

# Conversione Analogico-Digitale

Marco Lops

lops@unina.it

<https://docenti.unina.it/marco.lops>

## Qualche definizione

- Come in precedenza, per *segnale* si intende una funzione del tempo  $x(t)$ , con  $t \in [t_1, t_2]$  e  $x(t) \in \mathbb{C}$ . Si noti che  $t$  è solo convenzionalmente chiamato "tempo", ma in realtà può rappresentare una qualunque variabile indipendente continua.
- Per *sequenza* intendiamo un insieme ordinato  $x(n)$ , con  $n \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{Z}$  e  $x(n) \in \mathbb{C}$ .
- Per *stringa di dati* (o semplicemente dati) indichiamo una particolare sequenza in cui  $x_d(n)$  può assumere valore in un *insieme discreto* - detto alfabeto -  $\mathcal{X}$ . Esempi di dati sono:
  - a Dati binari ( $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ );
  - b Dati quaternari ( $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\} = \{00, 01, 10, 11\}$ );
  - c Dati interi ( $\mathcal{X} = \mathbb{N}$ )

## Conversione Analogico/Digitale

Per conversione analogico/digitale (brevemente, A/D) si intende la rappresentazione di una qualunque informazione mediante stringhe di dati. Questo comporta:

- a Quando l'informazione di partenza è un segnale, le due operazioni:
  - a1 Conversione tempo-continuo in tempo-discreto (cioè, passaggio da  $x(t)$  a  $x(n)$ ), detto *campionamento*;
  - a2 Conversione ampiezza continua-ampiezza discreta (cioè passaggio da  $x(n) \in \mathbb{C}$  a  $x_d(n) \in \mathcal{X}$ ), detta anche *quantizzazione o compressione con perdite*.
- b Quando l'informazione di partenza è una sequenza, avremo solo la fase [a2].

## Campionamento ideale

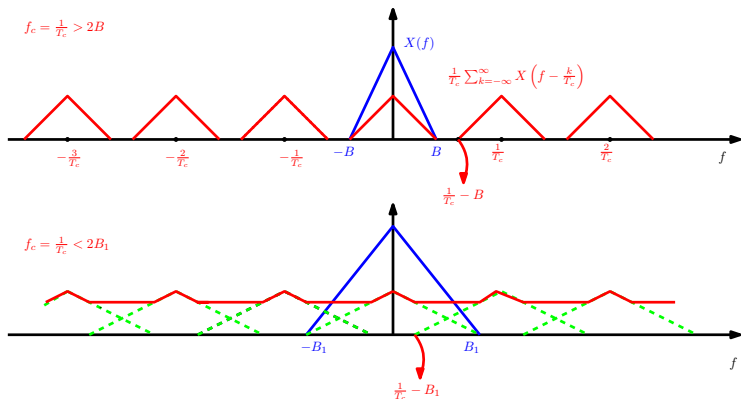
Dato un segnale  $x(t)$  con trasformata (in senso ordinario o generalizzato)  $X(f)$ , ne definiamo la versione *campionata idealmente* nella forma:

$$x_{\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c)\delta(t - kT_c)$$

- $T_c$  è detto passo di campionamento;
- $f_c = \frac{1}{T_c}$  è detta frequenza di campionamento.

Ricordiamo che:

$$X_{\delta}(f) = \frac{1}{T_c} \text{rep}_{\frac{1}{T_c}} [X(f)] = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{k}{T_c}\right)$$



- Nel primo caso ( $f_c \not\approx 2B$ ) le repliche non interferiscono;
- Nel secondo caso ( $f_c \not\approx 2B_1$ ) modificano radicalmente lo spettro.

## Reversibilità del campionamento ideale

Si assuma  $f_c > 2B$ . Ovviamente avremo:

$$X(f) = T_c X_\delta(f) \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \Rightarrow x(t) = T_c x_\delta(t) * \mathcal{F}^{-1}\left[\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)\right]$$

che, esplicitata, dà:

$$x(t) = 2BT_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c) \text{sinc}[2B(t - kT_c)]$$

La precedente - nota come espansione di Shannon per segnali a banda limitata - dimostra che un segnale di banda monolatera  $B$  può essere perfettamente rappresentato mediante la sequenza dei suoi campioni presi a un passo  $T_c < \frac{1}{2B}$  o - equivalentemente - a una frequenza  $f_c > 2B$ .

Ogni frequenza di campionamento inferiore risulta in un'irrecuperabile perdita di informazione e il segnale non è più ricostruibile.

## Irrealizzabilità del Campionamento Ideale

- Nessun segnale di durata finita ha banda rigorosamente limitata;
- Il segnale campionatore usa impulsi di Dirac, che ovviamente non esistono nella realtà;
- Il filtro di ricostruzione è un LPF ideale, con risposta impulsiva

$$h(t) = 2B\text{sinc}(2Bt)$$

che è integrabile, ma non sommabile. Pertanto un LPF ideale è un sistema instabile;

- Anche se un LPF ideale fosse stabile, non sarebbe desiderabile perchè molto sensibile a errori di sincronizzazione.

## Contromisure

- I segnali prima del campionamento vengono filtrati attraverso un LPF - detto filtro anti-aliasing - teso a limitarne la banda il più possibile entro un valore nominale; eseguire comunque un sovracampionamento rispetto alla banda nominale.
- I segnali campionatori usano impulsi reali, cioè di ampiezza e durata finita;
- Il filtro di ricostruzione è un filtro reale - un qualunque LPF di banda pari a quella del filtro anti-aliasing.

### CONSEGUENZE

- La non limitatezza della banda risulta inevitabilmente in un qualche aliasing residuo;
- L'impiego di impulsi reali dà luogo a una distorsione;

## Treno campionatore ideale

Si supponga di usare un treno di impulsi di ampiezza finita e durata finita, cioè:

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c)p(t - kT_c)$$

consideriamone gli effetti spettrali:

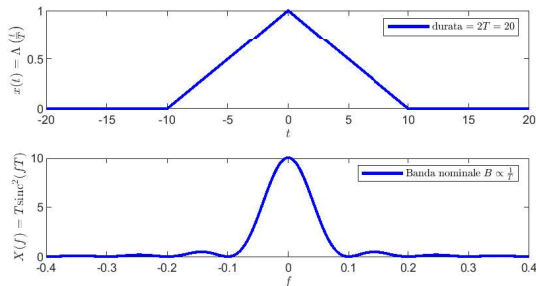
$$\begin{aligned} X_p(f) &= \mathcal{F} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c)p(t - kT_c) \right] = \mathcal{F} \left[ p(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_c)\delta(t - kT_c) \right] \\ &= \mathcal{F} [p(t)] \mathcal{F} [x_\delta(t)] = \frac{P(f)}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X \left( f - \frac{k}{T_c} \right) \end{aligned}$$

Quindi l'uso di un treno reale genera una *distorsione lineare* - nota come effetto apertura.

## Un esempio: Il segnale triangolare

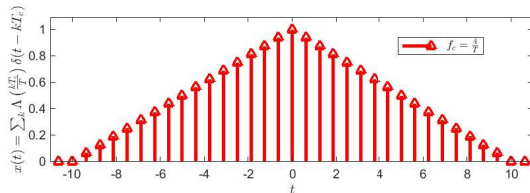
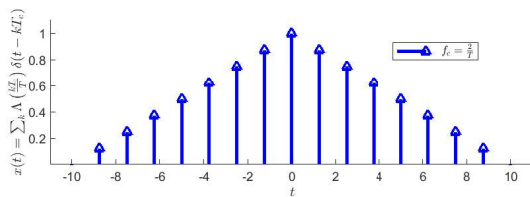
Si consideri:

$$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \implies X(f) = T \operatorname{sinc}^2(fT)$$



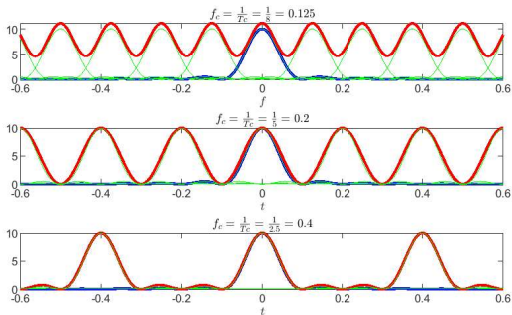
# Campionamenti ideali

Consideriamo un tasso "nominale"  $f_c = \frac{2}{T}$  e un tasso "conservativo"  $f_c = \frac{4}{T}$ .



# Effetto del sotto/sovracampionamento

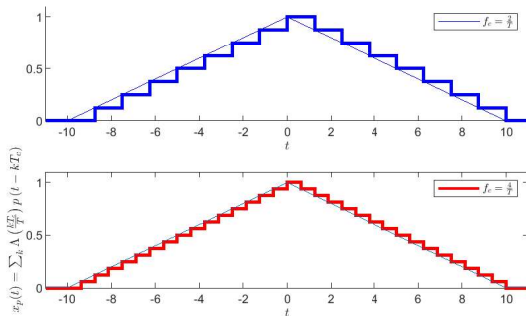
$$X(f) \quad \{X(f - kf_c)\}_{k \in \mathbb{Z}} \quad f_c X_\delta(f)$$



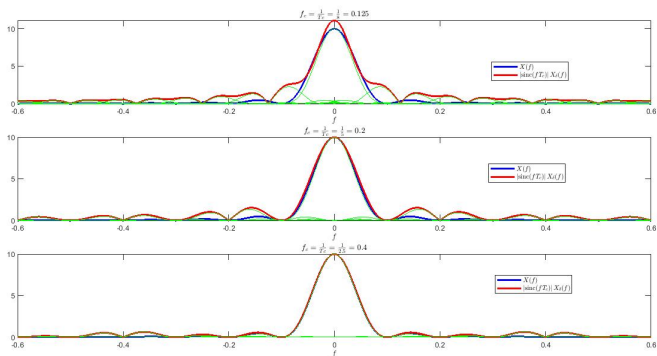
## Effetto di un treno di impulsi reali

La scelta più ovvia è sostituire gli impulsi di Dirac con degli impulsi rettangolari:

$$x_p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(kT_c) p(t - kT_c) \quad p(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{T_c}{2} - kT_c}{T_c}\right)$$



# Effetto apertura



## Interpolazione

Quando il segnale non è a banda rigorosamente limitata bisogna scegliere:

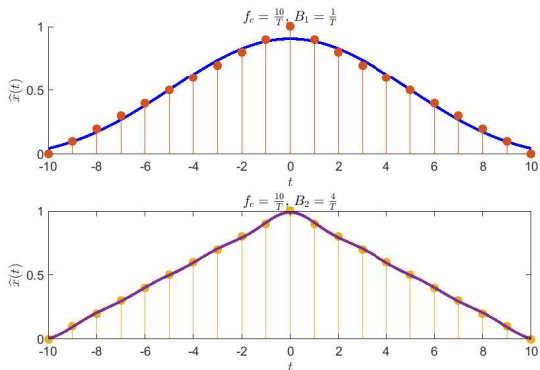
- a Una definizione di banda nominale, da usare per progettare il filtro in ricezione;
- b Una frequenza di campionamento che sia convenientemente maggiore di quella nominale;

Consideriamo ad esempio il campionamento del segnale triangolare visto prima. Consideriamo due situazioni:

- Frequenza di campionamento costante  $f_c = 10/T$ , bande di ricostruzione  $B_1 = \frac{1}{T}$  e  $B_2 = \frac{4}{T}$ ;
- Banda nominale pari a  $B = \frac{3}{T}$  e frequenze di campionamento  $f_{c,1} = \frac{4}{T}$  e  $f_{c,2} = \frac{10}{T}$ .

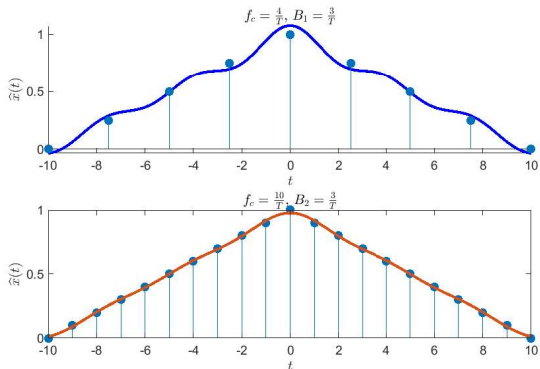
## Scenario [a]: Effetto della banda del filtro interpolatore

Un filtro interpolatore a banda troppo stretta non è in grado di catturare le variazioni rapide del segnale (cioè, "perde" le alte frequenze)



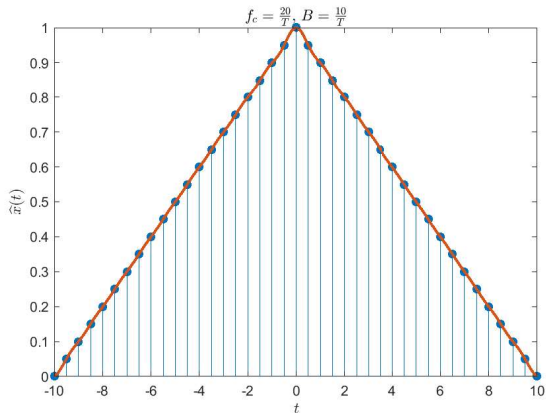
## Scenario [b]: Effetto del campionamento

Qui si capisce chiaramente che, indipendentemente dalla banda del filtro interpolatore, l'effetto del sottocampionamento può essere drammatico



## Agendo su $f_c$ e $B$ ....

Si riesce a realizzare una ricostruzione di qualità con una quarantina di campioni



## Conclusioni

- Con un'opportuna scelta dei parametri rilevanti, qualunque segnale  $x(t)$  può essere rappresentato mediante una sequenza  $x(n)$  senza apprezzabile perdita di informazione;
- Ricordiamo ancora una volta che l'indice  $n$  è solo convenzionalmente identificato con istanti di tempo;
- L'insieme  $\mathcal{A}_X$  in cui tale sequenza assume valore è tuttavia in generale continuo: questo implica che una sua rappresentazione richiederebbe infiniti bit (cioè un tasso  $R = \frac{\#bit}{campione} = \infty$ ).
- Un'operazione volta a rappresentare la sequenza  $x(n)$  attraverso un tasso  $R$  finito si definisce *compressione con perdite* (o quantizzazione) a  $R$  bit.

## Definizioni

- Eseguire una compressione a  $R$  bit implica che la sequenza è rappresentata attraverso  $M = 2^R$  livelli, cioè  $|\hat{\mathcal{X}}| = 2^R$ .
- Questo comporta:
  - a Determinare una partizione di  $\mathbb{C}$  (o del suo sottoinsieme  $\mathcal{A}_X$  in cui  $x(n)$  assume valore):

$$\mathcal{A}_X = \bigcup_{i=0}^{2^R-1} \mathcal{A}_{X,i}$$

- b Determinare altrettanti livelli di *restituzione* (o rappresentazione)  $\{x_i\}_{i=0}^{M-1}$  in modo tale che:

$$\text{se } x(n) \in \mathcal{A}_{X,i} \implies \hat{x}(n) = \hat{x}_i \in \hat{\mathcal{X}}$$

## Commenti

- Tanto gli elementi della partizione  $\mathcal{A}_{X,i}$  quanto i livelli di rappresentazione  $\{\hat{x}_i\}_{i=0}^{M-1}$  sono *gradi di libertà* sotto il controllo del progettista;
- È evidente che il segnale rappresentato differisce da quello originario. Una misura di questa discrepanza è la *distorsione media*.
- In particolare essa si misura definendo una funzione

$$d : (x, \hat{x}) \in \mathcal{X} \times \hat{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

per cui la *distorsione media* è

$$D = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N d[x(n), \hat{x}(n)]$$

- Un compressore si dice *ottimo* per una certa misura di distorsione se minimizza  $D$  per un dato  $R$ . Una scelta comune per sequenze reali è  $d(x, \hat{x}) = (x - \hat{x})^2$  e il relativo compressore si dice a *minimo errore quadratico medio* (Minimum Mean Square Error, MMSE).

## Quantizzatore uniforme

- Si consideri una sequenza reale che assuma valori in  $[-A, A]$ ;
- Si suddivida l'intervallo  $(-A, A)$  in  $M = 2^R$  sotto-intervalli di uguale ampiezza, cioè  $\mathcal{A}_X = \bigcup_{i=1}^M \mathcal{A}_{X_i}$ :

$$\mathcal{A}_{X_i} = \begin{cases} [-A; -A + \frac{2A}{M} [ & i = 1 \\ [-A + (i-1)\frac{2A}{M}; -A + i\frac{2A}{M} ] & 2 \leq i \leq M-1 \\ ]A - \frac{2A(M-1)}{M}; A] & i = M \end{cases}$$

- Si definiscano infine gli  $M$  livelli di rappresentazione:

$$\hat{x}_i = -A + (2i-1)\frac{A}{M}$$

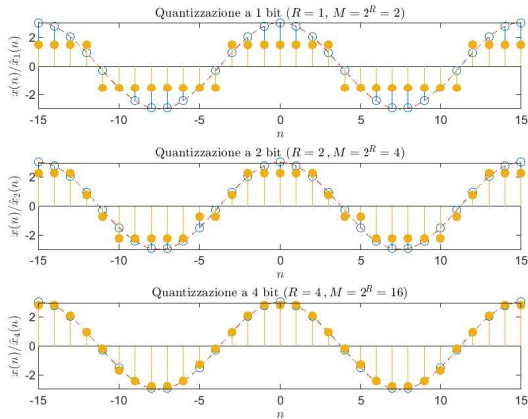
- La struttura così ricavata si chiama *quantizzatore uniforme*.





# $3 \cos\left(\frac{2\pi}{15}n\right)$ compressa al variare di $R$

La distorsione ovviamente si riduce all'aumentare di  $R$ :



## Il sovraccarico

- Se un valore esatto di  $A$  non è disponibile, la legge di quantizzazione si riscrive nella forma:

$$\hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_1 & x < -A + \frac{2A}{M} \\ \hat{x}_i & \text{se } x \in \left[-A + (i-1)\frac{2A}{M}; -A + i\frac{2A}{M}\right[, 2 \leq i \leq M-1 \\ \hat{x}_M & \text{se } x \geq A - \frac{2A(M-1)}{M} \end{cases}$$

- $A$  quindi determina il massimo e il minimo *livello di rappresentazione*;
- Il quantizzatore si dice in sovraccarico se  $x < -A$  o  $x > A$ .

## Un esempio: Quantizzazione di un impulso esponenziale

- Si assuma che la sequenza da comprimere sia:

$$x(n) = A\rho^{|n|} = 10 \times (0.9)^{|n|} \quad n \in \mathbb{Z}$$

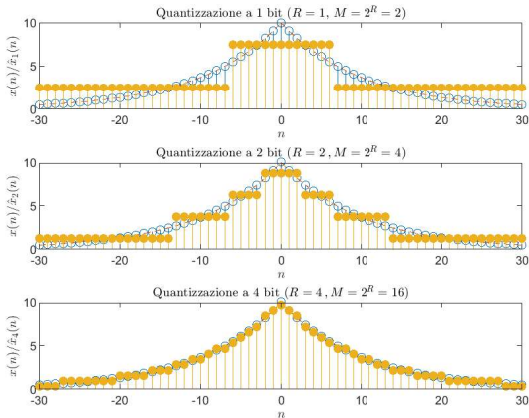
- Siccome  $x(n) \in \mathbb{R}_+$ , dobbiamo eseguire una partizione di  $[0, \infty[$ .
- Definiamo:

$$\left\{ x_i = \frac{A}{M}(i-1) \right\}_{i=1}^{M+1} \Rightarrow \hat{x}_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad x \in [x_i, x_{i+1}[ \quad i = 1, \dots, M$$

- La situazione nominale per  $R = 1, 2, 4$  è quella rappresentata nella prossima figura.

# Quantizzazione di una sequenza esponenziale

Andamento della sequenza compressa al variare del tasso di quantizzazione  $R$ :



## Misure reali

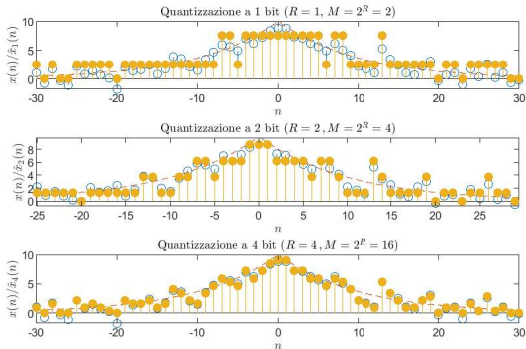
- Supponiamo ora che i dati siano corrotti da un disturbo, per esempio un rumore additivo Gaussiano  $w(n) \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , indipendente da elemento a elemento.
- La sequenza in ingresso al compressore è dunque:

$$z(n) = x(n) + w(n) = 10 * (0.9)^{|n|} + w(n)$$

- Si noti che a questo punto non è definito un valore massimo della sequenza *reale* da quantizzare.
- Vediamo l'effetto sulla distorsione.

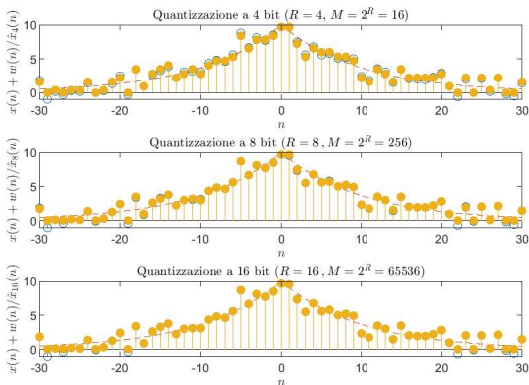
## Effetto del rumore - 1

Andamento della sequenza compressa al variare del tasso di quantizzazione  $R$ :



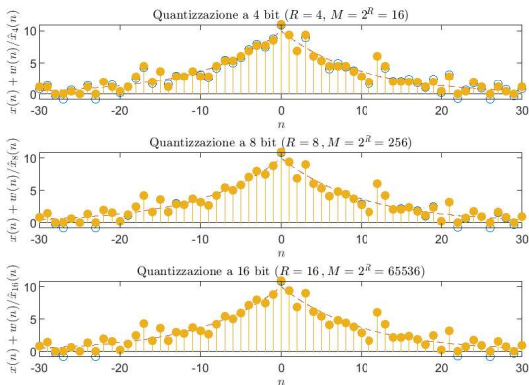
## Effetto del rumore - 2

Andamento della sequenza compressa al variare del tasso di quantizzazione  $R$  a parità di dinamica ( $A = 10$ ):



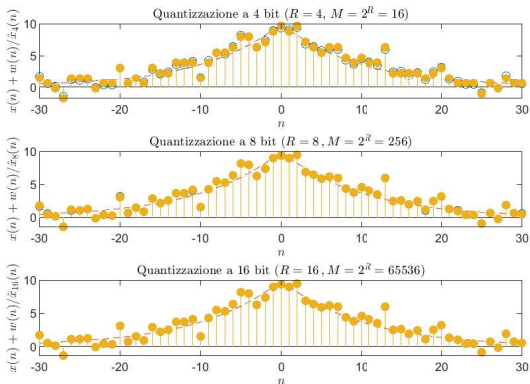
## Effetto del rumore - 2

Andamento della sequenza compressa al variare del tasso di quantizzazione  $R$  con una dinamica maggiore ( $A = 13$ ):



## Effetto del rumore - 3

Andamento della sequenza compressa al variare del tasso di quantizzazione  $R$  con una dinamica tra  $-3$  e  $A + 3$  (per portare in conto l'effetto del rumore). I dati rumorosi sono soddisfacentemente rappresentati anche con un quantizzatore a 4 bit.



## Qualche considerazione

- Le precedenti slides mostrano che, per ottenere una rappresentazione adeguata di sequenze rumorose mediante sequenza dati, dobbiamo aumentare comunque in modo notevole il tasso di compressione;
- La situazione peggiora se il rumore ha una potenza media crescente.
- A questo punto ci si chiede: si può fare di meglio?
- La risposta richiede un po' di applicazione della teoria della probabilità.

## Sulla Distorsione quadratica media - 1

Abbiamo visto che la distorsione quadratica media  $D_{\text{MMSE}}$  si scrive:

$$D_{\text{MMSE}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N [x(n) - \hat{x}(n)]^2$$

Ora supponiamo che  $x(n)$  siano variabili aleatorie i.i.d. con pdf  $f_X(x)$ . Sia  $n_i$  il numero di volte in cui  $x(n) \in [x_i, x_{i+1}[$ . Sulle  $2N+1$  variabili,  $n_i$  sono incluse nell'intervallo  $[x_1, x_2[$ , siano esse

$$\{x(i)\}_{i \in \mathcal{I}_1} \quad |\mathcal{I}_1| = n_1$$

$n_2$  - i cui indici sono raccolti nell'insieme  $\mathcal{I}_2$  di cardinalità  $n_2$ , nell'intervallo  $[x_2, x_3[$ , e così via, con  $\sum_{i=1}^M n_i = 2N+1$ . Avremo:

$$\sum_{n=-N}^N [x(n) - \hat{x}(n)]^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{n \in \mathcal{I}_i} [x(n) - \hat{x}_i]^2$$

## Sulla Distorsione quadratica media - 2

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n \in \mathcal{I}_i} [x(n) - \hat{x}_i]^2 = \frac{n_i}{2N+1} \frac{1}{n_i} \sum_{n \in \mathcal{I}_i} [x(n) - \hat{x}_i]^2$$

Quando  $N \rightarrow \infty$ , la teoria della probabilità ci dice che:

$$\frac{1}{2N+1} \sum_{n \in \mathcal{I}_i} [x(n) - \hat{x}_i]^2 \rightarrow \Pr \{x \in (x_i, x_{i+1})\} \mathbb{E} \left[ (x - \hat{x}_i)^2 \mid x \in (x_i, x_{i+1}) \right]$$

Pertanto:

$$D_{\text{MMSE}} = \sum_{i=1}^M \mathbb{E} \left[ (x - \hat{x}_i)^2 \mid x \in (x_i, x_{i+1}) \right] \Pr \{x \in (x_i, x_{i+1})\} \rightarrow$$

$$D_{\text{MMSE}} = \mathbb{E} \left[ (x - \hat{x})^2 \right]$$

## Un primo approccio un po' naif

### Dati

- Un tasso di compressione  $R$  (il che significa assegnare  $M = 2^R$ );
- Una pdf dei dati continui, sia essa  $f_X(x)$ ;

### Determinare:

- Una partizione del supporto di  $f_X(x)$ ,  $\text{supp}[f_X(x)] = \bigcup_{i=1}^M [x_i, x_{i+1}[$ ;
- Un insieme di  $M$  livelli di rappresentazione,  $\{\hat{x}_i\}_{i=1}^M$ ;

in modo tale da minimizzare

$$D_{\text{MMSE}} = \sum_{i=1}^M \Pr\{x \in [x_i, x_{i+1}[ \} \int_{\mathbb{R}} (x - \hat{x}_i)^2 f_{X|X \in [x_i, x_{i+1}[}(x) dx$$

## Esempio - 1

Sia  $R = 1$  e  $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Avendo un solo bit, dovremo dividere  $\mathbb{R}$  in due sotto-intervalli, con una legge di quantizzazione:

$$\hat{x} = \begin{cases} \hat{x}_1 & x < x_1 \\ \hat{x}_2 & x \geq x_1 \end{cases}$$

Avremo:

$$\begin{aligned} D_{\text{MMSE}} &= \Pr\{X < x_1\} \int_{-\infty}^{x_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_{X|X < x_1}(x) dx \\ &\quad + \Pr\{X \geq x_1\} \int_{x_1}^{\infty} (x - \hat{x}_2)^2 f_{X|X \geq x_1}(x) dx \end{aligned}$$

Sappiamo che:

$$f_{X|X < x_1}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\Pr\{X < x_1\}} & x < x_1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad f_{X|X \geq x_1}(x) = \begin{cases} \frac{f_X(x)}{\Pr\{X \geq x_1\}} & x \geq x_1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

## Esempio - 2

Pertanto:

$$D_{\text{MMSE}} = \int_{-\infty}^{x_1} (x - \hat{x}_1)^2 f_X(x) dx + \int_{x_1}^{\infty} (x - \hat{x}_2)^2 f_X(x) dx$$

I livelli di rappresentazione saranno quindi dati dalla soluzione di:

$$\frac{\partial D_{\text{MMSE}}}{\partial \hat{x}_1} = 2 \int_{-\infty}^{x_1} (x - \hat{x}_1) f_X(x) dx = 0$$

$$\frac{\partial D_{\text{MMSE}}}{\partial \hat{x}_2} = 2 \int_{x_1}^{\infty} (x - \hat{x}_2) f_X(x) dx = 0$$

cioè:

$$\hat{x}_1 \Pr\{X < x_1\} = \int_{-\infty}^{x_1} x f_X(x) dx \quad \hat{x}_2 \Pr\{X \geq x_1\} = \int_{x_1}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$\hat{x}_1 = \mathbb{E}[X | X < x_1] \quad \hat{x}_2 = \mathbb{E}[X | X \geq x_1]$$

## Esempio -3

Il valore di  $x_1$  risulta dalla condizione:

$$\frac{\partial D_{\text{MMSE}}}{\partial x_1} = (x_1 - \hat{x}_1)^2 f_X(x_1) - (x_1 - \hat{x}_2)^2 f_X(x_1) = 0$$

Le tre condizioni sono senz'altro soddisfatte se si sceglie  $x_1 = 0$ , il che implica:

$$x_1 = 0 \implies \begin{cases} \hat{x}_1 = \mathbb{E}[X|X < 0] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \\ \hat{x}_2 = \mathbb{E}[X|X \geq 0] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X|X \geq 0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \overbrace{\frac{1}{\Pr\{X \geq 0\}}}_{=2} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

## Conclusioni

- Il progetto di sistemi di compressione con perdite (comunemente detti quantizzatori) è tutt'altro che banale;
- Il cosiddetto quantizzatore uniforme è solo una prima - intuitiva, ma semplice - soluzione alla questione della conversione A/D;
- Il problema generale ammette un inquadramento metodologico alla luce della *Rate-Distortion Theory*, dovuta a C. E. Shannon, che inquadra il problema del progetto nella minimizzazione del tasso di quantizzazione  $R$  in modo da subire una distorsione non superiore a un determinato valore tollerabile.
- Volete avere più informazione sull'argomento? Seguite - alla laurea magistrale - il corso di Teoria dell'Informazione.

## Un'applicazione del teorema del campionamento

- Sia  $x_a(t)$  un segnale di energia, di "durata effettiva"  $T$  e di "banda effettiva"  $B_c$ ;
- Lo scopo di questo esempio è capire come applicare la teoria fin qui sviluppata per compiere l'analisi spettrale di  $x_a(t)$ , cioè per calcolarne lo spettro  $X_a(f)$ .
- Notiamo che il segnale è campionabile con periodo  $T_c = \frac{1}{2B_c}$ , per cui, data la sua durata "effettiva", è rappresentabile con  $N = \frac{T}{T_c} = 2B_c T$  elementi, cioè con la  $N$ -sequenza  $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ .
- Definiamo DFT (Discrete Fourier Transform) della  $N$ -sequenza  $x(n)$ . La  $N$ -sequenza

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

- Esistono algoritmi molto efficienti (Fast Fourier Transform, FFT) per computare la DFT anche per valori molto elevati di  $N$ .

## Qualche osservazione

- Notiamo che la versione campionata di  $x_a(t)$  gode delle seguenti caratteristiche:

$$x_{a,\delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_a(kT_c)\delta(t - kT_c) = \sum_{k=0}^{N-1} x_a(kT_c)\delta(t - kT_c)$$

$$X_{a,\delta}(f) = \frac{1}{T_c} \sum X_a(f - kf_c) = \sum_{k=0}^{N-1} x_a(kT_c)e^{-j2\pi fT_c k} \implies$$

$$X_a(f) = T_c X(fT_c) \quad |f| \leq \frac{1}{2T_c} \text{ con } X(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n\nu}$$

- Si intuisce quindi che dovrebbe essere possibile stimare  $X_a(f)$  (nell'intervallo  $-B_c = -\frac{1}{2T_c} \leq f \leq B_c = \frac{1}{2T_c}$ ) a partire dalla DFT di  $x(n)$ .

## Interpolazione della DFT

Ovviamente, siccome la DFT è la restrizione a un periodo della DFS del segnale periodico  $\tilde{x}(n) = \text{rep}_N [x(n)]$ , avremo che  $X(k) = X(\nu)|_{\nu=\frac{k}{N}}$ .

D'altronde, risulta:

$$\mathcal{F}[\text{rep}_N [x(n)]] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \tilde{\delta} \left( \nu - \frac{k}{N} \right) \implies$$

$$X(\nu) = \mathcal{F}[\text{rep}_N [x(n)] R_N(n)] = D_N(\nu) * \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \tilde{\delta} \left( \nu - \frac{k}{N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) D_N \left( \nu - \frac{k}{N} \right)$$

Pertanto:

$$X_a(f) = \frac{T_c}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) D_N \left( fT_c - \frac{k}{N} \right), \quad -B_c = -\frac{1}{2T_c} \leq f \leq B_c = \frac{1}{2T_c}$$