Matematica

(Asintoti)

dott. Francesco Giannino

dott. Valeria Monetti

Indice lezione

- Asintoti orizzontali
- Asintoti verticali
- Asintoti obliqui

Asintoti

In relazione al grafico di una funzione si possono presentare tre tipi di asintoti:

- asintoti orizzontali
- asintoti verticali
- asintoti obliqui

Asintoti orizzontali

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I, se il limite all'infinito di risulta finito, cioè se

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$$

allora la retta $y = l$ è detta

asintoto orizzontale

per il grafico della funzione $f(x)$

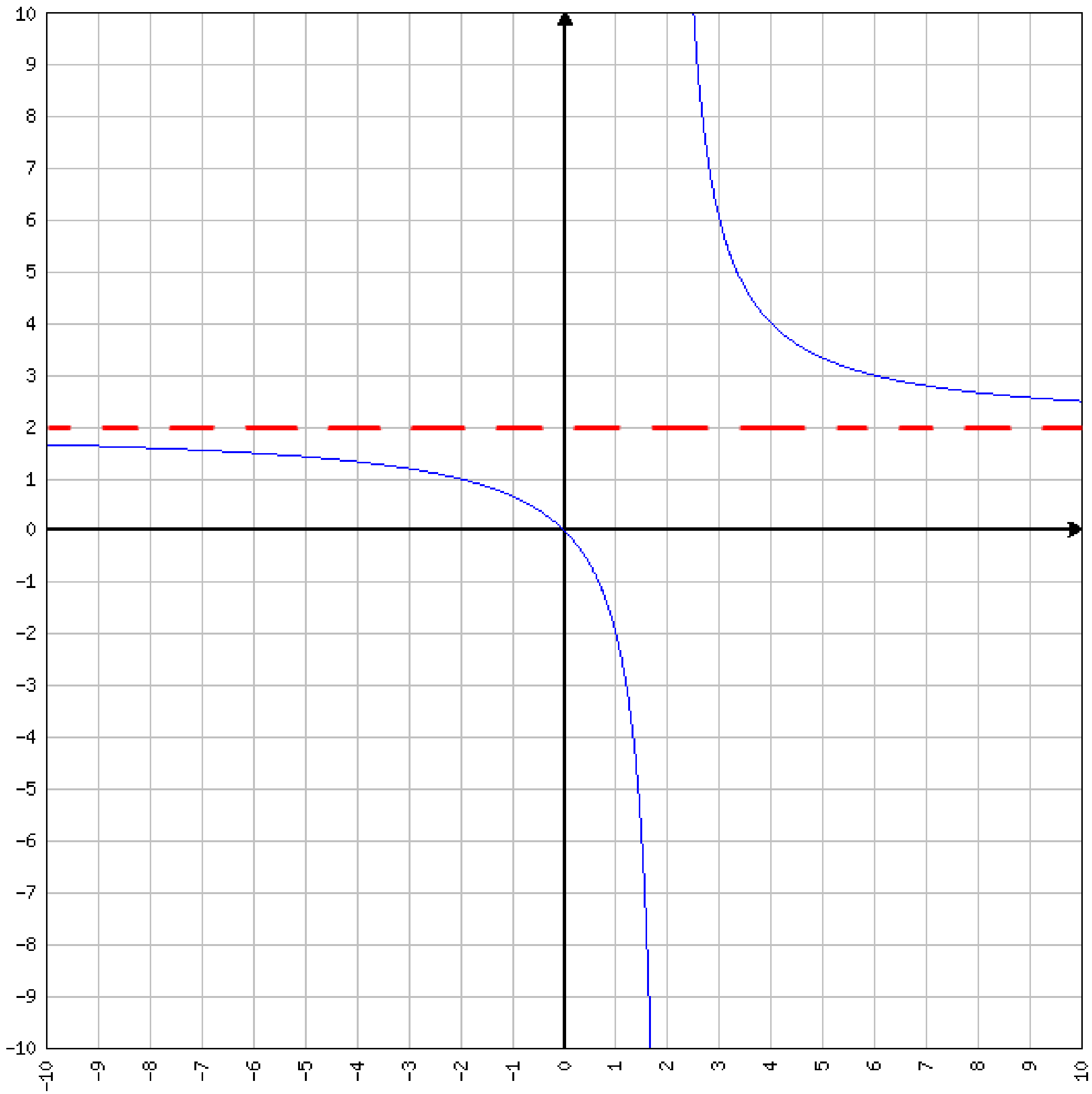
Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

$$y = 2$$

Asintoto orizzontale



Asintoti orizzontali

Se in particolare succede che:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = l_2$$

allora il grafico di $f(x)$ ammette due asintoti orizzontali:

$$y = l_1 \quad \text{a } +\infty$$

$$y = l_2 \quad \text{a } -\infty$$

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

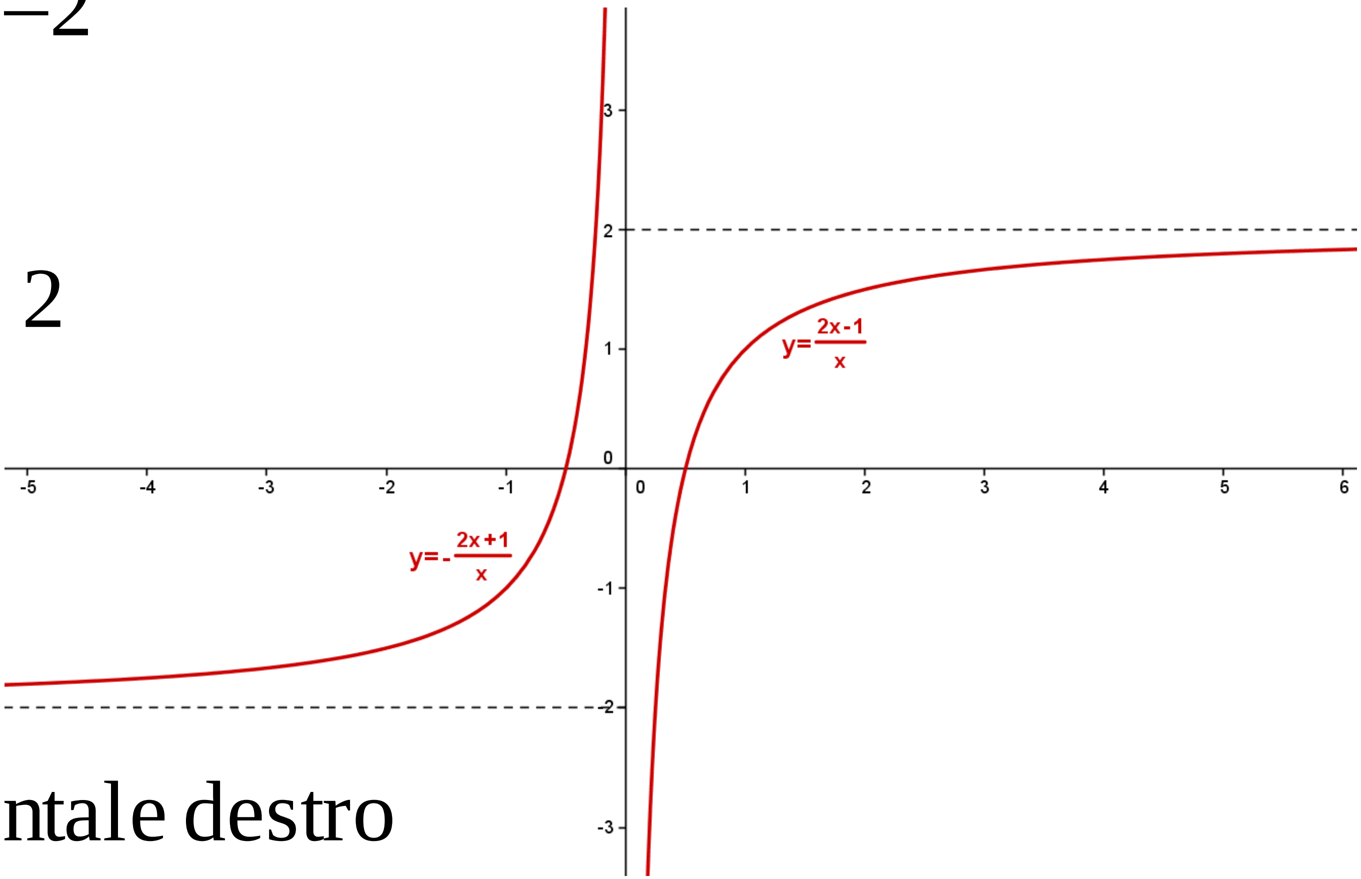
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

$$y = 2$$

Asintoto orizzontale destro

$$y = -2$$

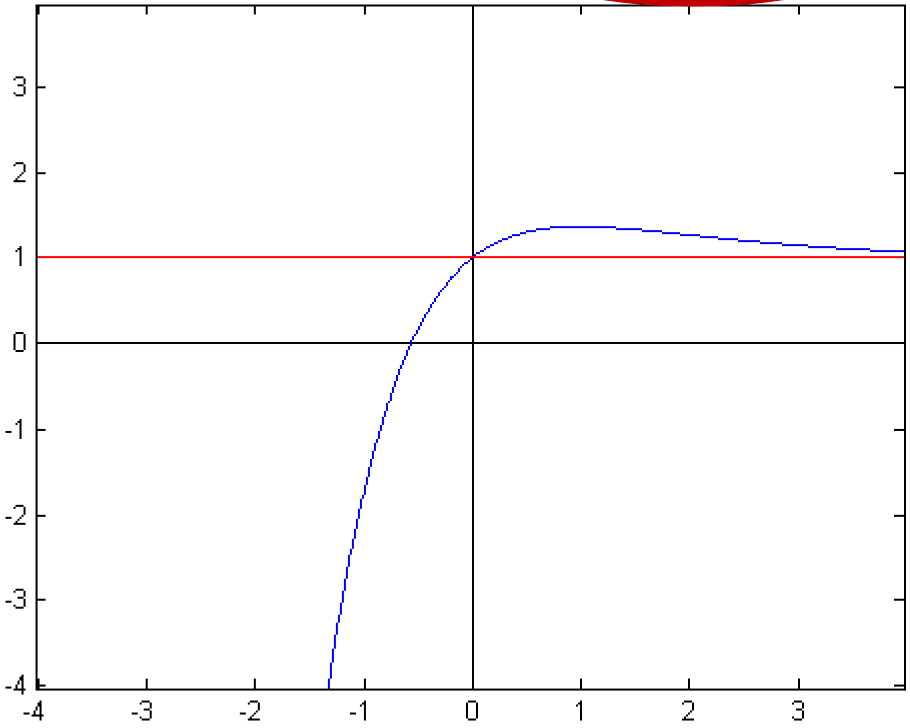
Asintoto orizzontale sinistro

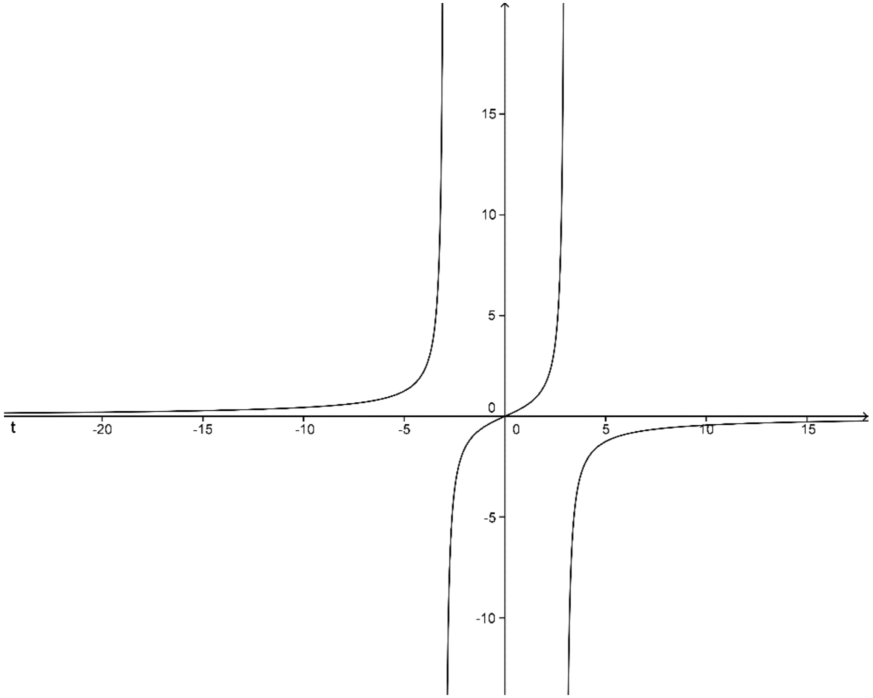


Asintoti orizzontali

Attenzione!!!! Asintono orizontale è un comportamento della funzione a $\pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$$





Asintoti orizzontali

Se il limite all'infinito di una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I risulta invece infinito, cioè se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

allora la funzione sicuramente <u>NON</u> ammette asintoto orizzontale

Asintoti verticale

Assegnata una funzione f , a valori reali definita in un intervallo I privato al più di un punto x_0, se il limite al finito x_0 risulta infinito, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

allora la retta $x = x_0$ è detta

asintoto verticale

per il grafico della funzione $f(x)$

Asintoti verticale

Quindi, se il limite al finito di una funzione risulta infinito, allora la funzione ammette sicuramente asintoto verticale di equazione

x = valore finito del valore a cui tende la x

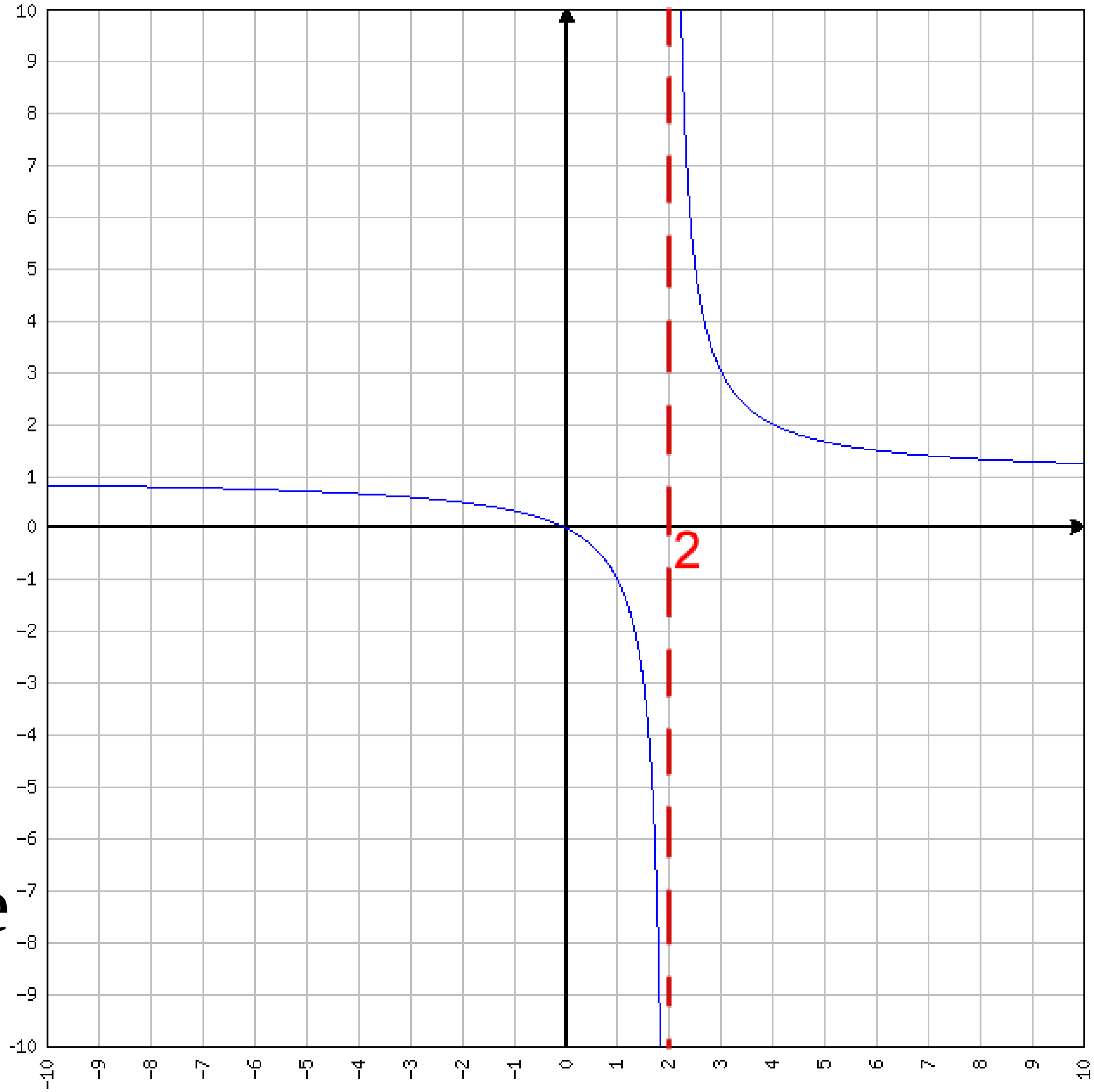
Asintoti verticale

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x = 2$$

Asintoto verticale



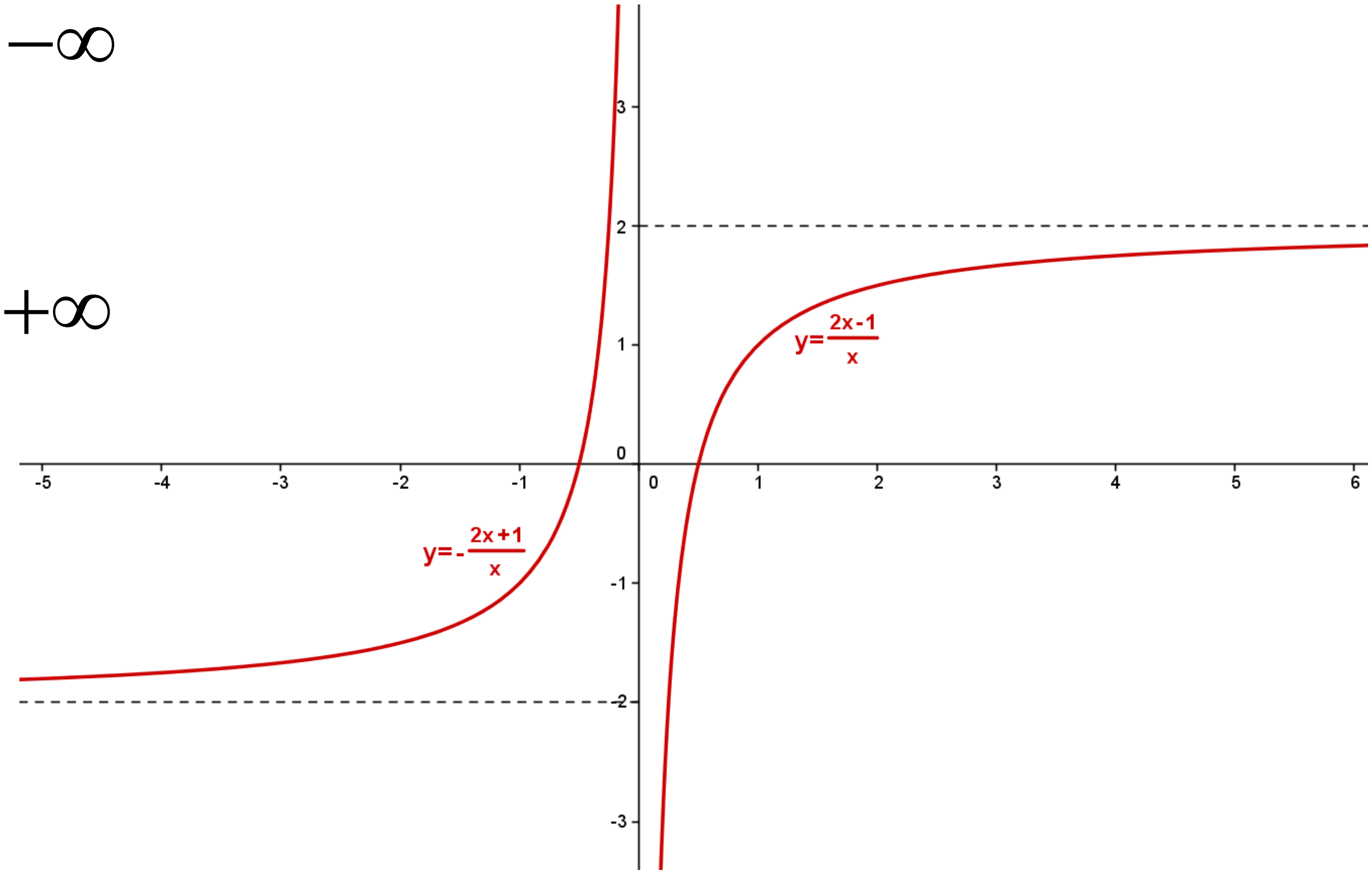
Asintoti verticale

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$x = 0$$

Asintoto verticale



Asintoti verticale

Assegnata una funzione f , a valori reali definita in un intervallo I privato al più di un punto x_0, se risulta invece che

il limite al finito risulta finito,

allora la funzione

NON ammette asintoto verticale

Schema riassuntivo

	asintoti
$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$	*f ha un asintoto orizzontale di equazione y=l*
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$	*Non esistono asintoti orizzontale*
$\lim_{x\to c} f(x) = \infty$	*x=c e' asintoto verticale per f*
$\lim_{x\to c^+} f(x) = l_1$ $\lim_{x\to c^-} f(x) = l_2$	*Non esistono asintoti verticale* *(l_2-l_1) salto*

Asintoti obliqui

Assegnata una funzione $f(x)$ definita in un intervallo I non limitato, se si verifica che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\Downarrow$$

sicuramente possiamo affermare che il grafico della funzione considerata <u>non</u> ammette asintoto orizzontale.

In questo caso, è possibile verificare se il grafico della funzione considerata ammetta **asintoto obliquo**

Asintoti obliqui

Più precisamente, se si verificano le seguenti condizioni:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

→ (non esiste asintoto orizzontale)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \ \text{ finito}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = q \ \text{ finito}$$

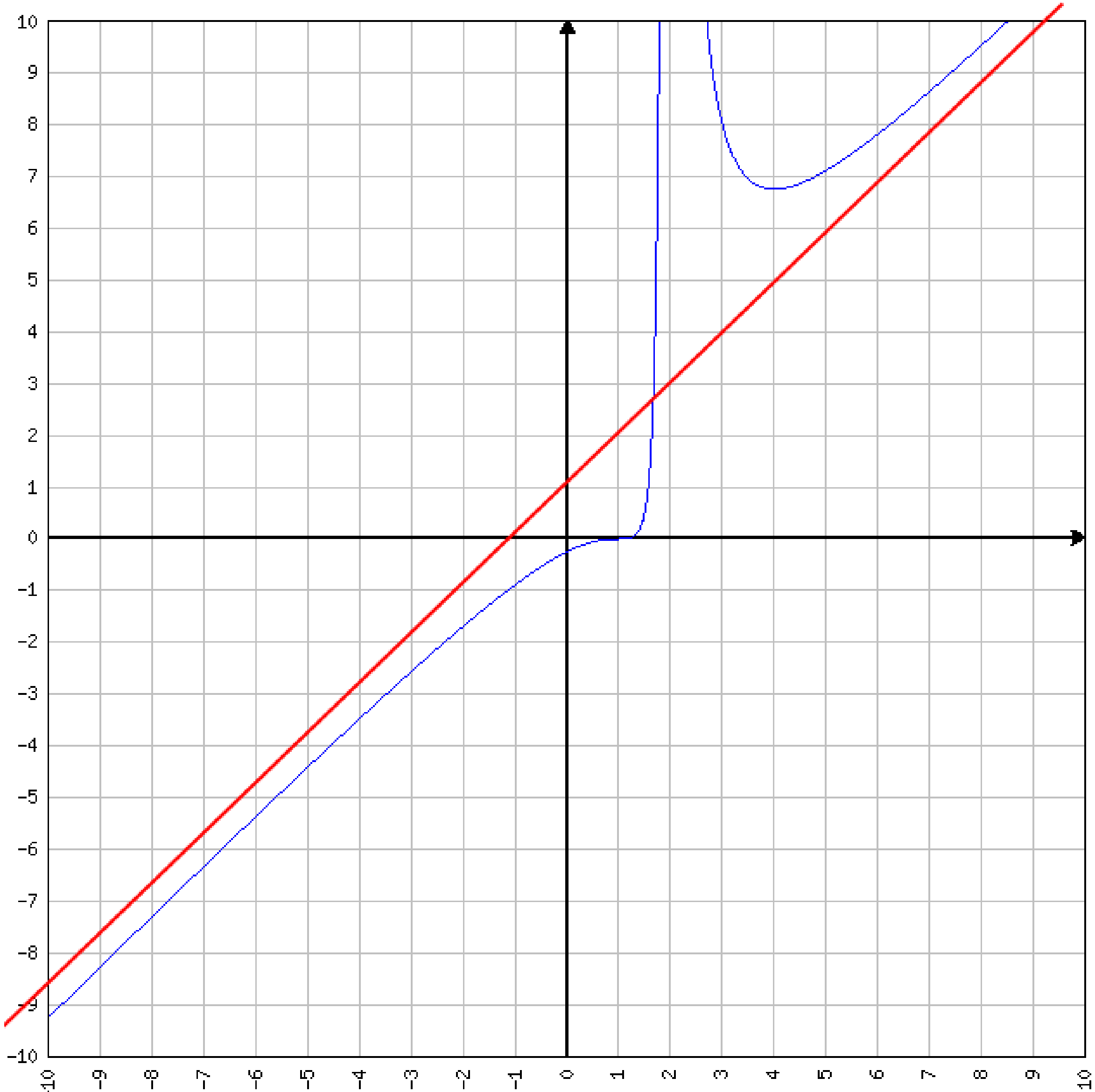
Allora il grafico della funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione

$$\boxed{y = mx + q}$$

Asintoti obliqui

$$y = mx + q$$

Equazione dell'asintoto obliquo



Asintoti obliqui

Più precisamente, se:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m\neq 0\ \text{ finito}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=q\ \text{ finito}}$$

$$\Downarrow$$

Il grafico della funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione

$$\boxed{y=mx+q}$$

Esempio

La funzione ha asintoto obliquo?

$$f(x)=\frac{3x^2-1}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x}=+\infty$$

=> La funzione non ha asintoto orizzontale

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x^2}=3$$

=> *m=3*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1}{x}-3x=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-1-3x^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x}=0$$

=> *q=0*

=> La retta *y=3x* e' asintoto obliquo

E' possibile, semplicemente osservando la forma di una **funzione fratta**, capire se la funzione ha un asintoto orizzontale, un asintoto obliquo oppure non ha asintoti di quel genere:

1. se nella funzione l'ordine del numeratore e' uguale a quello del denominatore
   - avremo un asintoto orizzontale del tipo y = numero

2. se nella funzione l'ordine del numeratore e' inferiore a quello del denominatore
   - avremo un asintoto orizzontale del tipo y = 0

3. se nella funzione l'ordine del numeratore **e' superiore di uno** a quello del denominatore
   - avremo un asintoto obliquo del tipo y = mx + q

   infatti poiche' per calcolare m dobbiamo fare il limite di f(x)/x dobbiamo moltiplicare il denominatore per x cioe' aggiungere un grado al denominatore ed il limite sara' un numero se numeratore e denominatore arrivano allo stesso grado

4. se nella funzione l'ordine del numeratore e' superiore di due, tre,.... a quello del denominatore
   - non avremo un asintoto obliquo, ma la funzione andra' all'infinito accompagnando una parabola, una cubica,....

Esercizio 6.9. Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x+1}$$

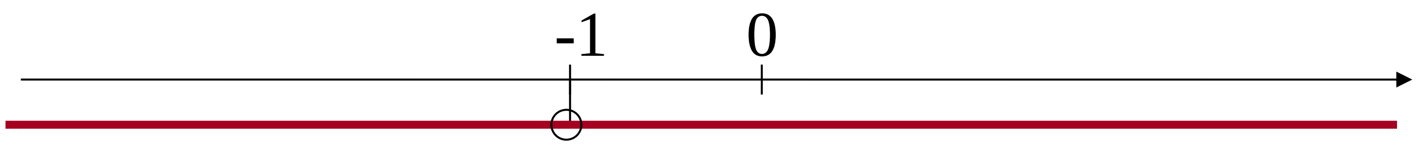
Soluzione. La prima cosa che bisogna fare nel determinare la presenza di eventuali asintoti è determinare il dominio della funzione:

$$x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$$

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Il dominio della funzione assegnata è:

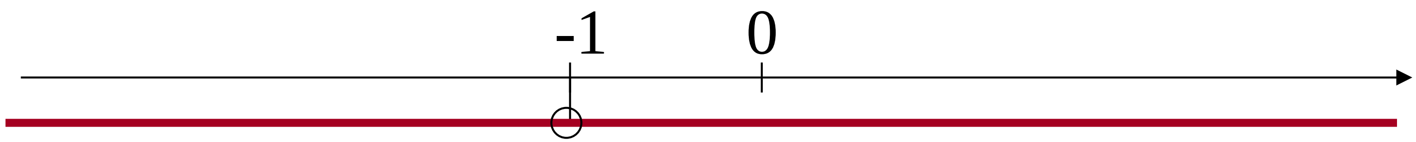
$$\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$$



Poiché la funzione assegnata ammette un punto in cui non è definita, ha senso ricercare gli eventuali asintoti verticali:

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

$$\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$$



$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{-3}{-1^-+1}=\frac{-3}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-4}{x+1}=\frac{-3}{-1^++1}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

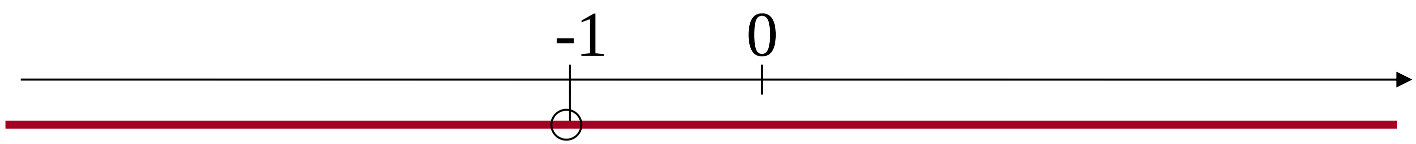
$\Rightarrow$ $x=-1$

a. verticale

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Il dominio della funzione assegnata è:

$$\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$$



Poiché la funzione assegnata ammette un dominio non limitato, ha senso ricercare gli eventuali asintoti orizzontali:

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

Non esiste a. orizzontale sinistro

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Non esiste a. orizzontale destro

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

Esercizi Asintoti dall’eserciziario

Quindi:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x+1} = \pm\infty$$

Non esiste asintoto orizzontale

Possiamo verificare se esiste l’asintoto obliquo

Esercizi Asintoti dall’eserciziario

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{x^2-4}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-4}{x+1}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4-x}{x+1}\right]=-1$$

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Quindi:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - mx \right] = -1$$

$\Rightarrow$ $y = x - 1$

asintoto obliquo

a sinistra

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Allo stesso modo si verifica che:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{-4 - x}{x + 1} \right] = -1$$

$$y = x - 1$$

asintoto obliquo

a destra

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

Globalmente:

$$y = x - 1$$

asintoto obliquo

per la funzione

Esercizi Asintoti dall'eserciziario

6.10

6.11

6.17

6.27