22. Funzioni continue

Definizione f continua in x_0

Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) e sia x_0 un punto appartenente all'intervallo I: $x_0 \in \mathrm{I}$

Si dice che f è **continua** nel punto x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Osservazioni

Una funzione f è continua in un punto x_0 interno al proprio intervallo di definizione se:

- $\exists\ f(x_0)$
- $\exists$ finito il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$
- il limite coincide col valore $f(x_0)$ di f nel punto x_0

Osservazioni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \overline{\ell} \iff \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \overline{\ell} = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Funzione continua in un punto
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
significa che
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ I due limiti sinistro e destro devono valere $f(x_0)$

Osservazioni

- Se si verifica solo che:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

allora si dice che la funzione f è continua a destra

- Se si verifica solo che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

allora si dice che la funzione f è continua a sinistra

Definizione f continua nell'intervallo

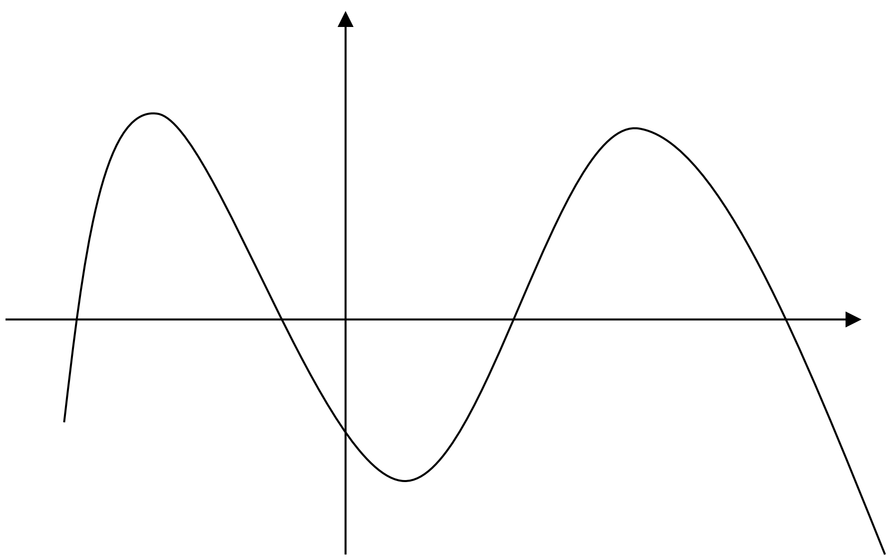
Def. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato).

Si dice che f è continua nel proprio intervallo di definizione I se è continua in ogni punto interno all'intervallo di definizione I:

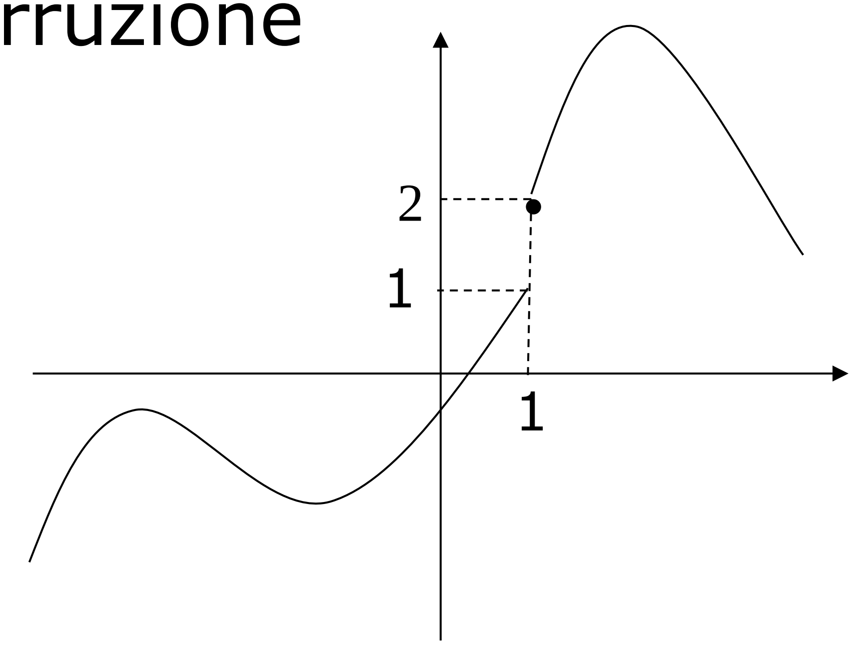
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in I$$

Grafico: f continua in x_0

Da un punto di vista grafico, dire che una funzione è continua nel proprio intervallo di definizione equivale a dire che il grafico della è costituito da una “linea continua” senza alcuna interruzione



Funzione continua



Funzione non continua

Continuità (interpretazione fisica)

Supponiamo che *y=f(x)* rappresenti una relazione che intercorre fra due grandezze fisiche; ad esempio *y* potrebbe essere una variabile di stato del sistema (ad es. il volume o la temperatura) che dipende dal tempo (variabile indipendente) *x*. La continuità di *f(x)* implica che lo stato del sistema varia con continuità, senza cambiamenti bruschi o improvvisi. Se pensiamo ad un corpo, soggetto ad una fonte di calore di intensità specifica costante *K*, la temperatura *T* del corpo varia nel tempo *t* (in opportune condizioni e per intervalli sufficientemente brevi) secondo una funzione continua, lineare, crescente, inversamente proporzionale alla massa *M* e direttamente proporzionale a *K*:

$$T(t) = T_0 + \frac{K}{M}t \qquad T_0 \ \textit{temperatura iniziale del corpo}$$

Osservazioni

1. Tutte le funzioni elementari che abbiamo presentato sono continue nel proprio domini
2. La somma, prodotto, rapporto, composizione, di funzioni continue è ancora una funzione continua

=> per tutte le funzioni che sono composizione, somma, prodotto, rapporto di funzioni elementari, in ogni punto del dominio il limite può essere calcolato semplicemente mediante una semplice valutazione di funzione. Quindi, gli unici limiti che occorre valutare utilizzando la definizione di limite, o mediante opportune considerazioni o specifiche tecniche sono quelli agli estremi del dominio ed in particolare quegli estremi del dominio che non appartengono al dominio (intervalli aperti).