TEOREMA DI CRAMER

Siano $n \in \mathbb{N}^+$, $A \in \mathcal{M}_{nn}$, $\vec{b} \in \mathbb{V}^n$. $\rightarrow$

$\det A \neq 0 \implies \exists!\ \vec{x} \in \mathbb{V}^n : A\vec{x} = \vec{b}$

Prima della dimostrazione del teorema di Cramer sperimentiamo un tipo di ragionamento su una questione completamente diversa.

Vogliamo risolvere l'equazione in $x \in \mathbb{R}$:

$$2\sqrt{x^2 - 12} = x$$

cioe' vogliamo rispondere a tre domande:

1. Esistono numeri reali x che verificano l'uguaglianza?
2. In caso affermativo: quante sono?
3. In caso affermativo: quali sono?

Ragionamento (corretto oppure no?):

piove dall'Alto un suggerimento: "Proviamo a vedere se $x=4$ risolve $2\sqrt{x^2-12}=x$!"

$$2\sqrt{4^2-12}=4\ ?$$

$$2\sqrt{4^2-12}=2\sqrt{16-12}=2\sqrt{4}=2\cdot 2=4$$

$x=4$ ok!

Commenti su questo ragionamento:

PREGIO Abbiamo la risposta alla domanda ① : esistono soluzioni perché c'è almeno $x=4$.

DIFETTO 1 come possiamo procurarci un suggerimento in generale?

DIFETTO 2 non abbiamo la risposta alla domanda ② perché sappiamo soltanto che esiste ALMENO una soluzione, ma non sappiamo se ne esistono altre.

DIFETTO 3 abbiamo una risposta parziale alla domanda ③ perché conosciamo solo un valore di x.

Correzione del ragionamento: procuriamoci dapprima una condizione <u>necessaria</u> su x affinché risolva l'equazione. In altri termini, procuriamoci un suggerimento!

Non sappiamo ancora se esistono soluzioni, ma ragioniamo così:

SUPPONIAMO CHE x SIA UNA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE, quindi x verifica

(A) $$2\sqrt{x^2-12} = x$$

(B) $$4(x^2-12) = x^2$$

$$4x^2 - 48 = x^2$$

$$3x^2 = 48$$

$$x^2 = 16$$

$$x_1 = 4 \quad , \quad x_2 = -4$$

Dunque: se x è soluzione, allora x ha soltanto due possibilità, 4 e/o -4

Commento: NON abbiamo ancora la risposta alle tre domande, ma abbiamo due suggerimenti!

Proviamo $x = 4$ e scopriamo che risolve $2\sqrt{x^2-12} = x$

(lo abbiamo fatto prima!)

Proviamo $x = -4$ e scopriamo che NON risolve

$$2\sqrt{x^2-12} = x$$

Abbiamo le tre risposte!

① sí, esistono

② esiste una ed una sola soluzione : $x = 4$ (ogni altra $x \in \mathbb{R}$ non può verificare l'uguaglianza!)

③ $x = 4$

Come mai abbiamo avuto anche il suggerimento (sbagliato) $x = -4$?

Risposta: i passaggi non sono equivalenti! $(A) \Rightarrow (B)$ ma non $(B) \not\Rightarrow (A)$

DIM. DEL TEOREMA DI CRAMER:

Supponiamo che $\vec{x}$ sia una soluzione di $A\vec{x} = \vec{b}$, quindi $\vec{x}$ verifica

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Per ipotesi $\det A \neq 0$, quindi esiste A^{-1}. Moltiplichiamo ambo i membri a sinistra per A^{-1}:

$$A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b}$$
$$(A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$I_n\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$
$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Dunque: se $\vec{x}$ e' soluzione, allora $\vec{x}$ puo' essere soltanto il vettore $A^{-1}\vec{b}$.
Abbiamo la risposta alle domande ② e ③! Non abbiamo ancora la risposta alla domanda ① ma soprattutto abbiamo un suggerimento: "Proviamo a vedere se $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ risolve $A\vec{x} = \vec{b}$!".

$$A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I_n\vec{b} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \quad \underline{\text{OK}}\ !$$

Abbiamo avuto anche la risposta alla domanda ①, dunque esiste una ed una sola soluzione dell'equazione $A\vec{x} = \vec{b}$.