**Sistema lineare**

Fissati $n$, $m \in \mathbb{N}^+$, $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nm}$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{V}^n$, si dice sistema lineare di $n$ equazioni in $m$ incognite il problema di determinare, se esistono, tutti i vettori $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{V}^m$ tali che

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2\,, \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n\,. \end{cases} \tag{7.14}$$

La matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nm}$ prende il nome di **matrice dei coefficienti**,



il vettore $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{V}^m$ è il **vettore delle incognite** e il vettore $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{V}^n$ è il **vettore dei termini noti**.

**Teorema 7.92 ⇝ di Cramer**

*Se $n = m$, il sistema lineare (7.14) ammette un'unica soluzione per ogni $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ se e solo se $\det A \neq 0$. In questo caso la soluzione può essere calcolata con la regola*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}\,, \tag{7.16}$$

*dove $A_i \in \mathcal{M}_{nn}$, $i = 1, \ldots, n$, è la matrice ottenuta a partire da $A$ sostituendo alla $i$–esima colonna la colonna dei termini noti.*

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y = 11 \\ 4x+2y = 10 \end{cases}$$

(sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite)

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ e' la matrice dei coefficienti

Scrittura del sistema in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Poiche' $\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 12 = -8 \neq 0$, possiamo applicare il teorema di Cramer

Esempio:

$$\begin{cases} 2x+3y=11 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 10 & 2 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{22-30}{-8} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{20-44}{-8} = \frac{-24}{-8} = 3$$

$$\boxed{(x,y)=(1,3)}$$

$$\begin{cases} -x+y+5z=0 \\ x-4z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite.

Il numero di equazioni coincide con il numero di incognite, quindi FORSE possiamo applicare il teor. di Cramer.

Teor. di Cramer

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ matrice } n \times n \\ \boxed{\det A \neq 0} \\ \vec{b} \in \mathbb{V}^n \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!\ \vec{x} \in \mathbb{V}^n : A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$ ?

Calcoliamo il determinante di A considerando la seconda riga (perche' la seconda riga possiede uno zero e perche' non esistono righe con due zeri; ovviamente si potrebbe considerare anche la seconda colonna)

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4 \cdot (-2) = 4 - 8 = -4 \neq 0 \; !$$

POSSO APPLICARE IL TEOREMA DI CRAMER:

$\exists ! \; \vec{x} \in \mathbb{V}^3 : A\vec{x} = \vec{b}$

$\exists ! \; (x, y, z)$ verificante le tre equazioni del sistema.

$$\begin{cases} -x+y+5z=0 \\ x-4z=1 \\ x+y+z=3 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \det A=-4$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-13+5}{-4}=\frac{-8}{-4}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{-13+5\cdot 2}{-4}=\frac{3}{4}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\det A}=\frac{-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{-4}=\frac{1-2}{-4}=\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{RISPOSTA FINALE}} \\ \text{Esiste una ed una sola soluzione del sistema assegnato e risulta} \\ (x,y,z)=\left(2,\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right) \end{array}}$$

# RISOLUZIONE DEI SISTEMI LINEARI NEL CASO GENERALE

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A \in \mathcal{M}_{nm} \qquad \vec{b} \in \mathbb{V}^n \qquad \vec{x} \in \mathbb{V}^m$$

($n$ = numero di righe di $A$ = numero di equazioni, $m$ = numero di componenti di $\vec{x}$)

SITUAZIONE "FORTUNATA": $\boxed{n = m \text{ e contemporaneamente } \det A \neq 0}$

In questo caso si applica il teorema di Cramer che assicura esistenza e unicità della soluzione $\vec{x}$ e fornisce anche una espressione esplicita della soluzione $\vec{x}$.

SITUAZIONI "SFORTUNATE"

- $\rightarrow$ $n \neq m$
- $\rightarrow$ $n = m$ e contemporaneamente $\det A = 0$

In tutte le situazioni "sfortunate",

il teorema di Rouché-Capelli

risolve il problema dell'esistenza di soluzioni

la dimostrazione (che NON vediamo) determina quante soluzioni esistono (se ne esistono)

Quindi, nelle situazioni "sfortunate",

1) si applica il teor. di Rouché-Capelli per sapere se esistono soluzioni
(se non esistono, l'esercizio e' finito!)

2) se (purtroppo) esistono soluzioni bisogna applicare un procedimento (che vedremo tra poco)

VEDREMO:

- Teorema di Rouché-Capelli
- quante soluzioni ammette il sistema
- procedimento

$A$ (= "matrice dei coefficienti) e' anche detta "matrice incompleta"

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$ e' anche detta

"matrice completa"

$A\vec{x} = \vec{b}$ si dice "compatibile"
se ammette soluzioni;

si dice "incompatibile"
se non ammette soluzioni.

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI
(teor. 7.90 pag. 453)

$A\vec{x} = \vec{b}$ e' compatibile $\iff R(A) = R(A_b)$

QUANTE SOLUZIONI AMMETTE UN SISTEMA LINEARE COMPATIBILE?

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$A \in \mathcal{M}_{mn} \qquad \vec{b} \in V^m$$

Supponiamo $R(A) = R(A_b) = k$ (quindi, per il teor. di Rouché-Capelli, il sistema e' compatibile, cioe' esiste almeno una soluzione)

DUE EVENTUALITA'

$k = n$

$\boxed{\text{Il sistema ammette una ed una sola soluzione}}$

$k < n$

(non puo' capitare che $k > n$ perche' il rango di una matrice e' sicuramente $\leq$ minimo tra $n$ e $m$)

$\boxed{\text{Il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da } n-k \text{ parametri. Si suol dire che "il sistema ammette } \infty^{n-k} \text{ soluzioni"}}$

Se poniamo per convenzione $\infty^0 = 1$, possiamo affermare che in ogni caso il sistema ammette $\infty^{n-k}$ soluzioni.

# PROCEDIMENTO PER RISOLVERE I SISTEMI LINEARI COMPATIBILI

$A\vec{x} = \vec{b}$ $\quad A \in \mathcal{M}_{mn}$ $\quad \vec{b} \in \mathbb{V}^m$ $\quad R(A) = R(A_b) = k$

**PRIMO PASSO**: Si individua una (qualunque!) sottomatrice quadrata di $A$ di ordine $k$ con determinante $\neq 0$. Tale sottomatrice individua $k$ equazioni e $k$ incognite.

**SECONDO PASSO**: Le equazioni sono $m$, quindi se $k < m$ si cancellano le rimanenti $m-k$ equazioni; se $k=m$ non si cancellano equazioni.

**TERZO PASSO**: Le incognite sono $n$, quindi se $k < n$ le rimanenti $n-k$ incognite si portano al secondo membro e si considerano come parametri; se $k=n$ non si portano termini al secondo membro, non ci sono parametri perché la soluzione è unica.

SI OTTIENE IN QUESTO MODO UN SISTEMA LINEARE DI $k$ EQUAZIONI IN $k$ INCOGNITE, DA RISOLVERE CON IL TEOR. DI CRAMER.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x - 2y = 5 \end{cases}$$

2 equazioni, 2 incognite

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0$$

$$R(A) = 1$$

$$A_b = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 16 = -6 \neq 0$$

$$R(A_b) = 2$$

$R(A) \neq R(A_b) \Rightarrow$ il sistema non e' compatibile

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ x - z = -1 \\ x + t = 4 \end{cases}$$

3 equazioni, 4 incognite $(x, y, z, t)$

$m = 3$, $n = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_b = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ e' una sottomatrice diagonale di $A$ con $\det \neq 0$ $\Rightarrow R(A) = 3 \Rightarrow R(A_b) = 3$

(in questo caso!)

perche' in genere $R(A_b) \geq R(A)$ e non puo' accadere $R(A_b) > 3$

Il sistema e' compatibile.
Non ci sono equazioni da cancellare.
Si portano i termini contenenti $x$ al secondo membro

$$\begin{cases} -3y = -2x - 4 \\ -z = -x - 1 \\ t = -x + 4 \end{cases}$$

$$\left\{ \left(x, \tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3}, x+1, -x+4\right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} \boxed{2x+5y}+4z=3 \\ \boxed{x+2y}-z=2 \end{cases}$$

2 equazioni, 3 incognite (dunque no Cramer!)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left|\boxed{\begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{matrix}}\right| = -1 \neq 0 \quad R(A)=2$$

$R(A_b)=2$

$\Rightarrow$ il sistema e' compatibile (perche' $R(A)=R(A_b)$)

$$\begin{cases} 2x+5y=3-4z \\ x+2y=2+z \end{cases} \qquad x=\frac{\begin{vmatrix} 3-4z & 5 \\ 2+z & 2 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{2(3-4z)-5(2+z)}{-1}$$

$$=\dots=4+13z$$

$$y=\dots=-1-6z$$

L'insieme delle soluzioni del sistema

$\{(4+13z,-1-6z,z):z\in\mathbb{R}\}$ "$\infty^1$ soluzioni"