Statistica per le scienze sociali

Seconda edizione

Enrica Amaturo, Biagio Aragona, Maria Gabriella Grassia, Carlo Natale Lauro, Marina Marino

UTET UNIVERSITÀ

9 Test di ipotesi

Capitolo a cura di
M.G. Grassia, M.Marino

Statistica per le scienze sociali

Seconda edizione

Enrica Amaturo, Biagio Aragona, Maria Gabriella Grassia, Carlo Natale Lauro, Marina Marino

UTET

9 Test di ipotesi

Caratteristiche generali di un test di ipotesi

- Ipotesi statistiche e ipotesi nulla
- Errore campionario e livello di significatività
- Regione critica
- I passi da seguire per effettuare un test statistico
- I principali test statistici parametrici

Test sulla media

- Test sulla media con varianza nota
- Test sulla media con varianza incognita
- Test sulla media per grandi campioni

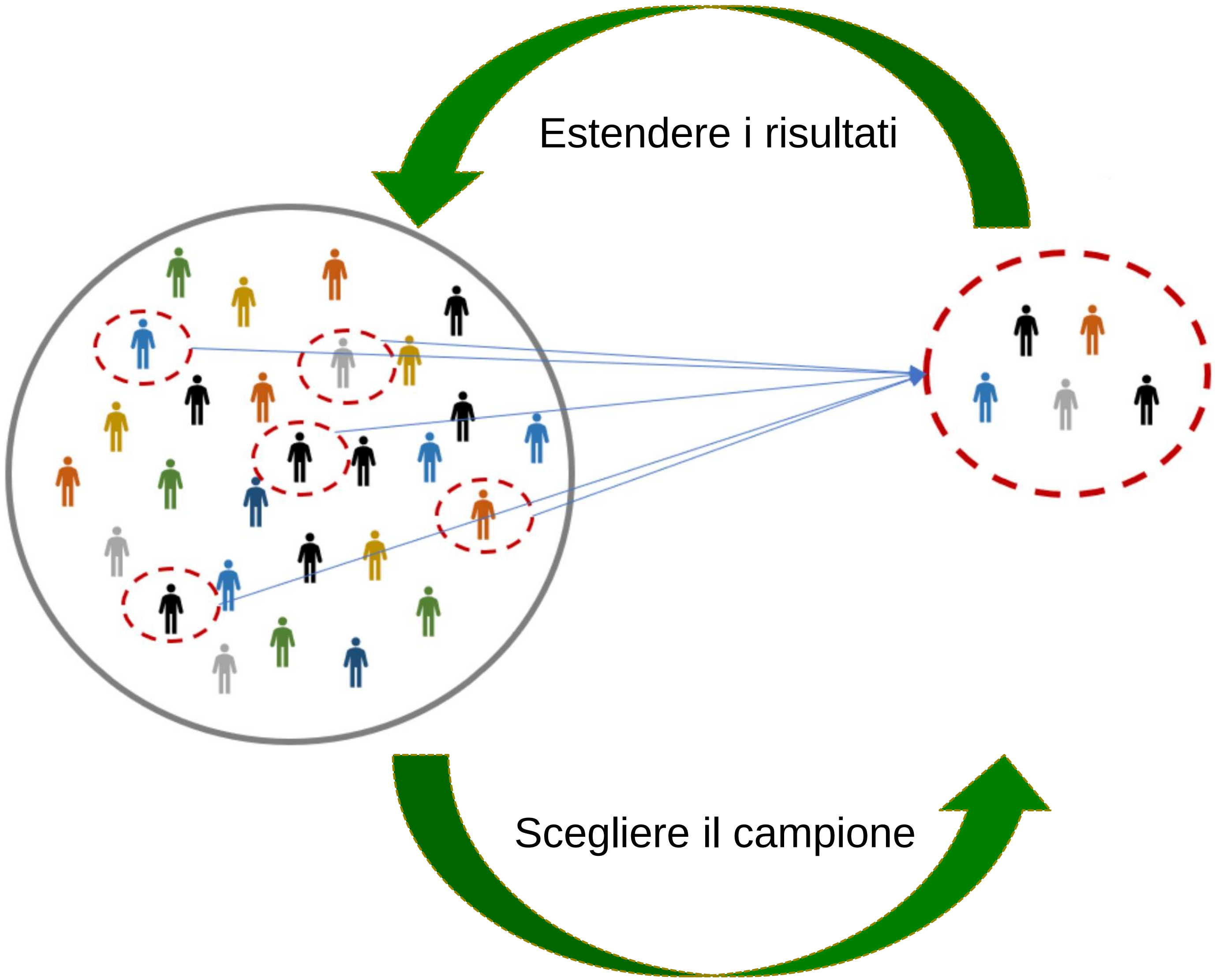
Test sulla proporzione (frequenza di una variabile di Bernoulli)

Alcune considerazioni sulla numerosità campionaria e sulla potenza del test

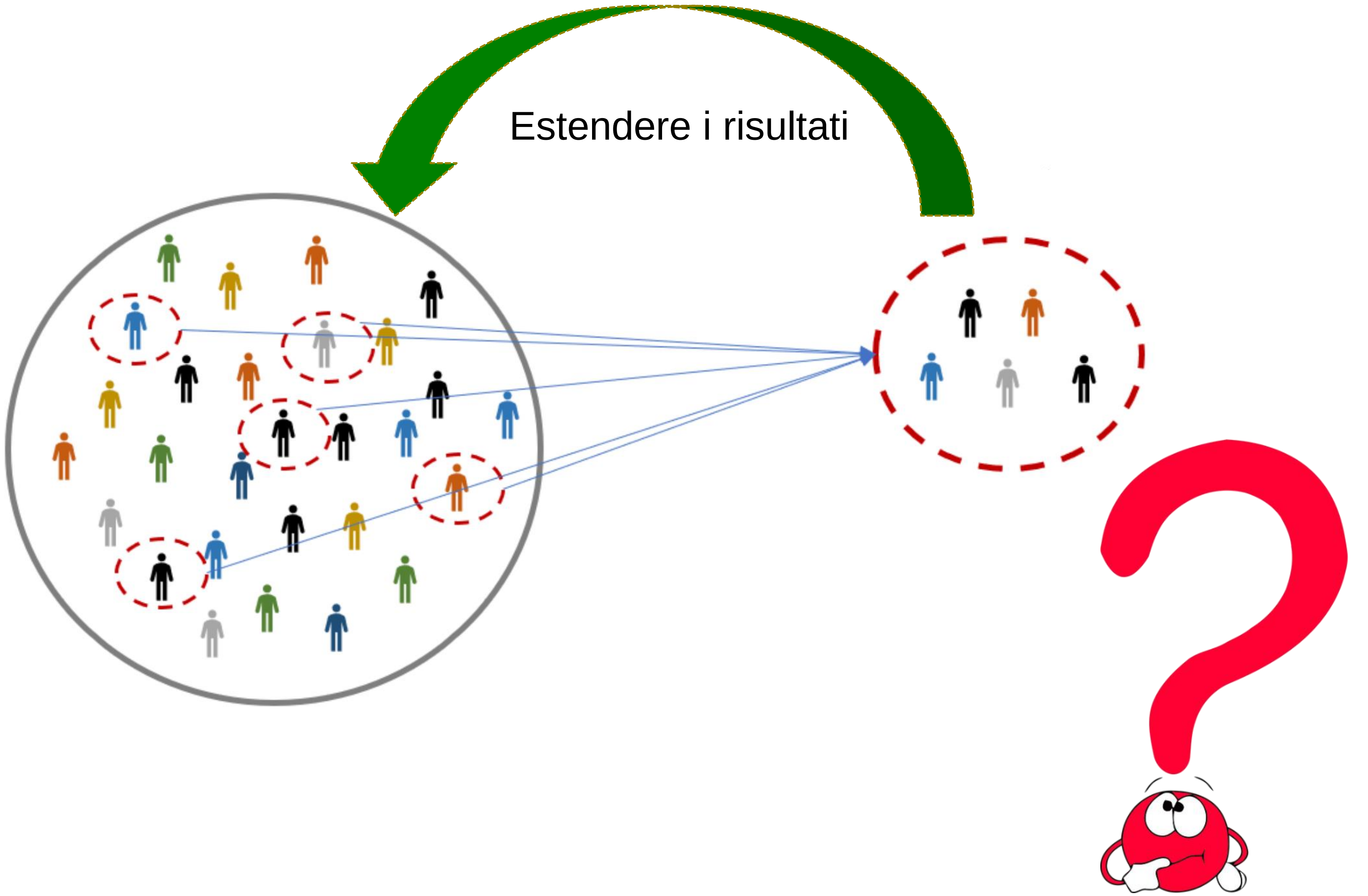
P-value

Capitolo a cura di
M.G. Grassia, M.Marino

L'Indagine campionaria



L’Indagine campionaria



Tecniche inferenziali

Tecniche inferenziali

Stima

Verifica di ipotesi

Il problema della **stima** e quello del **test delle ipotesi**, anche se simili, vanno tenuti distinti in quanto coinvolgono problematiche diverse:

- per la **stima**, i risultati ottenuti dal campione (evidenza campionaria) vengono utilizzati per stimare un'entità incognita relativa ad una certa popolazione
- per la **verifica delle ipotesi**, l'evidenza campionaria viene utilizzata per verificare statisticamente la validità di una certa assunzione (ipotesi) concernente una specifica entità incognita.

Tecniche inferenziali

Tecniche inferenziali

Stima

Verifica di ipotesi

Assegnare un valore o un insieme di valori ad un parametro incognito della popolazione sulla base delle informazioni provenienti da un campione.

Tecniche inferenziali

Tecniche inferenziali

Stima

L'evidenza campionaria viene utilizzata per stimare un'entità incognita relativa ad una certa popolazione

Tecniche inferenziali

Tecniche inferenziali

Stima

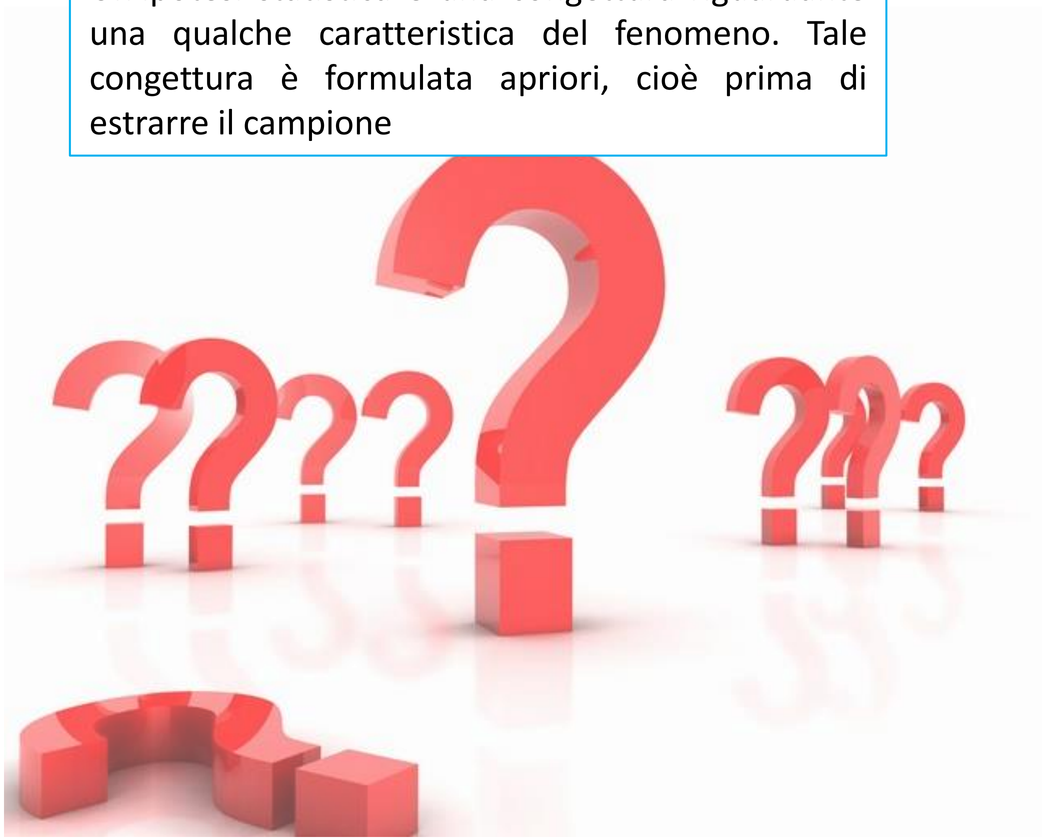
Verifica di ipotesi

L'evidenza campionaria viene utilizzata per verificare statisticamente la validità di una certa ipotesi che riguarda il parametro incognito

Ipotesi statistica

Ipotesi statistica

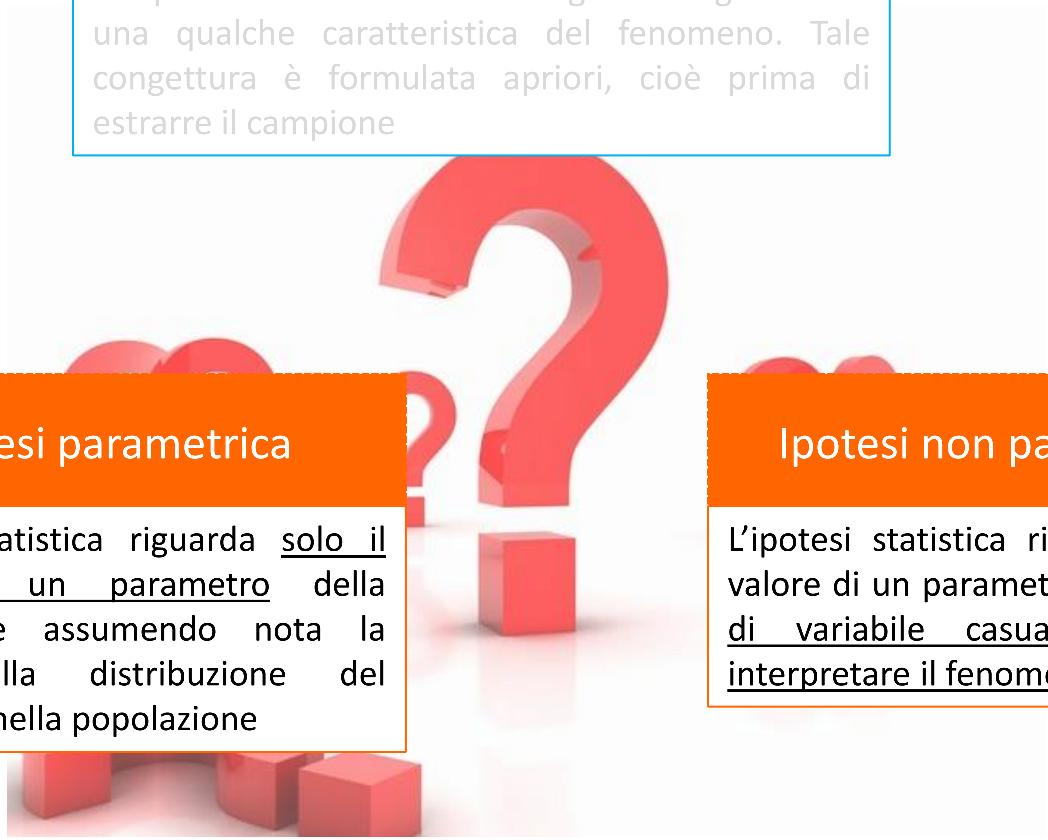
Un'ipotesi statistica è una congettura riguardante una qualche caratteristica del fenomeno. Tale congettura è formulata apriori, cioè prima di estrarre il campione



Ipotesi statistica

Ipotesi statistica

Un'ipotesi statistica è una congettura riguardante una qualche caratteristica del fenomeno. Tale congettura è formulata apriori, cioè prima di estrarre il campione



Ipotesi parametrica

L'ipotesi statistica riguarda solo il valore di un parametro della popolazione assumendo nota la forma della distribuzione del parametro nella popolazione

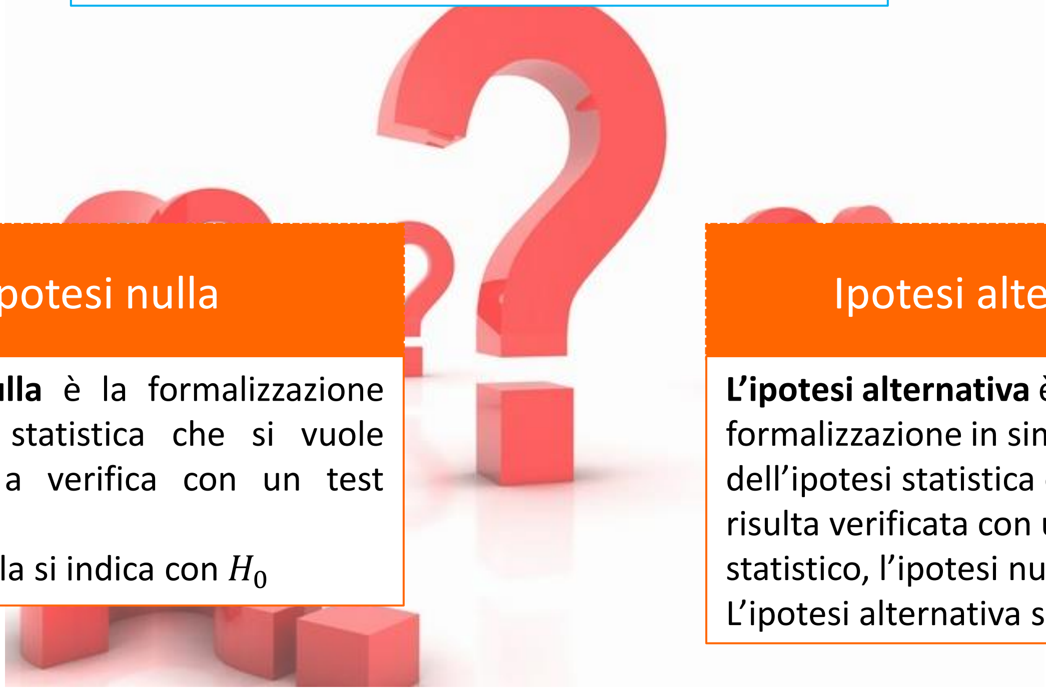
Ipotesi non parametrica

L'ipotesi statistica riguarda oltre al valore di un parametro, anche il tipo di variabile casuale adatta ad interpretare il fenomeno

Ipotesi statistica

Ipotesi statistica

Un'ipotesi statistica è una congettura riguardante una qualche caratteristica del fenomeno. Tale congettura è formulata apriori, cioè prima di estrarre il campione



Ipotesi nulla

L'ipotesi nulla è la formalizzazione dell'ipotesi statistica che si vuole sottoporre a verifica con un test statistico.
L'ipotesi nulla si indica con H_0

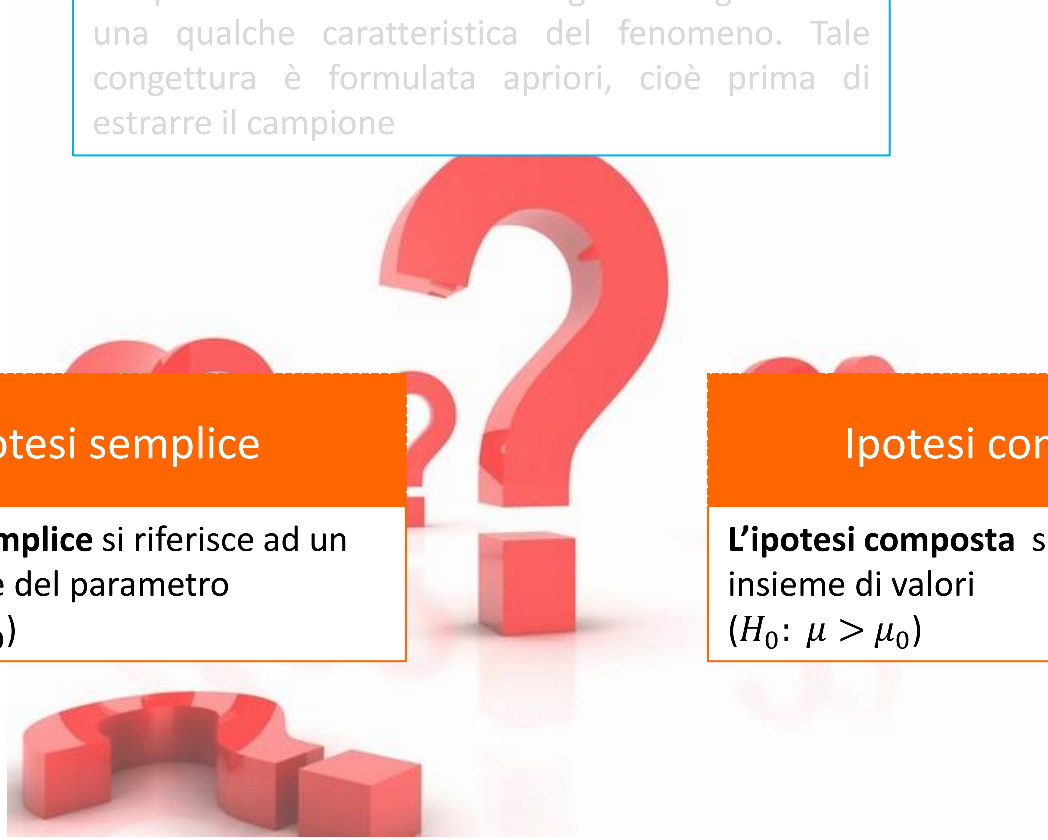
Ipotesi alternativa

L'ipotesi alternativa è la formalizzazione in simboli e formule dell'ipotesi statistica che vale, se non risulta verificata con un test statistico, l'ipotesi nulla.
L'ipotesi alternativa si indica con H_1

Ipotesi statistica

Ipotesi statistica

Un'ipotesi statistica è una congettura riguardante una qualche caratteristica del fenomeno. Tale congettura è formulata apriori, cioè prima di estrarre il campione



Ipotesi semplice

L'ipotesi semplice si riferisce ad un unico valore del parametro
(H_0: $\mu = \mu_0$)

Ipotesi composta

L'ipotesi composta si riferisce ad un insieme di valori
(H_0: $\mu > \mu_0$)

Ipotesi statistica

Le ipotesi possono essere :

- **Semplici**, si riferiscano ad un unico valore del parametro ($H_0\colon\ \mu = \mu_0$)
- **Composte**, si riferiscano ad un insieme di valori ($H_0\colon\ \mu > \mu_0$)

Per qualsiasi generico parametro θ (teta), le seguenti ipotesi sono **composte**:

$$\begin{cases} H_0\colon\ \theta > \theta_0 \\ H_0\colon\ \theta < \theta_0 \\ H_0\colon\ \theta \neq \theta_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H_1\colon\ \theta > \theta_0 \\ H_1\colon\ \theta < \theta_0 \\ H_1\colon\ \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

Di solito, l'ipotesi nulla è sempre semplice ($H_0\colon\ \theta = \theta_0$)

Un test si definisce

- **unilaterale** se l'ipotesi alternativa è composta ma del tipo $\mathrm{H}_1\colon\ \theta > \theta_0$ oppure $\mathrm{H}_1\colon\ \theta < \theta_0$
- **bilaterale** o **bidirezionale** se l'ipotesi alternativa è composta ma del tipo $H_1\colon\ \theta \neq \theta_0$

La verifica d'ipotesi

La verifica di ipotesi è *la metodologia inferenziale* che, a partire dai dati campionari, porta a decidere se rifiutare o meno l'ipotesi nulla H_0 , controllando probabilisticamente l'errore campionario

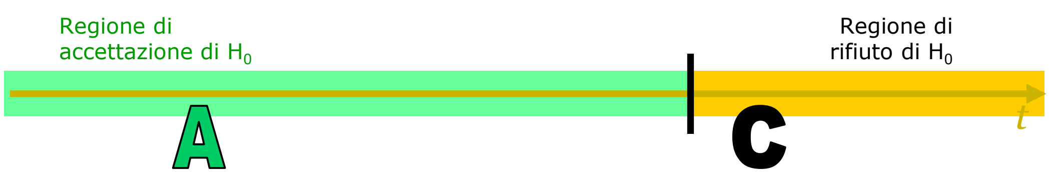
Un test di ipotesi statistiche è una regola attraverso la quale si decide se rifiutare o meno l'ipotesi nulla H_0, sulla base delle risultanze campionarie

Regione Critica e Regione di accettazione

- Un test statistico da quindi luogo alla ripartizione dello spazio campionario in due sottoinsiemi complementari: *un insieme A* costituito dai valori del test che sono compatibili con l'ipotesi nulla H_0, e *un insieme C* che raggruppa i valori del test considerati incompatibili con H_0.

- Quest'ultimo insieme è costituito dai valori del test che portano al **rifiuto di H_0** e viene definito la **regione critica** del test.

- Quando il valore campionario di t cade nella regione critica, l'evidenza empirica del fenomeno studiato porta a ritenere che l'ipotesi H_0 non possa essere considerata valida, e quindi che non possa essere accettata come vera.



Regione critica per un test statistico con ipotesi alternativa unidirezionale:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

Regione critica per un test statistico con ipotesi alternativa bidirezionale:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Errore campionario

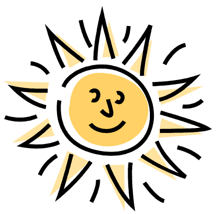
- Indipendentemente dalla regola adottata, il test porta sempre a dover scegliere tra due possibili decisioni, H_0 e H_1 e a poter commettere due possibili errori, rifiutare un'ipotesi vera oppure accettare un'ipotesi falsa.

Situazione vera

Decisione	H_0	H_1
H_0		*Accetto H_0 falsa* *Errore II tipo*
H_1	*Rifiuto H_0 vera* *Errore I tipo*	

- Quindi, la decisione deve considerare l'importanza relativa dei due diversi tipi di errore o, nell'ottica della *Teoria delle decisioni*, le diverse *funzioni di perdita*.
- Ipotizzando vera H_0, la regione critica associata (cioè la probabilità di rifiutare H_0) viene definita **livello di significatività** del test e indicata con α
- Accettare o rifiutare H_0 non può e non deve essere inteso come una dimostrazione della verità o meno di H_0 (altre ipotesi, diverse da H_0, possono essere accettate o rifiutate sulla base dello stesso campione) ma solo come una conclusione che l'evidenza empirica è favorevole o meno all'ipotesi nulla.

Errore campionario



		Stati della natura	
		Piove	Non piove
Decisione	Prendo l'ombrello	✓	Errore ↓ Porto inutilmente l'ombrello
	Non prendo l'ombrello	Errore ↓ Bagno il vestito nuovo e lo rovino	✓

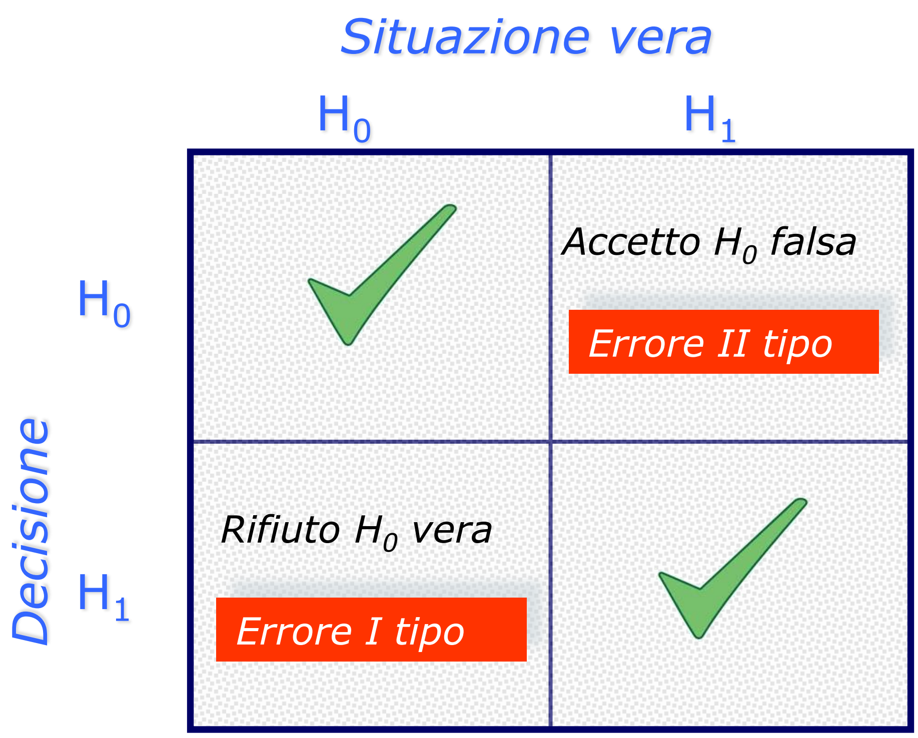
Errore campionario

Realtà

Decisione		Innocente	Colpevole
	Assoluzione	✓	Errore ↓ Assolvo un colpevole
	Condanna	Errore ↓ Condanno un innocente	✓

Errore campionario

Nel rifiutare o meno, sulla scorta dell'evidenza campionaria, una determinata ipotesi nulla, si può agire correttamente, e cioè non rifiutare un'ipotesi, quando essa è vera o rifiutare un'ipotesi, quando essa è falsa, oppure si possono commettere errori aventi diversa natura:



a) rifiutare un'ipotesi nulla quando essa è vera. Si parla in questo caso di **errore di I specie** o **di I tipo**

b) non rifiutare un'ipotesi nulla quando essa è falsa. Si parla in questo caso di **errore di II specie** o **di II tipo**

α e β

- Errore di I tipo: *(Rifiuto H_0 vera)* → $t(X) \in C \mid \theta \in \Theta_0$
  - P (Errore di I tipo): $P\left[t(X) \in C \mid \theta \in \Theta_0\right] = \alpha$

- Errore di II tipo: *(Accetto H_0 falsa)* → $t(X) \in A \mid \theta \in \Theta_1$
  - P (Errore di II tipo): $P\left[t(X) \in A \mid \theta \in \Theta_1\right] = \beta$

- Potenza del test *(Rifiuto H_0 falsa)* → $t(X) \in C \mid \theta \in \Theta_1$
  - $P\left[t(X) \in C \mid \theta \in \Theta_1\right] = 1 - \beta$

→ la potenza del test è la probabilità di fare la scelta giusta

α e β

- Non è possibile eliminare i due tipi di errore. E’ possibile solamente ridurre la loro frequenza al minimo e conoscere con precisione la probabilità con la quale avvengono.

- Solo conoscendo la probabilità di sbagliare, è possibile scegliere in modo corretto.

- La statistica è la scienza che permette di scegliere e prendere decisioni non perché immune da errori, ma perché fornisce la probabilità di errare, associata ad ogni scelta; quindi di conoscere il rischio che si corre, se la scelta si dimostrasse errata.

<u>Osservazioni:</u>

- Le probabilità α e β sono interdipendenti. Non è possibile minimizzare entrambe le probabilità d’errore.

- In genere, si fissa il livello di significatività (α) e si cerca il test che, a parità di α, presenta potenza (1- β) più elevata.

Statistica per le scienze sociali

Seconda edizione

Enrica Amaturo, Biagio Aragona, Maria Gabriella Grassia, Carlo Natale Lauro, Marina Marino