili di spin  $1/2$  sono descritte dall'Hamiltoniana:

$$H = A(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_3 \cdot \vec{S}_1) \quad (\text{IX.10.1})$$

con  $A$  una costante.

Si trovino:

1. La dimensionalità dello spazio di Hilbert di questo sistema.
2. Una base per il sistema.
3. I livelli energetici del sistema e le loro degenerazioni.
4. I livelli energetici e le loro degenerazioni nel caso in cui le particelle siano identiche.

### Problema IX.11

L'Hamiltoniana per due particelle di spin  $1/2$  è

$$H = A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad . \quad (\text{IX.11.1})$$

dove  $A$  è una costante.

1. Al tempo  $t = 0$  si misurano simultaneamente  $S_{1z}$  ed  $S_{2z}$  e si trovano come risultato i valori  $\frac{+\hbar}{2}$  e  $\frac{-\hbar}{2}$  rispettivamente.  
Qual'è la probabilità di trovare esattamente gli stessi risultati ad un generico tempo  $t$ ?
2. È possibile ripetere lo stesso problema con la scelta iniziale di  $S_{1x}$  ed  $S_{2z}$ ?
3. E con la scelta  $S_{1z}$  ed  $S_{1x}$ ?

### Problema IX.12

Si consideri una particella di spin  $1/2$  che si muove in una dimensione descritta dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2m} \left( p^2 + W^2 + \hbar\sigma_3 \frac{dW}{dx} \right) \quad (\text{IX.12.1})$$

dove  $W$  è una funzione arbitraria di  $x$  e le  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli.

1. Si dimostri che le seguenti quantità sono costanti del moto:

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2}(1 - \sigma_3) \\ Q_1 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 p + \sigma_2 W) \\ Q_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_2 p - \sigma_1 W) \end{aligned} \quad (\text{IX.12.2})$$

2. Si dimostri che se lo stato  $\Psi$  soddisfa:

$$\begin{aligned} H\Psi &= E\Psi \\ N\Psi &= 0 \end{aligned} \tag{IX.12.3}$$

con  $E \neq 0$ , allora lo stato  $\Psi$  è anch'esso autostato di  $H$  ed  $N$  e se ne trovino gli autovalori.

*Problemi di Meccanica Quantistica*

Capitolo X  
Simmetrie Discrete

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

## Problema X.1

Gli operatori di numero barionico  $B$  e coniugazione di carica  $C$  anticommutano:

$$BC + CB = 0 \quad (\text{X.1.1})$$

Inoltre  $C^2 = \mathbb{I}$ . Se  $\Psi$  è autostato simultaneo di  $B$  e  $C$ , quali sono i suoi possibili autovalori?

Come generalizzazione si consideri il caso con  $C^n = \mathbb{I}$  con  $n$  un intero assegnato.

Se invece  $B$  e  $C$  commutassero si può dire qualcosa sull'autovalore di  $\Psi$ ?

### Soluzione del Problema

Gli autovalori di  $C$  sono (a meno di una fase complessiva)  $\pm 1$ . Ora basta applicare l'anticommutatore (che sappiamo essere 0) alla funzione  $\psi$ , indicando con  $b$  e  $c$  gli autovalori dei due operatori:

$$(BC + CB)\Psi = 0 = (bc + cb)\Psi \quad (\text{X.1.2})$$

e dato che  $c \neq 0$  allora deve per forza essere

$$b = 0 \quad (\text{X.1.3})$$

Se  $C^n = \mathbb{I}$  allora i suoi autovalori sono le radici  $n$ -sime dell'identità :

$$c = e^{\frac{ik2\pi}{n}} \quad (\text{X.1.4})$$

con  $k$  intero  $k \in [0, n - 1]$ . Anche in questo caso  $c \neq 0$  e pertanto dalla (X.1.2) Si può sempre concludere che  $b = 0$ .

Ovviamente nel caso in cui gli operatori commutino non si può inferire nulla sul valore di  $b$ , in questo caso la (X.1.2) diviene  $bc - cb = 0$ , che è sempre vera.

## Problema X.2

Sia  $P$  l'operatore di parità :

$$P\Psi(\vec{x}) = \Psi(-\vec{x}) \quad (\text{X.2.1})$$

1. Controllare se  $P$  commuta o anticommuta con  $p_i, q_i$  ed  $L_i$  dove questi operatori sono le componenti del momento lineare, della posizione e del momento angolare rispettivamente.

2. Mostrare che gli autovettori  $Y_{lm}$  del momento angolare (le armoniche sferiche) sono anche autovettori di  $P$ , con gli autovalori che dipendono solo da  $l$ :

$$PY_{lm} = \lambda_l Y_{lm} \quad (\text{X.2.2})$$

Trovare esplicitamente  $\lambda_l$

### Soluzione del Problema

1. Calcoliamo esplicitamente i vari casi:

$$Pq_i\Psi(\vec{x}) = Px_i\Psi(\vec{x}) = -x_i\Psi(-\vec{x}) = -q_i\Psi(-\vec{x}) = -q_iP\Psi(\vec{x}) \quad (\text{X.2.3})$$

Quindi  $q_i$  e  $P$  *anticommutano*.

$$Pp_i\Psi(\vec{x}) = i\hbar P\partial_x\Psi(\vec{x}) = i\hbar\partial_{-x}\Psi(-\vec{x}) = -i\hbar\partial_x\Psi(-\vec{x}) = -p_iP\Psi(\vec{x}) \quad (\text{X.2.4})$$

Quindi  $P$  e  $p_i$  *anticommutano*

Usando la definizione di  $L_i = \varepsilon_{ijk}q_jp_k$  si vede facilmente che

$$PL_i = P\varepsilon_{ijk}q_jp_k = -\varepsilon_{ijk}q_jPp_k = \varepsilon_{ijk}q_jp_kP = L_iP \quad (\text{X.2.5})$$

Quindi  $P$  ed  $L_i$  (e quindi  $\vec{L}^2$ ) *commutano*.

2. Notiamo che essendo  $P^2 = \mathbb{I}$ , gli unici autovalori possibili per  $P$  sono  $\pm 1$ .

Per mostrare che le armoniche sferiche sono autofunzioni della parità la maniera più rapida è ricordare che queste ultime sono polinomi omogenei nelle  $x_i$ , e che quindi l'azione della parità semplicemente conta il grado del polinomio:

$$PY_{lm} = (-1)^l Y_{lm} \quad (\text{X.2.6})$$

## Problema X.3

Si consideri l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico in forma adimensionale:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2) \quad (\text{X.3.1})$$

e l'operatore parità definito come

$$P\psi(x) = \psi(-x) \quad (\text{X.3.2})$$

Si esprima  $P$  come funzione di  $H$ .

*Soluzione del Problema*

Chiamiamo  $\psi_n$  le autofunzioni di  $H$  corrispondenti agli autovalori

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{X.3.3})$$

Consideriamo una generica  $\psi = \sum_n c_n \psi_n$  nella base delle  $\psi_n$  e l'azione della parità su di essa:

$$P\psi = \sum_n (-1)^n c_n \psi_n \quad (\text{X.3.4})$$

Dove abbiamo usato il fatto che le  $\psi_n$  sono anche autofunzioni della parità :

$$P\psi_n = (-1)^n \psi_n . \quad (\text{X.3.5})$$

Usando l'espressione esplicita degli autovalori in (X.3.3), la (X.3.5) si può scrivere come:

$$\begin{aligned} P\psi_n &= e^{in\pi} \psi_n = e^{i(E_n - \frac{1}{2})\pi} \psi_n \\ &= e^{i(H - \frac{1}{2})\pi} \psi_n \end{aligned} \quad (\text{X.3.6})$$

Quest'ultima espressione dà la parità in funzione della Hamiltoniana dell'oscillatore armonico.

### Problema X.4

Mostrare che se un sistema di particelle di massa  $m_i$  si trova in un autostato della parità , la posizione del baricentro

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{x}_i \quad (\text{X.4.1})$$

ha valor medio nullo ( $M = \sum_i m_i$ ).

*Soluzione del Problema*

Notiamo che se la funzione d'onda del sistema è autostato della parità P:

$$P\Psi(\vec{x}_i) = \pm\Psi(\vec{x}_i) \quad (\text{X.4.2})$$

il suo modulo quadro  $|\Psi(\vec{x}_i)|^2$  è anch'esso autofunzione di  $P$  con autovalore necessariamente uguale ad 1. Pertanto è una funzione *pari*.

La posizione del baricentro è invece una funzione *dispari* delle  $x_i$ , per cui il suo valor medio

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{M} \sum_i m_i \int \Pi_j dx_j \vec{x}_i |\Psi(\vec{x}_j)|^2 \quad (\text{X.4.3})$$

ha come integrando il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari, ed è quindi nullo.

# Capitolo XI

## Metodi Perturbativi e Variazionali

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

### Problema XI.1

Si consideri l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale in variabili adimensionali perturbato da un termine quartico:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \lambda x^4 = H_0 + \lambda x^4 \quad (\text{XI.1.1})$$

Si trovino le correzioni agli autovalori dell'energia al primo ed al secondo ordine perturbativo.

### Problema XI.2

Si consideri l'Hamiltoniana di un oscillatore armonico unidimensionale in variabili adimensionali "perturbato" da un termine quadratico:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \lambda x^2 = H_0 + \lambda x^2 \quad (\text{XI.2.1})$$

Si trovino le correzioni agli autovalori dell'energia al primo ed al secondo ordine perturbativo e si confronti il risultato con la soluzione esatta.

### Problema XI.3

Usando un metodo variazionale e la funzione di prova

$$\psi = Ae^{-\alpha x^2} \quad (\text{XI.3.1})$$

si dia una stima dell'energia dello stato fondamentale di una particella descritta dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + x^2 + 2x^4) \quad (\text{XI.3.2})$$

Si ricordi che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^{2k} e^{-px^2} = \frac{(2k-1)!!}{(2p)^k} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \quad (\text{XI.3.3})$$

### Problema XI.4

Si consideri l'equazione di Schrödinger per una particella in un potenziale centrale del tipo  $V = V_0 r^n$  con  $n$  intero:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_0 r^n. \quad (\text{XI.4.1})$$

Usando un metodo variazionale e la funzione di prova:

$$\psi(r) = e^{-\beta r} \quad (\text{XI.4.2})$$

si trovino  $\beta$  ed  $E$  dello stato fondamentale come funzione di  $V_0$  e  $n$ .

Per quali valori di  $n$  questo metodo è valido?

#### *Soluzione del Problema*

Dato che il problema è a simmetria centrale, e che consideriamo sia la funzione di prova che l'autofunzione dello stato fondamentale a simmetria sferica, l'equazione agli autovalori da risolvere è :

$$-\hbar m \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - V_0 r^n \right) \psi = E \psi \quad (\text{XI.4.3})$$

Nel metodo variazionale l'energia dello stato fondamentale è il minimo di

$$E(\beta) = \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\| \psi \|^2} \quad (\text{XI.4.4})$$

calcoliamo quindi le varie quantità di interesse.

Per risolvere gli integrali è utile il seguente integrale:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^m dx = \Gamma(m+1) = m! \quad (\text{XI.4.5})$$

★ Anche se non si è familiari con le funzioni  $\Gamma$  questo integrale si può facilmente risolvere per parti se  $m$  è intero.

$$\|\psi\|^2 = 4\pi \int_0^\infty e^{-2\beta r} r^2 dr = \frac{\pi}{\beta^3} \quad (\text{XI.4.6})$$

★ Anche se non esplicitamente detto nella traccia deve essere  $\Re\beta > 0$  perché la  $\psi$  sia a quadrato sommabile.

Proseguendo quindi il calcolo:

$$\langle \psi | V | \psi \rangle = 4\pi V_0 \int_0^\infty e^{-2\beta r} r^{n+2} dr = \frac{\pi v}{\beta^{n+3}} \quad (\text{XI.4.7})$$

dove per semplificare la notazione abbiamo indicato  $v = V_0 \Gamma(n+3)/2^{n+1}$ . Gli altri integrali danno:

$$\begin{aligned} 4\pi \int_0^\infty e^{-\beta x} \frac{2}{r} \left( \frac{d}{dr} e^{-\beta r} \right) r^2 dr &= -\frac{2\pi}{\beta} \\ 4\pi \int_0^\infty e^{-\beta x} \left( \frac{d^2}{dr^2} e^{-\beta r} \right) r^2 dr &= \frac{\pi}{\beta} \end{aligned} \quad (\text{XI.4.8})$$

E quindi

$$E(\beta) = \frac{\hbar^2}{2m} (\beta^2 + v\beta^{-n}) \quad (\text{XI.4.9})$$

Il minimo per  $\beta$  si ottiene ovviamente derivando rispetto a  $\beta$  e sostituendo per il valore in cui si la derivata si annulla:

$$\frac{d}{d\beta} E(\beta) = \frac{\hbar^2}{2m} (2\beta - \frac{nv}{\beta^{n+1}}) \quad (\text{XI.4.10})$$

che si annulla per

$$\beta = \left( \frac{nv}{2} \right)^{\frac{1}{n+2}} \quad (\text{XI.4.11})$$

Sostituendo infine in  $E(\beta)$  otteniamo:

$$E(\beta) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{(nv)^{\frac{2}{2+n}}}{2^{\frac{2}{2+n}}} + \frac{v}{\frac{(nv)^{\frac{1}{2+n}}}{2^{\frac{1}{2+n}} n}} \right) \quad (\text{XI.4.12})$$

Per  $n = 0, -1, -2$ , dalla (XI.4.11) si vede che si avrebbe un valore di  $\Re\beta$  non positivo o non definito. Mentre per  $n < -3$  è la funzione  $\Gamma$  nella (XI.4.5) a non essere definita. In tal caso si dovrà scegliere un'altra funzione di prova.

### Problema XI.5

Una particella con spin 1/2 ha come Hamiltoniana:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.5.1})$$

Usando un metodo variazionale e la funzione di prova

$$\psi = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{XI.5.2})$$

si dia una stima dell'energia dello stato fondamentale, e si faccia un confronto con il risultato esatto

### Problema XI.6

Un sistema quantistico si può trovare (in assenza di perturbazioni) solo in due stati con energia  $E_1$  ed  $E_2$ . Il suo spazio di Hilbert è pertanto bidimensionale.

Supponiamo ora che su di esso agisca una perturbazione descritta dall'operatore:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & v \\ v & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.6.1})$$

con il numero reale  $v \ll |E_1 - E_2|$ .

Se all'istante  $t = 0$  il sistema si trova nello stato con energia  $E_1$ , trovare la probabilità che al generico tempo  $t$  la particella si trovi nello stato caratterizzato dall'autovalore  $E_2$ . Risolvere il problema perturbativamente al primo e al secondo ordine non nullo in  $v/|E_1 - E_2|$ .

#### *Soluzione del Problema*

Nella base che abbiamo scelto per il nostro spazio di Hilbert bidimensionale l'Hamiltoniana non perturbata è la matrice diagonale:

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.6.2})$$

Mentre gli autostati sono

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.6.3})$$

Usando gli autostati di  $H_0$ , rappresentiamo lo stato  $\psi(t)$ , soluzione dell'equazione di Schrödinger completa

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = (H_0 + V) \psi(t) \quad (\text{XI.6.4})$$

nella forma

$$\psi(t) = c_1(t) e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1 + c_2(t) e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2 \quad (\text{XI.6.5})$$

Sostituendo l'espressione (XI.6.5) nell'equazione (XI.6.4) si ottengono le equazioni integrali per i coefficienti  $c_j(t)$

$$c_j(t) = c_j(0) - \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^2 \int_0^t V_{jn} e^{+i(E_j - E_n)t'/\hbar} c_n(t') dt' \quad . \quad (\text{XI.6.6})$$

I moduli quadri dei coefficienti  $c_j$  danno le probabilità cercate.

Adoperando un metodo iterativo nella soluzione delle (XI.6.6) e ricordando che per ipotesi  $c_i(0) = \delta_{i,1}$ , si perviene alla serie perturbativa

$$\begin{aligned} c_i(t) &= \delta_{i,1} - \frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{i1} e^{+i(E_i - E_1)t'/\hbar} dt' \\ &- \frac{1}{\hbar^2} \sum_{m=1}^2 \int_0^t V_{im} e^{+i(E_i - E_m)t'/\hbar} dt' \int_0^{t'} V_{m1} e^{+i(E_m - E_1)t''/\hbar} dt'' + \dots \end{aligned} \quad (\text{XI.6.7})$$

Osservando che la matrice  $V$  ha elementi non nulli solo sulla diagonale secondaria, si ricava che  $c_2(t)$  riceve contributi al primo ordine in  $v$  ma non al secondo, mentre esattamente il contrario avviene per  $c_1$ . L'espressione di  $c_2(t)$  fino a ordine  $O(v^3)$  è

$$\begin{aligned} c_2(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{21} e^{+i(E_2 - E_1)t'/\hbar} dt' \\ &= \frac{v}{(E_2 - E_1)} \left[ 1 - e^{+i(E_2 - E_1)t/\hbar} \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{XI.6.8})$$

Da cui

$$P_2(t) = 4 \frac{v^2}{(E_2 - E_1)^2} \sin^2 \left[ \frac{(E_2 - E_1)t}{2\hbar} \right] \quad . \quad (\text{XI.6.9})$$

Allo stesso modo si ottiene

$$\begin{aligned} c_1(t) &= 1 - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t V_{12} e^{+i(E_1 - E_2)t'/\hbar} dt' \int_0^{t'} V_{21} e^{+i(E_2 - E_1)t''/\hbar} dt'' \\ &= 1 - \frac{v^2}{(E_2 - E_1)^2} \left[ 1 - i \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar} - e^{+i(E_1 - E_2)t/\hbar} \right] \quad . \end{aligned} \quad (\text{XI.6.10})$$

Si noti che  $P_1(t)$  può essere ricavato facilmente dalla condizione di unitarietà

$$P_1(t) = 1 - P_2(t) \quad . \quad (\text{XI.6.11})$$

## Problema XI.7

Nell'Hamiltoniana  $H_0 + \bar{H}$  del problema (VI.15) si assuma  $A \gg B$ . È pertanto possibile trattare  $\bar{H}$  come una perturbazione di  $H_0$ .

Calcolare al primo ordine in  $B/A$  le correzioni agli autovalori di  $H_0$  con  $l = 0, 1, 2$ .

### Soluzione del Problema

I livelli energetici dell'Hamiltoniana non perturbata  $H_0$  sono quelli del rotatore  $E_l = A\hbar^2 l(l+1)$ , con degenerazione  $2l+1$ . La presenza di  $\bar{H}$  rimuoverà (in parte) questa degenerazione. Si tratta quindi di studiare i vari sottospazi *finito dimensionali* corrispondenti ai vari livelli energetici. In questi sottospazi  $\bar{H}$  è una matrice di dimensione  $2l+1$ , i cui autovalori sono le correzioni al livello energetico non perturbato.

Dal fatto che (usando le notazioni del problema (VI.15))  $\bar{H}_{l=0} = 0$  risulta immediatamente che lo stato fondamentale non riceve correzioni perturbative.

Per quanto riguarda il primo stato eccitato ( $l=1$ ), questo è tre volte degenere, corrispondendo agli autovalori  $m = \pm 1, 0$  di  $L_z$ . Dalla (VI.18.11) risulta che, nel sottospazio spazzato dalle armoniche sferiche con  $l=1$ ,  $\bar{H}$  è la seguente matrice:

$$(\bar{H})_{l=1} = -\frac{\hbar B}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.7.1})$$

dove le righe e le colonne della matrice sono ordinate con  $m$  decrescente.

Gli autovalori di questa matrice sono  $0, \pm \hbar B/2$ . Il primo livello eccitato pertanto si divide in tre livelli, uno che rimane inalterato, e due livelli simmetricamente spostati in alto e basso rispetto al livello centrale.

Per il caso  $l=2$  invece:

$$(\bar{H})_{l=2} = -\frac{\hbar B}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (\text{XI.7.2})$$

Gli autovalori di questa matrice sono  $0, \pm \hbar B/2$  e  $\pm \hbar B/\sqrt{12}$ . Il risultato è quindi un pò diverso dal caso precedente, per  $l=2$  infatti, la degenerazione è solo parzialmente eliminata.

★ Per il calcolo degli autostati dell'energia al primo ordine, occorre calcolare anche transizioni dal livello  $l=2$  allo stato fondamentale dato che  $(\bar{H})_{l=2, l=0} \neq 0$ .

## Problema XI.8

Un sistema che consiste di due particelle distinguibili di spin  $1/2$  è immerso in un campo magnetico costante di intensità  $B$ . I momenti magnetici delle due particelle sono  $\mu_1$  e  $\mu_2$  rispettivamente. Le due particelle interagiscono tramite il termine:

$$H_I = \frac{4A}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (\text{XI.8.1})$$

dove  $A$  è una costante.

Si trovino gli autovalori dell'energia esattamente e (come utile confronto) al primo ordine in teoria delle perturbazioni nel caso in cui  $\frac{A}{B\mu_i} \ll 1$  e nel caso  $\frac{A}{B\mu_i} \gg 1$ .

### Problema XI.9

Una particella di spin  $3/2$  è descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & \lambda & 0 & \tau \\ \lambda & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 \\ \tau & 0 & 0 & E_4 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.9.1})$$

Dove gli  $E_i$  sono tutti diversi fra di loro e  $\lambda, \tau \ll E_i$ .

Considerando i termini che contengono  $\lambda$  e  $\tau$  come una perturbazione, si calcolino gli autostati di  $H$  al primo ordine in teoria delle perturbazioni, e gli autovalori di  $H$  al secondo ordine.

#### Soluzione del Problema

Essendo l'hamiltoniana  $H$  una matrice finito dimensionale, i suoi autovalori (esatti) si calcolano risolvendo l'equazione

$$\det \begin{pmatrix} E_1 - E & \lambda & 0 & \tau \\ \lambda & E_2 - E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 - E & 0 \\ \tau & 0 & 0 & E_4 - E \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{XI.9.2})$$

che risulta essere

$$(E - E_3) \times \left[ E^3 - (E_1 + E_2 + E_4)E^2 + (E_1E_2 + E_1E_4 + E_2E_4 - \lambda^2 - \tau^2)E + (E_2\tau^2 + E_4\lambda^2 - E_1E_2E_4) \right] = 0 \quad (\text{XI.9.3})$$

Come si vede dalla relazione precedente, i quattro autovalori dipenderanno da  $\lambda^2$  e  $\tau^2$ , quindi c'è da aspettarsi che i contributi perturbativi ordine  $\lambda$  e  $\tau$  si annullino. Le soluzioni dell'equazione (XI.9.3) possono essere ottenute esplicitamente. Omettiamo la loro espressione per brevità. Si può banalmente osservare però che  $E = E_3$  è una soluzione della (XI.9.3), e quindi tale autovalore ed il corrispondente autovettore non risultano modificati dai termini perturbativi contenuti in  $H$ .

Applicando la teoria delle perturbazioni stazionarie in assenza di degenerazione, gli autovalori dell'energia perturbati,  $\tilde{E}_i$ , fino al secondo ordine, risultano

$$\tilde{E}_i \simeq E_i + H_{ii} + \sum_{m \neq i} \frac{|H_{im}|^2}{E_i - E_m} \quad (\text{XI.9.4})$$

Nel nostro caso si ottiene allora

$$\begin{aligned}\tilde{E}_1 &\simeq E_1 + \frac{\lambda^2}{E_1 - E_2} + \frac{\tau^2}{E_1 - E_4} \\ \tilde{E}_2 &\simeq E_2 - \frac{\lambda^2}{E_1 - E_2} \\ \tilde{E}_3 &= E_3 \\ \tilde{E}_4 &\simeq E_4 - \frac{\tau^2}{E_1 - E_4}\end{aligned}\tag{XI.9.5}$$

Corrispondentemente, per gli autovettori perturbati  $\tilde{\psi}_i$ , fino al primo ordine, otteniamo

$$\tilde{\psi}_i \simeq N_i \psi_i + \sum_{m \neq i} \frac{H_{mi}}{E_i - E_m} \psi_m\tag{XI.9.6}$$

dove  $N_i$  sono opportune costanti di normalizzazione. Nel nostro caso si ottiene allora

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1 &\simeq N_1 \psi_1 + \frac{\lambda}{E_1 - E_2} \psi_2 + \frac{\tau}{E_1 - E_4} \psi_4 \\ \tilde{\psi}_2 &\simeq N_2 \psi_2 - \frac{\lambda}{E_1 - E_2} \psi_1 \\ \tilde{\psi}_3 &= \psi_3 \\ \tilde{\psi}_4 &\simeq N_4 \psi_4 - \frac{\tau}{E_1 - E_4} \psi_1\end{aligned}\tag{XI.9.7}$$

Le costanti  $N_1$ ,  $N_2$  ed  $N_4$  sono fissate richiedendo che i rispettivi vettori perturbati siano normalizzati.

### Problema XI.10

Una particella si muove nell'intervallo di retta  $[-a/2, a/2]$ , con la condizione al contorno che la sua funzione d'onda si annulla agli estremi dell'intervallo (buca infinita), ed è perturbata da un potenziale a scalino:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -\frac{b}{2} \\ v & \text{per } -\frac{b}{2} \leq x \leq +\frac{b}{2} \\ 0 & \text{per } x > \frac{b}{2} \end{cases}\tag{XI.10.1}$$

1. Usando la teoria delle perturbazioni si calcoli l'energia del primo livello. Per quali valori di  $v$  la teoria perturbativa è applicabile?
2. Si consideri il caso di una  $v$  dipendente dal tempo in (XI.10.1):

$$v = v_0 \frac{e^{-t^2/\tau}}{\tau}\tag{XI.10.2}$$

Supponendo che a  $t \rightarrow -\infty$  la particella si trovi nello stato fondamentale della teoria non perturbata, si trovi gli autostati (sempre della teoria non perturbata) per cui *non* c'è transizione per  $t \rightarrow \infty$ .

### Problema XI.11

Una particella di massa  $m$  si muove in una dimensione nel potenziale  $V(x)$  che è non singolare, ma altrimenti arbitrario.

Usando le funzioni di prova normalizzate

$$\psi = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \exp\{-\alpha x^2\} \quad (\text{XI.11.1})$$

si ottenga un limite superiore all'energia dello stato fondamentale in termini di un integrale con  $V(x)$ .

Variando  $\alpha$  si ottimizzi il risultato precedente, e si dimostri che l'energia dello stato fondamentale è negativa. Si discuta inoltre il significato fisico di quest'ultimo risultato.

### Problema XI.12

Si consideri l'equazione di Schrödinger:

$$-\hbar m \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \int V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' = E \psi(\vec{r}) \quad (\text{XI.12.1})$$

con il potenziale non locale:

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = \hbar m \lambda u(r) u(r') \quad (\text{XI.12.2})$$

con  $r$  e  $r'$  i moduli dei vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ .

1. Mostrare che solo l'onda  $S$  è interessata dall'interazione.
2. Stabilire la forma dell'equazione integrale che corrisponde all'equazione di Schrödinger e alle condizioni al contorno.
3. Data la forma speciale di  $V(r, r')$  l'equazione integrale l'equazione integrale di cui sopra può essere ridotta a una equazione algebrica. Usando questo fatto mostrare che l'ampiezza di scattering per il momento incidente  $\hbar k$  è :

$$f(k) = \frac{4\pi\lambda |v(k)|^2}{1 + \frac{2\lambda}{\pi} \int d^3 q \frac{|v(q)|^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon}} \quad (\text{XI.12.3})$$

con

$$v(k) = \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} u(r) r^2 dr \quad (\text{XI.12.4})$$

e dove con il termine  $i\epsilon$  nel denominatore dell'integrale della (XI.12.3) indichiamo l'usuale prescrizione per la soluzione dell'integrale nel piano complesso.

4. Si compari questa espressione con la serie di Born.

Soluzione del Problema

1. Per mostrare che solo l'onda  $S$  è interessata all'interazione, consideriamo per prima cosa l'espansione della funzione d'onda in armoniche sferiche:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{lm} R_{lm}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{XI.12.5})$$

Con questa espansione possiamo scrivere il termine di interazione come:

$$\begin{aligned} \int V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' &= \frac{\hbar^2}{2m} \lambda u(r) \sum_{lm} \int u(r') r'^2 R_{lm}(r') dr' \int d\Omega' Y_l^m \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \lambda \sqrt{4\pi} u(r) \int u(r') r'^2 R_{00}(r') dr' \end{aligned} \quad (\text{XI.12.6})$$

dove abbiamo usato il fatto che l'integrale su tutto l'angolo solido di una armonica sferica è zero tranne che per  $Y_{00}$ .

2. Esprimendo il termine di interazione come funzionale della funzione d'onda la (XI.12.1) diventa:

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' = F(\psi) = (\nabla^2 + k^2) \psi \quad (\text{XI.12.7})$$

e la possiamo riscrivere come equazione integrale:

$$\psi = e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} - \frac{1}{4\pi} \int G(\vec{r}, \vec{r}') F(\psi) d^3 r' \quad (\text{XI.12.8})$$

dove l'esponenziale è la soluzione dell'equazione omogenea associata, e  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  la funzione di Green del problema,  $(\nabla^2 + k^2)G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ . La soluzione per la funzione di Green è :

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int d^3 q \frac{e^{i\vec{q}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{k^2 - q^2 + 1\epsilon} \quad (\text{XI.12.9})$$

3. Definendo, per semplificare le notazioni:

$$\begin{aligned} U(\psi) &= \int u(r') \psi(\vec{r}') d^3 r' \\ A(r) &= \frac{\lambda}{4\pi} \int G(\vec{r}, \vec{r}') u(r') d^3 r' \end{aligned} \quad (\text{XI.12.10})$$

risulta che:

$$\psi(x) = \phi_{\vec{k}} + A(r)U(\psi) \quad (\text{XI.12.11})$$

con  $\phi$  l'onda piana incidente. Iterando la (XI.12.11):

$$U(\psi) = U(\phi) - U(A(r)U(\psi)) = U(\phi) - U(\psi) \int u(q)A(q)d^3 q \quad (\text{XI.12.12})$$

questa relazione può essere invertita dando

$$U(\psi) = \frac{U(\phi)}{1 + \frac{\lambda}{4\pi} \int u(q)A(q)d^3q} \quad (\text{XI.12.13})$$

Il secondo membro non dipende da  $\psi$  e pertanto abbiamo la soluzione *esatta* del problema:

$$\psi = \phi + \frac{AU(\phi)}{1 + \frac{\lambda}{4\pi} \int u(q)A(q)d^3q} \quad (\text{XI.12.14})$$

E' possibile esprimere questa espressione in una forma più familiare facendo uso dell'espansione asintotica:

$$\begin{aligned} A(r)U(\phi) &= \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}''}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} u(r'')d^3r'' \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}}{(4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|)} u(r')d^3r' \\ &\simeq \frac{\lambda}{4\pi(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{ikr}}{r} \left| \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} u(r')d^3r' \right|^2 \end{aligned} \quad (\text{XI.12.15})$$

Usando ora il fatto che

$$\begin{aligned} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} u(r')r'^2 drd(\cos\theta)d\varphi &= 2\pi \int u(r')r'^2 dr' \int_{-1}^1 e^{ikr' \cos\theta} d(\cos\theta) \\ &= 2\pi \int \frac{r'^2 u(r')}{ikr'} (e^{ikr'} - e^{-ikr'}) dr' \\ &= 4\pi \int \frac{r'^2 u(r')}{kr'} \sin kr' dr' \end{aligned} \quad (\text{XI.12.16})$$

ovvero

$$A(r)U(\phi) \simeq \frac{4\pi}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{ikr}}{r} v(k) \quad (\text{XI.12.17})$$

mentre

$$\begin{aligned} \int u(r)A(r)d^3r &= \frac{\lambda}{4\pi} \int u(r)d^3r \int G(\vec{r}, \vec{r}') u(r')d^3r' \\ &= \frac{\lambda}{4\pi} \int d^3r d^3r' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} u(r)u(r') \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'}}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \\ &= \frac{2\lambda}{\pi} \int \frac{|v(q)|^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \end{aligned} \quad (\text{XI.12.18})$$

che asintoticamente da':

$$\psi(\vec{r}) = \phi_k(\vec{r}) + \phi_k(\vec{r}) \frac{4\pi\lambda|v(k)|^2}{1 + \frac{2\lambda}{\pi} \int d^3q \frac{v(q)}{k^2 - q^2 + i\epsilon}} \quad (\text{XI.12.19})$$

4. Iterando la soluzione:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \phi(\vec{r}) + U(\psi)A(r) \\ &= \phi(\vec{r}) + U(\phi)A(r) + U(\psi)U(A)A(r) \\ &= \phi(\vec{r}) + \sum_n U(\phi)U(A)^n A(r) \\ &= \phi(\vec{r}) + U(\phi)A(r) \sum_n \frac{\lambda^n}{(4\pi)^n} \left( \int u(r')G(r', r'')u(r'')d^3r'd^3r'' \right)^n A(r) \end{aligned} \quad (\text{XI.12.20})$$

e questa si riconosce essere l'espansione in serie di Taylor di:

$$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \frac{U(\phi)A(r)}{1 + \frac{\lambda}{4\pi} \int u(r')G(r', r'')u(r'')d^3r'd^3r''} \quad (\text{XI.12.21})$$

e possiamo quindi concludere che la serie di Born altro non è che l'espansione di Taylor della soluzione esatta.

### Problema XI.13

Considerare per un sistema di elettroni in un atomo gli operatori  $\vec{L}$ ,  $\vec{S}$  e  $\vec{J}$ , ed uno stato diagonale in  $J^2, L^2, S^2$  e  $J_x$ , di cui si assumono noti i valori di aspettazione.

Si consideri poi la perturbazione

$$H_1 = \lambda(L_x + \alpha S_x) \quad (\text{XI.13.1})$$

Si trovi lo shift dell'energia dello stato al primo ordine in teoria delle perturbazioni.

*Soluzione del Problema*

Usiamo il teorema di Wigner–Eckart relativo ai valori di aspettazione degli operatori vettoriali:

$$\langle A_i \rangle = \frac{\langle J_i \vec{J} \cdot \vec{A} \rangle}{\langle J^2 \rangle} \quad (\text{XI.13.2})$$

Dove ovviamente  $\langle \rangle$  si riferisce al valore di aspettazione per lo stato in questione.

Per il nostro problema lo shift di energia

$$\Delta E = \langle H_1 \rangle \quad (\text{XI.13.3})$$

Notiamo le seguenti utili identità :

$$\begin{aligned} \vec{L} \cdot \vec{J} &= L^2 + \vec{L} \cdot \vec{S} \\ \vec{L} \cdot \vec{S} &= L_x S_x + L_+ S_- + L_- S_+ \\ \vec{S} \cdot \vec{J} &= S^2 + L_x S_x + L_+ S_- + L_- S_+ \\ \vec{L} \cdot \vec{S} &= \frac{J^2 - L^2 - S^2}{2} \end{aligned}$$

Ora possiamo calcolare, il primo termine della perturbazione è :

$$\begin{aligned} \lambda \langle L_x \rangle &= \frac{\lambda \langle L_x \vec{L} \cdot \vec{J} \rangle}{\langle J^2 \rangle} \\ &= \lambda \frac{\langle J_x \rangle}{\langle J^2 \rangle} \left( \frac{\langle L^2 \rangle + \langle J^2 \rangle - \langle S^2 \rangle}{2} \right) \end{aligned}$$

e il secondo termine è :

$$\begin{aligned}\lambda\alpha\langle S_x \rangle &= \frac{\lambda\alpha\langle S_x \vec{S} \cdot \vec{J} \rangle}{\langle J^2 \rangle} \\ &= \lambda\alpha \frac{\langle J_x \rangle}{\langle J^2 \rangle} \left( \frac{\langle S^2 \rangle + \langle J^2 \rangle - \langle L^2 \rangle}{2} \right)\end{aligned}$$

E pertanto

$$\langle H_1 \rangle = \lambda \frac{\langle J_x \rangle}{2\langle J^2 \rangle} \left( (\alpha + 1)\langle J^2 \rangle + (1 - \alpha)(\langle L^2 \rangle - \langle S^2 \rangle) \right) \quad (\text{XI.13.4})$$

### Problema XI.14

Una particella di spin  $1/2$  e momento magnetico  $\mu$  si trova in un campo magnetico di intensità  $B$  diretto lungo l'asse  $z$ . È anche presente un potenziale "perturbativo" lungo l'asse  $x$  di intensità  $b \ll B$ .

Si trovino gli autovalori dell'Hamiltoniana al primo livello in teoria delle perturbazioni indipendenti dal tempo e si confronti il risultato con il risultato esatto.

### Problema XI.15

Sono dati due rotatori piani di momento di inerzia identico accoppiati fra di loro, la cui dinamica è descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = H_0 + \lambda \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{XI.15.1})$$

dove con  $H_0$  abbiamo indicato l'Hamiltoniana libera.

Trovare:

1. Gli autostati e gli autovalori nel caso  $\lambda = 0$ . Si discuta in particolare la degenerazione dei primi stati eccitati.
2. Gli elementi di matrice di  $V$  fra due autostati arbitrari di  $H_0$ .
3. Considerando il livello fondamentale ed il 1° livello eccitato di  $H_0$  si trovino, al primo ordine in  $\lambda$ , le correzioni agli autovalori dell'energia. La degenerazione è rimossa totalmente?

*Soluzione del Problema*

Troviamo dapprima gli autostati nel caso  $\lambda = 0$ . In questo caso

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2I} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} \right) \quad (\text{XI.15.2})$$

si tratta di due rotatori piani che hanno come autofunzioni  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{in\varphi_i\}$  e come autovalori  $\hbar^2 n^2 / (2I)$ . Pertanto le autofunzioni sono

$$\psi_{n_1 n_2} = \frac{1}{2\pi} \exp\{in_1 \varphi_1 + in_2 \varphi_2\} \quad (\text{XI.15.3})$$

con  $n_i \in \mathbb{Z}$  e gli autovalori dell'Hamiltoniana sono

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\hbar^2}{2I} (n_1^2 + n_2^2) \quad (\text{XI.15.4})$$

In generale gli stati con gli  $n_i$  entrambi differenti fra di loro da zero sono degeneri almeno 8 volte per i seguenti scambi:

$$\begin{aligned} n_1 &\leftrightarrow n_2 \\ n_1 &\leftrightarrow -n_1 \\ n_2 &\leftrightarrow -n_2 \end{aligned} \quad (\text{XI.15.5})$$

Se uno degli  $n_i$  è zero, o se i due  $n_i$  sono uguali allora la degenerazione, *nel caso generico* si riduce. Ci sono poi degenerazione *accidentali* corrispondenti per ai numeri Pitagorici, cioè ai lati dei triangoli rettangoli che hanno i tre lati interi, per esempio 3, 4 e 5. In tal caso  $3^2 + 4^2 = 5^2 + 0^2$  e questo stato ha degenerazione 12. Trovarli tutti è un problema abbastanza difficile di teoria dei numeri che esula dagli scopi di questo libro.

Per quanto riguarda i primi tre stati le loro degenerazioni sono

$$\begin{aligned} E_0 &= 0 \quad \rightarrow 1 \\ E_1 &= \frac{\hbar^2}{2I} \quad \rightarrow 4 \\ E_2 &= 2\frac{\hbar^2}{2I} \quad \rightarrow 8 \end{aligned} \quad (\text{XI.15.6})$$

Calcoliamo ora gli elementi di matrice  $V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}$ :

$$V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2} \equiv \frac{\lambda}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 e^{i(n_1 - n'_1)\varphi_1 + i(n_2 - n'_2)\varphi_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{XI.15.7})$$

Il calcolo esplicito dell'integrale è lasciato come esercizio.

★ *Gli integrali che coinvolgono prodotti di esponenziali e funzioni trigonometriche sono sempre risolvibili esattamente!*

Si ottiene:

$$V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2} = \frac{\lambda}{2} [\delta_{n_1, n'_1-1} \delta_{n_2, n'_2+1} + \delta_{n_1, n'_1+1} \delta_{n_2, n'_2-1}] \quad (\text{XI.15.8})$$

Notiamo che lo stato fondamentale che ha  $n_1 = n_2 = 0$  è non degenere e al 1° ordine non risente della perturbazione in quanto  $V_{0000} = 0$ . Consideriamo ora il primo stato eccitato con  $E_1 = \frac{\hbar^2}{2I}$ , la cui degenerazione è quattro, e una base del sottospazio corrispondente è data da:  $\psi_{10}, \psi_{-10}, \psi_{01}, \psi_{0-1}$ .

In questo sottospazio  $V$  è una matrice  $4 \times 4$ . Rappresentando la suddetta base con i vettori:

$$\psi_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{-10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{0-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{XI.15.9})$$

la matrice corrispondente a  $V$  è :

$$V = \frac{\lambda}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.15.10})$$

Risolvendo il determinante secolare

$$\det(V - \varepsilon) = \left( \frac{\lambda^2}{4} - \varepsilon^2 \right)^2 = 0 \quad (\text{XI.15.11})$$

otteniamo come autovalori  $\pm \lambda/2$  con degenerazione due.

Pertanto il primo livello eccitato (4 stati) si separa in due livelli doppiamente degeneri, che ricevono uno stesso contributo energetico ma di segno opposto.

## Problema XI.16

Un sistema di due rotatori piani è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = p_{\varphi_1}^2 + p_{\varphi_2}^2 + V \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (\text{XI.16.1})$$

dove gli  $p_{\varphi_i}$  sono i momenti coniugati alle  $\varphi_i$  e  $V$  è una costante.

Trovare gli autovalori di  $H$  al primo ordine in teoria delle perturbazioni e discutere quante delle degenerazioni del caso  $V = 0$  sono rimosse.

### Problema XI.17

Una particella in una buca infinita unidimensionale, che si trova nello stato fondamentale, viene soggetta per un intervallo di tempo  $\Delta$  a una forza costante.

Calcolare al primo ordine perturbativo non nullo la probabilità di transizione al 2° livello eccitato dopo un tempo  $t > \Delta$ . Determinare il contributo dominante nel caso  $\Delta = \hbar/8E_0$ , dove  $E_0$  è l'energia dello stato fondamentale.

#### Soluzione del Problema

Una forza costante diretta lungo l'asse delle  $x$  positive ha come potenziale che la genera  $V(x) = -Fx$ , tale potenziale agisce però solo nell'intervallo di tempo  $[0, \Delta]$ .

Si scelga per semplicità una buca infinita simmetrica con  $x \in [-a, a]$ . In questo caso gli autovalori dell'energia sono  $E_n = \hbar^2 n^2 \pi^2 / (8ma^2)$  con  $n = 1, 2, \dots$  e gli autovettori corrispondenti

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{cases} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & n \text{ dispari} \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & n \text{ pari} \end{cases} \quad (\text{XI.17.1})$$

In questa base, il lo stato fondamentale è  $\psi_1$  ed il secondo stato eccitato è  $\psi_3$ .

Dalla teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, l'ampiezza di probabilità della transizione  $1 \rightarrow 3$  ad un istante  $t > \Delta$ , al primo ordine perturbativo, è

$$\begin{aligned} c_3^{(1)}(t) &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{3,1}(t') \exp\left\{i\frac{(E_3 - E_1)t'}{\hbar}\right\} dt' \\ &= -\frac{i}{\hbar} \int_0^\Delta V_{3,1} \exp\left\{i\frac{(E_3 - E_1)t'}{\hbar}\right\} dt' \quad (\text{XI.17.2}) \end{aligned}$$

Essendo però, gli stati 1 e 3 funzioni pari di  $x$ , ne consegue che  $V_{3,1} = 0$ . Il primo contributo perturbativo diverso da zero è dunque dato dal secondo ordine. A questo ordine dello sviluppo si ha

$$c_3^{(2)}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^\Delta V_{3,2p} e^{i\frac{(E_3 - E_{2p})t'}{\hbar}} dt' \int_0^{t'} V_{2p,1} e^{i\frac{(E_{2p} - E_1)t''}{\hbar}} dt'' \quad (\text{XI.17.3})$$

Dalle espressioni degli autostati e del potenziale è facile verificare che

$$V_{2p,3} = -\frac{96Fa}{\pi^2} (-1)^p \frac{p}{(4p^2 - 9)^2} \quad (\text{XI.17.4})$$

$$V_{2p,1} = +\frac{32Fa}{\pi^2} (-1)^p \frac{p}{(4p^2 - 1)^2} \quad (\text{XI.17.5})$$

Da cui, sostituendo nell'espressione per  $c_3^{(2)}(t)$  si ha

$$\begin{aligned} c_3^{(2)}(t) &= -i \frac{24576}{\hbar^3 \pi^6} m F^2 a^4 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2}{(4p^2 - 1)^3 (4p^2 - 9)^2} \int_0^\Delta dt' \\ &\times \left[ \exp\left\{i\frac{(E_3 - E_1)t'}{\hbar}\right\} - \exp\left\{i\frac{(E_3 - E_{2p})t'}{\hbar}\right\} \right] \quad (\text{XI.17.6}) \end{aligned}$$

La probabilità della transizione  $1 \implies 3$  si ottiene dalla precedente espressione facendone il modulo quadro.

Nel caso  $\Delta = h/8E_0$ , conviene allora riscrivere la precedente espressione nella forma

$$\begin{aligned} c_3^{(2)}(t) &= +i \frac{24576}{\hbar^4 \pi^8} m^2 F^2 a^6 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2}{(4p^2 - 1)^3 (4p^2 - 9)^2} \int_0^{2\pi} dz \exp \left\{ -i \frac{(4p^2 - 9)}{8} z \right\} \\ &= \frac{196608}{\hbar^4 \pi^8} m^2 F^2 a^6 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2}{(4p^2 - 1)^3 (4p^2 - 9)^3} \left[ 1 - \exp \left\{ -i \frac{(4p^2 - 9)\pi}{4} \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{XI.17.7})$$

Il contributo principale sarà allora quello per  $p = 1$ , ovvero

$$c_3^{(2)}(t) \approx -\frac{65536}{1125 \hbar^4 \pi^8} m^2 F^2 a^6 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{XI.17.8})$$

### Problema XI.18

Descrivendo il protone dell'atomo di H come una distribuzione sferica uniforme di carica di raggio R (nella quale l'elettrone puntiforme può muoversi) si valuti al 1° ordine perturbativo la variazione di energia degli stati con numero quantico principale  $n=1$  e  $n=2$  rispetto al caso del protone puntiforme con Hamiltoniana  $H = p^2/2m - e^2/r$

### Problema XI.19

Un oscillatore armonico unidimensionale di carica elettrica  $q$  è soggetto a un campo elettrico uniforme e dipendente dal tempo:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-(t/\tau)^2} \quad (\text{XI.19.1})$$

Se a  $t = -\infty$  l'O.A. si trovava nello stato fondamentale si calcoli al 2° ordine perturbativo la probabilità di trovarlo nel 1° livello eccitato per  $t \rightarrow +\infty$ .

### Problema XI.20

In opportune unità di misura (con  $\hbar = 1$ ) la dinamica di una particella è descritta dall'hamiltoniana:

$$H = A^\dagger A \quad (\text{XI.20.1})$$

dove  $A = F(x) + ip$  e  $F(x) = x(1 - gx)$ .

Si determini il segno dell'energia dello stato fondamentale del sistema e si calcolino perturbativamente in  $g$  i contributi a tale energia fino all'ordine  $g^2$  incluso.

Soluzione del Problema

Sia

$$A = F + ip = \frac{d}{dx} + F(x) \quad \Leftrightarrow \quad A^\dagger = F - ip = -\frac{d}{dx} + F(x) \quad , \quad (\text{XI.20.2})$$

e

$$H = A^\dagger A = p^2 + F^2 - F' \quad (\text{XI.20.3})$$

Essendo  $H = A^\dagger A$  è definito positivo e quindi i suoi autovalori saranno  $\geq 0$ . Ne consegue dunque, che anche l'energia dello stato fondamentale  $E_0 \geq 0$  e che  $E_0 = 0 \Leftrightarrow \exists \psi_0$  normalizzabile tale che

$$A \psi_0 = 0 \quad \Leftrightarrow \psi_0(x) = N \exp\{-W(x)\} \quad (\text{XI.20.4})$$

dove  $W' = F$ , e  $\psi_0 \in \mathcal{L}^2$  se  $W(x) \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Nel nostro caso:  $F(x) = x(1 - gx) \Leftrightarrow W(x) = (x^2/2 - gx^3/3)$ .

Poichè  $W(x)$  diverge con segno opposto a  $\pm\infty$  in questo caso **non esistono** stati normalizzabili di energia nulla  $\Rightarrow E_0 > 0$ .

Calcolo perturbativo

Essendo  $F' = 1 - 2gx$  si ha:

$$H = p^2 + x^2 - 1 + 2gx - 2gx^3 + g^2x^4 \quad (\text{XI.20.5})$$

Per  $g = 0$  si ha:  $H = H_0 = p^2 + x^2 - 1 \Rightarrow E_n^0 = 2n$

In particolare lo stato fondamentale imperturbato ha energia nulla.

Per  $g \neq 0$  si ha  $H = H_0 + V_1(x)$  con  $V_1(x) = 2g(x - x^3) + g^2x^4$

Perturbativamente in  $g$ :  $E_0^0 \rightarrow E_0 = E_0^0 + g\delta_1 + g^2\delta_2 + \dots$

Indicando con  $|n\rangle$  la base imperturbata di  $H_0$  si ha:  $\delta_1 = 2 \langle 0|(x - x^3)|0\rangle = 0$  per ovvi motivi di parità .

$\Rightarrow$ : non si ha correzione perturbativa di  $O(g)$

mentre:

$$\delta_2 = \langle 0|x^4|0\rangle - 4 \sum_{m \neq 0} \frac{|\langle m|(x - x^3)|0\rangle|^2}{E_m^0 - E_0^0} \quad (\text{XI.20.6})$$

Per lo stato fondamentale, ricordando che  $x = 1/\sqrt{2}(a + a^\dagger)$  si trova:

$$\begin{aligned} \langle 0|x^4|0\rangle &= \sum_n \langle 0|x^2|n\rangle \langle n|x^2|0\rangle = \frac{1}{4} \sum_n |\langle 0|(a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger + a^{\dagger 2})|n\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} \{ \langle 0|a a^\dagger|0\rangle^2 + \langle 0|a^2|2\rangle^2 \} = \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (\text{XI.20.7})$$

$$\sum_{m \neq 0} \frac{|\langle m|(x - x^3)|0\rangle|^2}{E_m^0 - E_0^0} = \frac{1}{2} \left( \langle 1|(x - x^3)|0\rangle^2 + \frac{1}{3} \langle 3|x^3|0\rangle^2 \right) \quad (\text{XI.20.8})$$

Poichè  $\langle 1|(a + a^\dagger)|0 \rangle = 1$ , usando

$$\begin{aligned} \langle 1|(a^2 + a^\dagger a + a a^\dagger + a^{\dagger 2})(a^\dagger + a)|0 \rangle &= \langle 1|(2a^\dagger a + 1)|1 \rangle = 3 \\ \langle 3|(a + a^\dagger)^3|0 \rangle &= \langle 3|a^{\dagger 3}|0 \rangle = \sqrt{6} \end{aligned} \quad (\text{XI.20.9})$$

si ottiene:

$$\sum_{m \neq 0} \frac{|\langle m|(x - x^3)|0 \rangle|^2}{E_m^0 - E_0^0} = \frac{3}{16} \quad (\text{XI.20.10})$$

Pertanto:

$$\delta_2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \quad (\text{XI.20.11})$$

$\Rightarrow$  anche all'ordine  $g^2$  **non si hanno correzioni perturbative** all'energia del "vuoto".

Si può dimostrare che le correzioni perturbative sono nulle a tutti gli ordini anche se  $E_{min} > 0$ .

### Problema XI.21

Usando la teoria delle perturbazioni, calcolare la correzione al primo ordine non nullo in  $g$  all'energia della hamiltoniana per  $l = 1$

$$H = H_0 + V \quad H_0 = AL^2 + BL_z \quad V = gBL_x \quad (\text{XI.21.1})$$

dove  $A, B, g$  sono costanti e  $\vec{L}$  è l'operatore momento angolare.

Si calcolino gli autovalori della hamiltoniana  $H$  in maniera esatta e si confrontino questi risultati con il calcolo perturbativo.

### Problema XI.22

Si consideri un oscillatore armonico relativistico, ovvero una particella descritta dall'Hamiltoniana:

$$H = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} + \frac{1}{2}kx^2. \quad (\text{XI.22.1})$$

Considerando gli effetti relativistici come una perturbazione, si calcoli la correzione ai livelli energetici al primo ordine perturbativo non nullo.

### Problema XI.23

Si consideri un atomo di idrogeno perturbato dal potenziale:

$$H_I = \lambda \frac{e^{-r\beta}}{r^2} \quad (\text{XI.23.1})$$

Si calcoli la variazione dell'energia dello stato fondamentale al primo ordine e si discuta della validità della approssimazione. L'autofunzione dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno è :

$$\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^3}} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{r}{r_0}} \quad (\text{XI.23.2})$$

### Problema XI.24

Si consideri un atomo di idrogeno perturbato dal potenziale:

$$H_I = \lambda \epsilon \frac{r_0^2 e^{-\frac{13r}{2r_0}}}{r^2}$$

Si calcoli la probabilità di transizione al tempo  $t$  dallo stato fondamentale al primo stato eccitato.

Per vostra informazione gli autovalori dell'atomo di idrogeno sono  $E_n = \frac{\epsilon}{n^2}$  mentre le rilevanti autofunzioni sono:

$$\begin{aligned} \Psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} & \Psi_{200} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0^3}} \left(2 - \frac{r}{r_0}\right) e^{-\frac{r}{2r_0}} \\ \Psi_{21\pm 1} &= -\frac{1}{8\sqrt{\pi r_0^3}} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{r}{2r_0}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} & \Psi_{210} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0^3}} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{r}{2r_0}} \cos \theta \end{aligned}$$

### Problema XI.25

Si consideri una particella costretta nell'intervallo  $[0, a]$  con condizioni al contorno tipo buca di potenziale infinita, in presenza del potenziale:

$$V = \lambda \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)$$

Si discuta per quali valori di  $\lambda$  il problema si può trattare perturbativamente e si trovino gli autovalori dell'energia al primo ed al secondo ordine in  $\lambda$ .

### Problema XI.26

L'Hamiltoniana di un sistema quantistico si scrive

$$H = H_0 + H_1 = A \vec{L}^2 + \epsilon L_x \tag{XI.26.1}$$

dove  $A$  è una costante dimensionale e  $\vec{L}$  è l'operatore momento angolare. Il parametro  $\epsilon$  è sufficientemente piccolo da giustificare l'uso di un metodo perturbativo al primo ordine.

1. Calcolare al primo ordine perturbativo non nullo le correzioni all'autovalore di  $H_0$  corrispondente allo stato  $l = 1, m_z = 0$ .
2. Se al tempo  $t = 0$  il sistema si trova nell'autostato caratterizzato da  $l = 1, m_z = 0$ , calcolare all'ordine  $\epsilon$  la probabilità che al generico tempo  $t$  il sistema sia nello stato con  $l = 1, m_z = 1$ .

## Problema XI.27

Si consideri la Hamiltoniana di un atomo di idrogeno perturbata da un altro termine:

$$H = H_0 + H_1$$

E si considerino i casi in cui

$$H_1 = \varepsilon r \quad (\text{XI.27.1})$$

$$H_1 = \varepsilon r^2 \quad (\text{XI.27.2})$$

$$H_1 = \varepsilon r^3 \quad (\text{XI.27.3})$$

1. Si calcolino al primo ed al secondo ordine in  $\varepsilon$  le correzioni all'energia dello stato fondamentale, tenendo conto, nella serie perturbativa, dei soli contributi del primo stato eccitato.
2. Nella correzione all'ordine  $\varepsilon^2$ , nella serie, quali stati danno un contributo non nullo?

Le rilevanti autofunzioni sono:

$$\begin{aligned} \Psi_{100} &= \frac{2}{\sqrt{r_0^3}} e^{-\frac{r}{r_0}} Y_{00} & \Psi_{200} &= \frac{1}{\sqrt{2r_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2r_0}\right) e^{-\frac{r}{2r_0}} Y_{00} \\ \Psi_{21\pm 1} &= \frac{1}{24\sqrt{r_0^3}} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{r}{2r_0}} Y_{1\pm 1} & \Psi_{210} &= \frac{1}{24\sqrt{r_0^3}} \frac{r}{r_0} e^{-\frac{r}{2r_0}} Y_{10} \end{aligned} \quad (\text{XI.27.4})$$

mentre le armoniche sferiche rilevanti sono:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \quad (\text{XI.27.5})$$

## Problema XI.28

Una particella di massa  $m$ , sottoposta ad un potenziale armonico tridimensionale, si trova al tempo  $t = 0$  nello stato  $|100\rangle$ . Si consideri la particella sottoposta, per un intervallo di tempo  $T$  sufficiente,mente piccolo perché la teoria perturbativa sia applicabile, alla perturbazione

$$V(t) = \varepsilon x \cos \alpha t \quad 0 \leq t \leq T; \quad V(t) = 0 \quad t > T, t < 0 \quad (\text{XI.28.1})$$

- a) Calcolare a  $t = 0$  il valor medio  $\langle V \rangle$ .
- b) Calcolare, al primo ordine perturbativo la probabilità che una misura di energia al tempo  $t = 2T$  dia il valore  $E_0$ .

## Problema XI.29

Una particella, costretta in una buca unidimensionale a pareti infinite ( $0 \leq x \leq L$ ), si trova nello stato fondamentale al tempo  $t = 0$  ed è perturbata dal potenziale:

$$V(x) = \varepsilon t(t - T) \sin \pi x / L \quad (0 \leq t \leq T)$$

con  $T$  reale positivo e  $V(x) = 0$  per  $t > T$  e  $t < 0$ . Si calcoli al primo ordine la probabilità che a  $t = +\infty$  la particella si trovi nel primo stato eccitato.

## Problema XI.30

Una particella di spin 1 in un campo magnetico di intensità  $B$  lungo l'asse  $z$  si trova al tempo  $t = 0$  nell'autostato dell'energia di autovalore  $B\hbar$ . A questo punto essa è perturbata da una perturbazione costante descritta da

$$H_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si calcolino al primo ordine perturbativo:

- a) La variazione dell'energia della particella di  $H$  dovuta alla perturbazione.
- b) La probabilità di transizione allo stato di autovalore  $-B\hbar$  ad un generico tempo  $T$ .

*Problemi di Meccanica Quantistica*

# Capitolo XII

Diffusione

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

### Problema XII.1

L'espansione in onde parziali per l'ampiezza di diffusione (scattering)  $f_k(\theta)$  di una particella in un potenziale centrale reale è :

$$f_k(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta) \quad (\text{XII.1.1})$$

dove gli  $P_l$  sono i polinomi di Legendre e

$$a_l = e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (\text{XII.1.2})$$

con  $\delta_l$  gli sfasamenti parziali.

Derivare da questa espressione il teorema ottico che collega la sezione d'urto totale all'espansione in onde parziali:

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f_k(0) . \quad (\text{XII.1.3})$$

#### Soluzione del Problema

Dalla definizione stessa di onde parziali si ha

$$\frac{d\sigma(k, \Omega)}{d\Omega} = |f_k(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \sum_{l,l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) a_l^* a_{l'} (2l+1)(2l'+1) \quad (\text{XII.1.4})$$

per cui

$$\sigma(k) = \int d\sigma = \frac{2\pi}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l,l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) a_l^* a_{l'} (2l+1)(2l'+1) \sin \theta d\theta \quad (\text{XII.1.5})$$

★ In questo caso è possibile scambiare la somma infinita e l'integrale. Perché?

Ora usando la relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre:

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} \quad (\text{XII.1.6})$$

si ottiene:

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (\text{XII.1.7})$$

★ Non si confonda lo shift parziale  $\delta_l$  con il simbolo di Kronecker  $\delta_{ll'}$ !

D'altro canto, ricordando che i polinomi di Legendre sono normalizzati in maniera tale da valere 1 se calcolati nell'unità :

$$\text{Im} f_k(0) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \text{Im} a_l = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l . \quad (\text{XII.1.8})$$

### Problema XII.2

Un insieme di particelle con energia  $E > 0$ , incide in condizioni stazionarie e con momento angolare nullo rispetto all'origine, su un potenziale centrale  $V(r)$  che vale

$$V(r) = \begin{cases} -U < 0 & 0 < r < a \\ V_0 > E & a \leq r < b \\ 0 & r \geq b \end{cases} \quad (\text{XII.2.1})$$

Determinare la probabilità di trovare una particella nella regione  $r < a$  per unità di flusso incidente attraverso una superficie sferica.

### Problema XII.3

Mostrare che per un potenziale centrale a simmetria sferica  $V(r)$  l'ampiezza di scattering nell'approssimazione di Born è data da:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{2m}{\kappa \hbar^2} \int_0^\infty V(r) r \sin \kappa r dr \quad (\text{XII.3.1})$$

dove  $\vec{\kappa} = \vec{k} - \vec{k}'$ , con  $\vec{k}$  e  $\vec{k}'$  i momenti della particella incidente e quella diffusa rispettivamente, di modo che  $\theta$  è l'angolo fra questi due vettori.

### Problema XII.4

Si calcoli la sezione d'urto di assorbimento e di diffusione per particelle nonrelativiste da parte di un disco che assorbe tutte le particelle che vi incidono, assumendo che il raggio  $R$  del disco sia maggiore della lunghezza di de Broglie delle particelle incidenti.

Si compari il risultato con il caso classico.

### Problema XII.5

Una particella di massa  $m$ , energia  $E$  e spin zero è diffusa da un potenziale centrale conservativo.

Sapendo che c'è diffusione solo quando il momento angolare ha autovalore  $l(l+1)$  con  $l \leq l_{max}$  si trovino:

1. Il valore massimo possibile per la sezione d'urto totale.
2. Per quali sfasamenti si ha la sezione d'urto massima?

Suggerimento: si utilizzi l'ampiezza di scattering:

$$f(k, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k} P_l(\cos \theta). \quad (\text{XII.5.1})$$

### Problema XII.6

Un fascio di elettroni di momento  $5 \cdot 10^{-21} \text{ gr cm sec}^{-1}$  (approssimativamente  $1 \text{ eV}$ ), è diffuso da un potenziale centrale:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{per } r < 10^{13} \text{ cm} \\ 0 & \text{per } r \geq 10^{13} \text{ cm} \end{cases} \quad (\text{XII.6.1})$$

1. Usando considerazioni semiclassiche si trovino quali onde parziali contribuiscono alla sezione d'urto.
2. Dare una stima degli sfasamenti (usando sempre considerazioni semiclassiche).
3. Dare una stima del numero totale di elettroni diffusi su angli maggiori di  $\pi/6$  se il fascio ha un flusso di  $10^{10}$  elettroni ed è acceso per 10 secondi.

### Problema XII.7

Trovare la sezione d'urto differenziale e totale per una particella che interagisce con lo pseudopotenziale di Fermi:

$$V(\vec{r}) = \frac{2\pi k^2}{m} a \delta^3(\vec{r}). \quad (\text{XII.7.1})$$

dove la presenza delle delta di Dirac nel potenziale va intesa nel senso specificato in problemi precedenti

### Problema XII.8

Si consideri l'equazione di Schrödinger:

$$-\hbar m \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \int V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' = E \psi(\vec{r}) \quad (\text{XII.8.1})$$

con il potenziale non locale:

$$V(\vec{r}, \vec{r}') = \hbar m \lambda u(r) u(r') \quad (\text{XII.8.2})$$

con  $r$  e  $r'$  i moduli dei vettori  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$ .

1. Mostrare che solo l'onda  $S$  è interessata dall'interazione.
2. Stabilire la forma dell'equazione integrale che corrisponde all'equazione di Schrödinger e alle condizioni al contorno.

3. Data la forma speciale di  $V(r, r')$  l'equazione integrale l'equazione integrale di cui sopra può essere ridotta a una equazione algebrica. Usando questo fatto mostrare che l'ampiezza di scattering per il momento incidente  $\hbar k$  è :

$$f(k) = \frac{4\pi\lambda|v(k)|^2}{1 + \frac{2\lambda}{\pi} \int d^3q \frac{|v(q)|^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon}} \quad (\text{XII.8.3})$$

con

$$v(k) = \int_0^\infty \frac{\sin kr}{kr} u(r) r^2 dr \quad (\text{XII.8.4})$$

4. Si compari questa espressione con la serie di Born.

### Soluzione del Problema

1. Per mostrare che solo l'onda  $S$  è interessata all'interazione, consideriamo per prima cosa l'espansione della funzione d'onda in armoniche sferiche:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{lm} R_{l,m}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{XII.8.5})$$

Con questa espansione possiamo scrivere il termine di interazione come:

$$\begin{aligned} \int V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' &= \frac{\hbar^2}{2m} \lambda u(r) \sum_{lm} \int u(r') r'^2 R_{l,m}(r') dr' \int d\Omega' Y_l^m \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \lambda \sqrt{4\pi} u(r) \int u(r') r'^2 R_{0,0}(r') dr' \end{aligned} \quad (\text{XII.8.6})$$

dove abbiamo usato il fatto che l'integrale su tutto l'angolo solido di una armonica sferica è zero tranne che per  $Y_{00}$ .

2. Esprimendo il termine di interazione come funzionale della funzione d'onda la (XII.8.1) diventa:

$$\frac{2m}{\hbar^2} \int V(\vec{r}, \vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3 r' = F(\psi) = (\nabla^2 + k^2) \psi \quad (\text{XII.8.7})$$

e la possiamo riscrivere come equazione integrale:

$$\psi = \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\sqrt{8\pi^3}} - \frac{1}{4\pi} \int G(\vec{r}, \vec{r}') F(\psi) d^3 r' \quad (\text{XII.8.8})$$

con  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  la funzione di Green del problema:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int d^3q \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{q}-\vec{q}')}}{k^2 - q^2 + 1\epsilon} \quad (\text{XII.8.9})$$

3. Definendo per semplificare le notazioni:

$$U(\psi) = u(r')\psi(\vec{r}')d^3r'$$

$$A(x) = \frac{\lambda}{4\pi} \int G(\vec{r}, \vec{r}')u(r')d^3r' \quad (\text{XII.8.10})$$

risulta che:

$$\psi(x) = \phi_{\vec{k}} + A(x)U(\psi) \quad (\text{XII.8.11})$$

con  $\phi$  l'onda piana incidente. Iterando la (XII.8.11):

$$U(\psi) = U(\phi) - U(A(x)U(\psi)) = U(\phi) - U(\psi) \int u(q)A(q)d^3q \quad (\text{XII.8.12})$$

questa relazione può essere invertita dando

$$U(\psi) = \frac{U(\phi)}{1 + \frac{\lambda}{4\pi} \int u(q)A(q)d^3q} \quad (\text{XII.8.13})$$

Il secondo membro non dipende da  $\psi$  e pertanto abbiamo la soluzione *esatta* del problema:

$$\psi = \phi + \frac{AU(\phi)}{1 + \frac{\lambda}{4\pi} \int u(q)A(q)d^3q} \quad (\text{XII.8.14})$$

E' possibile esprimere questa espressione in una forma piú familiare facendo uso dell'espansione asintotica:

$$A(x)U(\phi) = \frac{\lambda}{4\pi} \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} u(r'')d^3r'' \int \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'}}{(4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|)} u(r')d^3r'$$

$$\simeq \frac{\lambda}{4\pi(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{ikr}}{r} \left| \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} u(r')d^3r' \right|^2 \quad (\text{XII.8.15})$$

Usando ora il fatto che

$$\int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} u(r')r'^2 dr' d\cos\theta d\varphi = 2\pi \int u(r')r'^2 dr' \int_{-1}^1 e^{ik\cos\theta} d\cos\theta$$

$$= 2\pi \int \frac{r'^2 u(r')}{kr'} (e^{ikr'} - e^{-ikr'})$$

$$= 4\pi \int \frac{r'^2 u(r')}{kr'} \frac{\sin kr'}{r'} \quad (\text{XII.8.16})$$

ovvero

$$A(x)U(\phi) \simeq \frac{4\pi}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^{ikr}}{r} v(k) \quad (\text{XII.8.17})$$

mentre

$$\int u(r)A(r)d^3r = \frac{\lambda}{4\pi} \int u(r)d^3r \int G(\vec{r}, \vec{r}')u(r')d^3r'$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi} \int d^3r d^3r' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} u(r)u(r') \frac{e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}'}}{k^2 - q^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{2\lambda}{\pi} \int \frac{|v(q)|^2}{k^2 - q^2 + i\epsilon} \quad (\text{XII.8.18})$$

che asintoticamente da':

$$\psi(\vec{r}) = \phi_k(\vec{r}) + \phi_k(\vec{r}) \frac{4\pi\lambda|v(k)|^2}{1 + \frac{2\lambda}{\pi} \int d^3q \frac{v(q)}{k^2 - q^2 + i\epsilon}} \quad (\text{XII.8.19})$$

4. Iterando la soluzione:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \phi(\vec{r}) + U(\psi)A(r) \\ &= \phi(\vec{r}) + U(\phi) + U(\psi)U(A)A(r) \\ &= \phi(\vec{r}) + U(\phi)A(r) + \sum_n \frac{\lambda^n}{(4\pi)^n} \left( \int u(r')G(r', r'')u(r'')d^3r'd^3r'' \right)^n \end{aligned} \quad (\text{XII.8.20})$$

e questa si riconosce essere l'espansione in serie di Taylor di:

$$\psi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \frac{U(\phi)A(r)}{1 + \frac{\lambda}{4\pi} \int u(r')G(r', r'')u(r'')d^3r'd^3r''} \quad (\text{XII.8.21})$$

e possiamo quindi concludere che la serie di Born altro non è che l'espansione di Taylor della soluzione esatta.

# Capitolo XIII

## Miscellanea

*a cura di*  
*Fedele Lizzi, Gennaro Miele e Francesco Nicodemi*

### Problema XIII.1

Si considerino tre fermioni identici di spin  $1/2$ .

Si mostri che non esiste nessuno stato per cui il momento angolare relativo per ogni coppia di particelle è zero. Ovvero, se  $\vec{L}_{ij}$  è il momento angolare relativo, non esiste stato  $\Psi$  per cui

$$\vec{L}_{ij}\Psi = 0 \quad (\text{XIII.1.1})$$

per ogni  $i, j = 1, 2, 3$ .

Si può generalizzare questo risultato ad un numero arbitrario  $N$  di particelle?