

Geometria  
gennaio 2025

nome, cognome	
matricola	

**Quesito 1.**

- Definisci cosa siano il nucleo e l'immagine di una funzione lineare  $f : V \rightarrow W$  tra due spazi vettoriali reali a dimensione finita, e dimostra che sono sottospazi vettoriali degli spazi (rispettivamente)  $V$  e  $W$ .
- Sia  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ , e sia definita la funzione  $f$  su  $\mathbb{R}^{2,2}$  da  $f(X) = AX$ .  
Dimostra che tale funzione è lineare.
- Analizza se tale funzione  $f$  sia iniettiva e/o suriettiva, al variare di  $a \in \mathbb{R}$ . Scrivi la matrice che rappresenta l'azione di  $f$  rispetto ad una base dello spazio  $\text{End}(\mathbb{R}^{2,2})$  a tua scelta.
- Analizza se tale funzione sia diagonalizzabile. Nel caso lo sia, determina una base di  $\mathbb{R}^{2,2}$  rispetto a cui l'azione di  $f$  sia diagonale.

**Quesito 2.**

- Data una matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , definisci cosa sia il polinomio caratteristico  $P_A(\lambda) \in \mathbb{R}_n[\lambda]$  associato ad essa, e dimostra che esso sia lo stesso per ogni matrice simile (coniugata) alla matrice  $A$ .
- Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$  con gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche. Analizza se le seguenti affermazioni siano vere o false, motivando brevemente la tua risposta.
  - (a)  $A, B$  hanno lo stesso rango;
  - (b)  $A$  è simile a  $B$ ;
  - (c)  $A$  e  $B$  hanno gli stessi autovettori;
  - (d)  $\det(A) = \det(B)$ .

**Quesito 3.**

- Definisci cosa sia un sistema lineare reale, ed enuncia il teorema di Rouché-Capelli.
- Considera il sistema lineare  $\Sigma$  nelle incognite  $(x, y, z)$  dato da

$$\begin{cases} ax + y - z = a \\ x + ay - z = 0 \\ y + az = 1 \end{cases}$$

- Determina lo spazio delle soluzioni  $S_a \subset \mathbb{R}^3$  di  $\Sigma$  al variare di  $a \in \mathbb{R}$ .
- Mostra che  $S_a$  è uno spazio affine, e determina lo spazio vettoriale  $V_a$  che lo modella.

**Quesito 4.**

- Definisci cosa sia una forma quadratica su uno spazio vettoriale reale a dimensione infinita, e cosa sia la sua matrice di Gram.
- Fissato uno spazio vettoriale reale  $V$  a dimensione finita 3, sia  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  una sua base, e sia  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una forma quadratica la cui matrice di Gram, rispetto alla base  $B$ , è data da

$$G = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Analizza il nucleo di  $g$ , e determina per quali valori di  $a \in \mathbb{R}$  la forma quadratica  $g$  sia degenere, e per quali sia non degenere.
- Analizza per quali valori di  $a$  la forma quadratica sia euclidea, e determina una base  $\tilde{B}$  di  $V$  ortogonale rispetto a  $g$ .
- Riesci a determinare una base di  $V$  che sia ortogonale rispetto a  $g$  anche nel caso in cui  $g$  sia non degenere ma non euclidea? E nel caso in cui  $g$  sia degenere?