Programma del corso

Algebra II

a.a. 2024/2025

Prof. Marco Trombetti

Definizione di anello. Esempi di anelli: anello degli interi (modulo n); anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano; anello delle matrici di un anello; anello delle funzioni continue che sono 0 al di fuori di un intervallo limitato; anello dei polinomi. Regole di calcolo in un anello (teorema binomiale). Insieme degli elementi invertibili. Divisori destri e sinistri dello zero, e relazione con elementi cancellabili a destra e sinistra. Definizione di corpo, campo, anello integro, dominio di integrità. Elementi nilpotenti e relazione con divisori dello zero. Sottoanelli ed esempi. Non vale l'inverso di Lagrange per gli anelli. Gruppi abeliani sono sempre il gruppo additivo di un anello? Tutti i gruppi sono il gruppo degli invertibili di un anello?

Ideali (bilateri, destri, sinistri). Ideale generato. Ideali principali. Somma di ideali. Un anello è un corpo se e solo se gli unici ideali destri/sinistri sono quelli banali. Ideali massimali. Teorema di Krull e controesempio senza identità moltiplicativa. Ideali primi, nilpotenti, primari. Prodotto di ideali e relazione con ideali primi. Radicale di un ideale in anello commutativo: coincidenza di questo con l'intersezione degli ideali prima che lo contengono. Nilradicale e proprietà. Anello quoziente e proprietà. Caratterizzazione di ideali primi e massimali in termini di anello quoziente. Ideale di Jacobson, caratterizzazione e correlazione con il nilradicale. Omomorfismi di anelli e teoremi di omomorfismo per anelli. Kernel di un omomorfismo. Immersione di un anello non-unitario in uno unitario. Anello degli endomorfismi di un gruppo ciclico. Endomorfismi di $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{Q},+)$. Immersione di un anello nell'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano. Campo dei quozienti e relative proprietà. Caratteristica di un anello e proprietà. Sottoanello e sottocampo fondamentale.

Fattorizzazione in un dominio di integrità. Elementi associati e proprietà. Elementi irriducibili, primi, e riducibili. Primo implica irriducibile e viceversa non vale. Monoidi fattoriali e caratterizzazione con elementi primi. Esempi di monoidi regolari abeliani che soddisfano ad una ma non entrambe le proprietà di monoide fattoriale. Minimi comune multipli e massimi comun divisori con esempi e proprietà. Esistenza degli mcm e dei MCD. Caratterizzazione dei monoidi regolari abelian in termini di esistenza di MCD. Anelli fattoriali. PID e esempi di domini di integrità che non sono PID. Ogni PID è fattoriale. Equivalenza nei PID di: a primo; a irriducibile; (a) primo; (a) irriducibile. Minimo comune multiplo nei PID. Esempio di anello fattoriale che non è un PID. Domini Euclidei e definizione. Esempi di PID che non sono Euclidei. Ogni dominio Euclideo è un PID. Algoritmo delle divisioni successive. Esempio di dominio di integrità non fattoriale con tutti i MCD.

Definizione anello dei polinomi su un anello commutativo unitario, e proprietà (elementi invertibili). Divisione Euclidea per anello dei polinomi e conseguenze. Se un anello di polinomi è principale, allora l'anello di partenza è un campo. Se vale l'unicità della divisione euclidea, allora o il dominio Euclideo è un campo o un anello di polinomi. Lemma di Gauss. Se R è dominio di integrità fattoriale, allora $R[x]$ è fattoriale. Un polinomio su di un anello di polinomi su di un campo può essere fattorizzato essenzialmente in unico modo come prodotto di polinomi monici e un elemento invertibile. Se (x) è un ideale massimale nell'anello dei polinomi $R[x]$ dove R è dominio di integrità, allora R è un campo (ovviamente è sempre un ideale primo). Quoziente dell'anello dei polinomi su di un campo $K[x]$ con l'ideale generato da un polinomio di grado > 0. Radici di un polinomio, applicazioni polinomiali. Teorema di Ruffini e conseguenze. Principio di identità dei polinomi per domini di integrità infiniti e campi finiti, polinomio fondamentale. Radici multiple e polinomio derivato. Un polinomio su di un campo di grado al più 3 e non costante è irriducibile se e solo se non ha radici. Criterio di irriducibilità di Eisenstein e applicazioni al p-esimo polinomio ciclotomico.

Estensioni di campi. Sottoanello generato da un campo e un elemento. Estensioni semplici. Elementi algebrici e trascendenti e loro caratterizzazioni in termini di quozienti dell'anello dei polinomi. Polinomio minimo. Estensione semplice di un campo mediante una radice di un polinomio e unicità di questa estensione. Estensioni semplici transcendenti e unicità. Grado di un'estensione di campi. Teorema di moltiplicazione dei gradi. Estensioni algebriche. Ogni estensione finita è algebrica. Caratterizzazione estensioni finite. Transitività dell'estensioni algebriche. Chiusure algebriche. Campi di spezzamento: esistenza e unicità. Sottogruppo finito del gruppo moltiplicativo di un campo è ciclico. Numero delle radici dell'unità. Esistenza e unicità campi finiti e sottocampi. Endomorfismo di Frobenius e proprietà nel caso finito. Teorema di Wedderburn. Teorema fondamentale dell'algebra e conseguenza come polinomi irriducibili di $R[x]$. Campi algebricamente chiusi non sono finiti.

Definizioni dell'anello degli interi di Gauss, cioè $\mathbb{Z}[i]$. Dimostrazione che è Euclideo e del fatto che i suoi quozienti sono finiti. Estensioni quadratiche.

Testi integrativi

S. Franciosi – de Giovanni: *Elemeni di Algebra*, Aracne, Roma (1995).
M. Curzio – P. Longobardi – M. Maj: *Lezioni di Algebra*, Liguori (2014).