

Funzioni trigonometriche

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

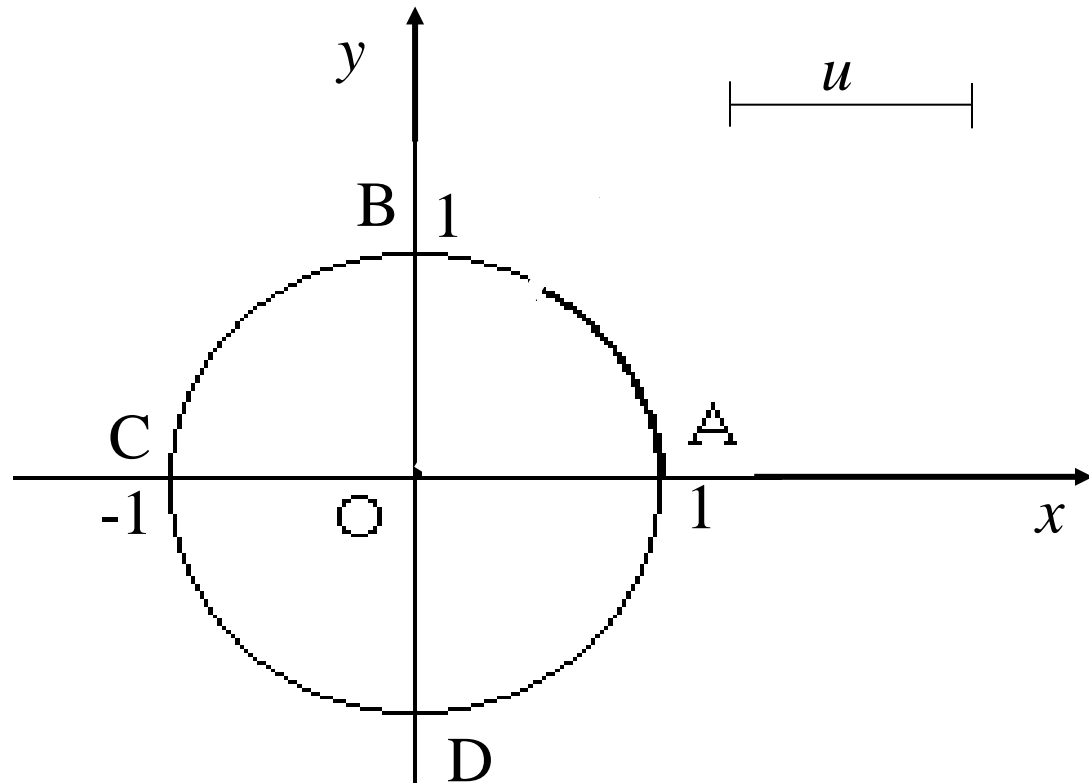
Per definire le funzioni trigonometriche e determinarne le caratteristiche, introduciamo prima le nozioni di **circonferenza goniometrica** e **radiante**

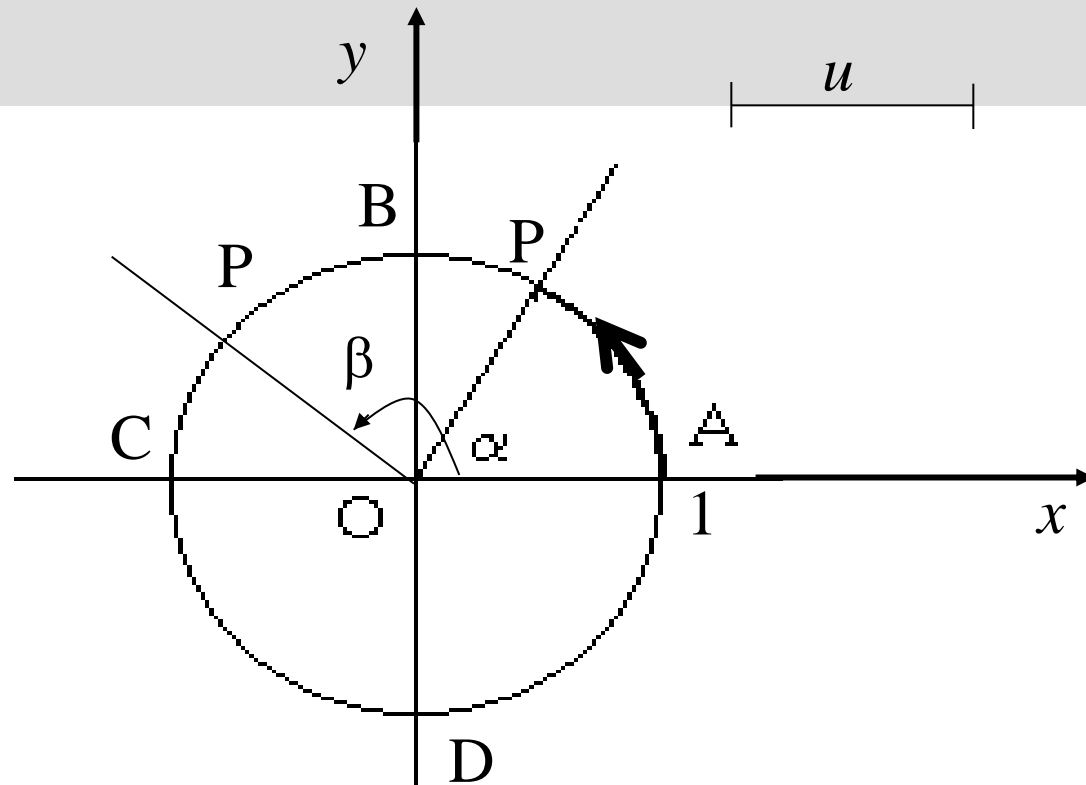
Circonferenza goniometrica

In un sistema di assi cartesiani ortogonali, consideriamo una circonferenza di centro l'origine e raggio unitario (pari, cioè, all'unità di misura fissata). Tale circonferenza viene detta

circonferenza goniometrica

- A (1,0)
- B (0,1)
- C (-1,0)
- D (0,-1)





Per convenzione, tale circonferenza viene percorsa positivamente in senso antiorario a partire dal punto A origine degli archi.

In questo modo la congiungente l'origine O con il generico punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica forma con l'asse x un angolo α , β ,...

In generale, siamo in grado di misurare gli angoli in gradi.

Ad esempio:

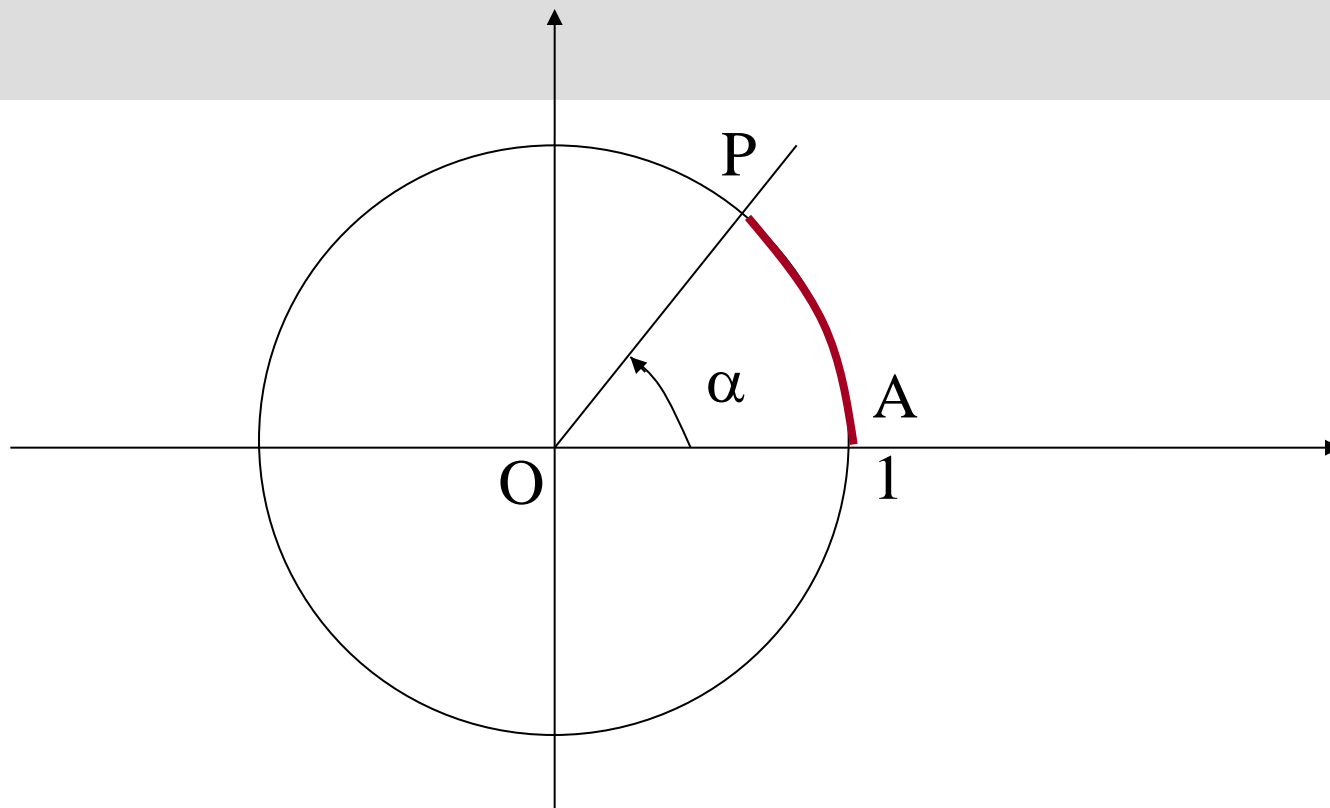
Angolo retto misura 90°

Angolo piatto misura 180°

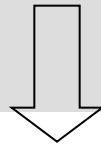
Angolo giro misura 360°

Per studiare le funzioni trigonometriche è opportuno adottare una diversa unità di misura per gli angoli:

il **radiante**



Def. La misura di un angolo piano α espressa in **radianti** è data dalla lunghezza dell'arco \widehat{AP} di circonferenza goniometrica intercettato dalle due semirette che individuano l'angolo stesso



Da tale definizione segue immediatamente che:

Angolo giro misura in radianti 2π

(è uguale alla lunghezza dell'intera circonferenza unitaria: $r = 1$)

Angolo piatto misura π

(è uguale alla lunghezza di metà circonferenza unitaria: $r = 1$)

Angolo retto misura in radianti $\pi/2$

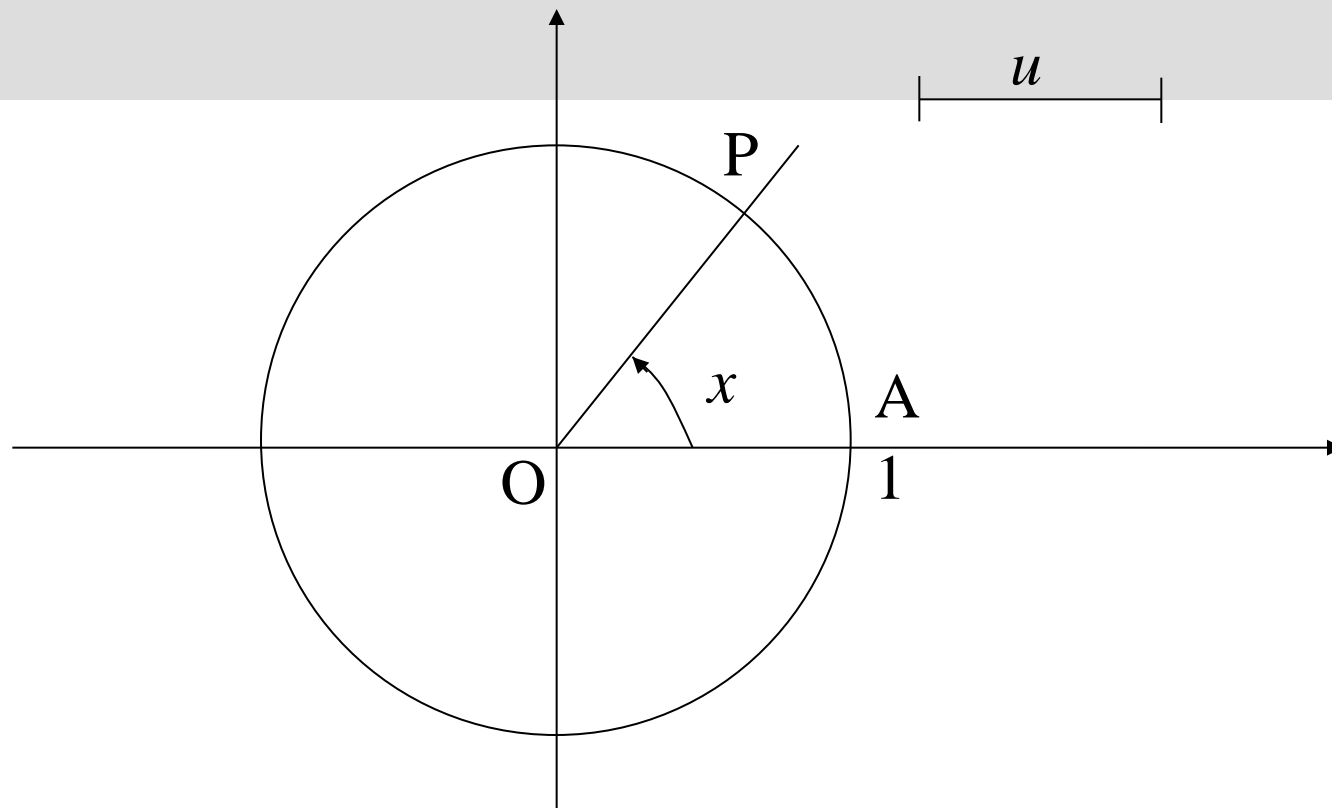
(è uguale alla lunghezza di un quarto di circonferenza unitaria: $r = 1$)

Si passa dai gradi ai radianti con la seguente proporzione:

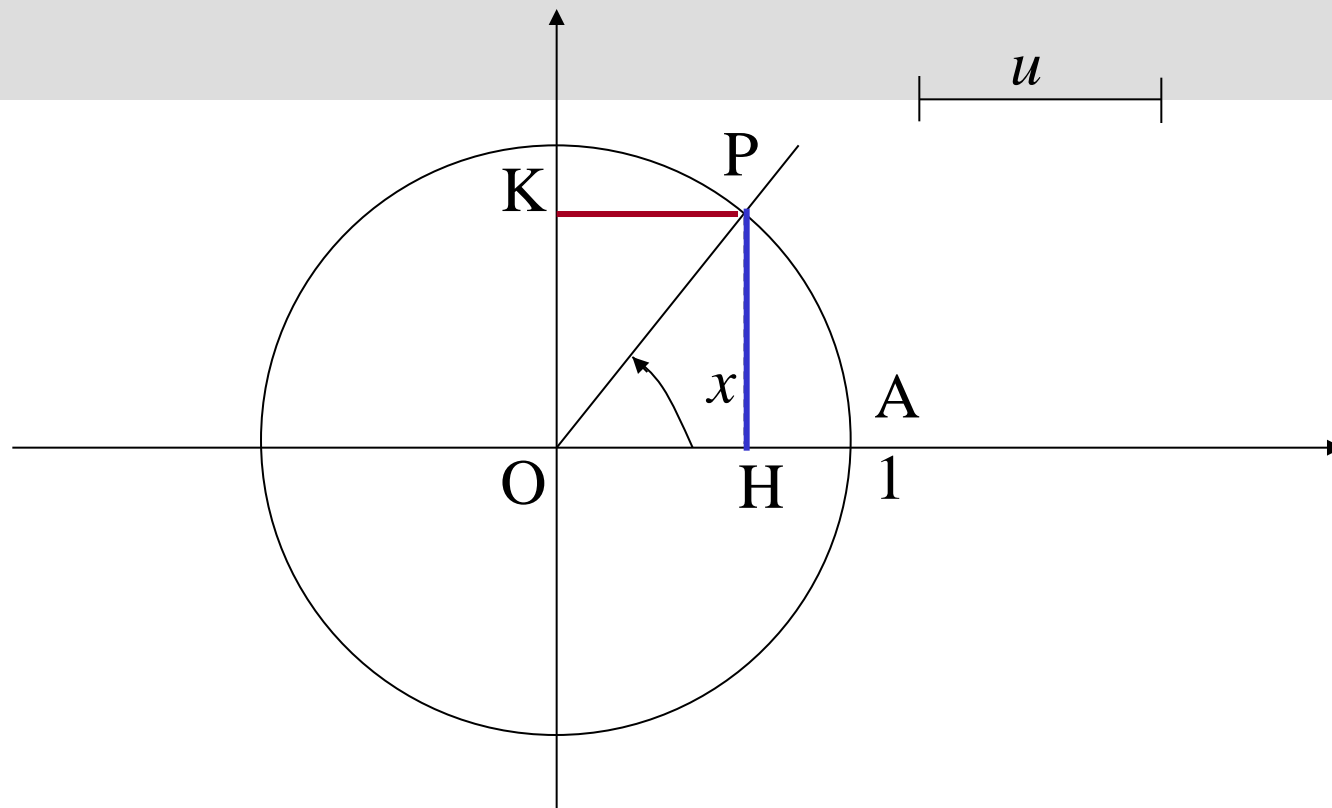
$$\alpha^{\circ} : 180^{\circ} = \alpha^{\text{rad}} : \pi$$

Con successive suddivisioni si verifica che:

gradi	radianti
360°	2π
180°	π
90°	$\pi/2$
45°	$\pi/4$
60°	$\pi/3$
30°	$\pi/6$
120°	$2/3 \pi$
270°	$3/2 \pi$

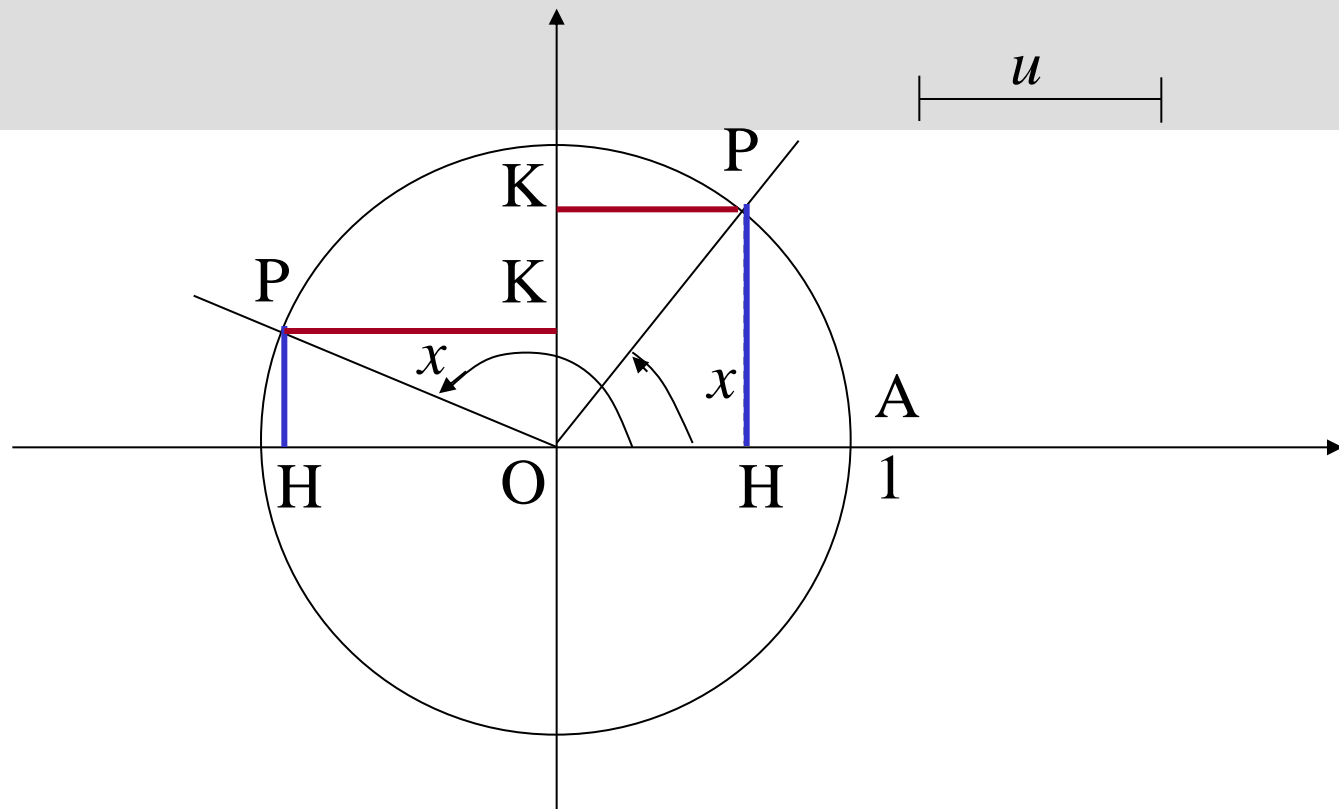


Sia dato un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica a partire dal punto A origine degli archi e sia x l'angolo sotteso dal punto P



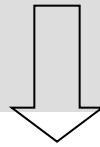
Def. Si definisce *sen x* l'ordinata del punto P
(cioè il segmento PH)

Def. Si definisce *cos x* l'ascissa del punto P
(cioè il segmento PK)



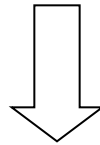
Quando il punto P si muove sulla circonferenza goniometrica variano:

- l'ampiezza dell'angolo x sotteso dal punto P
- l'ascissa e l'ordinata del punto P



Al variare di x variano i valori di

sen· x e *cos*· x



sen· x e *cos*· x sono funzioni dell'arco x

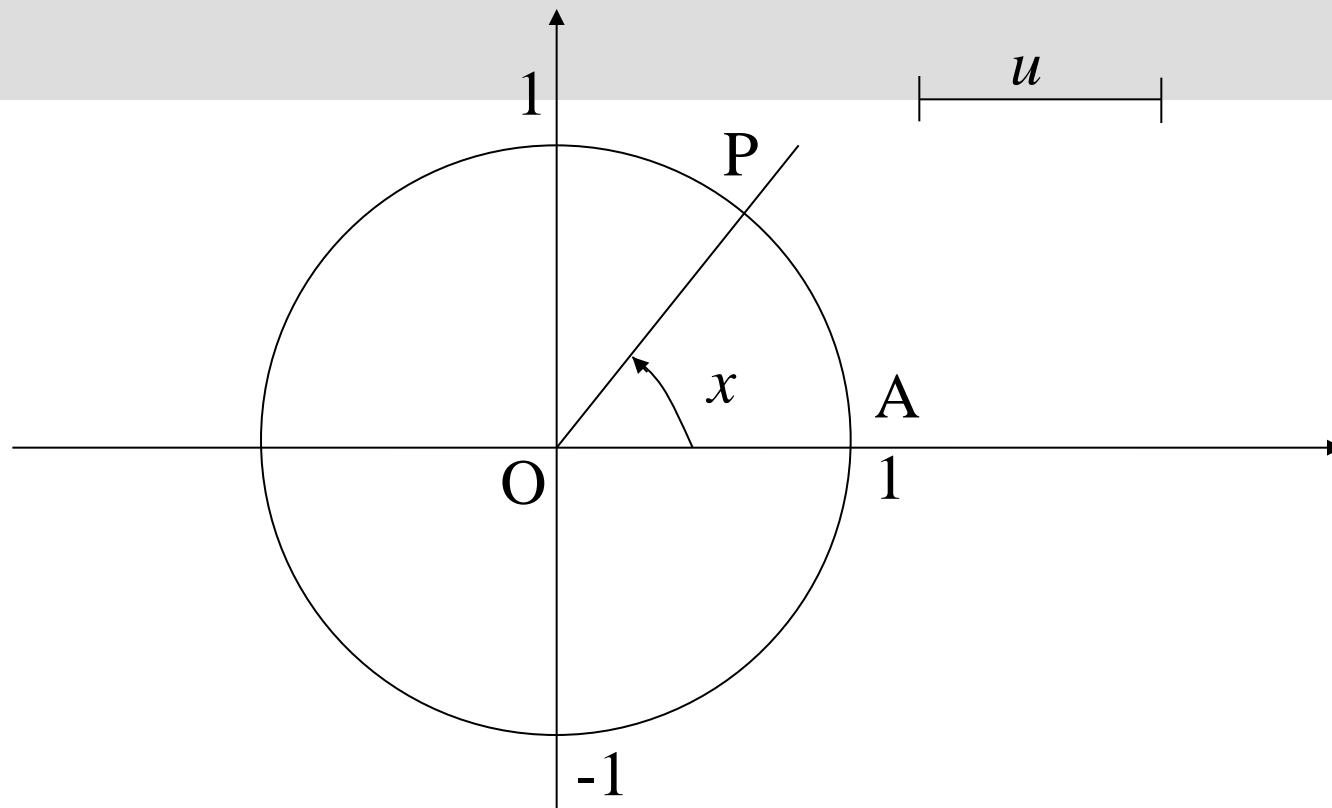
FUNZIONE SENO

$$f(x) = \text{sen } x$$

$$f : x \in R \rightarrow \text{sen } x \in [-1, +1]$$

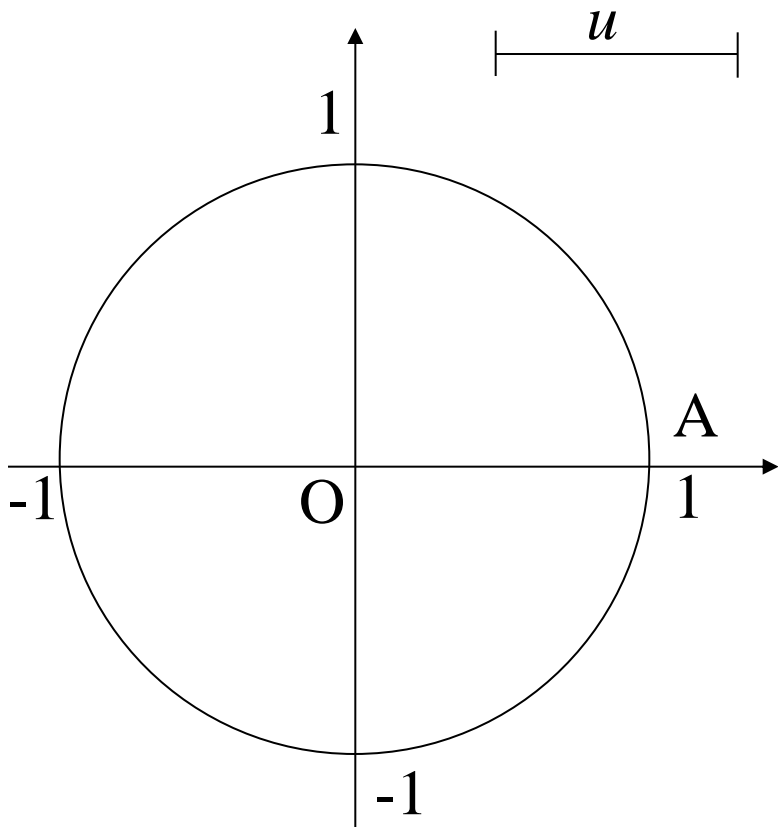
Il **dominio** della funzione seno è tutto R poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri

(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)



Il **codominio** della funzione seno è l'intervallo $[-1,+1]$ poiché il minimo valore che può assumere l'ordinata del punto P è -1 , mentre il massimo valore è $+1$

Per ogni valore fissato dell'arco x , la funzione seno assume un corrispondente valore numerico

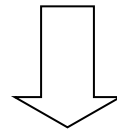


x	$\text{sen } x$
0	0
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	1
π	0
$\pi/6$	$1/2$
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$3/2 \pi$	-1
2π	0

OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π)

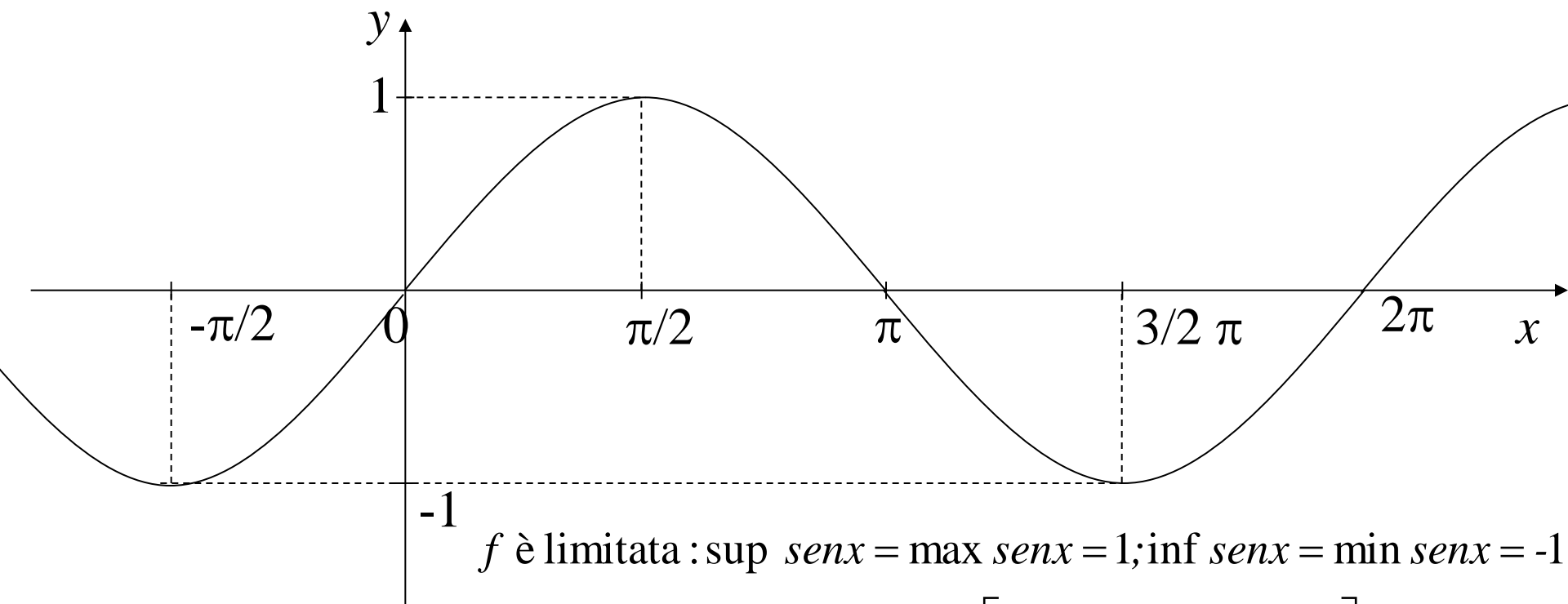
la funzione *sen* x
assume gli stessi valori



la funzione seno è *periodica* di periodo 2π

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen } x, \forall x \in \mathbb{R}$$

In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione seno al variare di x nel dominio R , il grafico della funzione seno è:



f è limitata : $\sup \operatorname{sen} x = \max \operatorname{sen} x = 1$; $\inf \operatorname{sen} x = \min \operatorname{sen} x = -1$

f strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

f strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

f dispari : $-\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(-x)$



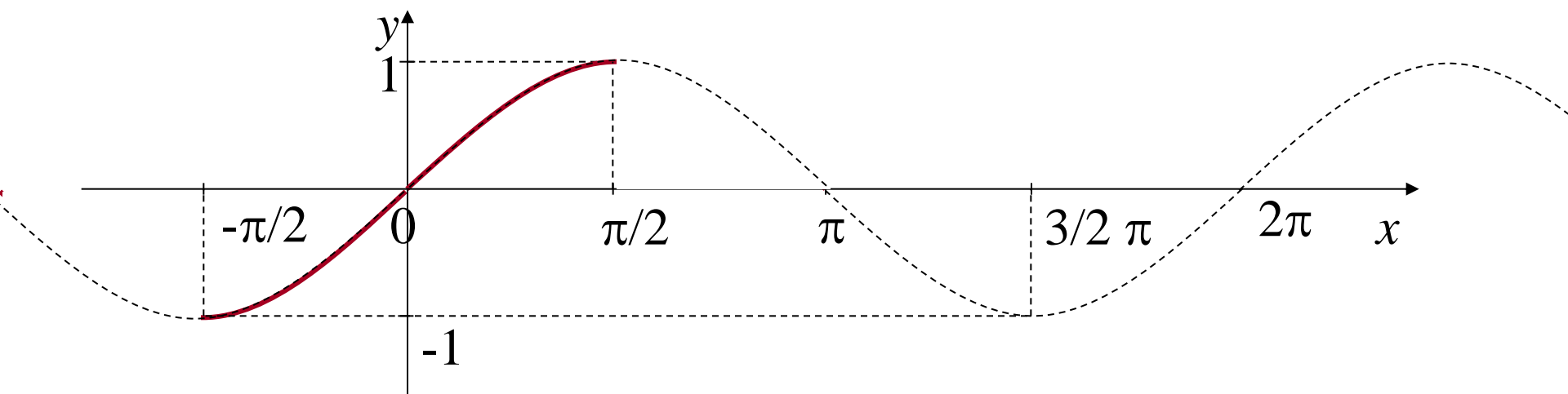
Non è invertibile su R !

OSSERVAZIONE

Abbiamo detto che la

FUNZIONE SENO non è invertibile su \mathbb{R} .

Se però, invece di considerare come dominio tutto \mathbb{R} consideriamo solo una parte di esso e cioè l'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, allora in tale intervallo la funzione seno risulta strettamente crescente e quindi invertibile



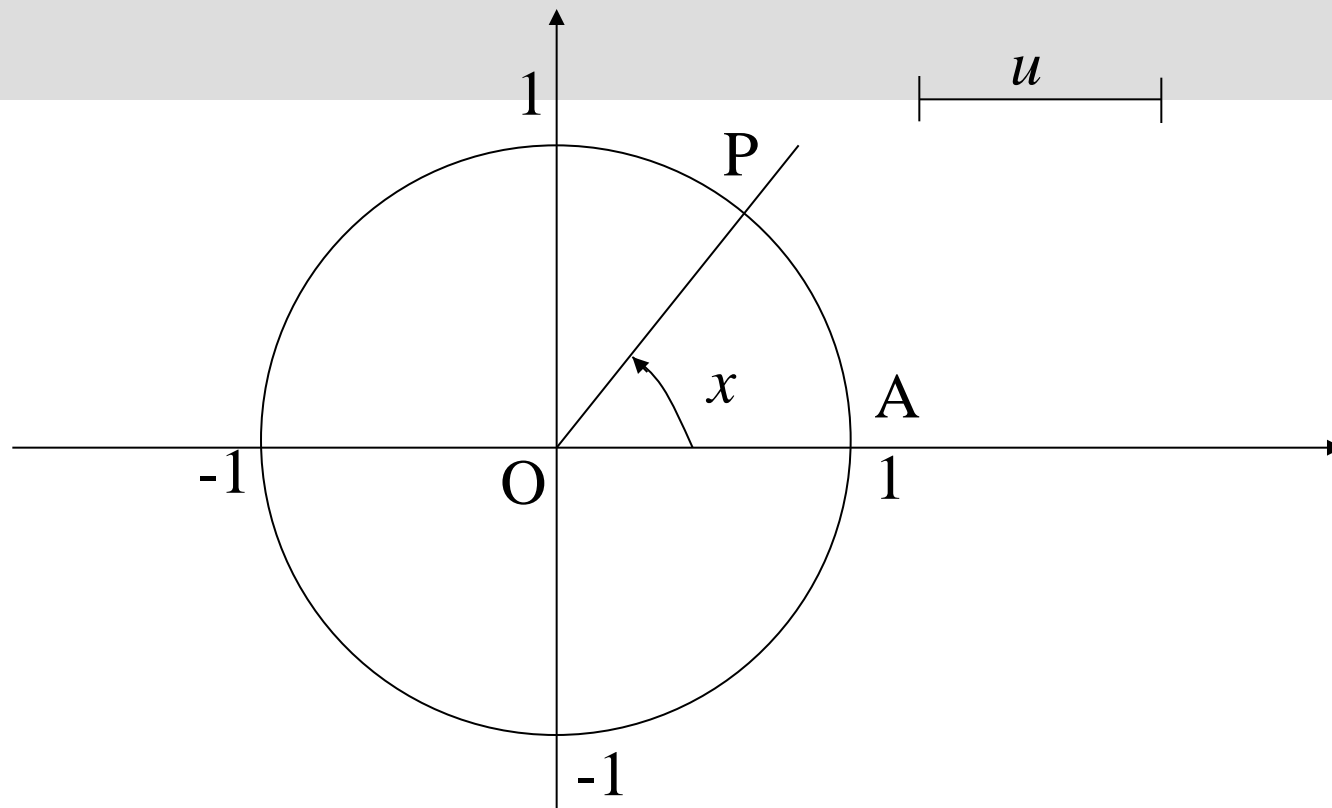
FUNZIONE COSENO

$$f(x) = \cos x$$

$$f : x \in R \rightarrow \cos x \in [-1, +1]$$

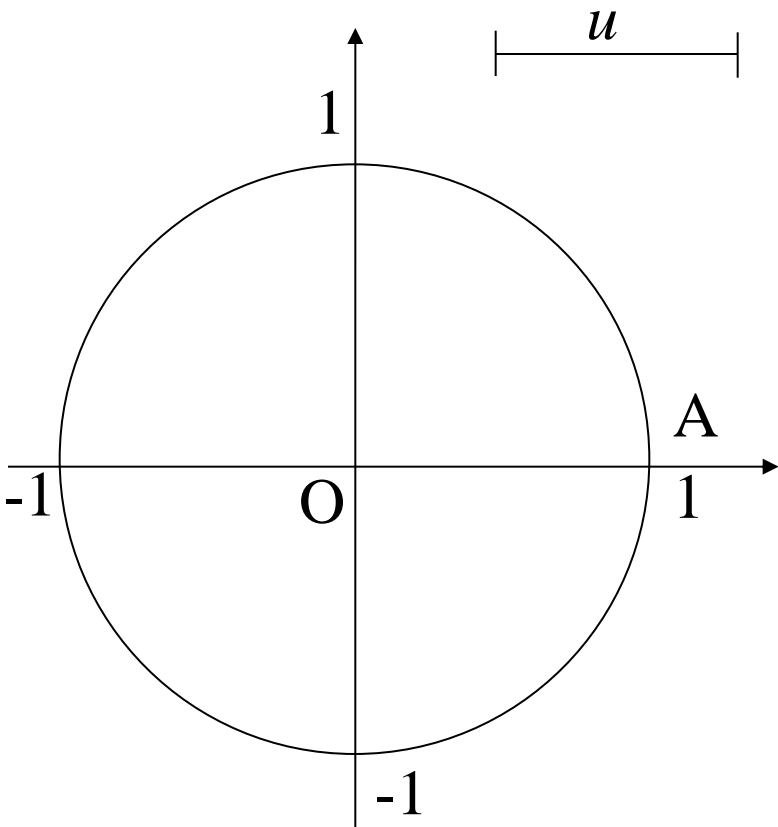
Il **dominio** della funzione coseno è tutto R poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri

(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)



Il **codominio** della funzione coseno è l'intervallo $[-1,+1]$ poiché il minimo valore che può assumere l'ascissa del punto P è -1 , mentre il massimo valore è $+1$

Per ogni valore fissato dell'angolo x , la funzione coseno assume un corrispondente valore numerico



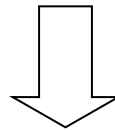
x	$\cos x$
0	1
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	0
π	-1
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/3$	1/2
$3/2 \pi$	0
2π	1

OSSERVAZIONE

Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π)

la funzione *cos* x

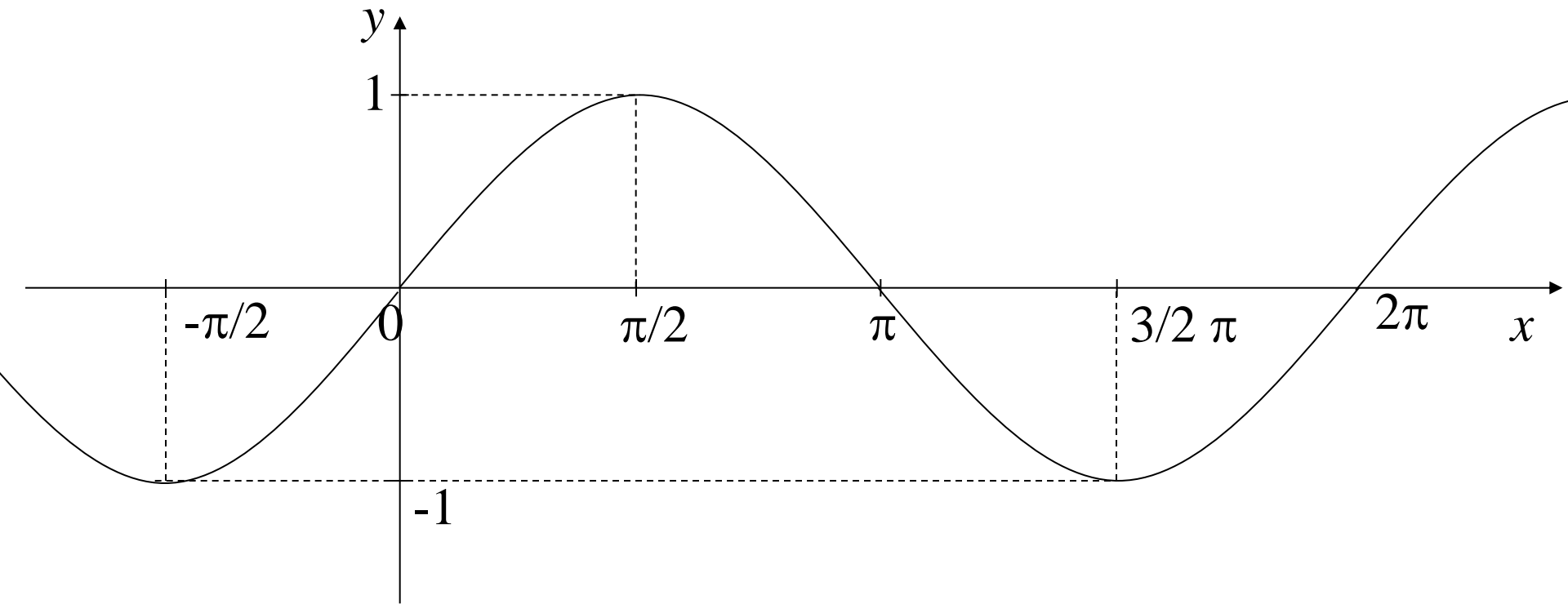
assume gli stessi valori



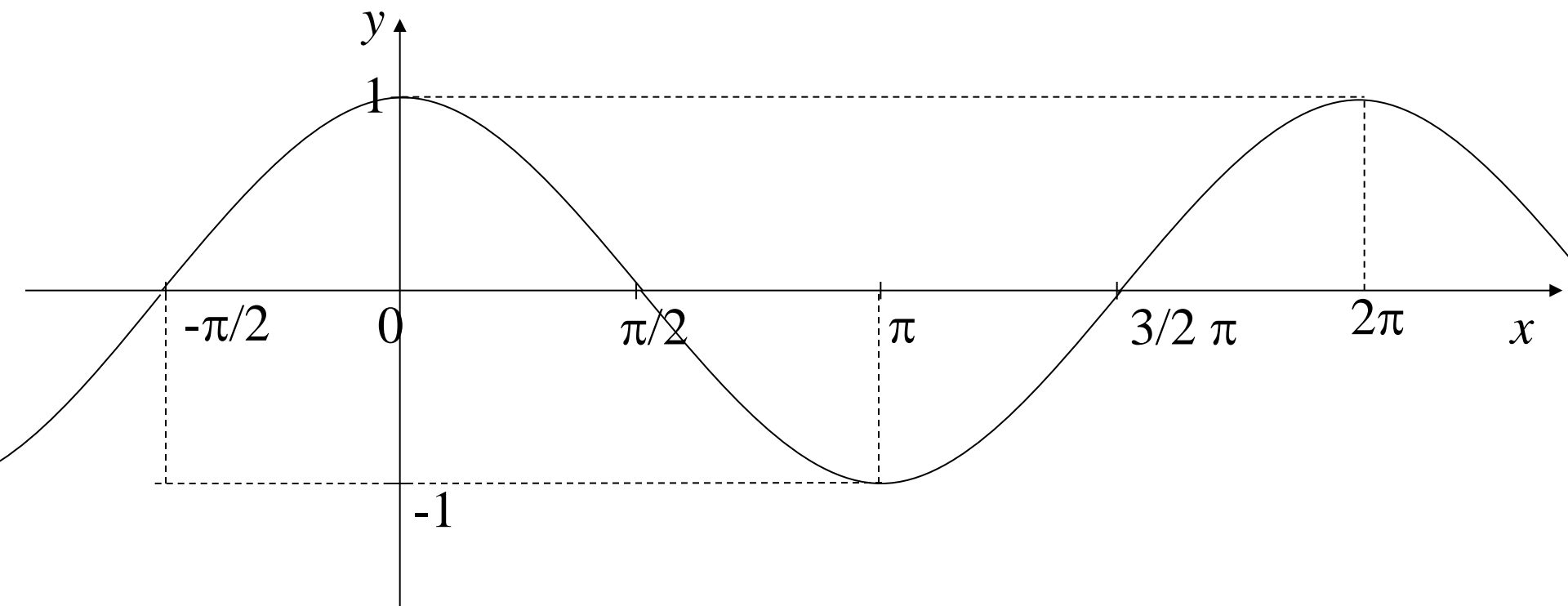
la funzione coseno è periodica di periodo 2π

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$$

In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione seno al variare di x nel dominio R , il grafico della funzione seno è:



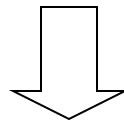
In corrispondenza dei valori assunti dalla funzione coseno al variare di x nel dominio R , il grafico della funzione coseno è:



FUNZIONE TANGENTE

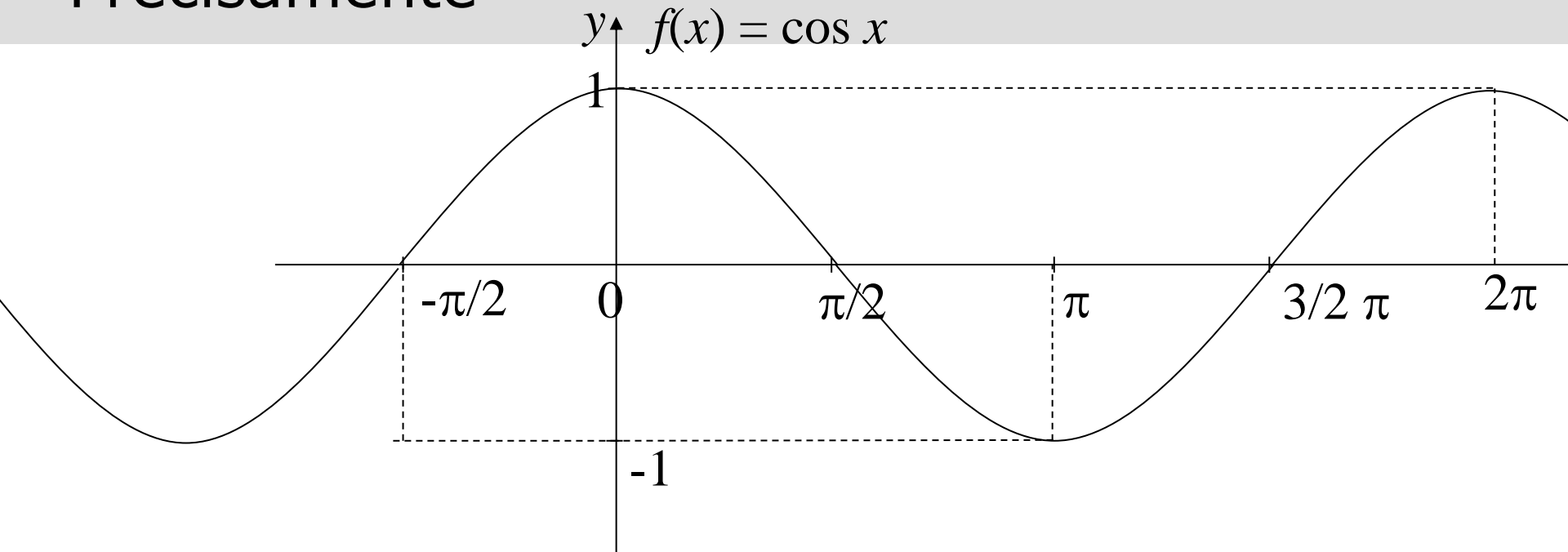
$$f(x) = \tan x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

Affinchè abbia senso il rapporto $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$,
deve essere il denominatore $\text{cos } x \neq 0$

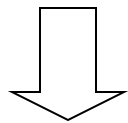


Il **dominio** della funzione tangente è tutto R privato dei valori x che annullano il coseno al denominatore

Precisamente



$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$$

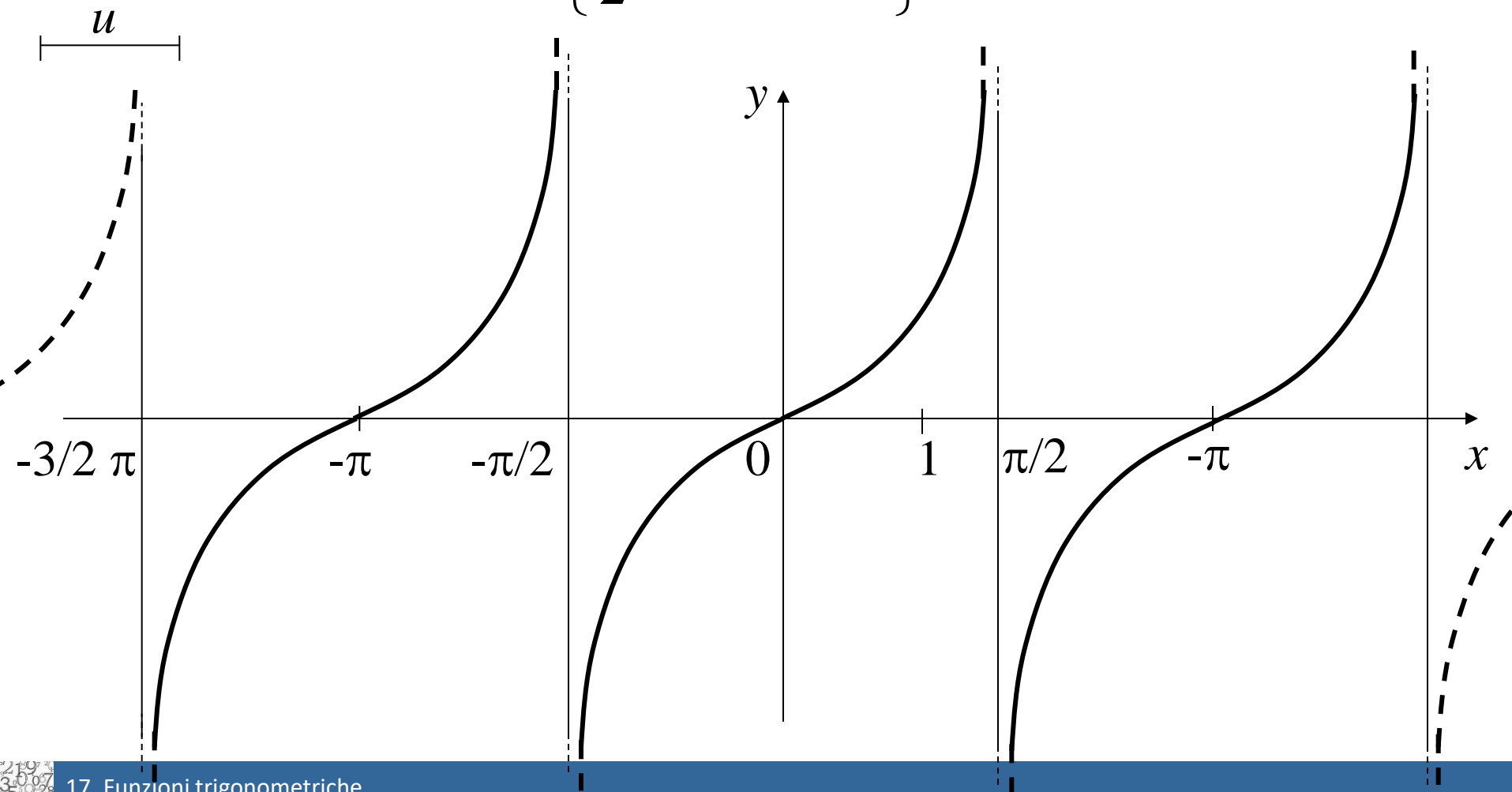


$$\cos x \neq 0 \quad \text{se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

FUNZIONE TANGENTE

$$f(x) = \tan x$$

$$f : x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \tan x \in \mathbb{R}$$



Per ogni valore fissato dell'angolo x , la funzione tangente assume un corrispondente valore numerico

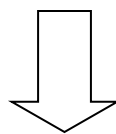
x	$\tan x$
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	/
π	0
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$3/2 \pi$	/
2π	0

OSSERVAZIONE

Ogni mezzo giro (pari a metà arco che misura π)

la funzione *tan.x*

assume gli stessi valori

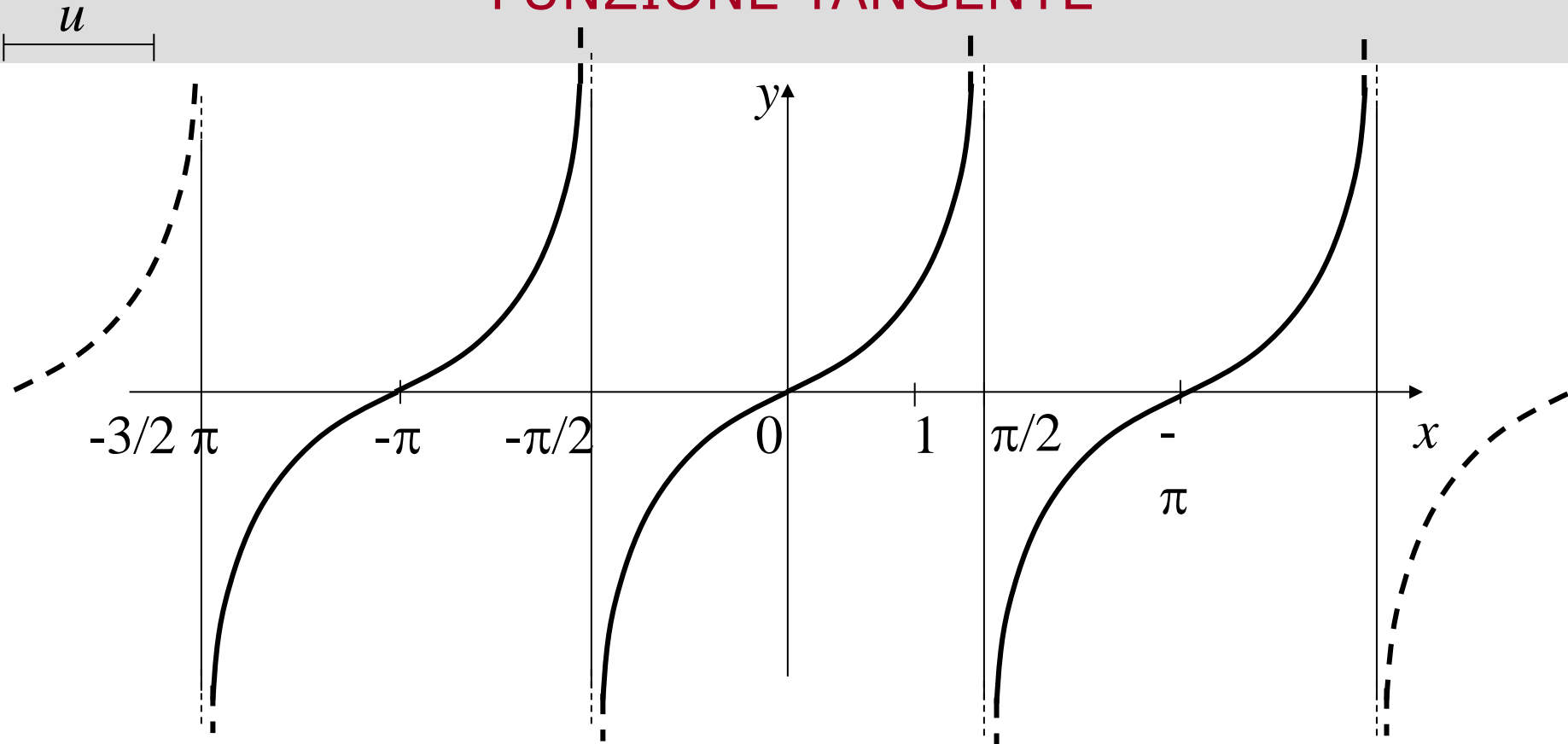


la funzione tangente è periodica di periodo π

$$\tan(x + \pi) = \tan x,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$$

FUNZIONE TANGENTE



$$\sup \tan x = +\infty; \inf \tan x = -\infty$$

f strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \forall k \in \mathbb{Z}$

f dispari: $-\tan x = \tan(-x)$

OSSERVAZIONE

Abbiamo detto che la

FUNZIONE TANGENTE è strettamente crescente

in ciascuno degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

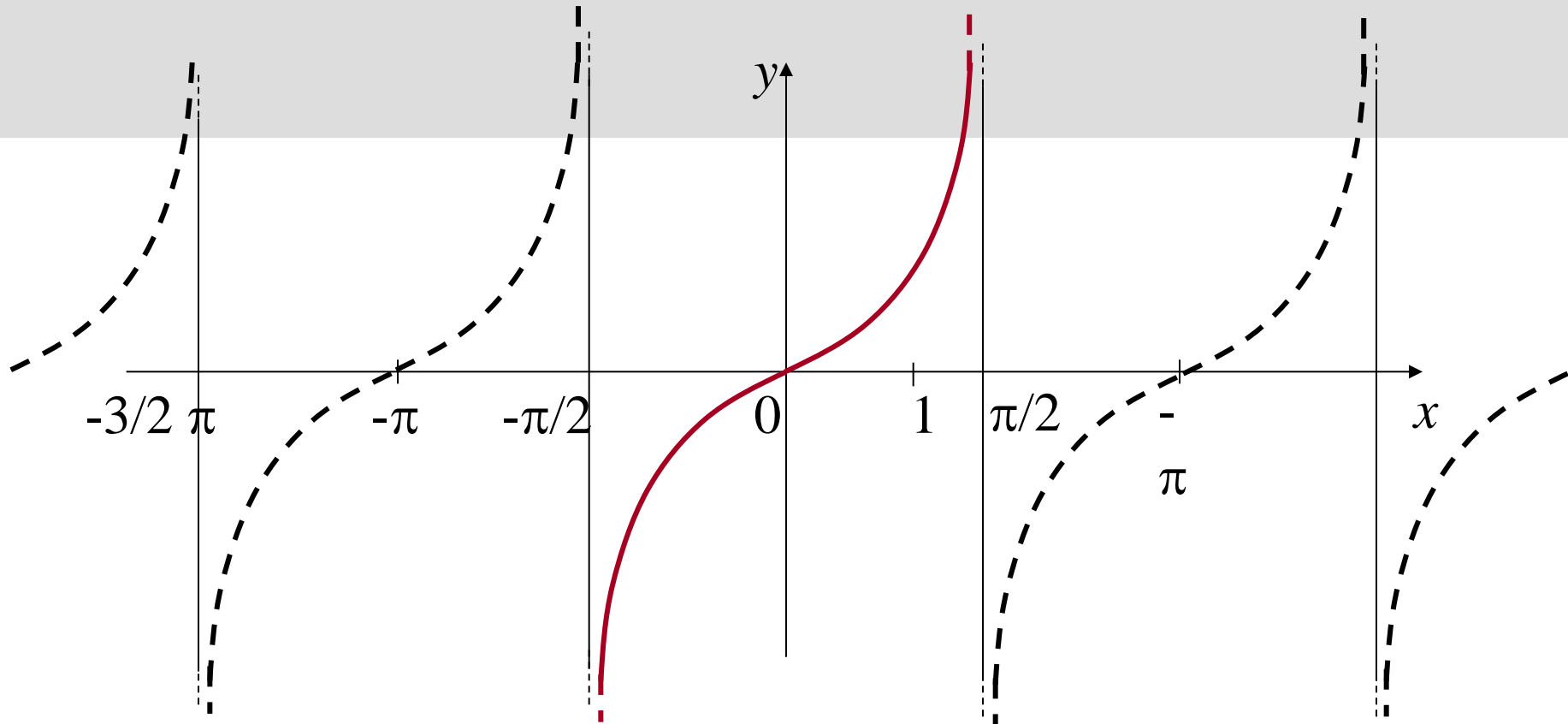
Così, se invece di considerare come dominio tutto

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

consideriamo solo una parte di esso e cioè

l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, allora in tale intervallo la

funzione tangente risulta strettamente crescente e
quindi invertibile



Prendendo in considerazione tale osservazione, la funzione tangente

definita in $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

è invertibile nell'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$

e l'inversa della funzione tangente in tale intervallo è detta

FUNZIONE ARCOTANGENTE

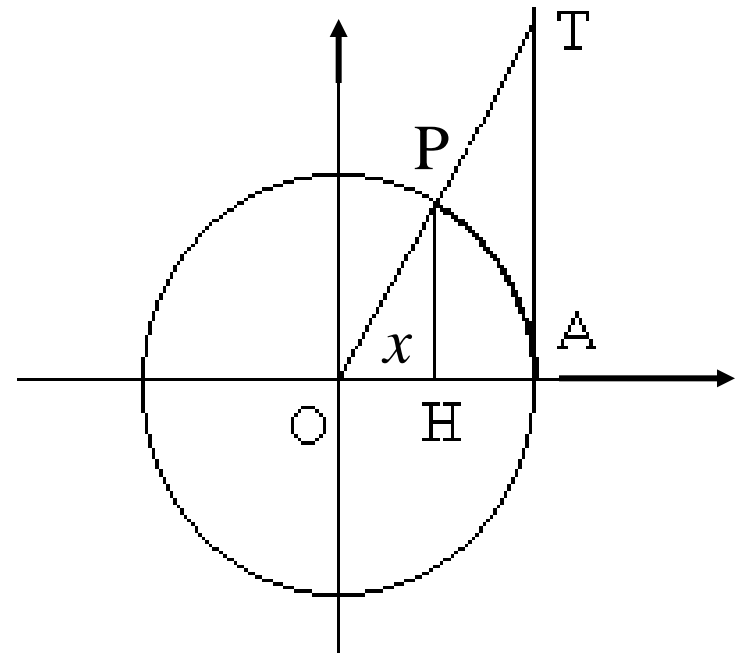
Relazioni fondamentali fra le diverse funzioni trigonometriche di uno stesso arco orientato:

Tra le funzioni trigonometriche viste intercorrono le seguenti relazioni:

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

(teorema di Pitagora)

$$\text{tg} x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x}, \text{cos} x \neq 0$$



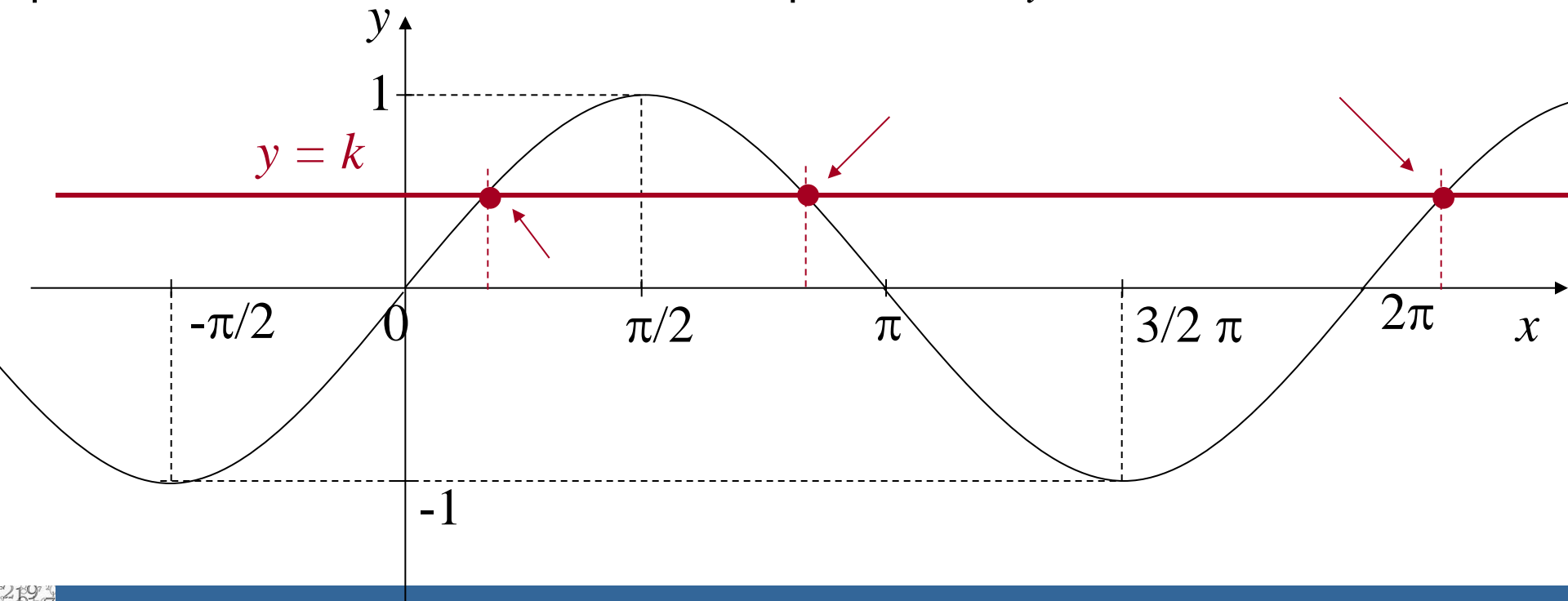
Si può inoltre dimostrare che **tg** x è l'ordinata del punto T di intersezione tra la tangente geometrica alla circonferenza nel punto A e la semiretta OT

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

PRIMO GRADO

- $\sin x = h$

Ricordando l'andamento della funzione $\sin x$, questa equazione si risolve intersecando il grafico della funzione $\sin x$ con la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y = k$



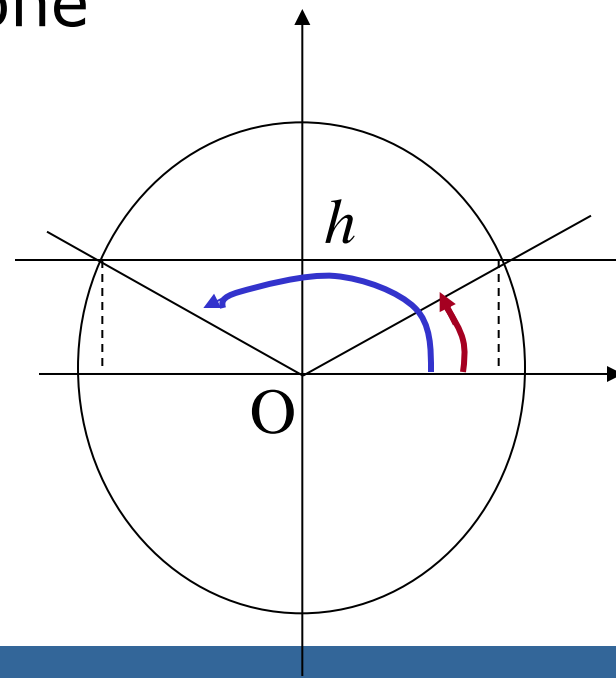
RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

PRIMO GRADO

- $\sin x = h$

Ricordando la definizione della funzione $\sin x$, questa equazione si risolve intersecando la circonferenza goniometrica con la retta di equazione

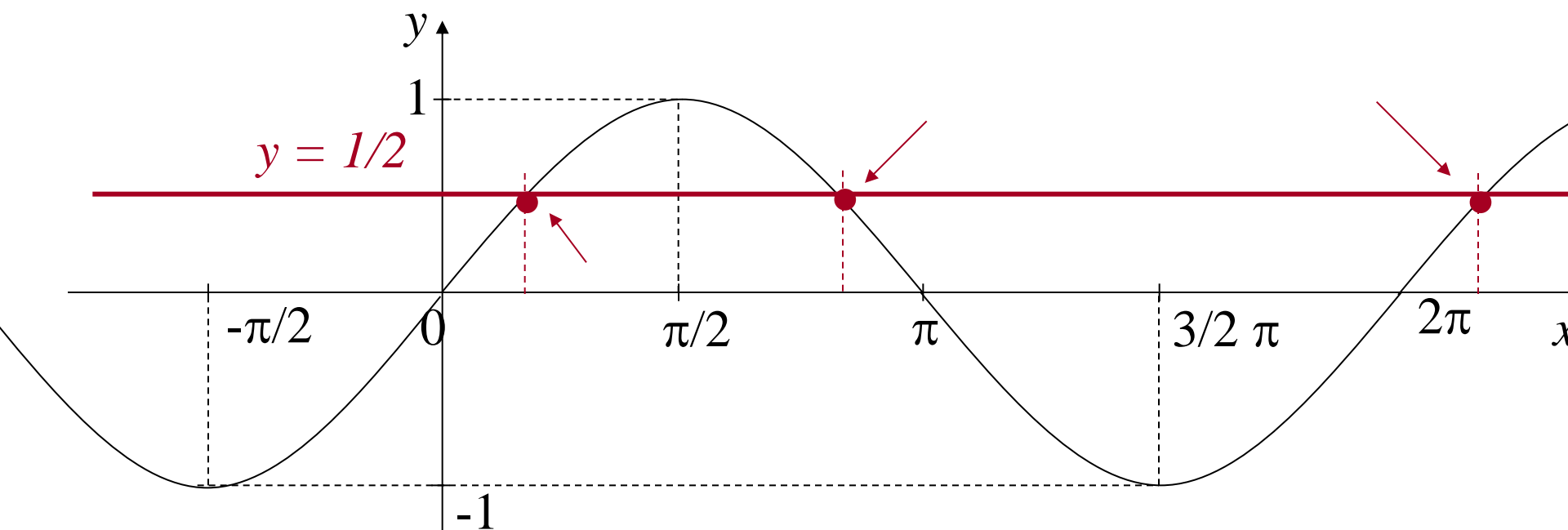
$$y = h, \text{ con } h \in [-1,1]$$



Esempio

Risolvere la seguente equazione: $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

questa equazione può essere risolta intersecando il grafico della funzione $\cos x$ con la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y = 1/2$



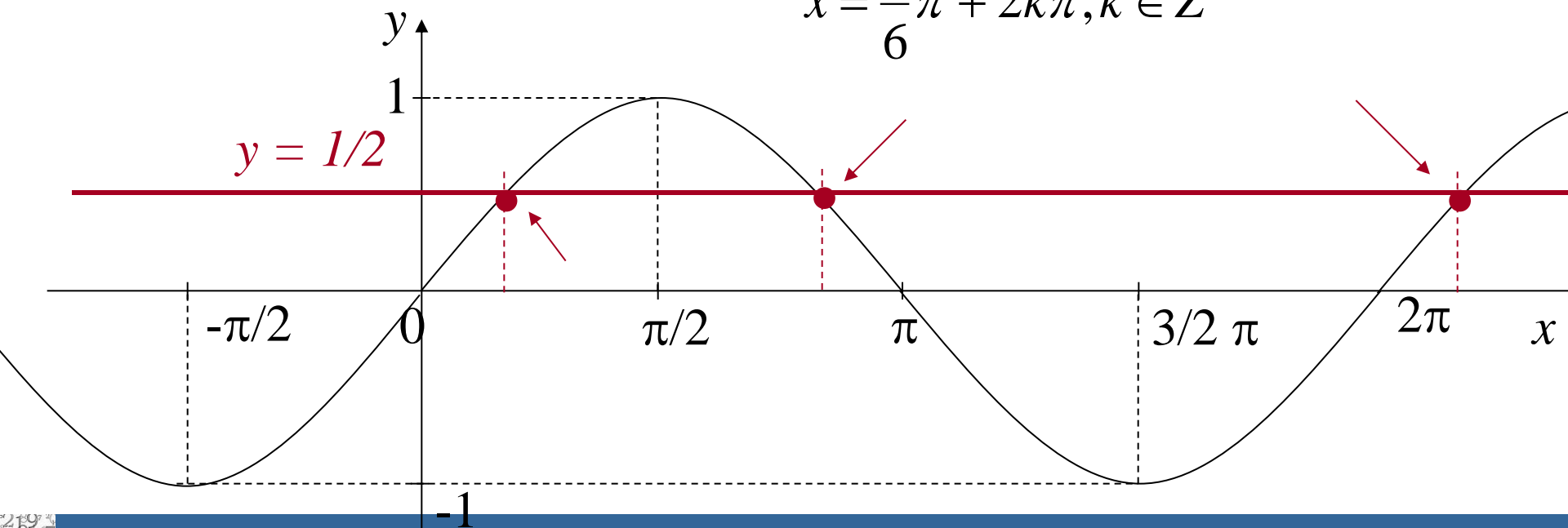
Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ i punti di intersezione sono:

$$x = \pi/6, x = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$$

ma ricordando che la funzione coseno è periodica di periodo 2π , se vogliamo ottenere tutte le soluzioni dell'equazione assegnata: :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

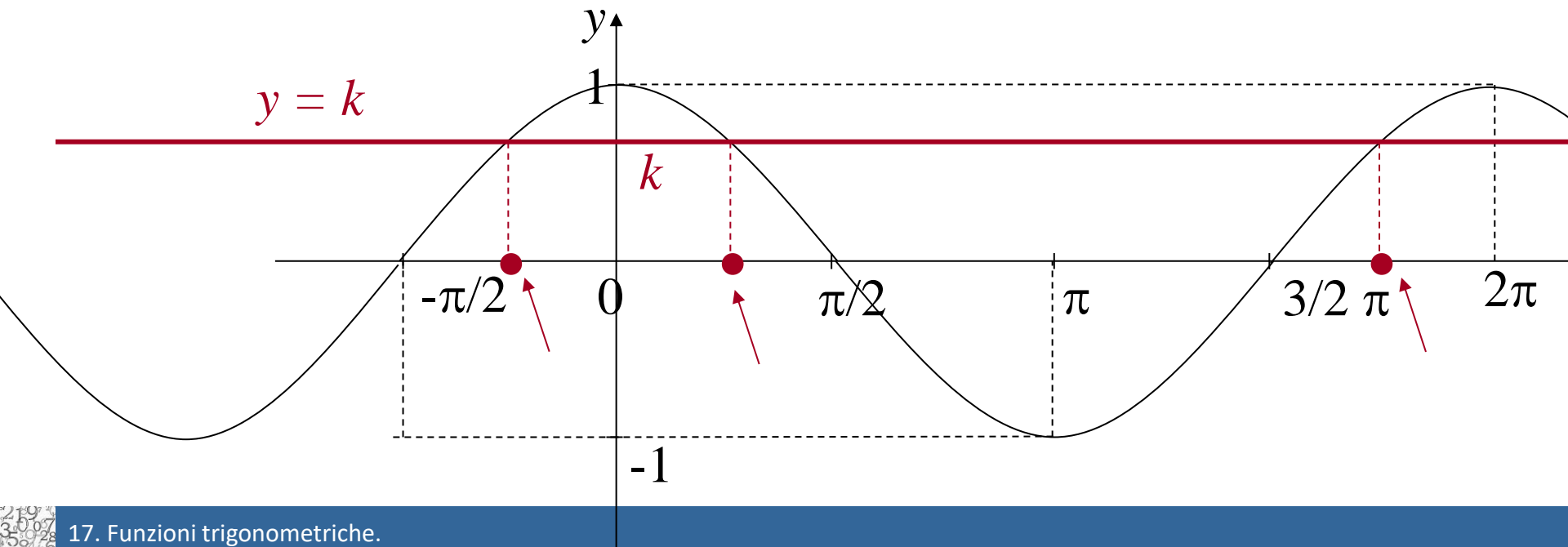


RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

PRIMO GRADO

- $\cos x = k$

Ricordando l'andamento della funzione $\cos x$, questa equazione si risolve intersecando il grafico della funzione $\cos x$ con la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y = k$



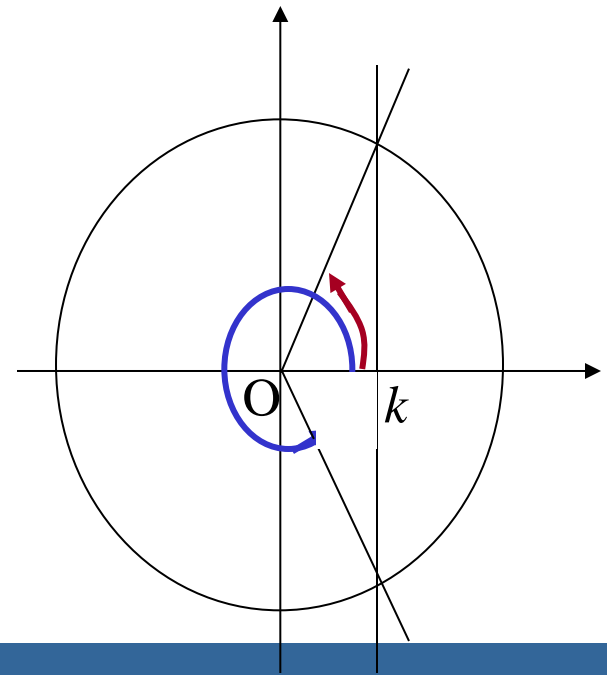
RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

PRIMO GRADO

- $\cos x = k$

Ricordando la definizione della funzione $\cos x$, questa equazione si risolve intersecando la circonferenza goniometrica con l'equazione

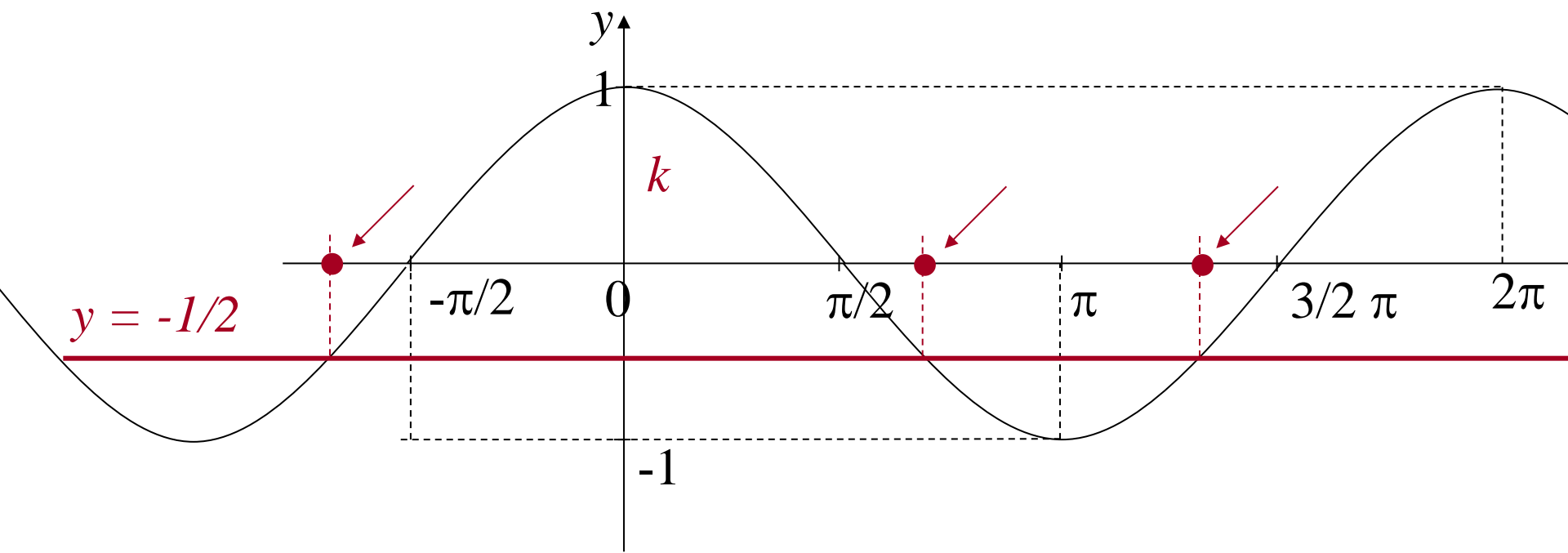
$$x = k, \quad \text{con } k \in [-1,1]$$



Esempio

Risolvere la seguente equazione: $\cos x = -\frac{1}{2}$

questa equazione può essere risolta intersecando il grafico della funzione $\cos x$ con la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y = -1/2$



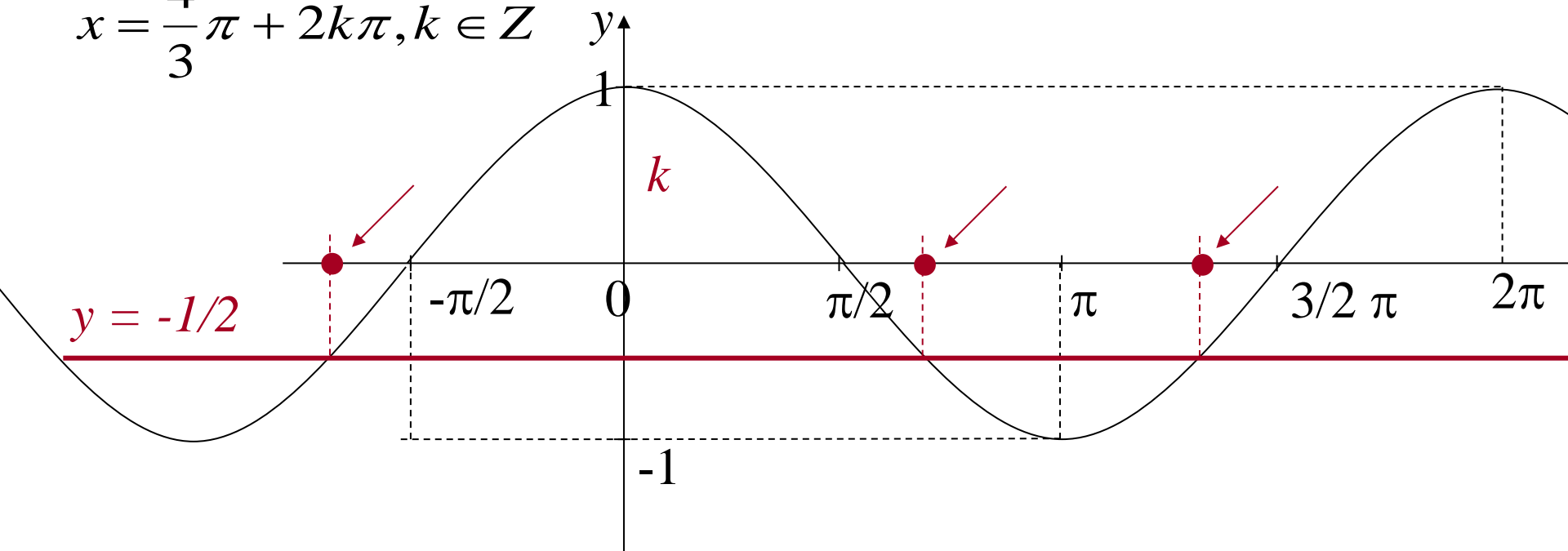
Nell'intervallo $[0, 2\pi]$ i punti di intersezione sono:

$$x = \pi - \pi/3 = 2/3 \pi, \quad x = \pi + \pi/3 = 4/3 \pi$$

ma ricordando che la funzione coseno è periodica di periodo 2π , se vogliamo ottenere tutte le soluzioni dell'equazione assegnata:

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Esempio

Risolvere la seguente equazione: $\cos x = -\frac{1}{2}$

questa equazione può essere risolta intersecando il grafico della funzione $\cos x$ con la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $y = -1/2$

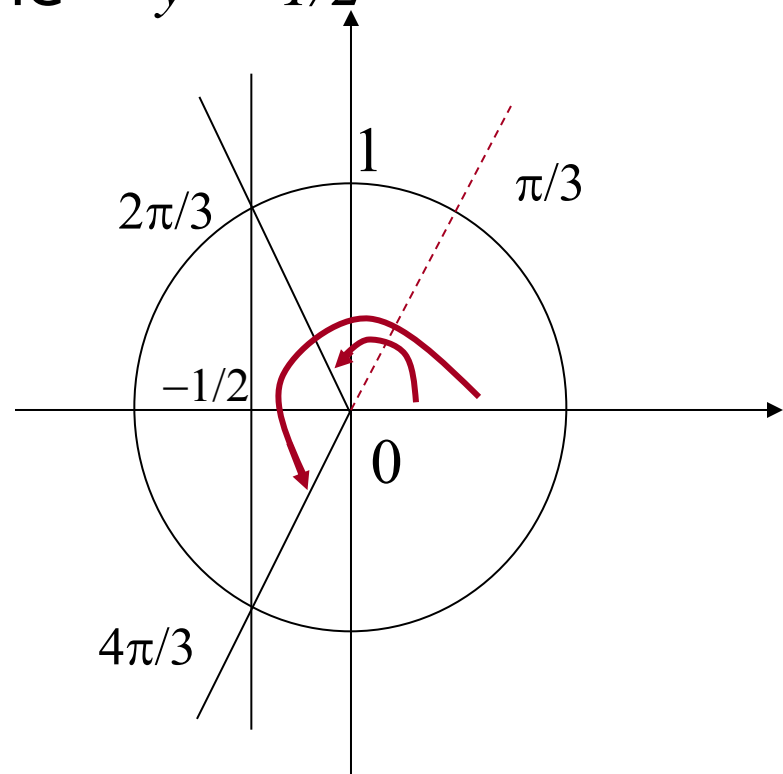
I punti di intersezione sono:

$$x = \pi - \pi/3 = 2/3 \pi, x = \pi + \pi/3 = 4/3 \pi$$

In questo modo abbiamo trovato le due soluzioni, ma ricordando che la funzione coseno è periodica di periodo 2π , se vogliamo ottenere tutte le soluzioni dell'equazione:

$$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$



Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche:

1) $\cos x = 1$

2) $\text{sen } x = 1$

3) $\text{sen } x = -1$

4) $\cos x = -1$

5) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

6) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$